CB051 - MODELACION NUMERICA

FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Trabajo Práctico

2° Cuatrimestre 2024

Propagación de una perturbación en un carril de circulación vehicular

Preparado por Federico Balzarotti

OBJETIVO

- Experimentar con el uso de métodos numéricos la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales.

CONSIDERACIONES GENERALES DEL INFORME

- El trabajo debe realizarse en grupos de entre 4 y 5 personas, sin excepción.

- El TP debe plasmarse en un informe escrito en formato de texto donde estén desarrollados todos los ítems pautados, gráficos, tablas, etc.

- Los cálculos podrán realizarse con Excel o cualquier otro software (Sugerencia: Matlab o Python). Los archivos de código o planilla de cálculo NO SON PARTE DEL INFORME. Estos se deberán entregar en un archivo aparte y la única función es ayudar a verificar los cálculos obtenidos, que deberán estar explicitados en el informe. Si se entregara únicamente un archivo Excel o un código de programación la nota será insuficiente e implicará tener que recursar la materia.

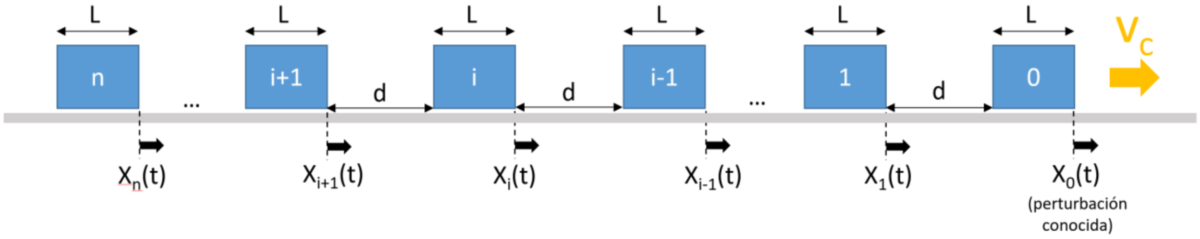
- La entrega del informe es por campus en formato pdf. Si hiciera falta, ambos archivos (informe + código) se pueden comprimir en uno solo en caso que el campus no los acepte por límite de tamaño.

- Luego de la corrección existe una única instancia de re-entrega para los grupos que se les haya indicado corregir algún aspecto del trabajo. La fecha de re-entrega se pautará posteriormente a la corrección.

PLANTEO DEL PROBLEMA

Este problema fue realizado en base al trabajo del divulgador Dr. Trefor Bazett, que se encuentra en el siguiente link: [The Problem of Traffic: A Mathematical Modeling Journey]
Si bien es altamente recomendable ver el video, tener en cuenta que la ecuación diferencial planteada en el video **no es estrictamente igual a la pautada en este trabajo**.

El problema plantea una hilera de **n** vehículos que viajan por un carril de circulación a velocidad de crucero $\mathbf{v_c}$. Cada vehículo tiene la misma masa **m** y longitud **L**. Se asume una distancia **d** entre vehículos consecutivos asociada a la velocidad de crucero.



Como hipótesis generales podrá asumirse:

- Movimientos únicamente a lo largo del carril (modelo unidimensional)
- Los vehículos no se pasan unos a otros

Cada conductor reaccionará acelerando o frenando en función de lo que ocurra con el vehículo delantero inmediato. Se asume una fuerza directamente proporcional a la velocidad relativa entre dos vehículos consecutivos e inversamente proporcional a la distancia entre dichos vehículos:

$$F_i = C\frac{v_i - v_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}$$

Donde *C* es una constante positiva conocida. El vehículo "i-1" es quien viajará adelante del vehículo "i". La aceleración de vehículo "i" se obtiene a partir de la Ley de Newton:

$$m.a_i = C\frac{v_i - v_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}$$

Renombrando la aceleración como derivada de la velocidad se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dv_i}{dt} = \frac{C}{m}\frac{v_i - v_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}$$

Separando variables e integrando a ambos lados:

$$\int_{v_c}^{v_i} dv_i = \int \frac{C}{m}\frac{v_i - v_{i-1}}{|x_i - x_{i-1}|}dt$$

Para este caso particular, en lugar de integrar respecto al tiempo se puede asociar el *dt* con la velocidad relativa, quedando un diferencial de posición relativa:

$$(v_i - v_{i-1})dt = d(x_i - x_{i-1})$$

Reemplazando e integrando analíticamente:

$$v_i - v_c = \frac{C}{m}\int_{-(L+d)}^{x_i - x_{i-1}} \frac{d(x_i - x_{i-1})}{|x_i - x_{i-1}|}$$

$$v_i - v_c = \frac{C}{m} \ln \left| \frac{x_i - x_{i-1}}{-(L+d)} \right|$$

Luego, para simplificar el análisis se define la coordenada z relativa al movimiento de la fila de vehículos que viajan a velocidad de crucero v_c:

$$z_i = x_i - v_c t$$

Derivando a ambos lados:

$$z_i{}' = v_i - v_c$$

Las constantes C y m se pueden resumir en una sola que nombraremos $\widetilde{C}$. Reemplazando en la ecuación diferencial las nuevas coordenadas, se obtiene para la variable z:

$$z_i{}' = \tilde{C} \ln \left| \frac{z_i - z_{i-1}}{-(L+d)} \right|$$

Para la situación estable deberá cumplirse la condición:

$$z_i - z_{i-1} = -(L+d)$$

y entonces:

$$z_i{}' = 0 \qquad \text{y} \qquad v_i = v_c$$

Es decir que al no existir una perturbación, la solución será la velocidad de crucero en cada vehículo. Las condiciones iniciales en términos de la coordenada z serán:

$$z_i(t=0) = -i(L+d)$$

El índice “i” toma valores entre 1 y n. Se utilizará el valor i=0 para el primer vehículo de la fila, que es quien provoca la perturbación. Esta última deberá modelarse en función del tiempo.

Ahora bien, para intentar reflejar la realidad lo mejor posible se incorporará un tiempo de retardo τ en la fuerza de reacción, asociado a los reflejos no instantáneos de los conductores. Entonces, el cambio de posición con respecto al tiempo deberá ocurrir un instante levemente posterior al tiempo t, es decir en $t + \tau$:

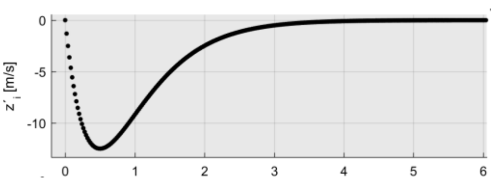
$$z_i{}'(t+\tau) = \tilde{C} \ln \left| \frac{z_i(t) - z_{i-1}(t)}{-(L+d)} \right|$$

En el caso del primer vehículo que reacciona (i=1), la ecuación diferencial queda expresada por:

$$z_1{}'(t+\tau) = \tilde{C} \ln \left| \frac{z_1(t) - z_0(t)}{-(L+d)} \right|$$

Queda proponer la función de perturbación $z_0(t)$. Esto se hará a partir de su velocidad $z_0{}'(t)$ mediante una forma tipo Gamma:

$$z_0{}'(t) = -k v_c t e^{\frac{t_1 - t}{t_1}}$$



Donde k es un factor que modera la intensidad de la perturbación y t_1 es el tiempo de mínima velocidad. En el grafico se ejemplifica una disminución de casi 15m/s en 0.5 segundos para luego retomar paulatinamente la velocidad de crucero. La posición $z_0(t)$ resulta de integrar la función anterior entre 0 y t:

$$z_0(t) = -kv_c t_1 e\ \left[t_1 - e^{-\frac{t}{t_1}}(t + t_1)\right]$$

Finalmente, la ecuación diferencial con tiempo de retardo τ se puede reescribir mediante la función partida:

$$z_i{}'(t) = \begin{cases} 0 & t \leq i.\tau \\ \tilde{C}\ \ln\left|\dfrac{z_i(t-\tau) - z_{i-1}(t-\tau)}{-(L+d)}\right| & t > i.\tau \end{cases}$$

Se obtuvo así un sistema de *n* ecuaciones diferenciales no lineales de 1° orden, sujeto a las condiciones iniciales de cada vehículo:

$$z_i(t=0) = -i(L+d)$$

Notar que la función partida de la ecuación diferencial tiene límites distintos acordes a cada vehículo "i".

DESARROLLO DEL PRÁCTICO

1) Discretizar la ecuación diferencial por el método de Euler (explicito) para el vehículo i. Analizar el paso *h* a considerar para resolver el problema. ¿Existe alguna limitación? Justificar. Para los datos particulares, obtener $z_i{}'(t)$ y $z_i(t)$ para todos los vehículos. Resolver en el rango de tiempo de 0 a 60 segundos.

NOTA: este problema no tiene solución analítica, con lo cual la solución que se obtenga no podrá ser validada. Sin embargo, podrá verificar el caso trivial acorde a una perturbación nula $z_0(t) = 0$, donde debería cumplirse que todos los vehículos sigan viajando a la velocidad de crucero v_c, o bien → $z_i(t) = -i(L+d)$.

2) Realizar UN gráfico con las velocidades superpuestas de los *n* vehículos $z_i{}'(t)$. Analizar los resultados. Calcular las velocidades máxima y mínima alcanzadas por cada vehículo durante la evolución de la frenada. Plasmar los resultados en una tabla con formato idéntico al de aquí a la derecha.

vehículo	vmin	vmax
0		
1		
…		
n		

3) Realizar UN gráfico con las posiciones superpuestas de los *n* vehículos $z_i(t)$. Para observar proximidades y posibles choques tener en cuenta las posiciones delanteras y traseras de cada vehículo. Lo más sencillo será graficar $z_i(t)$ y $z_i(t)$-L con un mismo color. Analizar los resultados.

La ESTETICA y CLARIDAD de la visualización son una parte altamente importante del trabajo.

4) Analizar si se produjo algún choque entre vehículos. Si así fue, indicar el par de vehículos involucrado. En caso contrario, agregar autos a la fila hasta observar el primer choque. Indicar el n° de vehículo y graficar todas las posiciones.

DATOS

Los datos del problema son: n, L, d, v_c, $\tilde{C}$, τ, t_1, k.
Un integrante de cada grupo deberá solicitar los datos a federico.balzarotti@gmail.com. Indicar en el mail el número de grupo que se asignó en la planilla del campus. Todos los datos estarán expresados en el sistema internacional (mks).

CONCLUSIONES

Presente sus conclusiones del trabajo práctico. Señalar conclusiones generales relevantes, sin superar la media carilla.

CRITERIOS ORIENTATIVOS PARA REDACTAR EL INFORME

Enfocarse en resolver lo que se pide y analizar los resultados obtenidos. Si hay algo que no es coherente en los resultados, mejor señalarlo.

No copiar el enunciado. Con redactar una breve síntesis es suficiente (media carilla).

Tiene que estar explicitada la discretización de la Ecuación diferencial. Si realizaron un código pueden extraer esa parte del código y pegarla prolijamente. La idea no es complicarse con el editor de ecuaciones.

Realizar los gráficos pedidos en base a la consigna. Es muy importante entender y acatar la consigna. Los gráficos deben tener una grilla equidistante con unidades en cada eje y colores que faciliten la rápida visualización y entendimiento.

Todos los resultados deberán estar analizados. Intente a la vez ser breve y conciso. Si se agregan tablas/gráficos y otros resultados, también deberán estar analizados.