PRUEBA nº 8 (2º cuatrimestre)

I. Sean f y g dos aplicaciones lineales de $(V_2,+,\cdot,\mathbb{R})$ en sí mismo, tal que $f(\vec{u}_1) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$; $f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$; $g(\vec{e}_1) = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$; $g(\vec{e}_2) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, siendo $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$; $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ tres bases del espacio vectorial dado. Halla

ⓐ La matriz de la aplicación compuesta $(g\circ f)$

ⓑ El núcleo y la imagen de $(g\circ f)$

ⓒ Las ecuaciones de la aplicación compuesta $(g\circ f)$ y la imagen del vector $\vec{u} = 5\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$.

ⓐ Matriz de la aplicación compuesta $(g\circ f)$.

Debe entenderse que es la matriz de $(g\circ f)$ respecto a las bases $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$, si llamamos $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ y $B_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ sería la matriz $M_{B_1}^{B_2}(g\circ f)$.

(a.1) Método mediante la composición de ambas aplicaciones

$$M_{B_1}^{B_2}(g\circ f) = \left[[(g\circ f)(\vec{u}_1)]_{B_3} ; [(g\circ f)(\vec{u}_2)]_{B_3} \right].$$

* $(g\circ f)(\vec{u}_1) = g[f(\vec{u}_1)] = g[2\vec{e}_1 - \vec{e}_2]$, pues $f(\vec{u}_1) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, entonces $g[2\vec{e}_1 - \vec{e}_2] = g(2\vec{e}_1) - g(\vec{e}_2) = 2(g(\vec{e}_1)) - g(\vec{e}_2)$, sustituyendo los valores de $g(\vec{e}_1)$ y $g(\vec{e}_2)$ resulta: $[g(f(\vec{u}_1))] = 2(g(\vec{e}_1)) - g(\vec{e}_2)$
$= 2[\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2] - [2\vec{v}_1 + \vec{v}_2] = \cancel{2\vec{v}_1} - 6\vec{v}_2 - \cancel{2\vec{v}_2} - \vec{v}_2 = 0.\vec{v}_1 + (-7)\vec{v}_2$.

$$\Rightarrow \boxed{[(g\circ f)(\vec{u}_1)]_{B_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \end{bmatrix}}$$

* $(g\circ f)(\vec{u}_2) = g[f(\vec{u}_2)] = g[\vec{e}_1 + \vec{e}_2]$, pues $f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, de donde resulta $(g\circ f)(\vec{u}_2) = g(\vec{e}_1 + \vec{e}_2) = g(\vec{e}_1) + g(\vec{e}_2)$, sustituyendo los valores de $g(\vec{e}_1)$, $g(\vec{e}_2)$ tenemos $(g\circ f)(\vec{u}_2) = g(\vec{e}_1) - g(\vec{e}_2) =$
$= (\vec{v}_1 - 3\vec{v}_2) + (2\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = 3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 \Rightarrow \boxed{[(g\circ f)(\vec{u}_2)]_{B_3} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}}$; de donde obtenemos la matriz pedida

$$M_{B_1}^{B_3}(g\circ f) = \left[[(g\circ f)(\vec{u}_1)]_{B_3} ; [(g\circ f)(\vec{u}_2)]_{B_3} \right] = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}}$$

(a.2) Método multiplicando las matrices de f y de g respecto a las bases correspondientes a las definiciones.

Recordemos que la composición de $(g \circ f)$ se va corresponder al producto de las matrices correspondientes a g y f:

Sigue

$$\begin{tikzcd}
V_2 \arrow[r, "f"] & V_2 \arrow[r, "g"] & V_2 \\
B_1 & B_2 & B_3 \\
\mathbb{R}^2 \arrow[r, "Mat_{B_1}^{B_2}(f)"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "Mat_{B_2}^{B_3}(g)"] & \mathbb{R}^2
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2 \arrow[rr, "Mat_{B_1}^{B_3}(g\circ f)"] & & \mathbb{R}^2 \\
V_2 \arrow[u, "B_1"] \arrow[rr, "(g\circ f)"] & & V_2 \arrow[u, "B_3"']
\end{tikzcd}$$

Tenemos pues, la matriz $Mat_{B_1}^{B_3}(g \circ f) = Mat_{B_2}^{B_3}(g) \cdot Mat_{B_1}^{B_2}(f)$

* $Mat_{B_1}^{B_2}(f) = \left[[f(\vec{u}_1)]_{B_2}, [f(\vec{u}_2)]_{B_2} \right]$, como $f(\vec{u}_1) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$, $f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$, $\Rightarrow [f(\vec{u}_1)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $[f(\vec{u}_2)]_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, de donde resulta: $\boxed{Mat_{B_1}^{B_2}(f) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}$

* $Mat_{B_2}^{B_3}(g) = \left[(g(\vec{e}_1))_{B_3}, (g(\vec{e}_2))_{B_3} \right]$, como $g(\vec{e}_1) = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$, $g(\vec{e}_2) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$, entonces $[g(\vec{e}_1)]_{B_3 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}} = [1 \cdot \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2]_{B_3} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$;
$[g(\vec{e}_2)]_{B_3} = [2\vec{v}_1 + \vec{v}_2]_{B_3} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, de donde obtenemos que

$\boxed{Mat_{B_2}^{B_3}(g) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}}$. Aplicando la fórmula del producto de matrices para la aplicación compuesta

$$Mat_{B_1}^{B_3}(g \circ f) = Mat_{B_2}^{B_3}(g) \cdot Mat_{B_1}^{B_2}(f) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 2(-1) & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ -3 \cdot 2 + 1(-1) & -3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}}$$

que es el mismo resultado obtenido anteriormente.

(b) El núcleo y la imagen de $(g \circ f)$.

(b.1) Haciéndolo directamente tendríamos
$(g \circ f)(\vec{u}) = \vec{0}$, donde $\vec{u} \in V_2 \leftrightarrow \vec{u} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2 \Rightarrow$

$$(g \circ f)(x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2) = x(g \circ f)(\vec{u}_1) + y(g \circ f)(\vec{u}_2) = \vec{0} = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2$$

$$= x \cdot (0 \cdot \vec{v}_1 + (-7)\vec{v}_2) + y(3\vec{v}_1 - 2\vec{v}_2) = (3y)\vec{v}_1 + ((-7)x + (-2)y)\vec{v}_2 = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow$$

Sigue

$$\left.\begin{array}{l} 3y = 0 \Rightarrow y=0 \\ -7x-2y=0 \Rightarrow -7x-0=0 \Rightarrow x=0 \end{array}\right\}$$ es decir los vectores

$\vec{u}$ del núcleo de $(g\circ f)$ son de la forma $x\vec{u}_1+y\vec{u}_2=0.\vec{u}_1+0.\vec{u}_2=\vec{0} \Rightarrow \boxed{Ker(g\circ f)=\vec{0}}$ $\boxed{\vec{0}=0.\vec{v}_1+0.\vec{v}_2} \equiv (0,0)_{B_3}$

Para la imagen de $(g\circ f)$ se sabe que $Im(g\circ f) = L((g\circ f)(\vec{u}_1),(g\circ f)(\vec{u}_2)) = L(0+(-7)\vec{v}_2, 3\vec{v}_1-2\vec{v}_2)$, ahora bien como $(-7v_2)$ y $(3\vec{v}_1-2\vec{v}_2)$ son linealmente independientes, entonces dimensión de $Im(g\circ f)$ es 2, como además es un subespacio de $\mathbb{R}^2$, resulta que $Im(g\circ f)$ coincide con $\underline{\underline{V_2}}$.

$\Rightarrow \boxed{Im(g\circ f) \equiv V_2}$

(b.2) Mediante la matriz de $(g\circ f)$.

$$\begin{array}{cc} u_1 & u_2 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(g\circ f)} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$$

, como $\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0$ no podemos obtener ninguna columna de ceros en $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -7 & 2 \end{bmatrix}$, es decir el nucleo de $(g\circ f)$ es $\vec{0}$, y la imagen de $(g\circ f)$ esta engendrada por $-7\vec{v}_2$, $3\vec{v}_1-2\vec{v}_2$, es decir es todo V_2.

(c) Las ecuaciones de la aplicación compuesta $(g\circ f)$ y la imagen del vector $\vec{u}=5\vec{u}_1-2\vec{u}_2$.

En este caso usamos directamente la matriz de $(g\circ f)$ respecto a las bases B_1, B_3:

$Mat_{B_1}^{B_3}(g\circ f) = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}$, lo que quiere decir que si tomamos $\vec{u}=x\vec{u}_1+yu_2 \equiv \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{B_1}$, entonces $\left[(g\circ f)(\vec{u})\right]_{B_3} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -7 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3y \\ -7x-2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \bar{x} = 3y \\ \bar{y} = -7x-2y \end{array}}$$

Ecuaciones de la ~~ecuación~~ aplicación $(g\circ f)$

I sigue

Aplicando estas ecuaciones al caso del vector $\vec{u} = 5\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ tenemos $[\vec{u}]_{B_1} = \begin{bmatrix}5\\-2\end{bmatrix}$, es decir $x=5$, $y=-2$, de donde obtenemos $\left[(g\circ f)(\vec{u})\right]_{B_3} = \begin{bmatrix}\bar{x}\\ \bar{y}\end{bmatrix}$, es decir

$$\bar{x} = 3.(-2) = -6$$
$$\bar{y} = -7.5 + (-2).(-2) = -31$$

$$\Rightarrow \left[(g\circ f)(\vec{u})\right]_{B_3} = \begin{bmatrix}-6\\-31\end{bmatrix} \Rightarrow \boxed{(g\circ f)(5\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2) = -6\vec{v}_1 - 31\vec{v}_2}$$

II. Halla la matriz de la aplicación lineal entre $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ definida por $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$; $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$, donde $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$; $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$, son las bases de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente y se sabe además que el vector $\vec{u}_2$ pertenece al núcleo de f. Halla una base de $\operatorname{Im} f$.

Como en el problema anterior, la matriz de f respecto a las bases B_1, B_2 será $\left[[f(\vec{u}_1)]_{B_2}, [f(\vec{u}_2)]_{B_2}, [f(\vec{u}_3)]_{B_2} \right]$

donde $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4$, $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3$, y el valor de $f(\vec{u}_2)$ se obtiene fácilmente al tener en cuenta que el enunciado nos dice que $\vec{u}_2$ pertenece al núcleo de f, es decir $f(\vec{u}_2) = \vec{0} = 0.\vec{v}_1 + 0.\vec{v}_2 + 0.\vec{v}_3 + 0.\vec{v}_4$, obteniendo por tanto

$$[f(\vec{u}_1)]_{B_2} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\\-1\end{bmatrix};\quad [f(\vec{u}_3)]_{B_2} = \begin{bmatrix}1\\-1\\3\\0\end{bmatrix};\quad [f(\vec{u}_2)]_{B_2} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

es decir $\operatorname{Mat}_{B_1}^{B_2}(f) = \left[(f(\vec{u}_1))_{B_2}, (f(u_2))_{B_2}, (f(u_3))_{B_2} \right] = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ +1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\operatorname{Mat}_{B_1}^{B_2}(f) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ -1 & 0 & 0\end{bmatrix}}$$

También se puede hacer directamente como en el ejercicio anterior.

* Cálculo de una base de $\operatorname{Im} f$. Usando la técnica de los ejercicios hechos en clase sabemos.

I (sigue)

$$\begin{array}{ccc} u_1 & u_2 & u_3 \to \text{núcleo} \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

generadores de la imagen

, como $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ son generadores de la Imagen (en relación a la base B_2), tenemos que son linealmente independientes ya que $\operatorname{rang}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 2$ $\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$, entonces

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ son las coordenadas de los vectos de una base de $\operatorname{Im} f \Rightarrow$ Base de $\operatorname{Im} f = \{1 \cdot \vec{v}_1 + 1 \cdot \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4, \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3\}$

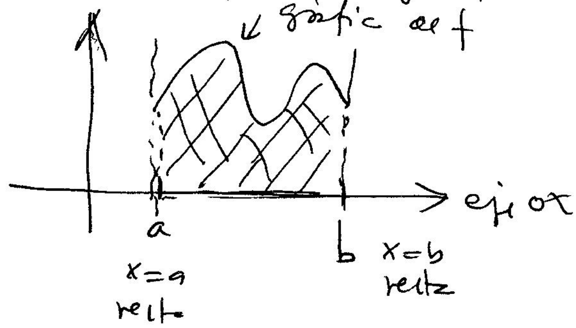
o sea Base de $\operatorname{Im} f = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ donde $\boxed{\begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4 \\ \vec{w}_2 = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3 \end{cases}}$

II. Se define la aplicación $T: \mathbb{C}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}$, del siguiente modo $T(f) = \int_a^b f(t)\,dt$, $\forall f \in \mathbb{C}([a,b])$. Prueba que T es una aplicación lineal ~~xxxxxx~~ entre los espacios vectoriales $\mathbb{C}[a,b]$ y $\mathbb{R}$. Dado $n \in \mathbb{N}$ encuentra n funciones linealmente independientes pertenecientes al núcleo de T.

* Nota. Debe recordarse que mediante $\mathbb{C}([a,b])$ designamos el conjunto de las aplicaciones continuas del intervalo cerrado $[a,b]$ en $\mathbb{R}$: $\mathbb{C}([a,b]) = \{f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R},\ f \text{ continua}\}$, y como se estudió en el 1^er^ cuatrimestre resulta:

Si $f \in \mathbb{C}[a,b]$ es f continua, $g \in \mathbb{C}([a,b])$ g es continua entonces $(f+g)$ es continua, o sea $(f+g) \in \mathbb{C}[a,b]$, además $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ si $f \in \mathbb{C}[a,b]$, f continua entonces (αf) es continua, es decir $(\alpha f) \in \mathbb{C}[a,b]$, resultando que $\mathbb{C}([a,b])$ es un espacio vectorial, además $\underline{\underline{\mathbb{R}}}$ también es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ $\quad \mathbb{R} \equiv \mathbb{R}^1$, $(\mathbb{R}^1, +, \cdot, \mathbb{R})$ por tanto la aplicación lineal, si lo demostramos. T, aplica cada función $f \in C[a,b]$ al nº real $T(f) = \int_a^b f(t)\,dt$, pero si recordamos nuestros conocimientos de cálculo, sabemos que una función continua en un intervalo cerrado y acotado $[a,b]$ es integrable, y además la integral $\int_a^b f(t)\,dt$ coincide con el área de la región del plano que limitan el eje OX, la recta vertical $x=a$, la recta vertical $x=b$, y la gráfica de la función f.

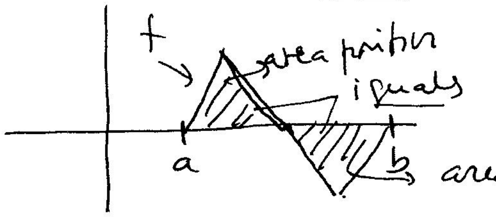
El signo



Veamos que T es una aplicación lineal. Sean las funciones $f, g \in C([a,b])$ entonces

$$T(f+g) = \int_a^b (f+g)(t).\,dt =$$
$$= \int_a^b [f(t)+g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$$

propiedad demostrada en el primer cuatrimestre, de donde obtenemos $T(f+g) = T(f) + T(g)$ 1ª condición para que T sea lineal. Además, sea $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $T(\alpha f)$ para $f \in C([a,b])$ da $T(\alpha f) = \int_a^b (\alpha f)(t)\,dt = \int_a^b \alpha f(t)\,dt = \alpha \underline{\int_a^b f(t)\,dt} = \alpha T(f)$, se cumple la 2ª condición para que T sea una <u>aplicación lineal</u>. $\Rightarrow$ T es una aplicación lineal de $C([a,b])$ en $\mathbb{R}$. Una función f de $C[a,b]$ pertenece al núcleo de T si y sólo si $T(f) = 0 \Rightarrow$ $T(f) = \int_a^b f(t)\,dt = 0$, lo que quiere decir que el área de la región del plano que limita f con los lados descritos antes debe ser <u>nula</u>, por ejemplo

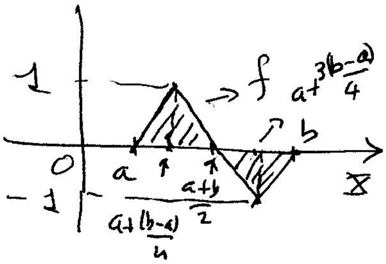


$\Rightarrow T(f) = 0$. Con este esquema podemos responder la la siguiente pregunta.

III sigue

Se trata de encontrar n funciones continuas en $[a,b]$ que sean linealmente independientes tales que pertenezcan a $Ker\,T$ (núcleo de T) para cada $n \in \mathbb{N}$. Veamos

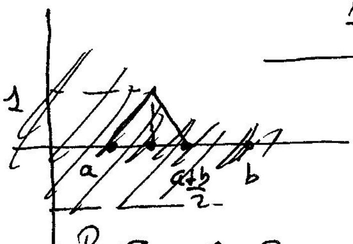
Si $n=1$. Basta tomar el ejemplo anterior, es decir,

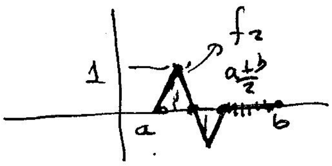


Es evidente por el dibujo que $T(f) = \int_a^b f(t)\,dt = 0$. La dificultad reside en formular esta función analíticamente (mediante fórmulas)

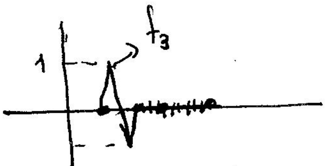
$$f_1(t) = \begin{cases} \frac{4}{b-a}(t-a) \; ; & t \in \left[a, a+\frac{b-a}{4}\right] \\ -\frac{4}{b-a}\left(t-\left(\frac{a+b}{2}\right)\right) ; & t \in \left[a+\frac{b-a}{4}, a+3\frac{(b-a)}{4}\right] \\ \frac{4}{b-a}(t-b) \; ; & t \in \left[a+\frac{3(b-a)}{4}, b\right] \end{cases}$$

Para $n=2$

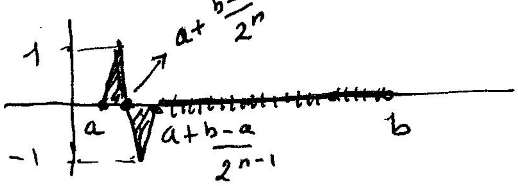




Para $n=3$



Para (n)



, resulta la función

$$f_n(t) = \begin{cases} \frac{2^{n+1}}{(b-a)}(t-a) \; ; & t \in \left[a, a+\frac{b-a}{2^{n+1}}\right] \\ -\frac{2^{n+1}}{(b-a)}\left(t-\left(a+\frac{b-a}{2^n}\right)\right) , & t \in \left[a+\left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right), a+3\frac{b-a}{2^{n+1}}\right] \\ 0 \; , & t \in \left[a+3\left(\frac{b-a}{2^{n+1}}\right), a+\left(\frac{b-a}{2^{n-1}}\right)\right] \end{cases}$$

Si tomamos cualquier combinación lineal de estas funciones que son continuas y la igualamos a cero

$\alpha_1 f_1(t) + \alpha_2 f_2(t) + \dots + \alpha_n f_n(t) = 0 \quad \forall t \in [a,b]$, si hacemos $t = a+\frac{3(b-a)}{4}$

$f_2\left(a+\frac{3(b-a)}{4}\right) = f_3\left(a+\frac{3(b-a)}{4}\right) = \dots = f_n\left(a+\frac{3(b-a)}{4}\right) = 0$

$\Rightarrow f_1\left(a+3\left(\frac{b-a}{4}\right)\right) = -1$; en cambio $\Rightarrow \alpha_1(-1) = 0 \Rightarrow \alpha_1 = 0$; Si tomamos $t = a+3\left(\frac{b-a}{2^{k+1}}\right) \Rightarrow \alpha_k \underbrace{f_k\left(a+3\left(\frac{b-a}{2^{k+1}}\right)\right)}_{-1} = 0$

$\Rightarrow \alpha_k = 0$ para todo $k \Rightarrow f_1, f_2, \dots, f_n$ son linealmente independientes, que es lo que queríamos probar