PRUEBA nº 5 (20/03/12)

I. Dado el subespacio vectorial $\bar{U}$ de $(\mathbb{R}^5, +, \cdot, \mathbb{R})$ generado por los vectores $\{(1,2,3,4,5); (2,2,2,2,2); (6,7,8,9,10); (-5,-4,-3,-2,-1)\}$

α) Encontrar una base del subespacio $\bar{U}$ y expresar los vectores de $\bar{U}$ mediante combinaciones lineales de la base obtenida [es decir, expresar el subespacio $\bar{U}$ mediante unas ecuaciones paramétricas].

Para hallar una base de $\bar{U}$ basta tomar entre los generadores de $\bar{U}$, un conjunto de ellos que sea linealmente independiente que sea el mayor en número de ellos. Este cálculo es el mismo que tenemos que hacer para calcular el rango de la matriz formada por los generadores de $\bar{U}$:

Matriz formada por los vectores que generan $\bar{U}$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$
, si calculamos su rango por el método de Gauss nos resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ II^aF-2(I^aF) \\ \sim \\ III^aF-6(I^aF) \\ IV^aF+5(I^aF) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 24 \end{bmatrix} \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2} II^aF \\ \sim \\ -\frac{1}{5} III^aF \\ \frac{1}{6} IV^aF \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} III^aF-II^aF \\ \sim \\ IV^aF-II^aF \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ el rango de la matriz es 2, pudiendo tomar como base los vectores $\{(1,2,3,4,5); (0,1,2,3,4)\}$ o si preferimos los dos vectores de que proceden (que estaban entre los generadores de $\bar{S}$ $\{(1,2,3,4,5), (2,2,2,2,2)\}$. Con una de estas dos bases, por ejemplo, esta última, tenemos que cualquier vector $(x,y,z,t,w) \in \bar{U}$ está generado por esta base, de donde resulta

$$(x,y,z,t,w) = \lambda(1,2,3,4,5) + \mu(2,2,2,2,2) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \\ z = 3\lambda + 2\mu \\ t = 4\lambda + 2\mu \\ w = 5\lambda + 2\mu \\ \text{para } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \end{array}}$$

Ecuaciones paramétricas para $\bar{U}$: $\rightarrow$

I sigue

β) Eliminando los parametros, expresar el subespacio U mediante un sistema de ecuacions (implícitas)

Tomando las ecuacions paramétricas obtenidas antes

$x = \lambda + 2\mu$
$y = 2\lambda + 2\mu$
$z = 3\lambda + 2\mu$
$t = 4\lambda + 2\mu$
$w = 5\lambda + 2\mu$

Procedemos a eliminar los parámetros λ, μ, usando las dos 1$^{\text{as}}$ ecuacions y sustituyendo en las tres restantes

$$\left.\begin{matrix} x = \lambda + 2\mu \\ y = 2\lambda + 2\mu \end{matrix}\right\rangle \; y - x = (2\lambda + 2\mu) - (\lambda + 2\mu) = \lambda \Rightarrow \boxed{\lambda = (y-x)}$$

$$x = (y-x) + 2\mu \Rightarrow 2x - y = 2\mu \Rightarrow$$

$\boxed{\mu = \frac{1}{2}(2x-y)}$. Como $z = 3\lambda + 2\mu$

resulta $z = 3(y-x) + 2\left(\frac{1}{2}(2x-y)\right) = 3y - 3x + 2x - y \Rightarrow$

$z = 3y - x - y \Rightarrow z = 2y - x \Rightarrow \boxed{x - 2y + z = 0}$ 1$^{\text{a}}$ ecuación

tomando $t = 4\lambda + 2\mu = 4(y-x) + 2\left(\frac{1}{2}(2x-y)\right) = 4y - 4x + 2x - y$

$\Rightarrow t = 3y - 2x \Rightarrow \boxed{2x - 3y + t = 0}$ 2$^{\text{a}}$ ec. y para terminar tomando la 5$^{\text{a}}$

$$w = 5\lambda + 2\mu = 5(y-x) + 2\left(\frac{1}{2}(2x-y)\right) = 5y - 5x + 2x - y$$

$\Rightarrow w = 4y - 3x \Rightarrow \boxed{3x - 4y + w = 0}$ 3$^{\text{a}}$ ec. de donde resulta que U está definido por el sistema

$$\boxed{\begin{matrix} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + t = 0 \\ 3x - 4y + w = 0 \end{matrix}}$$

es decir, se puede escribir U de la siguiente forma:

$$U = \left\{ (x,y,z,t,w) \;\middle|\; \begin{matrix} x - 2y + z = 0 \\ 2x - 3y + t = 0 \\ 3x - 4y + w = 0 \end{matrix} \right\}$$

, e incluso admite el sistema la siguiente escritura matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con lo que definiríamos el subespacio U matricialmente mediante la fórmula

$$U = \left\{ (x,y,z,t,w) \;\middle|\; \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}.$$

<u>Nota</u>. Hay otra manera de hallar unas ecuacions implícitas que definan a un subespacio vectorial, cuando tenemos

I(3) Sigue

una base del subespacio, como en nuestro caso, es formar la matriz cuyas columnas son los elementos de la base y un vector cualquiera, que en este caso (para cambiar un poco) tomamos como base a los dos vectores $\{(1,2,3,4,5);(0,1,2,3,4)\}$ en lugar de la usada antes:

Rango de $\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 3 & t \\ 5 & 4 & w \end{bmatrix}$ debe ser $\underline{\underline{2}}$. Aplicando el método de Gauss resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 2 & 1 & y \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 3 & t \\ 5 & 4 & w \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{II}^aF-2(\text{I}^aF) \\ \text{III}^aF-3(\text{I}^aF) \\ \text{IV}^aF-4(\text{I}^aF) \\ \text{V}^aF-5(\text{I}^aF) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 2 & z-3x \\ 0 & 3 & t-4x \\ 0 & 4 & w-5x \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{III}^aF-2(\text{II}^aF) \\ \text{IV}^aF-3(\text{II}^aF) \\ \text{V}^aF-4(\text{II}^aF) \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-2x \\ 0 & 0 & (z-3x)-2(y-2x) \\ 0 & 0 & (t-4x)-3(y-2x) \\ 0 & 0 & (w-5x)-4(y-2x) \end{bmatrix}$$

rango 2

de donde resulta que las demás filas deben ser nulas, es decir, ser filas de ceros, así la III^a F impone la condición 1ª $(z-3x)-2(y-2x)=0$, la IV^{a}F, la condición 2ª $(t-4x)-3(y-2x)=0$ y la V^{a}F la condición 3ª $(w-5x)-4(y-2x)=0$. Quedando el sistema:

$$\begin{aligned} (z-3x)-2(y-2x)=0 &\Rightarrow z-3x-2y+4x=0 \Rightarrow \\ (t-4x)-3(y-2x)=0 &\Rightarrow t-4x-3y+6x=0 \Rightarrow \\ (w-5x)-4(y-2x)=0 &\Rightarrow w-5x-4y+8x=0 \Rightarrow \end{aligned} \boxed{\begin{aligned} x-2y+z&=0 \\ 2x-3y+t&=0 \\ 3x-4y+w&=0 \end{aligned}}$$

Se obtiene el sistema de ecuaciones implícitas ya obtenido anteriormente por el otro método.

II. α) Hallar las coordenadas del vector $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$ respecto de una nueva base $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, sabiendo que $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ es una base del espacio vectorial $(V,+,\cdot,\mathbb{K})$ y que $\vec{u}_1=\vec{v}_1+\vec{v}_2$; $\vec{u}_2=\vec{v}_2+\vec{v}_3$; $\vec{u}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_3$

Podemos hacer el cálculo de dos maneras, la primera sería hacerlo <u>directamente</u> y la segunda usando la matriz de <u>cambio de base</u>

<u>Método directo</u>. Dado $\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3$, este vector viene dado mediante la base $\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$, a la que llamamos B_1, y las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a esta base B_1

[V a) sigue]

serán $(1,1,1)_{B_1}$ o usando la notación columna (4)

$\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{B_1}$ pues $\vec{u} = 1\,\vec{u}_1 + 1\,\vec{u}_2 + 1\,\vec{u}_3$.

pero si queremos hallar las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ se deben sustituir los vectores de B_1 por su expresión mediante los vectores de B_2. Así, pues como $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$; $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3$; $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$, resulta pues que tenemos

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = \underbrace{(\vec{v}_1 + \vec{v}_2)}_{\vec{u}_1} + \underbrace{(\vec{v}_2 + \vec{v}_3)}_{\vec{u}_2} + \underbrace{(\vec{v}_1 + \vec{v}_3)}_{\vec{u}_3} = 2\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 2\vec{v}_3$$

es decir las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base B_2 son $(2,2,2)_{B_2}$ ó también (columna) $\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}_{B_2}$.

<u>Segundo método</u>. Se trata de calcular la matriz de paso de la base B_1 a la base B_2, si llamamos a esta matriz $[M_{B_1 \to B_2}]$ y recordamos que se obtiene (notación columna en este caso, se podría hacer también por filas) poniendo como columnas de la matriz las coordenadas de los vectores de B_1 respecto de la base B_2:

$$[M_{B_1\to B_2}] = \left[[u_1]_{B_2}, [u_2]_{B_2}, [u_3]_{B_2} \right]_{B_1}$$

pero como $\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, entonces resulta que $[\vec{u}_1]_{B_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$, $\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \Rightarrow [\vec{u}_2]_{B_2} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}_{B_2}$, y $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ es decir $[u_3]_{B_2} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}_{B_2}$ de donde resulta la matriz $[M_{B_1\to B_2}]$

$$= \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

, y la ecuación matricial de paso de las coordenadas en la base B_1: $\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_B$ a las coordenadas en la base B_2 $\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}_{B_2}$ será

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}_{B_1} = \begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}_{B_2} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned}x' &= x+z\\ y' &= x+y\\ z' &= y+z\end{aligned}}$$

Para el vector $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ resulta que $(x,y,z)_{B_1} \equiv (1,1,1)_{B_1}$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\2\end{bmatrix}$$

es decir ~~ex.~~ $(2,2,2)_{B_2}$ son las coordenadas de $\vec{u}$ respecto a la base B_2.

II β) Hallar las coordenadas de $v = v_1 - 2v_2 + v_3$ respecto de la base $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$.

Se trata de pasar de las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B_2 a las coordenadas de $\vec{v}$ en la base B_1, si queremos usar el <u>método directo</u> se deben expresar los vectores de B_2 por medio de los vectores de B_1, lo cual nos obliga a operar ya que lo que se sabe es que

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \\ \vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3\end{array}\right\} \quad \begin{array}{r}\vec{u}_1 - \vec{u}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \\ \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \\ \hline \vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 = 2\vec{v}_1\end{array} \quad \boxed{\vec{v}_1 = \tfrac{1}{2}\vec{u}_1 - \tfrac{1}{2}\vec{u}_2 + \tfrac{1}{2}\vec{u}_3}$$

$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \Rightarrow$

$\vec{v}_2 = \vec{u}_1 - \vec{v}_1 = \vec{u}_1 - (\frac{1}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3) = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 - \frac{1}{2}\vec{u}_3 = \vec{v}_2$

$\Rightarrow \boxed{\vec{v}_2 = \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 - \frac{1}{2}\vec{u}_3}$; $\vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3 \Rightarrow \vec{v}_3 = \vec{u}_3 - \vec{v}_1 \Rightarrow$

$\vec{v}_3 = \vec{u}_3 - (\frac{1}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3) = \boxed{-\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3 = \vec{v}_3}$. De esto obtenemos que $\vec{v} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 = [\frac{1}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3] -$
$- 2[\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 - \frac{1}{2}\vec{u}_3] + [-\frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3] = \frac{1}{2}\vec{u}_1 - \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3 - \vec{u}_1$
$- \vec{u}_2 + \vec{u}_3 - \frac{1}{2}\vec{u}_1 + \frac{1}{2}\vec{u}_2 + \frac{1}{2}\vec{u}_3 = -\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + 2\vec{u}_3$, es decir

$[\vec{v}]_{B_1} = (-1, -1, 2)_{B_1}$ o en notación columna $\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_1}$

Si usamos la <u>matriz de cambio de base</u>, en este caso se trata de $[M_{B_2 \to B_1}]$ que es el proceso inverso que corresponde a la matriz inversa de $[M_{B_1 \to B_2}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$, la que calculada por el método de Gauss resultaría $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$
(o por otro método)

que darían el paso $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{B_2} \longrightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{B_1}$, siendo

$\vec{v} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3 \Rightarrow$

$[\vec{v}]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$; entonces $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}_{B_1}$ o también $(-1, -1, 2)_{B_1}$

Se comprueba sin dificultad que $[Mat_{B_2 \to B_1}] = [[\vec{v}_1]_{B_1}, [\vec{v}_2]_{B_1}, [\vec{v}_3]_{B_1}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ *

III. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$ se consideran los subespacios

$$U = L\{(2,0,1); (1,1,0); (1,3,-1)\}$$
$$W = \left\{(x,y,z) : \begin{matrix} x = 0 \\ \frac{1}{2}y + z = 0 \end{matrix}\right\}.$$

III a) Hallar una base de U

Estando U definido mediante las combinaciones lineales de los vectores $(2,0,1); (1,1,0); (1,3,-1)$, encontrar una base de U es determinar el nº máximo de estos 3 vectores que son linealmente independiente, lo cual es lo mismo que hallar el rango de la matriz que forman estos tres vectores. Para ello usamos el método de Gauss

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{I^a \to II^a}{\overset{II^a \to I^a}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{III^a - I^a}{\overset{II^a - 2I^a}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{III^a + II^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{II^a / (-2)}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

, es decir el rango es 2, por ello, tendríamos como base de U

$$B_U = \{(1,1,0); (0,1,-\tfrac{1}{2})\} \text{ u otra } B'_U = \{(2,0,1); (1,1,0)\}.$$

<u>Nota</u>: Para repasar y practicar estos problemas de subespacios podemos, como en el problema II, definir U mediante sus ecuaciones paramétricas

<u>Ecuaciones paramétricas de U</u> $\quad (x,y,z) = \lambda(1,1,0) + \mu(0,1,-\tfrac{1}{2})$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda + \mu \\ z = -\frac{\mu}{2} \end{cases}$$

<u>Ecuaciones implícitas de U</u>, los tres vectores $(x,y,z) \in U$; $(1,1,0) \in U$; $(0,1,-\tfrac{1}{2}) \in U$ son linealmente dependiente, de donde se deduce que el rango de la matriz que forman (escribimos vectores columnas) es 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & -\frac{1}{2} & z \end{pmatrix} \overset{II^a - I^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & -\frac{1}{2} & z \end{pmatrix} \overset{III^a + \frac{1}{2}II^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y-x \\ 0 & 0 & \boxed{z + \frac{1}{2}(y-x)} = 0 \end{pmatrix} \text{ rango} = 2$$

III α) sigue

quedando U definido mediante la ecuación implícita (7)

$z+\frac{1}{2}(y-x)=0 \Rightarrow z+\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x=0$, lo que implica que

$U=\{(x,y,z) \mid -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\}$

III β) Hallar una base de W.

Como se ve W viene definido mediante sus ecuaciones implícitas: $W=\left\{(x,y,z) \mid \begin{matrix} x=0 \\ \frac{1}{2}y+z=0 \end{matrix}\right\}$

Nota. Si nos fijamos en el subespacio U, que viene definido $U=\{(x,y,z) \mid -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\}$, se ve que $W \subset U$ ya que si hacemos en U, $x=0$ tenemos $\left.\begin{matrix} -\frac{1}{2}0+\boxed{\frac{1}{2}y+z}=0 \\ x=0 \end{matrix}\right\} W$ $\Rightarrow$ W es un subespacio de U, pero, en general, las cosas no son tan inmediatas.

Para calcular una base de W, pasamos a la definición de W mediante la forma paramétrica, lo que quiere decir que debemos resolver el sistema que forman sus ecuaciones implícitas:

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ \frac{1}{2}y+z=0 \end{matrix}\right\} \text{por Gauss} \quad \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \overset{2\,II^a}{\sim} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-2z \end{matrix}\right\} \Rightarrow (x,y,z)=(0,-2z,z)=z(0,-2,1), \text{ si } z=\lambda$$

$$\left.\begin{matrix} x=0 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right| \text{ con } (0,-2,1) \text{ una base de } W; \quad \boxed{B_W=(0,-2,1)}$$

IV. Con el enunciado del problema III

IV α) Hallar una base de $U \cap W$.

Conociendo la definición de U mediante las ecuaciones implícitas y W de la misma manera, es muy fácil conocer $U \cap W$

pues si $U=\{(x,y,z)\mid -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\}$ y $W=\{(x,y,z)\mid \begin{matrix} x=0 \\ \frac{1}{2}y+z=0\end{matrix}\}$ (8)

IV α) sigue

entonces $U\cap W$ son los vectores que verifican a la vez todas las ecuaciones implícitas, las de U, y las de W

$$U\cap W=\left\{(x,y,z)\ \middle|\ \begin{matrix} x=0 \\ \frac{1}{2}y+z=0 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\end{matrix}\right\}$$, y para hallar una ~~la~~ base de

$U\cap W$ [nos olvidamos de que $W\subset U \Rightarrow W\cap U=W$, es decir una base de $(U\cap W)$ es también una base de W, y viceversa, pero nos olvidamos de esto, para hacerlo sin tener en cuenta esta simplificación]. Hay que resolver el sistema $\begin{matrix} x=0 \\ \frac{1}{2}y+z=0 \\ -\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y+z=0\end{matrix}$

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \underset{2\,II^a}{\overset{III^a+I^a/2}{\sim}} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \end{array} \overset{III^a-\frac{1}{2}II^a}{\sim} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \begin{matrix} x=0 \\ y=-2z \end{matrix}$$

$(x,y,z)\in U\cap W \Rightarrow (0,-2z,z)=z(0,-2,1)$ si $z=\lambda$

$U\cap W=\{\lambda(0,-2,1)\mid \lambda\in\mathbb{R}\}$. $B_{U\cap W}=\{(0,-2,1)\}$ ~~...~~

~~...~~ $\Rightarrow$ $\boxed{\dim U\cap W=1}$

IV β) Para hallar una base de $U+W$, lo más fácil es acordarse que la unión de los vectores de una base de U con los vectores de una base de W, forman un conjunto de generadores de $U+W$:

$B_U=\{(2,0,1);(1,1,0)\}$ $\quad B_W=\{(0,-\frac{1}{2},1)\}$; entonces

$B_U\cup B_W=\{(2,0,1);(1,1,0);(0,-2,1)\}$ es un sistema de generadores, si hallamos el rango de la matriz que forman obtenemos una base de $U+W$, y la dimensión $U+W$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \underset{II^a\to I^a}{\overset{I^a\to II^a}{\sim}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{II^a-2I^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \overset{III^a-II^a}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Base de $U+W=\{(1,1,0);(0,-2,1)\}$; $\dim(U+W)=2$ (IV γ)

Como $\dim U=2$; $\dim W=1$; $\dim(U\cap W)=1$, $\dim(U+W)=2$, entonces $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$ $\boxed{2=2+1-1}$.

Grupo C
2012-13.

Prueba nº 5 * (bis) (2º cuatrimestre) 10/04/13.

Apellidos ....

Nombre ....

I. Sea $\overline{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x_i \in \mathbb{R}$, $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ una matriz $(m \times n)$, y la ecuación matricial $A \cdot \overline{X} = B$, donde $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$, con $b_i \in \mathbb{R}$, entonces demostrar que

α) Si $B \neq \vec{O}$, el subconjunto de los vectores $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : A \cdot \overline{X} = B \right\}$ no es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$ y β) Si $B = \vec{O}$, el subconjunto de los vectores $\left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} : A \cdot \overline{X} = B = \vec{O} \right\}$ es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, +, \cdot, \mathbb{R})$.

II. Dado el subespacio vectorial S de $(\mathbb{R}^5, +, \cdot, \mathbb{R})$ generado por los vectores $\{(1,2,3,4,5); (2,2,2,2,2); (6,7,8,9,10); (-5,-4,-3,-2,1)\}$, entonces

II α) Expresa el subespacio vectorial S mediante una ecuación maticial

$$A \cdot \overline{X} = \vec{O}, \text{ con } \overline{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

II β) Expresa el subespacio vectorial S mediante las combinacions lineals de una base de S, o sea formular los vectors de S en forma paramétrica.

I. Halla las ecuacions del cambio de base:

a) De la base $B=\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ a la base $B'=\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$, sabiendo que $\vec{u}_1 = \vec{v}_2+\vec{v}_3$; $\vec{u}_2 = \vec{v}_1+\vec{v}_3$; $\vec{u}_3 = \vec{v}_1+\vec{v}_2$

b) De la base B' a la base B

c) Las coordenadas del vector $\vec{w} = (1,0,3)_B$ respecto de B' y las de $\vec{u} = (5,3,1)_{B'}$ respecto de B

PRUEBA Nº 5 bis 27/03/12.

I. Sea $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ $x_i \in \mathbb{R}$ y $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ $a_{ij} \in \mathbb{R}$, si consideramos la ecuación matricial

$$A \cdot X = B \text{, con } B = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix}.$$

Demostrar que

Ia) . Si $B \neq \vec{0}$, entonces el subconjunto S de los vectores $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid A.X = B\}$ no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

Nota. Si $S \subset V$, $(V+, \cdot, K)$ espacio vectorial, entonces se dice que S es un ~~subespacio~~ subespacio vectorial de V, si y solo si se cumplen estas dos condiciones

I ≡ si $\vec{v}_1 \in S$, $\vec{v}_2 \in S$, entonces $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in S$

II ≡ Si $\alpha \in K$, $\vec{v} \in S$, entonces $\alpha \vec{v} \in S$.

Para verificar que S no es un subespacio vectorial basta con que no se cumpla una de las anteriores condiciones.

Si $S = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \mid A.X = \vec{B}, \vec{B} \neq \vec{0}\}$, veamos que no se verifica la condición I.

Sea $\vec{v}_1 \in S$, esto quiere decir que $\vec{v}_1 = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ con $A.X_1 = B$, donde $X_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, si $\vec{v}_2 \in S$ quiere decir que $\vec{v}_2 = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ con $A.X_2 = B$ donde $X_2 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$

ahora bien $\vec{v}_1 + \vec{v}_2 = (x_1+y_1, x_2+y_2, \dots x_n+y_n)$, y debemos verificar que $A.(X_1 + X_2) = B$, lo cual es falso pues

$A.(X_1+X_2) = A.X_1 + A X_2$ por la propiedad distributiva, entonces $A(X_1+X_2) = A.X_1 + A.X_2 = B+B = 2B$

pero como $B \neq \vec{0}$ entonces $2\vec{B} \neq \vec{B}$ es decir $A.(X_1+X_2) \neq \vec{B}$

con lo cual tenemos que $v_1 + v_2 \notin S$, es decir S no es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

I β) Si $B = \vec{0}$, entonces el conjunto S de los vectores $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid A.X = \vec{0} = B\}$ es un subespacio vectorial pues

I. Si $v_1 \in S$, esto es $v_1 = (x_1, x_2, \ldots x_n)$ y $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{0}$, y si $v_2 \in S$, esto es $v_2 = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ y $A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{0}$, entonces $(v_1 + v_2)$, verifica que $A\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}\right) = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + A\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, lo que implica que $v_1 + v_2 \in S$.

II. Además si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in S \Leftrightarrow \vec{v} = (x_1, x_2 \ldots x_n)$ $A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{0}$ entonces (αv) verifica que $A\left(\alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \alpha A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \alpha . \vec{0} = \vec{0}$, lo que implica que $(\alpha v) \in S$. Al verificarse las dos propiedades que caracterizan un subespacio vectores tenemos demostrado que S es un <u>subespacio</u>.

II. Dado el subespacio vectorial S de $(\mathbb{R}^5, +, \cdot, \mathbb{R})$ generado por los vectores $\{(1,2,3,4,5); (2,2,2,2,2); (6,7,8,9,10); (-5,-4,-3,-2,1)\}$ entonces se pide

II α) Expresa el subespacio vectorial S mediante una ecuación matricial

$$A . X = \vec{0} \quad , \text{ con } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^5.$$

[<u>Nota</u>: Si tenemos caracterizado un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$, mediante unas ecuaciones implícitas, es fácil hallar una ecuación matricial que define el subespacio. Sean, por ejemplo,

Ecuaciones implícitas de un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = 0 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = 0 \\ - - - - - - - - - - \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = 0 \end{array} \right.$$

entonces matricialmente serán

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\text{ecuación matricial}}$$

II a) Sigue | En nuestro problema, para calcular unas ecuaciones implícitas de S, se puede usar varios métodos, pero quizás el más rápido, sería (partiendo de que S está dado como el subespacio generado por unos vectores determinados) obtener una base del subespacio teniendo en cuenta que $\{(1,2,3,4,5); (2,2,2,2,2); (6,7,8,9,10); (-5,-4,-3,-2,1)\}$ es el conjunto de generadores de S dado. Por el método de Gauss se calcula el rango de la matriz formada por esos vectores (3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (II^aF-2I^aF) \\ (III^aF-6I^aF) \\ (IV^aF+5I^aF) \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & -2 & -4 & -6 & -8 \\ 0 & -5 & -10 & -15 & -20 \\ 0 & 6 & 12 & 18 & 26 \end{bmatrix} \begin{array}{l} (-\frac{1}{2})II^aF \\ (-\frac{1}{5})III^aF \\ (\frac{1}{6})IV^aF \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \frac{26}{6} \end{bmatrix} \begin{array}{l} III^aF-II^aF \\ IV^aF-II^aF \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \underset{(1/3)}{(\frac{26}{6}-4)} \end{bmatrix} \frac{IV^aF}{1/3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resulta una matriz de rango 3 (∴ tres pivote (1)), lo que quiere decir que tenemos tres filas linealmente independientes en la matriz (1ª, 2ª, 4ª) revelando que el subespacio S tiene dimensión 3, y una base sería $\{(1,2,3,4,5); (2,2,2,2,2); (-5,-4,-3,-2,1)\}$

Para calcular las ecuaciones implícitas con esta base debemos imponer que también la matriz formada por esta base y un vector cualquiera $(x,y,z,t,w) \in S$ tenga rango 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & x \\ 2 & 2 & -4 & y \\ 3 & 2 & -3 & z \\ 4 & 2 & -2 & t \\ 5 & 2 & 1 & w \end{bmatrix} \begin{array}{l} II^aF-2I^a \\ III^aF-3I^a \\ IV^a-4I^a \\ V^a-5I^a \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & x \\ 0 & -2 & 6 & y-2x \\ 0 & -4 & 12 & z-3x \\ 0 & -6 & 18 & t-4x \\ 0 & -8 & 26 & w-5x \end{bmatrix} \begin{array}{l} \frac{II^aF}{(-2)} \\ \frac{III^aF}{(-4)} \\ \frac{IV^aF}{-6} \\ \frac{V^aF}{-8} \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & x \\ 0 & 1 & -3 & \frac{y-2x}{-2} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{z-4x}{-4} \\ 0 & 1 & -3 & \frac{t-4x}{-6} \\ 0 & 1 & \frac{26}{-8} & \frac{w-5x}{-8} \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l} III^aF-II^aF \\ IV^aF-II^aF \\ V^aF-II^aF \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 & x \\ 0 & 1 & -3 & \frac{2x-y}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{3x-z}{4}\right)-\left(\frac{2x-y}{2}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \left(\frac{4x-t}{6}\right)-\left(\frac{2x-y}{2}\right) \\ 0 & 0 & \frac{2}{8} & \left(\frac{5x-w}{8}\right)-\left(\frac{2x-y}{2}\right) \end{bmatrix} \to \left\{ \begin{array}{l} \text{deben ser filas de cero para que sea rango (3)} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \frac{3x-z}{4}-\left(\frac{2x-y}{2}\right)=0 \\ \frac{4x-t}{6}-\left(\frac{2x-y}{2}\right)=0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-3y+t=0 \end{cases}$$

II γ) sigue

De estas ecuaciones implícitas

$$\boxed{\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ 2x-3y \quad +t=0 \end{matrix}}$$

ecuaciones implícitas de S

obtenemos

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

ecuación matricial

Nota [para los que han corregido el enunciado poniendo $(-5,-4,-3,-2,-1)$ en lugar de $(-5,-4,-3,-2,1)$].

En este caso el rango de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ -5 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

sería $\underline{\underline{2}}$. La dimensión de S sería 2, una base posible $\{(1,2,3,4,5);(2,2,2,2,2)\}$ y las ecuaciones implícitas obtenidas obligando a que el rango de

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 2 & y \\ 3 & 2 & z \\ 4 & 2 & t \\ 5 & 2 & w \end{bmatrix}$$

sea 2 serían

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x-3y \quad +t=0 \\ 3x-4y \quad +w=0 \end{cases}$$

dando como ecuación matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \\ w \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}$$

II β) Expresa el subespacio vectorial S mediante las combinaciones lineales de una base de S, o sea formular los vectores de S en forma paramétrica.

Hemos visto más arriba que $\vec{u}_1=(1,2,3,4,5)$; $\vec{u}_2=(2,2,2,2,2)$ y $\vec{u}_3=(-5,-4,-3,-2,1)$ son una base de S, entonces cualquier $\vec{v}=(x,y,z,t,w)$ está engendrado mediante una combinación lineal de los vectores de esa base:

$(x,y,z,t,w)=\lambda(1,2,3,4,5)+\mu(2,2,2,2,2)+\nu(-5,-4,-3,-2,1)$, y despejando x,y,z,t,w resulta

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \lambda+2\mu-5\nu \\ y &= 2\lambda+2\mu-4\nu \\ z &= 3\lambda+2\mu-3\nu \\ t &= 4\lambda+2\mu-2\nu \\ w &= 5\lambda+2\mu+\nu \end{aligned}}$$

ecuaciones paramétricas para los vectores de S.

III . Halla las ecuaciones de cambio de base

a) De la base $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ a la base $B'=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$, sabiendo que $\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_3$; $\vec{u}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_3$ y $\vec{u}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_2$.

Recordemos que las ecuaciones de cambio de base se pueden calcular matricialmente, mediante el cálculo de una matriz $[M_{B\to B'}]$, de tal forma que si un vector $\vec{u}$ tiene las coordenadas $(x,y,z)_B$ respecto a la base B, y las coordenadas $(x',y',z')_{B'}$ respecto a la base B', entonces ~~la~~ matriz obtenida permitiría pasar ~~de~~ ~~$(x',y',z')_{B'}$~~ de $(x,y,z)_B$ a $(x',y',z')_{B'}$. Veamos:

$\vec{u}\equiv(x,y,z)_B = x\vec{u}_1+y\vec{u}_2+z\vec{u}_3$, ahora bien como $\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_3$; $\vec{u}_2=\vec{v}_1+\vec{v}_3$; $\vec{u}_3=\vec{v}_1+\vec{v}_2$, entonces $\vec{u}=x(\vec{v}_2+\vec{v}_3)+y(\vec{v}_1+\vec{v}_3)+z(\vec{v}_1+\vec{v}_2) = x\vec{v}_2+x\vec{v}_3+y\vec{v}_1+y\vec{v}_3+z\vec{v}_1+z\vec{v}_2=(y+z)\vec{v}_1+(x+z)\vec{v}_2+(x+y)\vec{v}_3\equiv(x',y',z')_{B'} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x'&=y+z\\ y'&=x+z\\ z'&=x+y\end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}$$

es decir la matriz $M_{B\to B'}$ sería $\boxed{\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}}$, que podríamos calcular sin tanto esfuerzo reconociendo que las columnas de esta matriz $\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$ son precisamente las coordenadas de $\vec{u}_1$ respecto a B', de $\vec{u}_2$ respecto a B', y $\vec{u}_3$ respecto a B', ya que $\vec{u}_1=\vec{v}_2+\vec{v}_3=0.\vec{v}_1+1.\vec{v}_2+1.\vec{v}_3 \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}_{B'}\equiv\vec{u}_1 \ ; \ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}_{B'}\equiv\vec{u}_2=1.\vec{v}_1+0.\vec{v}_2+1.\vec{v}_3 \ ; \ \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}_{B'}\equiv\vec{u}_3=1.\vec{v}_1+1.\vec{v}_2+0.\vec{v}_3$$

en fin las ecuaciones (no matricial) serían

$$\boxed{\begin{aligned} x'&=y+z\\ y'&=x+z\\ z'&=x+y\end{aligned}}$$

III b) Ecuaciones de cambio de la base B' a la base B

En este caso se debe encontrar una matriz $[M_{B'\to B}]$ que permita pasar de las coordenadas (x', y', z') respecto de la base B' a las coordenadas (x, y, z) de ese mismo vector respecto de la base B. Tomando la notación en columnas sería

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} M_{B'\to B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$, en cambio

en el caso III a) se buscaba una matriz $[M_{B\to B'}]$ de la que sería la inversa $[M_{B'\to B}]$, pues

$$[M_{B\to B'}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \underbrace{[M_{B\to B'}][M_{B'\to B}]}_{I} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$, ya que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = [M_{B\to B'}] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B$$, es decir $[M_{B'\to B}] = [M_{B\to B'}]^{-1}$

Como $[M_{B\to B'}]$ es $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, entonces $[M_{B'\to B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1}$

Calculando la inversa por el método de Gauss

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{F_1 \text{ cambio } F_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}^a F - \text{I}^a F} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$[M_{B\to B'}]$: I

$$\xrightarrow{\text{III}^a F - \text{II}^a F} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\text{III}^a F / (-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow[\text{I}^a F - \text{III}^a F]{\text{II}^a F - \text{III}^a F}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$;

I $\quad [M_{B\to B'}]^{-1} = [M_{B'\to B}]$

Entonces resulta $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{B'} \Rightarrow$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' \\ y = \frac{1}{2}x' - \frac{1}{2}y' + \frac{1}{2}z' \\ z = \frac{1}{2}x' + \frac{1}{2}y' - \frac{1}{2}z' \end{cases}$$

ecuaciones de cambio de la base B' a la B

III c) Hallar las coordenadas del vector $\vec{w} \equiv (1,0,3)_B$ respecto de B' y las coordenadas de $\vec{u} \equiv (5,3,1)_{B'}$ respecto de B

c.1) Para $\vec{w} \equiv (1,0,3)_B = (x,y,z)_B$ se trata de hallar $\vec{w} \equiv (x',y',z')_{B'}$ y aplicamos la matriz de cambio calculada anteriormente (en columnas)

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}_{B'} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}_{B'}$$

$$\Rightarrow \vec{w} \equiv (1,0,3)_B \equiv (3,4,1)_{B'}$$

c.2) Para $\vec{u} \equiv (5,3,1)_{B'} \equiv (x',y',z')$ se trata de hallar $\vec{u} = (x,y,z)_B$, y aplicamos el cambio mediante la matriz inversa

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} + \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} - \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{7}{2} \end{bmatrix}_B$$

$$\Rightarrow \vec{u} \equiv (5,3,1)_{B'} \equiv \left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)_B$$