

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 5. Sistemas lineales

5.1. Resuelve por la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Resuelve por Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 4 \\ -x + y - z = 2 \\ y - z = 3 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y + z = 3 \\ -x - y + z = 5 \\ y - z = 1 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y - z - w = 0 \\ x - y + z - w = 6 \\ x - w = 3 \\ 2x - y + z - 2w = 9 \\ 3x - 2y + 2z - 3w = 15 \end{array} \right\}$$

5.3. En el sistema siguiente, calcula el valor de  $m$  para que tenga alguna solución distinta de la trivial y resuélvelo para ese valor, por la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array} \right\}$$

5.4. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, por Cramer:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array} \right.$$

5.5. Discute por Rouché y resuelve, si es posible:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ x + y = 0 \\ ax + by = 0 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

5.6. Discute por Rouché y resuelve en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ y + z = b \\ (a^2 - b^2)z = a + b \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 2m \\ x - my + z = 0 \\ x + my + z = 2 \end{array} \right.$$

5.7. Un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y 3 pollos una moneda. Con 100 monedas queremos comprar 100 aves ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos podemos comprar?  
( **Problema de las 100 aves**, sacado del libro "Zhang Qiujiang Suanjing" s. V d.C.)

5.8. Dados dos vectores  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , se llama **producto escalar** de los vectores anteriores al número  $\sum_{k=1}^n x_k y_k = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ; la segunda parte de la igualdad es la notación que se usa.

a) Para los siguientes pares de vectores calcula sus respectivos productos escalares: 1)  $(7, 5)$  y  $(3, 3/2)$   
2)  $(1, 7, 2)$  y  $(3, \pi, 6/7)$  3)  $(1, 0, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1, 0)$ .

b) Si  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  ¿por qué  $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$  es la distancia que hay de  $\vec{x}$  a  $\vec{0}$ ?  
 ¿Por qué  $\sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle}$  es la distancia que hay de  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ ?

c) Dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  se llaman **ortogonales** si su producto escalar es cero. Encuentra dos vectores ortogonales en  $\mathbb{R}^2$ , otro par en  $\mathbb{R}^3$  y otro en  $\mathbb{R}^4$ . Dibuja cuando sea posible los pares de vectores.

d) Dados dos vectores  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , se llama **producto vectorial** de los vectores anteriores al vector de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left( \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

¿Por qué el vector  $\vec{x} \times \vec{y}$  es ortogonal a los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ .

5.9. Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x_1 = 2a + b + c - 1 \\ x_2 = -a - 2b + c + 2 \\ x_3 = a + 3b - 2c - 5 \\ x_4 = 4a - 2b + 6c + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - 3p + 2q \\ y = 2 + p + q \\ z = -2p + q \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 4\lambda + 2\mu \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

5.10. Demuestra que el sistema siguiente tiene solución única si  $abc \neq 0$ . Resuélvelo:

$$\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

5.11. Discute por Rouché:

$$\left. \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + y - 4z - t = 3 \end{cases} \right\} \quad \left. \begin{cases} (m+2)x + y + z = m-1 \\ mx + (m-1)y + z = m-1 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases} \right\} \quad \left. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \right\}$$

5.12. Discute por Rouché los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} 3y - ax + 2z = 2 \\ 2z + 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = a \\ ay + bz = b \\ az + bt = a^2 \\ bx + at = b^2 \end{cases}$$

5.13. ¿Cuál es la condición analítica para que el vector  $(1, 0, -1, 2)$  de  $\mathbb{R}^4$  tenga originales en la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , cuya matriz, respecto de las bases canónicas, es  $M$ . Halla todos sus originales.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.14. Calcula todos los originales del  $(2, 0, -2)$  en la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sabiendo que  $(2, 1, 0, -1)$  es uno de ellos y que la matriz de  $f$  respecto de las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$