SOLUCIONES PARA LA PRUEBA nº 9 (2º cuatrimestre).

1a) Calcula el determinante de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

Teniendo en cuenta las propiedades de los determinantes podemos hacer las siguientes operaciones

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} \underset{4^{a}\text{ col}-1^{a}\text{ col}}{\overset{2^{a}\text{ col}-1^{a}\text{ col.}}{\overline{\overline{3^{a}\text{ col}-1^{a}\text{ col.}}}}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a & d-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 & d^2-a^2 \\ a^3 & b^3-a^3 & c^3-a^3 & d^3-a^3 \end{vmatrix},$$

recordando que $\beta^2-\alpha^2=(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)$; $\beta^3-\alpha^3=(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)$ tenemos

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & (b-a) & (c-a) & (d-a) \\ a^2 & (b-a)(b+a) & (c-a)(c+a) & (d-a)(d+a) \\ a^3 & (b-a)(b^2+ab+a^2) & (c-a)(c^2+ac+a^2) & (d-a)(d^2+ad+a^2) \end{vmatrix} \underset{(c-a)\ (d-a)}{\overset{\text{Sacando fuera}}{\overline{\overline{(b-a)}}}} (d-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 1 \\ a^2 & (b+a) & (c+a) & (d+a) \\ a^3 & (b^2+ab+a^2) & (c^2+ac+a^2) & (d^2+ad+a^2) \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{[desarrollando por la 1ª FILA]}}{=} (d-a)(c-a)(b-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+a & c+a & d+a \\ b^2+ab+a^2 & c^2+ac+a^2 & d^2+ad+a^2 \end{vmatrix} \underset{3^{a}\text{ col}-1^{a}\text{ col}}{\overset{2^{a}\text{ col}-1^{a}\text{ col}}{=}} (d-a)(c-a)(b-a) \cdot$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (b+a) & (c+\cancel{a})-(b+\cancel{a}) & (d+\cancel{a})-(b+\cancel{a}) \\ (b^2+ab+a^2) & (c^2+ac+\cancel{a^2})-(b^2+ab+\cancel{a^2}) & (d^2+ad+a^2)-(b^2+ab+a^2) \end{vmatrix} = (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (b+a) & (c-b) & (d-b) \\ (b^2+ab+a^2) & c^2+ac-b^2-ab & d^2+ad-b^2-ab \end{vmatrix} =$$

$$= (d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ (b+a) & \boxed{(c-b)} & \boxed{(d-b)} \\ (b^2+ab+a^2) & \boxed{(c-b)}(c+b+a) & \boxed{(d-b)}(d+b+a) \end{vmatrix}$$

Sacando fuera $(c-b)$; $(d-b)$

$$= (d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b+a & 1 & 1 \\ b^2+ab+a^2 & (c+b+a) & (d+b+a) \end{vmatrix} =$$

$$(d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(b-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c+b+a & d+b+a \end{vmatrix} = (d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(b-a)\left[d+b+a-(c+b+a)\right]$$

1a) sigue

$\Rightarrow D = (d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(b-a)(d-c)$, es decir el determinante pedido

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = \boxed{(d-c)(d-b)(c-b)(d-a)(c-a)(b-a)}$$

---

1 b) Demuestra la igualdad

$$\begin{vmatrix} x & a & d & f \\ x & x & b & e \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-b)(x-c)$$

Aplicando las propiedades de los determinantes, y distinguiendo el caso $x=0$, de $x \neq 0$, tendríamos:

Si $x=0$

$$\begin{vmatrix} 0 & a & d & f \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ ; pero } 0(-a)(-b)(-c) = 0 \text{ es } x(x-a)(x-b)(x-c) \text{ para } x=0$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{vmatrix} 0 & a & d & f \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 = 0(0-a)(0-b)(0-c)}$$

es decir, es verdad para $x=0$

Si $x \neq 0$, podemos sacar factor común x, en la 1ª columna

$$\begin{vmatrix} x & a & d & f \\ x & x & b & e \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & a & d & f \\ 1 & x & b & e \\ 1 & x & x & c \\ 1 & x & x & x \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^aC-(1^aC)a \\ 3^aC-(1^aC)\cdot d \\ 4^aC-(1^aC)\cdot f \end{matrix} \; x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & (x-a) & (b-d) & (e-f) \\ 1 & (x-a) & (x-d) & (c-f) \\ 1 & (x-a) & (x-d) & (x-f) \end{vmatrix}$$

$$= x \cdot \begin{vmatrix} x-a & (b-d) & (e-f) \\ x-a & (x-d) & (c-f) \\ x-a & (x-d) & (x-f) \end{vmatrix} = x(x-a) \begin{vmatrix} 1 & (b-d) & (e-f) \\ 1 & (x-d) & (c-f) \\ 1 & (x-d) & (x-f) \end{vmatrix} \begin{matrix} 2^aF-1^aF \\ 3^aF-1^aF \end{matrix}$$

$$= x(x-a) \begin{vmatrix} 1 & (b-d) & (e-f) \\ 0 & (x-d)-(b-d) & (c-f)-(e-f) \\ 0 & (x-d)-(b-d) & (x-f)-(e-f) \end{vmatrix} = x(x-a) \begin{vmatrix} x-\cancel{d}-b+\cancel{d} & c-\cancel{f}-e+\cancel{f} \\ x-\cancel{d}-b+\cancel{d} & x-\cancel{f}-e+\cancel{f} \end{vmatrix} =$$

IIb) sigue

$$= x(x-a)\begin{vmatrix} x-b & c-e \\ x-b & x-e \end{vmatrix} = x(x-a)(x-b)\begin{vmatrix} 1 & c-e \\ 1 & x-e \end{vmatrix} =$$

↑ factor común

$$= x(x-a)(x-b)\left[(x-\cancel{e})-(c-\cancel{e})\right] = \boxed{x(x-a)(x-b)(x-c)}$$ que es lo que queríamos demostrar.

IIa) Demuestra sin desarrollar que es nulo el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & (2a-b) \\ b & c & a & (2b-c) \\ c & a & b & (2c-a) \end{vmatrix}$$

1ª col. 2ª col

; si analizamos la ~~columna~~ columna cuarta:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2a-b \\ 2b-c \\ 2c-a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2a \\ 2b \\ 2c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \\ a \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ b \\ c \\ a \end{bmatrix}$$

, tenemos que la 4ª columna es una combinación lineal de la 1ª columna ~~más~~ y la 2ª columna, pero si en un determinante una columna es combinación lineal de otras columnas el determinante es nulo, que es lo que queríamos demostrar.

IIIb) Demuestra sin desarrollar el determinante la siguiente igualdad $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ 2a & 2b & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)^3$; si a la 1ª columna le sumamos la 2ª columna menos 2 veces la ~~tercera~~ 3ª columna tendríamos:

$$\begin{vmatrix} a^2+b^2-2ab & b^2 & ab \\ 2a+2b-2a-2b & 2b & a+b \\ 2-2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a-b)^2 & b^2 & ab \\ 0 & 2b & a+b \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (a-b)^2\begin{vmatrix} 2b & a+b \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= (a-b)^2\left[2b-(a+b)\right] = (a-b)^2(b-a) = (b-a)^2(b-a) =$$

$= (b-a)^3$, ya que $(a-b)^2 = (b-a)^2$, que es lo que queríamos demostrar.

III a). Halla la matriz inversa A^{-1} de la siguiente matriz usando determinantes (si la hay)

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Hay matriz inversa A^{-1} si y sólo si el determinante de A es distinto de cero: $|A| \neq 0$, veamos

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (3-56+0)-(-6+7+0) = -53-1=-54$$

es decir $|A| = -54 \neq 0$. Existe A^{-1}, que es igual a

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj(A))^t \quad ; \quad Adj(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; & -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} ; & \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, & -\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 7 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} ; & -\begin{vmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}, & \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -9 & -2 \\ -7 & 9 & 14 \\ -25 & 9 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow (Adj(A))^t = \begin{bmatrix} 1 & -9 & -2 \\ -7 & 9 & 14 \\ -25 & 9 & -4 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & -7 & -25 \\ -9 & 9 & 9 \\ -2 & 14 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t =$$

$$= \frac{-1}{54}\begin{bmatrix} 1 & -7 & -25 \\ -9 & 9 & 9 \\ -2 & 14 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{54} & \frac{7}{54} & \frac{25}{54} \\ \frac{9}{54} & -\frac{9}{54} & -\frac{9}{54} \\ +\frac{2}{54} & -\frac{14}{54} & \frac{4}{54} \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -\frac{1}{54} & \frac{7}{54} & \frac{25}{54} \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{27} & -\frac{7}{27} & \frac{2}{27} \end{bmatrix}}$$

$$= A^{-1}$$

III b) Calcular el rango de la matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & 0 & -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$; podemos suprimir la columna 4ª pues

$$rg(B) = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & -2 & 2 & 10 \end{bmatrix}$$; además la 1ª columna + 2ª columna = 5ª columna $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

III, sigue

de donde

$$\text{rango}(B) = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -5 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & -2 & 2 & 10 \end{bmatrix} = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 6 & -2 & 10 \end{bmatrix}$$

5ª col = 1ª col + 2ª col

como no se nos aparece alguna relación simple entre las columnas, podemos aplicar el método de cálculo del rango por determinantes:

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} -3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 5 & -5 & 6 \\ 6 & 6 & 10 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

1) Tomamos el menor 2x2: $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango$(B) \geq 2$.

2) orlamos (3ª c., 3ª F)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (+5-2+6) - (-3+10+2) = 9-9=0$$

como el determinante es nulo tenemos que seguir orlando (4ª columna, 3ª F)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} = (-5+1+2) - (-1-1-10) = -2+12 = 10 \neq 0$$

es decir $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -5 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow$ rango de $(B) \geq 3$.

Seguimos orlando el nuevo menor 3x3 (5ª col, 4ª F)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2-2F_1 \\ F_3-F_1 \\ F_4-F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & -4 & 6 \\ 0 & -1 & -3 & 7 \end{vmatrix} \underset{\text{desarrollo por la 1ª columna}}{=}$$

$$= 1\begin{vmatrix} -1 & 3 & 3 \\ -2 & -4 & 6 \\ -1 & -3 & 7 \end{vmatrix} = [28 - \cancel{18} + \cancel{18}] - [12 + 18 - 42] = 28 - (-12) = 40$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & -2 & 10 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\text{rango}(B) = 4}$$

. No se puede seguir orlando el menor 4x4

IV. Calcula el determinante de orden n

$$\begin{array}{c|ccccc|}
 & 1^{a}c. & 2^{a} & 3^{a} & \dots & n^{a} \\
1^{a}F & -1 & x & x & \dots & x \\
2^{a}F & x & -1 & x & \dots & x \\
3F & x & x & -1 & x\dots & x \\
\vdots & - & - & - & - & - \\
n^{a}F & x & x & x & x\dots & -1
\end{array}_{n\times n}$$

Usando las operaciones (con filas o columnas) que no alteran el valor del determinante podemos hacer

$$\begin{vmatrix} -1 & x & x & \dots & x \\ x & -1 & x & \dots & x \\ x & x & -1 & x \dots & x \\ \vdots & & & & \\ x & x & x & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

[se suman a la 1ª columna las demás columnas]

$$\begin{vmatrix} (n-1)x-1 & x & x & \dots & x \\ (n-1)x-1 & -1 & x & & x \\ (n-1)x-1 & x & -1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & x & & \vdots \\ (n-1)x-1 & x & x & & -1 \end{vmatrix}$$

sacamos factor común $[(n-1)x-1]$ en la columna 1ª

$$= [(n-1)x-1] \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ 1 & -1 & x & x & \dots x \\ 1 & x & -1 & x & \dots x \\ \vdots & & & & \\ 1 & x & x & \dots & -1 \end{vmatrix}$$

$2^{a}F-1^{a}F$
$3^{a}F-1^{a}F$
$4^{a}F-1^{a}F$
$\vdots$
$n^{a}F-1^{a}F$

$$[(n-1)x-1] \begin{vmatrix} 1 & x & x & \dots & x \\ 0 & -x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1-x & 0\dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-x & 0\dots 0 \\ - & - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & \dots & -1-x \end{vmatrix}$$

1ª columna

Desarrollando el determinante por la 1ª columna

$$= [(n-1)x-1]\cdot 1 \begin{vmatrix} -x-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x-1 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & 0 & \dots & -x-1 \\ 0 & & & \end{vmatrix} = [(n-1)x-1]\,[-x-1]^{n-1} =$$

determinante de una matriz diagonal

$$= [(n-1)x-1]\,[(-1)(x+1)]^{n-1}$$

$$= \boxed{(-1)^{n-1}(x+1)^{n-1}\,[(n-1)x-1]}$$

Resultado del determinante.