MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

3. Aplicaciones lineales

3.1. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, son lineales:

a) $f(x,y) = (0,y,0)$ c) $f(x,y) = (2x+y, 0, 2y+x)$
b) $f(x,y) = (x, x+y, x-y)$ d) $f(x,y) = (x+y, 2)$

3.2. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de $(\mathbb{R}^3, +, .\mathbb{R})$ en sí mismo, son lineales:

a) $f(x,y,z) = (3x, 4y, 5z)$ c) $f(x,y,z) = (2x-y, 2y-z, 2z-x)$
b) $f(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$ d) $f(x,y,z) = (x, -y, z+1)$

3.3. Sea f un aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ tal que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} - 3\overrightarrow{v_3}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = -\overrightarrow{v_1} + 4\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}$, siendo $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ las correspondientes bases. Halla la imagen del vector $\overrightarrow{u} = (2,-1)$.

3.4. Calcula la matriz asociada a la aplicación lineal f definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$ por $f(x,y,z) = (x-y+z, 2x-z)$ respecto de las bases canónicas.

3.5. Se considera la aplicación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ que está dada por $f(x,y) = (x+y, -y, y-x)$. Halla, respecto de las bases canónicas:
a) La matriz asociada.
b) Las ecuaciones de la aplicación.
c) Una base del núcleo.
d) La dimensión del núcleo.
e) Una base de la imagen.
f) El rango de la aplicación.
g) Comprueba la fórmula $n = \dim \text{ Ker } f + \dim Imf$

3.6. Se dice que un vector $\overrightarrow{u}$ es invariante por una aplicación lineal f si verifica que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u}$. Halla todos los vectores invariantes por las aplicaciones lineales de los apartados a), b), c) del ejercicio 3.2.

3.7. Halla todos los vectores que verifican la igualdad $f(\overrightarrow{u}) = \lambda\overrightarrow{u}$, para algún escalar λ, para las aplicaciones lineales de los apartados a), b) c) del ejercicio 3.2.

3.8. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $(V_3, +, .\mathbb{R})$ y $(V_4, +, .\mathbb{R})$ tal que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} - 2\overrightarrow{v_4}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_3}$, $f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_4}$, donde $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ son las bases correspondientes. Halla:
a) La imagen del vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} - 2\overrightarrow{u_3}$.
b) La matriz de la aplicación lineal.

c) El núcleo y el rango de la aplicación lineal.
d) ¿ Qué vectores $\overrightarrow{u}$ verifican $f(\overrightarrow{u}) = -\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4}$?

3.9. Sea f la aplicación lineal de $(V_3, +, .\mathbb{R})$ en sí mismo, tal que $f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = 2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2}$, $f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3}$, donde $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ son dos bases de V_3. Halla:
a) La matriz de la aplicación lineal.
b) La dimensión de Ker f y el rango de la aplicación.
c) Las ecuaciones de la aplicación y la imagen del vector $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$.
d) ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva?

3.10. Sea f una aplicación lineal de $(V_3, +, .\mathbb{R})$ en sí mismo, tal que $f(\overrightarrow{u_1}) = 2\overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_2} - \overrightarrow{u_3}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = -7\overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{u_3}$, $f(\overrightarrow{u_3}) = 3\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_3}$, donde $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ es una base de dicho espacio. Halla la matriz de la aplicación lineal f respecto de la base $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}\}$ donde $\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} - \overrightarrow{u_3}$, $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$, $\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{u_3}$.

3.11. Sean f y g dos aplicaciones lineales de $(V_2, +, .\mathbb{R})$ en sí mismo, tales que $f(\overrightarrow{u_1}) = 2\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{e_2}$, $f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_2}$, $g(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{v_1} - 3\overrightarrow{v_2}$, $g(\overrightarrow{e_2}) = 2\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$, siendo $\{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$, $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$, $\{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ tres bases del espacio vectorial. Halla:
a) La matriz de la aplicación $g \circ f$.
b) El núcleo y la imagen de $g \circ f$.
c) La imagen del vector $\overrightarrow{u} = 5\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2}$.
d) Las ecuaciones de la composición.

3.12. Sean f y g las aplicaciones lineales definidas de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ y de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^4$ tales que $f(-1, 1) = (-2, 1, -2)$, $f(2, 1) = (1, 1, 4)$, $g(1, 1, 2) = (4, 1, 1, 7)$ $g(-1, 0, -2) = (-3, 0, -2, -7)$, $g(3, 2, 0) = (11, 2, -2, -3)$. Halla:
a) La matriz de la aplicación $g \circ f$ respecto de las bases canónicas.
b) La dimensión del núcleo de $g \circ f$.
c) El rango y las ecuaciones de $g \circ f$.

3.13. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ tal que

$$f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_3} + \overrightarrow{v_4}, \qquad f(\overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3}, \qquad f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_4},$$

donde $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ son las bases de los espacios vectoriales. Halla:
a) La matriz de la aplicación lineal.
b) El núcleo de la aplicación.
c) El rango.

3.14. Halla la matriz de la aplicación lineal definida entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ por

$$f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + 2\overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_4}, \qquad f(\overrightarrow{u_3}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + 3\overrightarrow{v_3},$$

donde $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ son las bases y se sabe además que el vector $\overrightarrow{u_2}$ pertenece al núcleo. Halla una base de Imf.

3.15. Sea f la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^4$ tal que repecto de las bases $B_1 = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y $B_2 = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}, \overrightarrow{v_4}\}$ su matriz asociada es $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$. Se eligen unas nuevas bases $B_3 = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\}$ y $B_4 = = \{\overrightarrow{w_1}, \overrightarrow{w_2}, \overrightarrow{w_3}, \overrightarrow{w_4}\}$ donde

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2} \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} - \overrightarrow{v_4} \\ \overrightarrow{w_2} = \qquad -\overrightarrow{v_2} - \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{w_3} = \overrightarrow{v_1} \qquad - \overrightarrow{v_3} \\ \overrightarrow{w_4} = \overrightarrow{v_1} \end{array} \right.$$

Halla la matriz de la aplicación lineal f :
a) Cuando se consideran las bases B_1 y B_4.
b) Con relación a B_3 y B_2.
c) Respecto de B_3 y B_4.

3.16. Se define la aplicación $T : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ del siguiente modo $T(f) = \int_a^b f(t)dt, \forall f \in C([a,b])$. Prueba que T es una aplicación lineal. Dado $n \in \mathbb{N}$ encuentra n funciones linealmente independientes pertenecientes al núcleo de la aplicación.