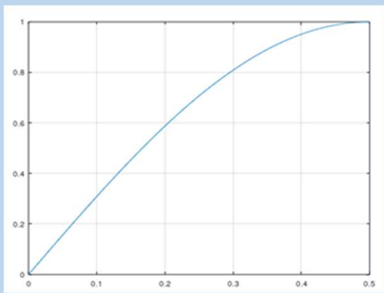
EJERCICIOS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Tabla de contenido

EJERCICIO 1- Integración de la función seno en ¼ del periodo



Sea la función $\boldsymbol{y = sen(\pi\, t)}$, cuya grafica se puede observar en la figura adjunta, en el rango de la variable independiente $\boldsymbol{t\ \varepsilon}\ [\boldsymbol{0}; \boldsymbol{2}]$. Para dicha función se sabe que el valor exacto de la integral definida es

$$\boldsymbol{I_{ex} = \int_0^{0.5} sen(\pi\, t)dt = 1/\pi \cong 0.3183}$$

Considerar las discretizaciones de la abscisa con N=10, 20, 40, 80 intervalos en el rango de integración y comprobar los resultados de la siguiente Tabla obtenidos con el método de Trapecios Múltiples

N	Δt	Im	IM	ITrap
10	0,05	0,2926551	0,34265512	0,31765512
20	0,025	0,3056462	0,33064624	0,31814624
40	0,0125	0,312019	0,32451898	0,31826898
80	0,00625	0,31517	0,32142	0,3183

Como se conoce la solución exacta $I_{ex} = \mathbf{1}/\pi$ es posible evaluar el error de la integración numérica de cada método. El error es el valor absoluto del valor aproximado menos el valor exacto; y se puede probar que tiene una dependencia exponencial con Δt en la forma

$$Er = C\ \Delta t^{p}$$

que aplicando logaritmo en ambos miembros resulta

$$\log(Er) = \log(C) + p\ \log(\Delta t)$$

El exponente p; pendiente de la relación lineal $(\log(\Delta t)\,;\,\log(Er))$ es el orden del Error, y es una medida de la velocidad de convergencia hacia la solución exacta, cuando se achica el Δt. Para la Suma de Riemann Im completar la siguiente Tabla, evaluando la pendiente tomando de a dos Δt

Δt	Im(Δt)	Er	Log (Δt)	Log(Er)	Pendiente
0,05	0,29265512	0,025655	-1,30103	-1,59083	
0,025	0,30564624	0,012664	-1,60206	-1,89744	1,018535
0,0125	0,31201898				
0,00625	0,31517				

Análogamente para el método de Trapecios Múltiple

Δt	ITrap(Δt)	Er	Log (Δt)	Log(Er)	Pendiente
0,05	0,31765512	0,000655	-1,30103	-3,18391	
0,025	0,31814624	0,000164	-1,60206	-3,78611	2,000445
0,0125	0,31826898				
0,00625	0,3183				

EJERCICIO 2- Integración de la función seno en ¼ del periodo con Método de Simpson Múltiple

El Método de Simpson Múltiple usa siempre un número par de intervalos; y calcula un valor aproximado con

```
ISim =0
for k=2: 2: N
   ISim= ISim +dt*(yg(k-1)+4*yg(k)+yg(k+1))/3;
end
```

Aplicar el método de Simpson Múltiple a la integral de la función y = sen(π t), en el rango de la variable independiente $t \, \varepsilon \, [0; 0{,}5]$; y completar la siguiente Tabla

N	Δt	ISim(Δt)	Er= abs(ISim(Δt)- $1/\pi$)	Log (Δt)	Log(Er)	Pendiente
4	0.125			-0,90309		
6	0,0833			-1,07918		3,8633
8	0.0625			-1,20412		4,015
12	0.0417			-1,38021		4,0063

Usar 8 decimales después de la coma; para lo cual en OCTAVE se usa *format long*

EJERCICIO 3- Integración de la función Exponencial

Usando Integración Numérica para calcular un valor aproximado de la integral definida

$$I = \int_0^{6/w} e^{-w\,t}\,dt = \frac{1}{w}\left(1 - e^{-6}\right)$$

Asumir w=2; con N=6; 12; 18; 24

Graficar el valor de la integral calculado con Trapecios Múltiple en función de N

Graficar el valor de la integral calculado con la Suma de Riemann en función de N

Comparar con el valor exacto

Asumir w=0.5; con N=6; 12; 18; 24

Graficar el valor de la integral calculado con Trapecios Múltiple en función de N

Graficar el valor de la integral calculado con la Suma de Riemann en función de N

Comparar con el valor exacto

Comparar si el valor de w incide en la convergencia

EJERCICIO 4- Integración de funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas tienen la propiedad de ortogonalidad, dado que se cumplen los siguientes resultados

$$I_{s2} = \int_0^{2\pi} \sin(k\vartheta)\sin(m\vartheta)\,d\vartheta = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2} & si\ k = m \neq 0 \\ 0 & si\ k = m = 0 \\ 0 & si\ k \neq m \end{cases}$$

$$I_{c2} = \int_0^{2\pi} \cos(k\vartheta)\cos(m\vartheta)\,d\vartheta = \begin{cases} \dfrac{2\pi}{2} & si\ k = m \neq 0 \\ 2\pi & si\ k = m = 0 \\ 0 & si\ k \neq m \end{cases}$$

$$I_{sc} = \int_0^{2\pi} \sin(k\vartheta)\cos(m\vartheta)\, d\vartheta = 0 \quad para\ todo\ k\ y\ m$$

a) Se considera una discretización de N=4 intervalos en el rango de integración $[0; 2\pi]$; y se tienen las siguientes versiones discretas de las funciones

$$\vartheta = [\,0;\ \ \frac{\pi}{2};\ \ \pi;\ \ 3\pi/2;\ \ 2\pi]$$

$$C\vartheta = [\,1;\ \ 0;\ -1;\ \ 0;\ \ 1]$$

$$S\vartheta = [\,0;\ \ 1;\ \ 0;\ -1;\ \ 0]$$

Al considerar la Suma de Riemann para calcular una aproximación de I_{sc} se tiene

$$I_{sc\_m} = \Delta\vartheta\,[0\ \ 1 + 1\ \ 0\ + 0\ \ (-1) + (-1)\ \ 0] = 0$$

Es oportuno destacar que, tal como es el planteo de la Suma de Riemann Im, participan los primeros cuatro valores de la función discreta para evaluar las áreas de los cuatro intervalos.

Al considerar el Método de Trapecios Múltiples para calcular una aproximación de I_{sc} se tiene

$$I_{sc_T} = \Delta\vartheta\left[\frac{0+1}{2} + \frac{1+\ 0}{2} + \frac{0\ +(-1)}{2} + \frac{(-1)+\ 0}{2}\right]$$

$$I_{sc\_T} = 0$$

donde participan los cinco valores de las funciones discretas.

b) Se considera una discretización de N=8 intervalos en el rango de integración $[0; 2\pi]$; y se tienen las siguientes versiones discretas de las funciones

$$\vartheta = [\,0;\ \ \frac{\pi}{4};\ \ \frac{\pi}{2};\ \ 3\frac{\pi}{4};\ \ \pi;\ \ 5\frac{\pi}{4};\ \ 3\frac{\pi}{2};\ \ 7\frac{\pi}{4};\ \ 2\pi]$$

$$C\vartheta = [\,1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ 0;\ \frac{-\sqrt{2}}{2}; -1;\ \frac{-\sqrt{2}}{2};\ \ 0;\ \frac{+\sqrt{2}}{2};\ \ 1]$$

$$S\vartheta = [\,0;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ 1;\ \frac{\sqrt{2}}{2};\ \ 0;\ \frac{-\sqrt{2}}{2};\ -1;\ \frac{-\sqrt{2}}{2};\ \ 0]$$

Nuevamente al calcular con la Suma de Riemann Im y con el método de los Trapecios Múltiples se obtienen valores nulos de la integral, y valen las mismas observaciones anteriores cuando el número de intervalos es N=4.

c) Realizar un programa en OCTAVE para considerar N=10; 20; 30 ;40 intervalos en el periodo y haciendo uso de Trapecios Múltiple; y de la Suma de Riemann Im, verificar los resultados anteriores.

d) Con el programa desarrollado verificar los siguientes resultados

$$I = \int_0^{2\pi} \sin(k\vartheta)\sin(m\vartheta)\,d\vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi}{2} & si\ k = m \neq 0 \\ 0 & si\ k = m = 0 \\ 0 & si\ k \neq m \end{cases}$$

$$I = \int_0^{2\pi} \cos(k\vartheta)\cos(m\vartheta)\,d\vartheta = \begin{cases} \frac{2\pi}{2} & si\ k = m \neq 0 \\ 2\pi & si\ k = m = 0 \\ 0 & si\ k \neq m \end{cases}$$

EJERCICIO 5- Obtención de la función Integral de $\boldsymbol{sen(\pi\, t)}$

Conocida la función $y = f(\mathbf{t})$, se busca la función su primitiva G(t), tal que

$$\boldsymbol{\frac{dG(t)}{dt} = f(t)}$$

o bien,

$$\boldsymbol{\int_{G(0)}^{G(t)} dG = \int_0^t f(\xi)\, d\xi}$$

$$\boldsymbol{G(t) = G(0) + \int_0^t f(\xi)\, d\xi}$$

Considerar $f(t) = sen(\pi\ t)$ y buscar su función primitiva G(t) sabiendo que para t=0 se cumple que G(0)= $\boldsymbol{\frac{-1}{\pi}}$. Considerando una discretización con N=5 intervalos en el segmento de $t \in [0; 0{,}5]$, la función G(t) tendrá una versión discreta dada por N+1 valores, a partir de la versión discreta de la función $(t) = sen(\pi\ t)$ dada por

$$\boldsymbol{tg} = \quad [0.00000 \quad 0.10000 \quad 0.20000 \quad 0.30000 \quad 0.40000 \quad 0.50000]$$

$$\boldsymbol{yg} = \boldsymbol{sen(\pi\, t)} = \quad [\,0.00000 \quad 0.30902 \quad 0.58779 \quad 0.80902 \quad 0.95106 \quad 1.00000]$$

Entonces la función primitiva se puede calcular usando el Método de Trapecios Múltiple mediante

$$\begin{Bmatrix} Gd(1) \\ Gd(2) \\ Gd(3) \\ Gd(4) \\ Gd(5) \\ Gd(6) \end{Bmatrix} = \left(\frac{\boldsymbol{-1}}{\boldsymbol{\pi}}\right) \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0.00 \\ 0.30902 \\ 0.58779 \\ 0.80902 \\ 0.95106 \\ 1.00 \end{Bmatrix}$$

a) Corroborar que el resultado anterior es equivalente a usar el siguiente algoritmo

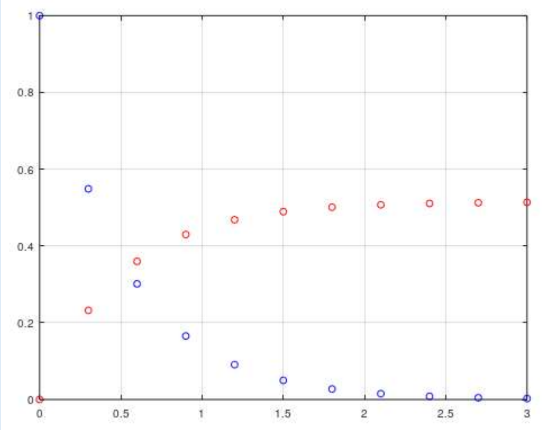
```
Gd(1)= -1/w; Trap=0;
 for k=1:N
   Trap=dt*(yg(k)+yg(k+1))/2;
   Gd(k+1)=Gd(k)+Trap
 end
```

b) Realizar un programa en OCTAVE que use N=200, y verificar la siguiente gráfica donde el azul se representa la versión discreta de la función $sen(\pi\, t)$ en un rango igual a un periodo; y en rojo, la versión discreta de su primitiva

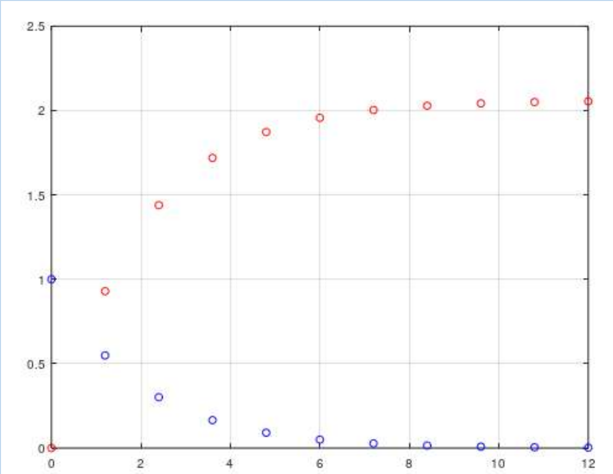
EJERCICIO 6- Obtención de la función Integral de $\boldsymbol{y(t) = e^{-pt}}$

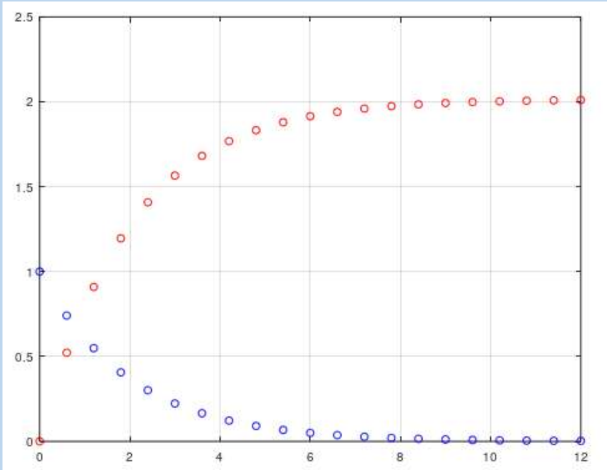
Conocida la función $y = e^{-pt}$, su primitiva G(t), tal que G(0)=0, cuando se lo resuelve analíticamente resulta igual a $G(t) = (\frac{1}{p})(1 - e^{-pt})$

Asumiendo p=2; hacer un programa en OCTAVE que permita verificar que con una discretización de N=10 se obtiene la gráfica adjunta.



Mientras que con p=0.5 y una discretización de N=10 se obtiene la siguiente gráfica que muestra que el valor en estado estacionario es superior al valor teórico 2.



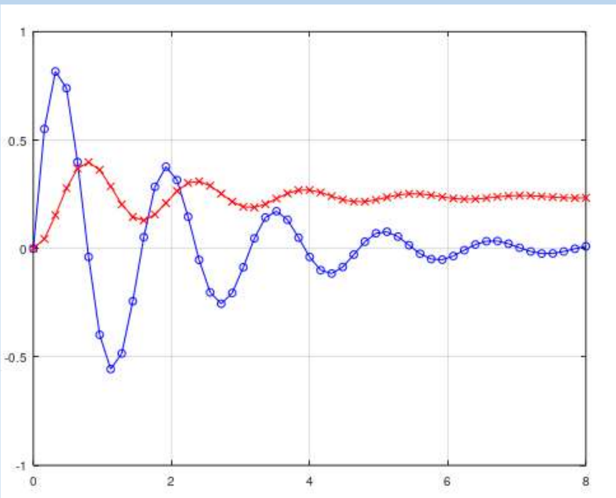


Cuando se toma N=20 la diferencia entre el valor de estado estacionario y el teórico disminuye, tal como se observa en la figura adjunta.

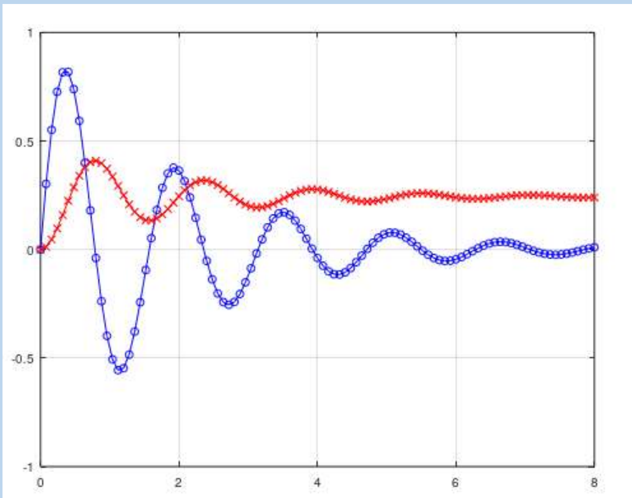
EJERCICIO 7- Obtención de la función Integral de $\boldsymbol{y(t) = e^{-pt} sin(w\, t)}$

Conocida la función $y(t) = e^{-pt}\sin(w\ t)$, obtener la función primitiva G(t), tal que G(0)=0.

Considerar p=0.5 y w=4, y usar el método de los Trapecios Múltiples, para obtener la G(t) en el rango de $t \in [0; 8]$ con N=50 y N=100



N=50



N=100

Notar la diferencia entre ambas aproximaciones para valores de t cercanos a 0.