MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

6. Diagonalización

6.1. Calcula los autovalores y autovectores de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6.2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

a) Autovalores y autovectores.

b) ¿Es diagonalizable?

c) La matriz de paso y la matriz diagonal.

6.3. Halla la forma diagonal, si es posible, de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.4. Dado el endomorfismo f de matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

¿se puede encontrar otra base B', tal que respecto de ella sea f diagonalizable?

6.5. Halla los autovalores y autovectores del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ dado por

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z).$$

6.6. Halla los valores propios y los vectores propios de los siguientes endomorfismos:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (4x_1 + 3x_2, 3x_1 - 4x_2), \\ g(x, y, z) &= (2y - z, 2x - z, 2x - y). \end{aligned}$$

6.7 Se considera el giro de centro $(0,0)$ de ángulo $\alpha \in (0, 2\pi)$ en el plano $\mathbb{R}^2$ dado por la aplicación $G(x_1, x_2) = (x_1 \cos\alpha + x_2 \operatorname{sen}\alpha, -x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.
a) Prueba que G es una aplicación lineal.
b) Prueba que la matriz asociada a G no tiene ningún autovector. ¿Sabrías dar una justificación geométrica de este hecho?

6.8. Halla los autovectores de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.9. ¿ Son diagonalizables las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2+k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Es diagonalizable?
b) Halla la base y la forma diagonal.

6.11. Sea $B = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3}\}$ una base de un espacio vectorial V_3 y sea f el endomorfismo de V_3 dado por

$$f(\overrightarrow{u_1}) = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}, \qquad f(\overrightarrow{u_2}) = 2\overrightarrow{u_1}, \qquad \operatorname{Ker} f = L(\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_3}).$$

Se pide:
a) La matriz de f respecto de la base B.
b) La imagen de f y su dimensión.
c) Los autovalores y la ecuación característica de f.
d) Una base B' respecto de la cual f sea diagonalizable.
e) La matriz del cambio de base de B a B'.

6.12. Estudia para qué valores de los parámetros son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

6.13. Halla A^{33}, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.14 Se tiene dos sucesiónes de números reales $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ de modo que:

$$\begin{array}{rcrcr} x_{n+1} & = & 6x_n & - & y_n \\ y_{n+1} & = & 3x_n & + & 2y_n \end{array}$$

Calcula $\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1})$, siendo $x_1 = y_1 = 1$.

6.15 ¿Cuántas parejas de conejos se tendrán en un año, comenzando con una sola, si cada mes una de las parejas da origen a una nueva, la cual vuelve a reproducirse a partir del segundo mes? (Fibonacci, "*Liber Abaci*"s. XIII).

6.16 Para aprobar una asignatura de grado se tiene un máximo de 6 convocatorias. En cada convocatoria ocurre que los alumnos que se presentan por primera vez aprueban 3 de cada 10, obtienen compensable (entre 4 y 5) otros 3 de cada 10 y suspende el resto. Además los alumnos compensables de otras convocatorias aprueban 7 de cada 10, saca complensable 1 de cada 10 y suspenden los demás. Y por último, los alumnos suspensos de otras convocatorias aprueban 3 de cada 10 y el resto suspende. Partiendo de un grupo de 125 alumnos que cursan por primera vez la asignatura¿cuántos de ellos no llegarán a aprobarla?