<u>Caso $m \neq 0, m \neq 1$</u>. Se trata de los sistemas 'S' donde el rango de $A_{co} = 3$, lo que implica que el rango de A_{am} es también 3, ya que:

sigue I

$$A_{am} = \left[\begin{array}{ccc:c} m & 1 & 1 & 2m \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = -2m(m-1) \neq 0 \Rightarrow$$

rango$(A_{am}) = 3$. Por el teorema de Rouché-(Frobenius) rango(A_{co})= rango$(A_{am}) = 3 =$ nº de incógnitas, es decir se trata de un sistema COMPATIBLE CON SOLUCIÓN UNICA.

<u>Caso $m = 0$.</u> : El sistema 'S' toma la forma:

$$\left.\begin{array}{r} 0 \cdot x + y + z = 2 \cdot 0 \\ x - 0y + z = 0 \\ x + 0 \cdot y + z = 2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y + z = 0 \\ x + z = 0 \\ x + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 2$$

SISTEMA <u>INCOMPATIBLE</u> (No tiene solución)

Por Rouché

$$A_{co} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ rango}(A_{co}) = 2, \text{ ya que } \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ y}$$

$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$. Pero $A_{am} = \left[\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$, como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \neq 0$

y $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \Rightarrow$ rango$(A_{am}) = 3 \neq 2 =$ rango(A_{co}). No coinciden rangos $\Rightarrow$ 'S' INCOMPATIBLE.

<u>Caso $m = 1$</u>. El sistema 'S' toma la forma:

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow A_{co} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A_{co}) = 2$$

ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ pero $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{F_1 = F_3}{=} 0$, es decir

$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ F_1 & & F_3 \end{array}$

rango$(A_{co}) = 2$.

Caso $m=1$ (sigue). Pasamos a calcular el rango de A_{am}

$$A_{am} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \text{rango}(A_{am}) = \text{rango}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \text{rango}$$

Igual (F_1 y F_3)

de $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (donde $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{F_1 + F_2}$) $\Rightarrow$ rango $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} =$ rango $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ rango $(A_{am}) = 2$, $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, o sea rango $(A_{co}) =$ rango (A_{am})

$= 2 <$ nº de incógnitas $\Rightarrow$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

RESOLUCIÓN DE LOS CASOS DISCUTIDOS

*) Si $m \neq 0$, $m \neq 1$, se trata de UN SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (solución única), que podemos resolver por la Regla de CRAMER. Veamos

$m \neq 0$; $m \neq 1$

$$\left.\begin{array}{r} mx + y + z = 2m \\ x - my + z = 0 \\ x + my + z = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\boxed{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2m & 1 & 1 \\ 0 & -m & 1 \\ 2 & m & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2m^2+2) - (-2m+2m^2)}{-2m(m-1)}$$

(la primera columna: términos independientes)

$$x = \frac{-2m^2+2+2m-2m^2}{-2m(m-1)} = \frac{-4m^2+2m+2}{-2m(m-1)}$$

$$x = \frac{-\cancel{2}(2m^2-m-1)}{-\cancel{2}m(m-1)} = \frac{-(2m+1)\cancel{(m-1)}}{m(m-1)} = -\frac{2m+1}{m}$$

$$\boxed{y} = \frac{\begin{vmatrix} m & 2m & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(2m+2) - (2m+2m)}{-2m(m-1)} =$$

$$y = \frac{-2m+2}{-2m(m-1)} = \frac{-\cancel{2}(m-1)}{-\cancel{2}m(m-1)} = \boxed{\frac{1}{m}}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} m & 1 & 2m \\ 1 & -m & 0 \\ 1 & m & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix}} = \frac{(-2m^2+2m^2) - (-2m^2+2)}{-2m(m-1)}$$

$$\boxed{z} = \frac{2m^2-2}{-2m(m-1)} = \frac{\cancel{2}(m-1)(m+1)}{-\cancel{2}m(m-1)} = \frac{(m+1)}{-(m)} = \boxed{-\frac{m+1}{m}}$$

SOLUCIÓN PARA $m \neq 0$; $m \neq 1$

$$x = \boxed{-\frac{2m+1}{m}} \; ; \; y = \boxed{\frac{1}{m}} \; , \; z = \boxed{-\frac{m+1}{m}} \, .$$

β) Si $m=0$. El sistema 'S' es INCOMPATIBLE, no existen (x,y,z) soluciones del SISTEMA

γ) Si $m=1$. El sistema 'S' es COMPATIBLE INDETERMINADO,

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+y+z=2 \end{array}\right\} \text{la misma} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \end{array}\right\} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=2-z \\ x-y=-z \end{array}\right\} \text{(se pasa } z \text{ al término independiente)} \xrightarrow[\text{Cramer}]{\text{Por}} \boxed{x} = \frac{\begin{vmatrix} 2-z & 1 \\ -z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} =$$

$$x = \frac{-2+z+z}{-2} = \frac{-2+2z}{-2}$$

$$x = \frac{-2}{-2} + \frac{2z}{-2} = \boxed{1-z}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 1 & -z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-z-2+z}{-2} = \frac{-2}{-2} = \boxed{1}$$

$$\Rightarrow (x,y,z) = (1-z, 1, +z) = (1,1,0) + (-z, 0, +z) =$$

Si $z=\lambda$ $\quad (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,0,+1) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 1-\lambda \\ y = 1 \\ z = \lambda \end{array}}$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

II. Discute por Rouché [Enunciado con las erratas corregidas]

$$\left.\begin{array}{l} (m+2)x + y + z = (m+1) \\ m\,x + (m-1)y + z = (m-1) \\ (m+1)x + (m+1)z = (m-1). \end{array}\right\}$$

Muy parecido al anterior, aunque no nos piden resolverlo (es más fácil).

Como I, calculamos la matriz de los coeficientes, y su rango, para después calcular la matriz ampliada y su rango, si coinciden los rangos es un sistema compatible, que puede, eventualmente, ~~ser~~ determinado o indeterminado. Si no coinciden los rangos es incompatible.

- Matriz de los coeficientes

$$A_{co} = \begin{bmatrix} (m+2) & 1 & 1 \\ m & m-1 & 1 \\ (m+1) & 0 & (m+1) \end{bmatrix}$$

· rango de (A_{co}).

II sigue

Como A_{co} es una matriz 3×3, si el determinante de A_{co} es DISTINTO de CERO entonces el rango de A_{co} es 3, para los casos en que el determinante de A_{co} es cero, hay que estudiarlos separadamente.

$$\det\begin{bmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m & (m-1) & 1 \\ m+1 & 0 & (m+1)\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m-1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & (m+1)\end{bmatrix}$$

, pues hemos restado a la 1ª columna la 3ª columna

desarrollando por la 3ª fila

$$\det\begin{bmatrix} m+1 & 1 & 1 \\ m-1 & m-1 & 1 \\ 0 & 0 & (m+1)\end{bmatrix} = (m+1)\cdot\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ m-1 & m-1\end{vmatrix} = (m+1)(m-1)\begin{vmatrix} m+1 & 1 \\ 1 & 1\end{vmatrix}$$

al sacar factor común $(m-1)$ en la 2ª Fila $\Rightarrow$

$$\begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m & (m-1) & 1 \\ m+1 & 0 & m+1\end{vmatrix} = (m+1)(m-1)\left[(m\cancel{+1}) \cancel{-1}\right] = [m+1](m-1)\,m =$$

$$= \boxed{m(m-1)(m+1)}$$

; de donde $\det A_{co} =$

$$|A_{co}| = m(m-1)(m+1) \neq 0 \Rightarrow \begin{matrix} m\neq 0 \\ m\neq 1 \\ m\neq -1\end{matrix} \quad \text{entonces}$$

$$\text{rango}(A_{co}) = 3; \quad \text{como } A_{am} = \left[\begin{array}{ccc|c} m+2 & 1 & 1 & m-1 \\ m & (m-1) & 1 & m-1 \\ m+1 & 0 & m+1 & m-1\end{array}\right]$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} m+2 & 1 & 1 \\ m & (m-1) & 1 \\ m+1 & 0 & m+1\end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A_{am}) = 3$$

DISCUSIÓN α) Si $m\neq 0, m\neq 1, m\neq -1$ entonces $\text{rango}(A_{co}) = \text{rango}(A_{am}) = 3 =$ nº de incógnitas, es decir el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

β) Si $m=0$, resulta el sistema

$$\left.\begin{aligned} (0+2)x + y + z &= (0-1) \\ 0\cdot x + (0-1)y + z &= (0-1) \\ (0+1)x + (0+1)z &= (0-1)\end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} 1^{a}:\ 2x + y + z &= -1 \\ 2^{a}:\ -y + z &= -1 \\ 3^{a}:\ x + z &= -1\end{aligned}\right\}$$

$1^{a}+2^{a} \Rightarrow 2x+2z=-$

$\boxed{x+z=-1}$

II Sigue

β) (sigue). Con $m=0$, el sistema resulta

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+z=-1\\ \quad -y+z=-1\end{array}\right\} \quad \text{rango}(A_{co})=2 \quad \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\neq 0$$

$$\text{rango}(A_{am}) = \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A_{co}) = \text{rango}(A_{am})$$

$= 2 \Rightarrow 2<3$ SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO

γ) Caso $m=1$; el sistema toma la forma

$$\left.\begin{array}{l}(1+2)x+y+z=(1-1)\\ 1\cdot x+(1-1)y+z=(1-1)\\ (1+1)x+(1+1)z=(1-1)\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}3x+y+z=0\\ x+z=0\\ 2x+2z=0\end{array}\right\} \text{SISTEMA HOMOGÉNEO}$$

Es inmediato comprobar que $A_{co}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ tiene rango 2; $\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0$ $\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0$. Además el rango de la matriz ampliada

$A_{am}=\begin{bmatrix}3 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 0\end{bmatrix}$ también es 2, y como el número de incógnitas es 3 resulta $\text{rango}(A_{co})=\text{rango}(A_{am})=2<3$ resulta un SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO.

δ) Caso $m=-1$, el sistema resulta:

$$\left.\begin{array}{l}(-1+2)x+y+z=-1-1\\ (-1)x+(-1-1)y+z=-1-1\\ (-1+1)x+(-1+1)z=-1-1\end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{l}x+y+z=-2\\ -x-2y+z=-2\\ \boxed{0x+0z=-2}\end{array}\right\}$$

La última ecuación del sistema muestra la imposibilidad del sistema. $\boxed{0=-2}$, por tanto se trata de un SISTEMA INCOMPATIBLE, también se puede hacer verificando que el rango de la matriz de los coeficientes no coincide con el rango de la matriz ampliada

$$A_{co}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & -2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \text{rango}(A_{co})=2; \begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-1\neq 0, \quad A_{am}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -2\end{bmatrix},$$

donde el menor $\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & -2 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{vmatrix}=(-2)\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-2(-1)=2\neq 0$ $\text{rango}(A_{am})=3\neq\text{rango}(A_{co})$.

III a) Elimina los parámetros del sistema

$$\begin{aligned} x &= 1 + 4\lambda + 2\mu \\ y &= 2 - 2\lambda - \mu \qquad , \lambda, \mu \in \mathbb{R} \\ z &= 1 + 2\lambda + \mu . \end{aligned}$$

- Tomamos el sistema de las anteriores igualdades como un sistema cuyas incógnitas son λ, μ, de donde

$$\begin{aligned} 4\lambda + 2\mu &= (x-1) \\ -2\lambda - \mu &= (y-2) \\ 2\lambda + \mu &= (z-1) \end{aligned}$$

. Como este sistema tiene solución entonces tiene que verificarse que rango(A_{co}) = rango(A_{am}). Comprobemos:

$$A_{co} = \begin{array}{c} \begin{matrix} \lambda & \mu \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ 2 & +1 \end{bmatrix} \end{array} \Rightarrow \text{rango} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \text{rango} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ pues } \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

entonces rango$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 1$, lo que implica que rango$(A_{am}) = 1$

$$\Rightarrow A_{am} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & (x-1) \\ -2 & -1 & (y-2) \\ 2 & 1 & (z-1) \end{bmatrix}$$

para que rango de (A_{am}) sea 1, deben ser todos los menores de orden 2 cero: $(A_{am}) = \text{rango}\begin{bmatrix} 0 & 2 & (x-1) \\ 0 & -1 & (y-2) \\ 0 & 1 & (z-1) \end{bmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & (x-1) \\ -1 & (y-2) \end{vmatrix} = 0 \; ; \; \begin{vmatrix} -1 & (y-2) \\ 1 & (z-1) \end{vmatrix} = 0$$

, de donde resulta

$2(y-2) - (-(x-1)) = 0 \Rightarrow 2y - 4 + x - 1 = 0$; $-1(z-1) - (y-2) = 0$

$\Rightarrow x + 2y - 5 = 0$, $\quad -z + 1 - y + 2 = 0 \Rightarrow y + z - 3 = 0$, queda por tanto el sistema en x, y, z

$$\boxed{\begin{aligned} x + 2y - 5 &= 0 \\ y - z - 3 &= 0 \end{aligned}}$$

, también vale $\begin{vmatrix} 2 & (x-1) \\ 1 & (z-1) \end{vmatrix} = 0$ (equivalente a los otros dos, resultando

$2z - 2 - (x-1) = 0 \quad -x + 2z - 1 = 0$

$$\boxed{\begin{aligned} x + 2y - 5 &= 0 \\ -x \quad + 2z - 1 &= 0 \end{aligned}}.$$

III b) · Demuestra que el sistema siguiente tiene solución única si $abc \neq 0$. Resuélvelo en este caso. (8)

$$\begin{aligned} bx + ay &= c \\ cx + az &= b \\ cy + bz &= a \end{aligned}$$

Para que este sistema tenga solución única debe ocurrir que el rango de la matriz de los coeficientes sea 3. Veamos:

$$A_{co} = \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{bmatrix} \end{array}$$

, es decir el determinante $\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}$ debe ser distinto de cero.

$$\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = (0+0+0) - (0 + abc + abc) = -2abc \neq 0$$

entonces está demostrado que la solución única se produce cuando $abc \neq 0$. En este caso, se puede aplicar la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}} ; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}} ; \quad z = \frac{\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix}}$$

, de donde

tenemos: $\begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = (0 + a^3 + 0) - (ac^2 + ab^2) = a(a^2 - c^2 - b^2)$

$$\Rightarrow x = \frac{\cancel{a}(a^2-c^2-b^2)}{-2\cancel{a}bc} = \boxed{\frac{a^2-c^2-b^2}{-2bc}} ; \quad \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b^3 - (a^2 b + bc^2)$$

$$= b(b^2 - a^2 - c^2) \Rightarrow y = \frac{\cancel{b}(b^2-a^2-c^2)}{-2a\cancel{b}c} = -\frac{b^2-a^2-c^2}{2ac} = \boxed{\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}}$$

$$\begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = (c^3 - (b^2 c + a^2 c)) = c(c^2 - b^2 - a^2)$$

, es decir

$$z = \frac{\cancel{c}(c^2-a^2-b^2)}{-2ab\cancel{c}} = -\frac{c^2-a^2-b^2}{2ab} = \boxed{\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}}$$

, para $a \neq 0, b \neq 0$, $c \neq 0$.

IV. Calcula todos los vectores $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$ tales que la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^4$ en $\mathbb{R}^3$ dada por la matriz respecto a las bases canónicas $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ verifica (9)

$f(x,y,z,t) = (2,0,-2)$ y además $f(2,1,0,-1) = (2,0,-2)$.

Este problema se hizo en clase, por ello lo resolveremos por otro método:

Como $\left.\begin{array}{l} f(x,y,z,t) = (2,0,-2) \\ \text{y } f(2,1,0,-1) = (2,0,-2) \end{array}\right\}$ restando tenemos $f(x,y,z,t) - f(2,1,0,-1) = (2,0,-2) - (2,0,-2)$

$\Rightarrow f(x,y,z,t) - f(2,1,0,-1) = (0,0,0)$, siendo f aplicación lineal $f(x,y,z,t) - f(2,\cancel{1},0,-1) = f[(x,y,z,t) - (2,1,0,-1)] = (0,0,0)$

$\Rightarrow f[(x-2, y-1, z, t+1)] = (0,0,0)$, usando la matriz que representa a f respecto a las bases canónicas tenemos

$$f[(x-2,y-1,z,t+1)] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x-2 \\ y-1 \\ z \\ t+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x-2-y+\cancel{1}+z-t-\cancel{1} \\ y-\cancel{1}+t+\cancel{1} \\ z+2t+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y+z-t-2=0 \\ y+t=0 \\ z+2t+2=0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \\ \rightarrow y=-t \\ \rightarrow z=-2t-2 \end{array}$$

$\Rightarrow x - (-t) + (-2t-2) - t - 2 = 0$ (sustituyendo y, z por sus valores)

$x + t - 2t - 2 - t - 2 = 0 \Rightarrow x = 4 + 2t$, $y = -t$, $z = -2t-2$, $t = t$

$\Rightarrow (x,y,z,t) = (4+2t, -t, -2t-2, t) = (4,0,-2,0) + t(2,-1,-2,1)$

es decir los vectores (x,y,z,t) que verifican la ecuación $f(x,y,z,t) = (+2,0,-2)$ es el conjunto de los vectores $(x,y,z,t) = (4,0,-2,0) + t(2,-1,-2,1)$, $\forall t \in \mathbb{R}$ donde $\{t(2,-1,-2,1) \mid t \in \mathbb{R}\}$ es el núcleo de f.

La solución obtenida y en clase es distinta en [illegible]

Métodos Matemáticos
de la Informática PRUEBA nº 10 2º cuatrimestre
1ºC.

I. Discute por Rouché y resuelve en $\mathbb{R}^3$

$$\left.\begin{aligned} mx + y + z &= 2m \\ x - my + z &= 0 \\ x + my + z &= 2. \end{aligned}\right\}$$

Es un sistema de 3 ecuaciones con tres incógnitas al que llamamos "S"

• Si recordamos el teorema de Rouché-(Frobenius) tenemos

El sistema "S" es un sistema compatible si y sólo si el rango de la matriz de los coeficientes coincide con el rango de la matriz ampliada.

Para nuestro sistema "S" tenemos:

$$A_{co} = \text{matriz de los coeficientes} \equiv \begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

términos independientes

$$A_{am} = \text{matriz ampliada con la columna de los términos independientes de "S"} \equiv \left[\begin{array}{ccc:c} m & 1 & 1 & 2m \\ 1 & -m & 1 & 0 \\ 1 & m & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Rango de A_{co}: siendo A_{co} una matriz 3x3 que depende del parámetro m, si el determinante de A_{co} es distinto de cero entonces el rango de A_{co} es $\underline{\underline{3}}$. Para los casos en que el determinante de A_{co} es cero hay que estudiarlos separadamente:

$$\det A_{co} = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & -m & 1 \\ 1 & m & 1 \end{vmatrix} = (-m^2 + 1 + m) - (-m + m^2 + 1)$$
$$= -m^2 + \cancel{1} + m + m - m^2 - \cancel{1}$$

$\det A_{co} = -2m^2 + 2m = -2m(m-1)$. Entonces

DISCUSIÓN . Si $\det A_{co} \neq 0 \Rightarrow -2m(m-1) \neq 0 \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{matrix} m \neq 0 \\ m-1 \neq 0 \end{matrix}} \right.$

Si $\det A_{co} = 0 \Rightarrow m = 0$ ó $m = 1$