Prueba nº 4 (2º cuatrimestre) (1)

I. Calcular el valor de a y b para que el vector $\vec{v}=(a,-2,1,b)$ se pueda expresar como combinación lineal de los vectores $\vec{u}_1=(1,2,3,4)$ y $\vec{u}_2=(-1,0,-2,3)$.

. Que $\vec{v}$ sea combinación lineal de $\vec{u}_1$ y $\vec{u}_2$ quiere decir que se pueden encontrar dos escalares (nº reales) x, y tales que permiten expresar $\vec{v}$ como combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2$, es decir

$\vec{v} = x\vec{u}_1 + y\vec{u}_2$, sustituyendo $\vec{v}, \vec{u}_1, \vec{u}_2$ por los datos del problema resulta

$(a,-2,1,b) = x(1,2,3,4) + y(-1,0,-2,3)$ de donde se obtiene:

$a = x-y$; $-2 = 2x+0\cdot y$; $1 = 3x-2y$;

$b = 4x+3y$, es decir tenemos 4 ecuaciones para obtener los valores de x, y, así que elegimos la 2ª y la 3ª de donde resulta $2x=-2 \Rightarrow \boxed{x=-1}$

$3x-2y=1 \Rightarrow 3(-1)-2y=1 \Rightarrow -2y=1+3$

$y=\frac{4}{-2}=\boxed{-2}$, de donde tomando la 1ª ecuación $a=x-y \Rightarrow$

$a=(-1)-(-2) = -1+2 = 1$; $\boxed{a=1}$; tomando la 4ª ecuación tenemos $b=4x+3y = 4(-1)+3(-2) \Rightarrow b=-4-6=\boxed{-10}$

$\boxed{a=+1}$; $\boxed{b=-10}$

Nota: En general, encontrar los escalares que intervienen ~~en~~ una combinación lineal es resolver un sistema de ecuaciones, en este caso, usando la escritura de los vectores como columnas tendríamos

$$\underset{\vec{u}_1}{x\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}} + \underset{\vec{u}_2}{y\begin{bmatrix}-1\\0\\-2\\3\end{bmatrix}} = \begin{bmatrix}a\\-2\\1\\b\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}1&-1\\2&0\\3&-2\\4&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a\\-2\\1\\b\end{bmatrix}$$, es decir

el sistema
$$\begin{aligned} x-y&=a\\ 2x&=-2\\ 3x-2y&=1\\ 4x+3y&=b \end{aligned} \xrightarrow[\text{Gauss}]{\text{por}} \begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 1 & -1 & a\\ 2 & 0 & -2\\ 3 & -2 & 1\\ 4 & 3 & b \end{array} \xrightarrow[\text{II} \to \text{I}]{\text{I} \rightleftarrows \text{II}} \begin{array}{cc|c} x & y & \\ 2 & 0 & -2\\ 3 & -2 & 1\\ 1 & -1 & a\\ 4 & 3 & b \end{array}$$

I sigue

$$\begin{array}{l|cc|c} & x & y & \\ \hline \tfrac{1}{2} I_a & 1 & 0 & -1 \\ II^a - \tfrac{3}{2} I_a & 0 & -2 & 4 \\ III^a - I_a & 0 & -1 & a+1 \\ IV^a - 4 I_a & 0 & 3 & b+4 \end{array}
\qquad
\begin{array}{l|cc|c} & x & y & \\ \hline I_a & 1 & 0 & -1 \\ II^a/(-2) & 0 & 1 & -2 \\ III^a + II^a & 0 & 0 & (a-1) \\ IV^a - 3 II^a & 0 & 0 & (b+10) \end{array}$$

$x = -1$
$y = 2$
$a - 1 = 0$
$b + 10 = 0$

$$\boxed{a = 1 \ ; \ b = -10}$$

II. Sea $(V_3, +, \cdot, \mathbb{R})$ un espacio vectorial, sea $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, u_3\}$ un conjunto de vectores linealmente independientes. Demostrar que el conjunto de los vectores $\{\vec{u}_1+\vec{u}_2,\ u_1+\vec{u}_3,\ \vec{u}_2+\vec{u}_3\}$ está formado por vectores linealmente independientes.

• Recordatorio: Que los vectores $(\vec{u}_1+\vec{u}_2)$; $(\vec{u}_1+\vec{u}_3)$; $(\vec{u}_2+\vec{u}_3)$ sean linealmente independientes quiere decir que cualquier combinación lineal de ellos igualada al vector $\vec{0}$ está producida por escalares nulos, es decir si

$$\alpha_1(\vec{u}_1+\vec{u}_2) + \alpha_2(\vec{u}_1+\vec{u}_3) + \alpha_3(\vec{u}_2+\vec{u}_3) = \vec{0},$$ debemos deducir que $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$. Veamos:

$$\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_1\vec{u}_2 + \alpha_2\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_3 + \alpha_3\vec{u}_2 + \alpha_3\vec{u}_3 = \vec{0},$$ entonces

$$[\alpha_1+\alpha_2]\vec{u}_1 + [\alpha_1+\alpha_3]\vec{u}_2 + [\alpha_2+\alpha_3]\vec{u}_3 = \vec{0},$$ pero como $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ son linealmente independientes los escalares $(\alpha_1+\alpha_2)$; $(\alpha_1+\alpha_3)$; $(\alpha_2+\alpha_3)$ que producen la combinación lineal nula $(=\vec{0})$ deben ser cero, es decir

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \end{array}\right\} \ 2\alpha_1 = 0 \ \boxed{\alpha_1 = 0}$$

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0$; $0 + \alpha_2 = 0$

$\boxed{\alpha_2 = 0} \Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{\alpha_3 = 0}$

es decir $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ son escalares cero, verificándose que los vectores $(\vec{u}_1+\vec{u}_2)$; $(\vec{u}_1+\vec{u}_3)$; $(\vec{u}_2+\vec{u}_3)$ son linealmente independientes porque lo son también los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$ de donde proceden.

III.- Dado el conjunto $U = \{(x,y,z) \mid x+y+z=1,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$ $U \subset \mathbb{R}^3$, estudiar si U tiene estructura de subespacio vectorial del espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.

- Recordatorio. Si U es subespacio vectorial, entonces debe verificar estas dos propiedades:

I. Si $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in U$, entonces $\vec{u}+\vec{v} \in U$

II. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in U$, entonces $\alpha\vec{u} \in U$

Pero no cumple ninguna de las dos, veamos:

Si $\vec{u} \in U$, entonces $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, con $x_1+y_1+z_1=1$

Si $\vec{v} \in U$, entonces $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ con $x_2+y_2+z_2=1$

pero $(\vec{u}+\vec{v}) = (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (\overbrace{x_1+x_2}^{x_3}, \overbrace{y_1+y_2}^{y_3}, \overbrace{z_1+z_2}^{z_3})$,

ahora bien, $(\vec{u}+\vec{v}) = (x_3,y_3,z_3)$ para que pertenezca a U debe verificar que $x_3+y_3+z_3=1$, pero $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) = 1+1=2 \neq 1$, de donde $(\vec{u}+\vec{v}) \notin U \Longrightarrow U$ no es subespacio vectorial, No es necesario verificar que tampoco cumple la propiedad II (que es más fácil). [Sea $0 \in \mathbb{R}$, $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1) \in U$, $x_1+y_1+z_1=1$, entonces $0\cdot\vec{u} = 0\cdot(x_1,y_1,z_1) = (0,0,0)$, $0+0+0=0 \neq 1 \Rightarrow 0\vec{u} \notin U$]

IV. Dado el conjunto de vectores $S = \{(x,y,z) \mid 2x-y+z=0;\ x+y+z=0\}$, donde $x,y,z \in \mathbb{R}$. Demostrar que es un subespacio vectorial del espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$. Encontrar un conjunto finito de vectores A tal que las combinaciones lineales de los vectores de A coincidan con S: $S = \langle A \rangle$

El conjunto S es el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0 \\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$

, que se puede resolver por el método de Gauss:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \overset{I \leftrightarrows II}{\sim} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$

III.- Dado el conjunto $\bar{U} = \{(x,y,z) \mid x+y+z=1,\ x,y,z \in \mathbb{R}\}$ $U \subset \mathbb{R}^3$, estudiar si $\bar{U}$ tiene estructura de subespacio vectorial del espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot, \mathbb{R})$.

- Recordatorio. Si U es subespacio vectorial, entonces debe verificar estas dos propiedades:

I. Si $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in U$, entonces $\vec{u}+\vec{v} \in \bar{U}$

II Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in \bar{U}$, entonces $\alpha\vec{u} \in \bar{U}$

Pero no cumple ninguna de las dos, veamos:

Si $\vec{u} \in \bar{U}$, entonces $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$, con $x_1+y_1+z_1=1$

Si $\vec{v} \in U$, entonces $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ con $x_2+y_2+z_2=1$

pero $(\vec{u}+\vec{v}) = (x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2) = (\overbrace{x_1+x_2}^{x_3}, \overbrace{y_1+y_2}^{y_3}, \overbrace{z_1+z_2}^{z_3})$,

ahora bien, $(\vec{u}+\vec{v}) = (x_3, y_3, z_3)$ para que pertenezca a U debe verificar que $x_3+y_3+z_3=1$, pero $(x_1+x_2)+(y_1+y_2)+(z_1+z_2) = (x_1+y_1+z_1)+(x_2+y_2+z_2) = 1+1 = 2 \neq 1$, de donde $(\vec{u}+\vec{v}) \notin \bar{U} \Rightarrow U$ no es subespacio vectorial, No es necesario verificar que tampoco cumple la propiedad II (que es más fácil). [Sea $0 \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (x_1,y_1,z_1) \in U$, $x_1+y_1+z_1=1$, entonces $0 \cdot \vec{u} = 0 \cdot (x_1,y_1,z_1) = (0,0,0)$, $0+0+0=0 \neq 1 \Rightarrow 0\vec{u} \notin \bar{U}$]

IV. Dado el conjunto de vectores $S = \{(x,y,z) \mid 2x-y+z=0\ ;\ x+y+z=0\}$, donde $x,y,z \in \mathbb{R}$. Demostrar que es un subespacio vectorial del espacio $(\mathbb{R}^3, +, \cdot\, \mathbb{R})$. Encontrar un conjunto finito de vectores A tal que las combinaciones lineales de los vectores de A coincidan con S: $S = \langle A \rangle$

El conjunto S es el conjunto de las soluciones del sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x-y+z&=0 \\ x+y+z&=0 \end{aligned}$$

, que se puede resolver por el método de Gauss:

$$\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ \hline 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \underset{\sim}{\overset{I \leftrightarrow II}{}} \begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}$$