Prueba nº 7 2º cuatrimestre

I. Sea f una aplicación lineal de $(V_3, +, \cdot, \mathbb{R})$ en sí mismo tal que $f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$; $f(\vec{u}_2) = -7\vec{u}_2 + \vec{u}_3$; $f(\vec{u}_3) = 2\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$

I a) Hallar la matriz de la aplicación f respecto de la base $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

* Directamente: Dado $\vec{v} \in V_3 \Rightarrow \exists x, y, z \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3$, ya que $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ es una base de V_3, además $[\vec{v}]_{B_1}$ = coordenadas de $\vec{v}$ respecto a la base B_1 es $[x, y, z]$ o en notación columna $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, aplicando f a $\vec{v}$, $f(\vec{v}) = f(x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 + z\vec{u}_3) = x f(\vec{u}_1) + y f(\vec{u}_2) + z f(\vec{u}_3)$, y sustituyendo $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)$ por su valor en la expresión:

$$f(\vec{v}) = x\underbrace{[2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3]}_{f(\vec{u}_1)} + y[-7\vec{u}_2 + \vec{u}_3] + z[2\vec{u}_1 + 6\vec{u}_2 - 2\vec{u}_3] =$$

$$= 2x\vec{u}_1 - x\vec{u}_2 - x\vec{u}_3 + (-7y)\vec{u}_2 + y\vec{u}_3 + 2z\vec{u}_1 + 6z\vec{u}_2 - 2z\vec{u}_3) =$$

$$(2x + 2z)\vec{u}_1 + (-x - 7y + 6z)\vec{u}_2 + (-x + y - 2z)\vec{u}_3 \Rightarrow \text{ que } f$$

actúa aplicando

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coordenadas de } \vec{v} \text{ respecto} \\ \text{a la base } B_1 \\ [\vec{v}]_{B_1}}} \longrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} 2x + 2z \\ -x - 7y + 6z \\ -x + y - 2z \end{bmatrix}}_{\substack{\text{coordenadas de } f(\vec{v}) \text{ respecto a la base} \\ B_1 : [f(\vec{v})]_{B_1}}} \Rightarrow [f(\vec{v})]_{B_1} = Mat_{B_1} [\vec{v}]_{B_1}$$

$$\begin{bmatrix} 2x + 2z \\ -x - 7y + 6z \\ -x + y - 2z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

en donde $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$ es la matriz de la aplicación f respecto a la base B_1.

* De forma inmediata: La matriz de f respecto a la base B_1 es la matriz

$$\left[f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3) \right]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{B_1}$$

en escritura de columna: $[f(\vec{u}_1)]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$; $[f(\vec{u}_2)]_{B_1} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $[f(\vec{u}_3)]_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Ib). Hallar el núcleo y la imagen de f:

* <u>Directamente</u>, mediante la definición de núcleo de f:

$\boxed{\text{I si}}$

$Kerf = \{\vec{v} \in V_3 \mid f(\vec{v}) = \vec{0}\}$, de donde

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} +2 & 0 & 2 \\ -1 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{array}{l} 2x + 2z = 0 \\ -x - 7y + 6z = 0 \\ -x + y - 2z = 0 \end{array}}$$ ecuaciones implícitas del núcleo

de donde obtenemos una base del Kerf

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ -1 & -7 & 6 & 0 \\ -1 & +1 & -2 & 0 \end{array} \overset{I^a/2}{\sim} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -7 & 6 & 0 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \end{array} \begin{array}{c} II^a + I^a \\ \widetilde{III^a + I^a} \end{array} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -7 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \overset{II^a/7}{\sim} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}$$

$$\underset{\sim}{III^a + II^a} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \overset{(-1)II^a}{\sim} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 1 & 0 & -z \\ 0 & 1 & +z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x = -z \\ y = z \\ z = z \end{array}$$

$$\vec{v} = (-z, z, z) = z(-1, 1, 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{v} \in Kerf \Leftrightarrow \vec{v} = (-z,z,z) = z(-1,1,1)$$

$Kerf = \{z(-1,1,1),\ \forall z \in \mathbb{R}\}$.

Para hallar la Imf, ~~se~~ ~~puede~~ podemos primeramente obtener una base de Imf teniendo en cuenta que $f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)$ es un sistema de generadores de Imf, si obtenemos el rango de $\{f(\vec{u}_1), f(\vec{u}_2), f(\vec{u}_3)\}$ se encuentra de dimf, y por ello se encuentra fácilmente una base:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -7 & 6 \\ -1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{I^a col.}{-III^a col.}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -7 & -7 & 6 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underset{\sim}{\overset{I^a col.}{-II^a col.}} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango de } Imf = 2 \Rightarrow$$

dimensión de Imf es $2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$ es una base de Imf, entonces

$$Imf = \{f(\vec{v}) \mid \forall \vec{v} \in V_3\} \equiv \{(x', y', z') = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} x' = 2\mu \\ y' = -7\lambda + 6\mu \\ z' = \lambda - 2\mu \end{array}\right\}$$ ecuaciones paramétricas de <u>Imf</u>.

(3)

* De forma inmediata. La aplicación f se puede representar mediante el esquema:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \underset{-\text{III}^a\text{col.}}{\overset{\text{I}^a\text{col}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} \underset{-\text{II}^a\text{col}}{\overset{\text{I}^a\text{col}}{\sim}} \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix} \to \text{Ker} f = \{\lambda(1,-1,-1)\}$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\begin{bmatrix}2&0&2\\-1&-7&6\\-1&1&-2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&0&2\\-7&-7&6\\1&1&-2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}0&0&2\\0&-7&6\\0&1&-2\end{bmatrix} \to \text{Im} f = \{\lambda(0,-7,1) + \mu(2,6,-2)\}$$

II. Dada la aplicación lineal f definida entre los espacios vectoriales $(\mathbb{R}^3,+,\cdot,\mathbb{R})$ y $(\mathbb{R}^2,+,\cdot,\mathbb{R})$ mediante la fórmula $f(x,y,z) = (x-y+z, 2x-z)$.

IIa) Calcula la matriz asociada a f respecto a la base canónica.

Recordar que la base canónica en $\mathbb{R}^3$, es $\{(1,0,0); (0,1,0)$ y $(0,0,1)\}$ y en $\mathbb{R}^2$ es $\{(1,0), (0,1)\}$. entonces si $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \Rightarrow (x,y,z) = x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)$

$\Rightarrow [(x,y,z)]_{B_c} = (x,y,z)$ – es decir el vector (x,y,z) de $\mathbb{R}^3$ coincide con las coordenadas de él respecto a la base canónica;

$f[(x,y,z)] = f[x(1,0,0) + y(0,1,0) + z(0,0,1)] = x f(1,0,0) + y f(0,1,0) + z f(0,0,1) = \left[f(1,0,0); f(0,1,0); f(0,0,1)\right]\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$

* $f(1,0,0) = (1-0+0, 2\cdot1-0) = (1,2) \in \mathbb{R}^2$, $(1,2) = 1(1,0) + 2(0,1) \Rightarrow [(1,2)]_{B_c} = (1,2)$

* $f(0,1,0) = (0-1+0, 2\cdot0-0) = [(-1,0)]_{B_c} \equiv (-1,0)$

* $f(0,0,1) = (0-0+1, 2\cdot0-1) = (1,-1) \equiv [(1,-1)]_{B_c} = (1,-1) \equiv \underline{(1,-1)}$

$\Rightarrow f(x,y,z) = \begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$ donde $\begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}$ es la matriz asociada a f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$.

Nota. La aplicación de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ dada por la fórmula (4)

IIa) sigue

$f(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x-z)$ se puede expresar matricialmente así

$$f(x,y,z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$, mediante la matriz

$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ que coincide con la matriz asociada a f respecto a la base canónica (de $\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2$), lo cual es por la característica especial de la base canónica que hace coincidir el vector $\vec{v} = (x,y,z)$ con las coordenadas de ~~de~~ ese vector respecto a la base canónica.

II b) Calcular Ker f, y estudiar si f es inyectiva.

* <u>Cálculo directo</u>: $\operatorname{Ker} f = \{(x,y,z) \mid f(x,y,z) = \vec{0} \in \mathbb{R}^2\}$

$\Rightarrow (x,y,z) \in \operatorname{Ker} f \Leftrightarrow f(x,y,z) = (x-y+z,\ 2x-z) = \vec{0} = (0,0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x-z=0 \end{array}\right\} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{II-2I} \left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow y - \frac{3}{2}z = 0 \Rightarrow y = +\frac{3}{2}z$; $x-y+z=0$ $\quad x-y=-z$

$x - \frac{3}{2}z = -z \Rightarrow x = \frac{3}{2}z - z = \frac{1}{2}z \Rightarrow (x,y,z) = \left(\frac{1}{2}z, \frac{3}{2}z, z\right) \Rightarrow$

Si hacemos $z = 2\lambda$
$y = 3\lambda$ $\quad \Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{(\lambda, 3\lambda, 2\lambda) \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$
$x = \lambda$

$\Rightarrow$ Núcleo de $f \neq \vec{0}$, o sea f <u>no es inyectiva</u>, así por ejemplo

$$\left.\begin{array}{l} f(0,0,0) = (0,0) \\ f(1,3,2) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{array}\right\} \quad \boxed{\begin{array}{l} f(0,0,0) = f(1,3,2) \\ \text{pero } (0,0,0) \neq (1,3,2) \end{array}}$$

II b) sigue

* Otro método más rápido (inmediato).

La matriz asociada a f respecto a la base canónica da el esquema siguiente:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}1&-1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}\end{array} \underset{\sim}{\begin{array}{c}\text{I col}\\ +\text{II col.}\end{array}} \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0&-1&1\\2&0&-1\end{bmatrix}\end{array} \underset{\sim}{\left\{\begin{array}{c}\text{II col}+\\ \text{III col.}\end{array}\right.} \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}0&0&1\\2&-1&-1\end{bmatrix}\end{array} \underset{\sim}{\begin{array}{c}\text{I col}\\ +2\,\text{II col}\end{array}}$$

Núcleo de f

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}\boxed{\begin{matrix}1\\3\\2\end{matrix}}&\begin{matrix}0&0\\1&0\\1&1\end{matrix}\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}\begin{matrix}0\\0\end{matrix}&\boxed{\begin{matrix}0&1\\-1&-1\end{matrix}}\end{bmatrix}\end{array} \to \operatorname{Im} f.$$

$$\Rightarrow \operatorname{Ker} f = \{\lambda(1,3,2) \mid \forall \lambda \in \mathbb{R}\}$$

III. Sean las aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ tales que $f(-1,1)=(-2,1,-2)$; $f(2,1)=(1,1,4)$; $g(1,1,2)=(4,1,1,7)$; $g(-1,0,-2)=$ $=(-3,0,-2,-7)$ y $g(3,2,0)=(11,2,-2,-3)$.

III 1) Halla la matriz de la aplicación $(g\circ f)$ respecto a las bases canónicas.

* Método rápido:

- Se trata de la composición de aplicaciones

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{g} \mathbb{R}^4, \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{(g\circ f)}$$

por ello hay que studiar la matriz de la aplicación f (respecto a las bases canónicas) y la matriz de la aplicación g (respecto a las bases canónicas), y teniendo en cuenta que la matriz de la aplicación $(g\circ f)$ es el producto de ambas matrices, según el orden fijado, se tiene la matriz de $(g\circ f)$. También se puede hallar directamente la matriz de $(g\circ f)$ usando la definición de composición de aplicaciones.

III a) sigue

Analizamos por tanto f, que según ~~de~~ el enunciado del problema actúa esquemáticamente así: (6)

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \downarrow\ \ \downarrow \\ \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\end{array}$$

, que no da la matriz de f respecto a las bases canónicas $\{(1,0);(0,1)\}$ para $\mathbb{R}^2$, y $\{(1,0,0);(0,1,0);(0,0,1)\}$ para $\mathbb{R}^3$, sino que es la matriz relativa a la base $\{(-1,1),(2,1)\}$ y a la base canónica de $\mathbb{R}^3$. Se trata de transformar la matriz $\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ en la matriz $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \begin{bmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\\ -2 & 4\end{bmatrix}\end{array} \underset{\sim}{\overset{\text{I}^{\text{a}}\text{ columna} - \text{II}^{\text{a}}\text{ columna}}{}} \begin{array}{c}\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \downarrow\ \ \downarrow \\ \begin{bmatrix}-3 & 1\\ 0 & 1\\ -6 & 4\end{bmatrix}\end{array} \underset{\sim}{\overset{\text{I}^{\text{a}}\text{ columna}/(-3)}{}} \begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \downarrow\ \ \downarrow \\ \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}\end{array} \underset{\sim}{\overset{\text{II}^{\text{a}}\text{ columna} - 2\,\text{I}^{\text{a}}\text{ columna}}{}}$$

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\\ \hline \downarrow\ \ \downarrow \\ \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}\end{array}$$

, es decir la matriz de f respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ es $\boxed{M(f)_{B_c} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 0\end{bmatrix}}$

Para la aplicación $g: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, según el enunciado del problema, su acción es la siguiente:

$$\begin{array}{c}\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}\\ \hline \downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow \\ \begin{bmatrix}4 & -3 & 11\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & -2 & -2\\ 7 & -7 & -3\end{bmatrix}\end{array}$$

que no da la matriz de g respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$, sino respecto a la base $\{(1,1,2);(-1,0,-2);(3,2,0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ y de la base canónica de $\mathbb{R}^4$, para obtener la matriz relativa a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ debemos transformar la matriz $\begin{bmatrix}1 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -2 & 0\end{bmatrix}$ en la matriz $\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$, como en el caso de f.

Veamos.

III a) sigue

$$\begin{bmatrix}1&-1&3\\1&0&2\\2&-2&0\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l}\text{II}^a\text{ col} + \text{I}^a\text{ col}\\ \text{III}^a\text{ columna} - 3\,\text{I}^a\text{ colum.}\end{array} \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&-1\\2&0&-6\end{bmatrix} \quad \text{III}^a\text{ col} + \text{II}^a\text{ col} \sim \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&-6\end{bmatrix} \sim$$

$$\begin{bmatrix}4&-3&11\\1&0&2\\1&-2&-2\\7&-7&-3\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4&1&-1\\1&1&-1\\1&-1&-5\\7&0&-24\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}4&1&0\\1&1&0\\1&-1&-6\\7&0&-24\end{bmatrix}$$

$$\text{III}^a\text{ columna} : (-6) \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix} \quad \begin{array}{l}\text{I}^a\text{ col} - \text{II}^a\text{ col}\\ \text{I}^a\text{ col} - 2\,\text{III}^a\text{ col}\end{array} \quad \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}4&1&0\\1&1&0\\1&-1&1\\7&0&4\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\-1&0&4\end{bmatrix}$$

, de donde $\begin{bmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\-1&0&4\end{bmatrix}$ es la matriz de g respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$

de donde

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "(g\circ f)"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "g"] & \mathbb{R}^4 \end{tikzcd}$$

$$\text{matriz de } (g\circ f) = \underbrace{\begin{bmatrix}3&1&0\\0&1&0\\0&-1&1\\-1&0&4\end{bmatrix}}_{\text{matriz de } g \text{ (bases canónicas)}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\\2&0\end{bmatrix}}_{\text{matriz de } f \text{ (bases canónicas)}} = \underbrace{\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\\2&-1\\7&1\end{bmatrix}}_{\text{matriz de } (g\circ f) \text{ (bases canónicas)}}$$

$\begin{bmatrix}3&-2\\0&1\\2&-1\\7&1\end{bmatrix}$ matriz de $(g\circ f)$ respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

* Metodo directo. Se trata de hallar la matriz de $(g\circ f)$ directamente: $\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(g\circ f)} \mathbb{R}^4$:

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \; (g\circ f) \text{ bases canónicas}$$
$$\begin{bmatrix}\boxed{?}&\boxed{?}\end{bmatrix}$$

$(g\circ f)[(1,0)] = g[f(1,0)]$, como f viene definido en función de la base $\{(-1,1)$ y $(2,1)\}$ $\Rightarrow$ debemos expresar $(1,0) = \alpha(-1,1) + \beta(2,1)$ o también hallar la inversa de $\begin{bmatrix}-1&2\\1&1\end{bmatrix}$;

$$\left.\begin{array}{l}1 = -\alpha + 2\beta\\ 0 = \alpha + \beta\end{array}\right\} \; 3\beta = 1;\; \beta = \tfrac{1}{3};\quad 0 = \alpha + \tfrac{1}{3} \Rightarrow \alpha = -\tfrac{1}{3}$$

$$\Rightarrow f((1,0)) = f\left(-\tfrac{1}{3}(-1,1) + \tfrac{1}{3}(2,1)\right) = -\tfrac{1}{3} f(-1,1) + \tfrac{1}{3} f(2,1) \Rightarrow$$

III a) sigue

$$f[(1,0)] = -\frac{1}{3}(-2,1,-2)+\frac{1}{3}(1,1,4) = \left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}, \frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)$$ (8)

$\Rightarrow f[(1,0)] = (1,0,2)$; de donde $(g\circ f)(1,0) = g[(1,0,2)]$; pero como g viene definido mediante la base $\{(1,1,2); (-1,0,-2); (3,2,0)\}$ debemos expresar $(1,0,2)$ mediante la base, lo cual es trivial ya que

$$(1,0,2) = 0\cdot(1,1,2)+(-1)(-1,0,-2)+0\cdot(3,2,0) \Rightarrow$$

$$g[(1,0,2)] = 0\,g(1,1,2)+(-1)g(-1,0,-2)+0\cdot g(3,2,0) =$$

$$= -(-3,0,-2,-7) = (3,0,2,7) \text{ es decir } (g\circ f)(1,0) = \begin{bmatrix}3\\0\\2\\7\end{bmatrix}$$

Por otro lado, $(g\circ f)[(0,1)] = g[f(0,1)]$, expresando $(0,1)$ en función de $\{(-1,1),(2,1)\}$ resulta $(0,1) = \alpha_1(-1,1)+\beta_1(2,1)$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}-\alpha_1+2\beta_1=0\\ \alpha_1+\beta_1=1\end{matrix}\right\} 3\beta_1=1;\ \beta_1=\tfrac{1}{3};\ \alpha_1=1-\beta_1=1-\tfrac{1}{3}=\tfrac{2}{3} \Rightarrow$$

$$(0,1)=\frac{2}{3}(-1,1)+\frac{1}{3}(2,1) \Rightarrow f[(0,1)] = \frac{2}{3}f[(-1,1)]+\frac{1}{3}f[(2,1)] =$$

$$= \tfrac{2}{3}f(-1,1)+\tfrac{1}{3}f(2,1) = \tfrac{2}{3}(-2,1,-2)+\tfrac{1}{3}(1,1,4) = \left(-\frac{4}{3}+\frac{1}{3}; \frac{2}{3}+\frac{1}{3}, -\frac{4}{3}+\frac{4}{3}\right)$$

$= (-1,1,0)$, de donde $(g\circ f)[(0,1)] = g[f(0,1)] = g[(-1,1,0)]$

pero como g viene definido mediante la base de $\mathbb{R}^3$ $\{(1,1,2); (-1,0,-2); (3,2,0)\}$ debemos expresar $(-1,1,0)$ mediante esta base: $(-1,1,0) = \bar\alpha(1,1,2)+\bar\beta(-1,0,-2)+\bar\gamma(3,2,0)$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix}\bar\alpha-\bar\beta+3\bar\gamma=-1\\ \bar\alpha\quad+2\bar\gamma=1\\ 2\bar\alpha-2\bar\beta\quad=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix}0+3\bar\gamma=-1;\ \boxed{\bar\gamma=-\tfrac{1}{3}}\\ \bar\alpha=1-2\bar\gamma=\boxed{\tfrac{5}{3}}\\ \bar\alpha=\bar\beta\quad \boxed{\bar\beta=\tfrac{5}{3}}\end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix}(-1,1,0)=\tfrac{5}{3}(1,1,2)\\ +\tfrac{5}{3}(-1,0,-2)-\tfrac{1}{3}(3,2,0)\end{matrix}$$

$$\Rightarrow g[(-1,1,0)] = g\left[\tfrac{5}{3}(1,1,2)+\tfrac{5}{3}(-1,0,-2)-\tfrac{1}{3}(3,2,0)\right] =$$

$$= \tfrac{5}{3}g(1,1,2)+\tfrac{5}{3}g(-1,0,-2)-\tfrac{1}{3}g(3,2,0) = \tfrac{5}{3}(4,1,1,7)+\tfrac{5}{3}(-3,0,-2,-7)$$

$$-\tfrac{1}{3}(11,2,-2,-3) = \left(\frac{20}{3}-\frac{15}{3}-\frac{11}{3}, \frac{5}{3}-\frac{2}{3}, \frac{5}{3}-\frac{10}{3}+\frac{2}{3}, \frac{35}{3}-\frac{35}{3}+\frac{3}{3}\right) = (-2,1,-1,1)$$

de donde $(g\circ f)[(0,1)] = \begin{bmatrix}-2\\1\\-2\\1\end{bmatrix}$, es decir la matriz buscada es:

III a, 6 jun

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$, que coincide con la obtenida antes

matriz de $(g \circ f)$

<u>Nota</u> También se puede calcular la matriz de $(g \circ f)$ respecto a las bases canónicas multiplicando las siguientes matrices:

* $C_{B_c}^{B_1}$ ≡ matriz que permite pasar de la base canónica a la base $B_1 = \{(-1,1), (2,1)\}$ (en la que aparece definida la función f) $\equiv \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$ (hay que calcularlo)

* $M_{B_1}^{B_2}(f)$ ≡ matriz de la aplicación f respecto a la base B_1 de $\mathbb{R}^2$ y B_c la base canónica de $\mathbb{R}^3$, que es un dato del problema: $M_{B_1}^{B_c}(f) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

* $\bar{C}_{B_c}^{B_2}$ ≡ matriz que permite pasar de la base canónica a la base $B_2 = \{(1,1,2); (-1,0,-2); (3,2,0)\}$ (que permite definir g.

$$\equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} -2/3 & 1 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/6 \\ 1/3 & 0 & -1/6 \end{bmatrix}$$

* $M_{B_2}^{B_c}(g)$ ≡ matriz de la aplicación g respecto a la base B_2 de $\mathbb{R}^3$ y la B_c (base canónica) de $\mathbb{R}^4$. es $\equiv \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 7 & -7 & -3 \end{bmatrix}$ *

* $M_{B_c}^{B_c}(g \circ f)$ = matriz de la aplicación $(g \circ f)$ respecto a las bases canónicas de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ ⇒

$$M_{B_c}^{B_c}(g \circ f) = M_{B_2}^{B_c}(g) \cdot \bar{C}_{B_c}^{B_2} \cdot M_{B_1}^{B_c}(f) \cdot C_{B_c}^{B_1} \equiv \begin{bmatrix} 4 & -3 & 11 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & -2 \\ 7 & -7 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2/3 & 1 & 1/3 \\ -2/3 & 1 & -1/6 \\ 1/3 & 0 & 1/6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \cdot$$

sigue →

$$\cdot \begin{bmatrix} -1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}$$ *

III b) El núcleo de $(g\circ f)$ y su dimensión.

Si usamos la matriz de $(g\circ f)$ obtenida en el apartado anterior, expresamos la ecuación de la ~~transformación~~ aplicación lineal

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow[(g\circ f)]{} \mathbb{R}^4 \iff (g\circ f)(\vec{v}) \equiv \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$. entonces

es $\operatorname{Ker}(g\circ f) = \{ \vec{v} \mid (g\circ f)\vec{v} = \vec{0} \} \Rightarrow \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, entonces

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x - 2y = 0 \\ y = 0 \\ 2x - y = 0 \\ 7x + y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = 0 \quad \boxed{\operatorname{Ker}(g\circ f) = \{(0,0)\}}$$

entonces la dimensión de $\operatorname{Ker}(g\circ f)$ es cero.

IV. Teniendo en cuenta el problema anterior.

α) Las ecuaciones de $(g\circ f)$. Las hemos calculado en el apartado anterior:

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(g\circ f)} \mathbb{R}^4$$

$$\vec{v} \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} = \left[(g\circ f)(\vec{v})\right] \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \\ 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ t' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{matrix} x' = 3x - 2y \\ y' = y \\ z' = 2x - y \\ t' = 7x + y \end{matrix}\right. \quad \Big| \text{ Ecuaciones de } (g\circ f)$$

β) La imagen $(g\circ f)$:

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{(g\circ f)} \mathbb{R}^4 \Rightarrow \{(g\circ f)(1,0); (g\circ f)(0,1)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im}(g\circ f)$; $\Rightarrow (g\circ f)(1,0) = (3,0,2,7)$ y $(g\circ f)(0,1) = (-2,1,-1,1) \Rightarrow \{(3,0,2,7); (-2,1,-1,1)\}$ es un sistema de generadores de $\operatorname{Im}(g\circ f)$, como rango de $\{(3,0,2,7); (-2,1,-1,1)\}$ es 2, es decir $\{(3,0,2,7); (-2,1,-1,1)\}$ es una base de $\operatorname{Im}(g\circ f) \Rightarrow \operatorname{Im}(g\circ f) = \{(x,y,z,t) = \lambda(3,0,2,7) + \mu(-2,1,-1,1)\}$

$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 3\lambda - 2\mu & ; & z = 2\lambda - \mu \\ y = \mu & & t = 7\lambda + \mu \end{matrix}\right.$ ecuaciones paramétricas de $\operatorname{Im}(g\circ f)$.