Grupo C
2012-13

Prueba nº 6 (2º cuatrimestre) 17/04/13

Apellidos - - - - - - - - - - - -

Nombre - - - - - - - - - - - - -

I. La ecuación $x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0 \quad (*)$, donde
$a, b \in \mathbb{R}$, son coeficientes conocidos, se denomina ecuación
diferencial lineal homogénea de segundo orden. Una solu-
ción de esta ecuación es toda función $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que ve-
rifica la ecuación $(*)$

Iα) Comprueba que las funciones $f_1(t) = e^{-t}$ y $f_2(t) = te^{-t}$ son
soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.

Iβ) Sea S el conjunto de todas las soluciones de la ecua-
ción $(*)$. Prueba que es un subespacio vectorial del conjun-
to de las funciones reales de variable real

Iγ) Se puede probar que dados dos valores cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
existe una función $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la ecua-
ción $(*)$ y que cumple que $x(0) = \alpha_1$ y $x'(0) = \alpha_2$. Usando el
resultado anterior prueba que S (el conjunto de las solucio-
nes de $(*)$ es un espacio vectorial de dimensión 2.

Iδ) Comprueba que las funciones $f_1(t) = e^{-t}$ y $f_2(t) = t \cdot e^{-t}$ (estudiadas en Iα) forman una base del conjunto de soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.

II. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones de $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$ en sí mismo, son aplicaciones lineales:

IIα) $f[(x,y,z)] = (2x-y, 2y-z, 2z-x) = f(x,y,z)$

IIβ) $g[(x,y,z)] = g(x,y,z) = (3x, 4y, 5z)$

IIγ) $h[(x,y,z)] = h(x,y,z) = (x, -y, z+1)$.

PRUEBA nº 6 (2º cuatrimestre) (1)

I. La ecuación

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0 \quad (*)$$, donde $a, b \in \mathbb{R}$ son coeficientes conocidos, se denomina ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Una solución de esta ecuación es toda función $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que verifique la ecuación $(*)$.

$\boxed{I\alpha}$ Comprueba que las funciones $f_1(t) = e^{-t}$ y $f_2(t) = t\,e^{-t}$ son soluciones de la ecuación $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$.

Si hacemos $x(t) = f_1(t)$, entonces $x'(t) = f_1'(t) = (e^{-t})' = (-1)e^{-t}$ $\Rightarrow f_1'(t) = -e^{-t}$; $x''(t) = (x'(t))' = (f_1'(t))' = (-e^{-t})' = (-1)(-e^{-t})$ $\Rightarrow f_1''(t) = e^{-t}$, sustituyendo en la ecuación resulta

$$e^{-t} + 2(-e^{-t}) + e^{-t} = e^{-t} - 2e^{-t} + e^{-t} = 2e^{-t} - 2e^{-t} = 0$$

o sea $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$ se verifica para $x(t) = f_1(t)$

Para $x(t) = f_2(t) = t e^{-t}$; $x'(t) = f_2'(t) = (t e^{-t})' = 1.e^{-t} + t(-1)e^{-t}$ $\Rightarrow f_2'(t) = e^{-t} - t e^{-t} = (1-t)e^{-t}$; $x''(t) = (x'(t))' = (f_2'(t))' =$ $= ((1-t)e^{-t})' = (-1)e^{-t} + (1-t)(-1)e^{-t} = -e^{-t} - e^{-t} + te^{-t} =$ $= -2e^{-t} + te^{-t} = (t-2)e^{-t} = f_2''(t)$. Sustituyendo en la ecuación resulta

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = (t-2)e^{-t} + 2(1-t)e^{-t} + t.e^{-t} =$$
$$= \underline{te^{-t}} - 2e^{-t} + 2e^{-t} - 2te^{-t} + \underline{te^{-t}} = 2\cancel{te^{-t}} - 2\cancel{te^{-t}} - \cancel{2e^{-t}} + \cancel{2e^{-t}}$$
$$= 0 + 0 = 0$$, es decir $f_2(t)$ verifica la ecuación diferencial por lo que es una solución de la ecuación.

$\boxed{I\beta}$. Sea S el conjunto de todas las soluciones de la ecuación $(*)$. Prueba que es un subespacio vectorial del conjunto de todas las funciones reales de variable real.

• Para probar que S es un subespacio vectorial de todas las funciones reales de variable real debemos probar las siguientes condiciones

1) Si $\vec{u} \in S$, $\vec{v} \in S$ entonces $\vec{u} + \vec{v} \in S$

2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in S$ entonces $\alpha \vec{u} \in S$. • Veamos si se cumplen

I β) sigue

Si $\vec{u} \in S'$, quiere decir que $\vec{u}$ es una función de variable real que cumple la ecuación $\vec{u} = f(t)$ con $f''(t) + a f'(t) + b f(t) = 0$, asimismo si $\vec{v} \in S'$ es que $\vec{v} = g(t)$ que cumple la ecuación (*): $g''(t) + a g'(t) + g(t) = 0$

ahora bien $(\vec{u}+\vec{v}) = [f(t) + g(t)]$, si hacemos $x(t) = (f(t) + g(t))$, entonces $x''(t) = [(f(t)+g(t))']' = [f'(t)+g'(t)]' = (f''(t) + g''(t))$; $x'(t) = (f(t)+g(t))' = f'(t)+g'(t)$, con lo cual obtenemos que $x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = (f''(t)+g''(t)) + a(f'(t)+g'(t)) + (f(t)+g(t)) = f''(t)+g''(t) + af'(t) + a g'(t) + f(t) + g(t)$

$= [f''(t) + a f'(t) + bf(t)] + [g''(t) + a g'(t) + b g(t)] = 0 + 0 = 0$

pues tanto f, como g cumplen la ecuación, y por esto mismo $[f(t)+g(t)]$ cumple la ecuación (*), o sea $\vec{u}+\vec{v} = f(t)+g(t) \in S$ con lo que verificamos la 1ª condición. Veamos la segunda

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ $\vec{u} \in S$, entonces $\vec{u} = f(t)$ con $f(t)$ una solución de la ecuación (*) o sea $f''(t) + af'(t) + bf(t) = 0$, veamos que $\alpha\vec{u} = (\alpha f(t))$ también cumple la ecuación

$[\alpha f(t)]' = (\alpha f'(t))$; $([\alpha f(t)]')' = (\alpha f'(t))' = \alpha f''(t) \Rightarrow$

$x''(t) + a x(t) + b x(t) = \alpha f''(t) + a(\alpha f'(t)) + b(\alpha f'(x)) =$

$= \alpha \underbrace{[f''(t) + a f'(t) + b f(t)]}_{0} = \alpha . 0 = 0$, es decir, hemos verificado que se cumple la condición segunda.

I γ) Se puede probar que dados dos valores cualesquiera $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, existe una ÚNICA función $x: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que es solución de la ecuación (*) y que cumple que $x(0) = \alpha_1$, $x'(0) = \alpha_2$. Usando el anterior resultado prueba que S, el conjunto de las soluciones de (*), es un espacio vectorial de dimensión 2.

[Nota: El enunciado de esta pregunta tiene una errata: debe decir "existe una ÚNICA función" en lugar de "existe una función". Como veremos la condición única de la función es lo que permite demostrar este apartado].

I (x) sigue

Para demostrar que el conjunto S de las soluciones de la ecuación diferencial $(*)$: $x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = 0$ es un subespacio vectorial de dimensión 2, hay que encontrar dos soluciones de $(*)$ que sean un sistema de generadores de S, y que sean linealmente independientes.

Para ello hay que usar la propiedad dada en el enunciado (con la corrección de "única función"), que nos dice que dados dos números reales α_1, α_2 existe una única función $x(t)$ que es solución de la ecuación diferencial, y que cumple $x(0) = \alpha_1$; $x'(0) = \alpha_2$. Veamos:

· Si tomamos $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = 0$, es evidente por ~~esta~~ la propiedad dada que EXISTE UNA ÚNICA FUNCIÓN $x_1(t)$ que verifica las dos propiedades siguientes

(I) $x_1(t)$ es solución de la ecuación diferencial $(*)$

(II) $x_1(0) = 1$; $x_1'(0) = 0$, además es claro que $x_1 \in S$.

· Por otra parte si tomamos $\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = 1$, es también evidente que existe una ÚNICA función que verifica que

(I) $x_2(t)$ es solución de la ecuación diferencial $(*)$

(II) $x_2(0) = 0$; $x_2'(0) = 1$. , donde es claro que $x_2 \in S$.

Estas dos funciones $x_1(t)$; $x_2(t)$ son una base de S pues:

(I) SISTEMA DE GENERADORES. Dada cualquier función perteneciente a S (o sea dado un "vector" de S), $x \in S$ tomamos α_1 por el número real $x(0)$ $[\alpha_1 = x(0)]$ y α_2 por $x'(0)$ $[\alpha_2 = x'(0)]$, y construimos la función $y(t) = x(0) \cdot x_1(t) + x'(0) \cdot x_2(t)$, entonces se demuestra fácilmente que $y(t) \in S$, ya que $y''(t) + a\,y'(t) + b\,y(t) =$

$$[x(0)x_1(t) + x'(0)x_2(t)]'' + a\,[x(0)x_1(t) + x'(0)x_2(t)]' + b\,[x(0)x_1(t) + x'(0)x_2(t)] =$$

$$= x(0)x_1''(t) + x'(0)x_2''(t) + a\,x(0)x_1'(t) + a\,x'(0)x_2'(t) + b\,x(0)x_1(t) + b\,x'(0)x_2(t) =$$

$$[x(0)x_1''(t) + a\,x(0)x_1'(t) + b\,x(0)x_1(t)] + [x'(0)x_2''(t) + a\,x'(0)x_2'(t) + b\,x'(0)x_2(t)]$$

$$= x(0)\,[\underbrace{x_1''(t) + a\,x_1'(t) + b\,x_1(t)}_{=0}] + x'(0)\,[\underbrace{x_2''(t) + a\,x_2'(t) + b\,x_2(0)}_{=0}] =$$

$x(0) \cdot 0 + x'(0) \cdot 0 = 0$, ya que $x_1(t)$, $x_2(t)$ son soluciones de $(*)$

IV) sigue

entonces $y(t)$ es también solución de la ecuación diferencial, y se verifica que $y(0) = x(0) \cdot x_1(0) + x'(0)\, x_2(0) = x(0) \cdot 1 + x'(0) \cdot 0 = x(0)$, es decir $y(0) = x(0)$. Asimismo $y'(t) = x(0)\, x_1'(t) + x'(0)\, x_2'(t)$, verifica que $y'(0) = x(0)\, x_1'(0) + x'(0)\, x_2'(0) = x(0) \cdot 0 + x'(0) \cdot 1 = x'(0)$ o sea $\boxed{y'(0) = x'(0)}$. Hemos probar que $y(t)$ es una función de S que cumple las dos condiciones anteriores, pero como nuestro enunciado dice "solamente hay una función de S que verifica estas condiciones: $y(0) = \alpha_1 = x(0)$; $y'(0) = \alpha_2 = x'(0)$, necesariamente la función $y(t)$ $x(t)$ deben coincidir [en caso contrario habría dos funciones ~~distintas~~ que cumple la propiedad], de donde deducimos que $x(t) = y(t) \Rightarrow \boxed{x(t) = x(0)\, x_1(t) + x'(0)\, x_2(t)}$

lo que quiere decir que las funciones $\{x_1(t); x_2(t)\}$ son un sistema de generadores de S, ya que con ellos podemos expresar cualquier $x(t)$ de S.

Queda por demostrar que $x_1(t)$; $x_2(t)$ son funciones de S linealmente independientes:

Sea una combinación lineal cualquiera de las funciones $x_1(t)$; $x_2(t)$, $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)$, si la igualamos a la función $O(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, es decir la función nula tenemos que $\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t) = O(t) = 0 \Rightarrow$ derivando

$$[\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t)]' = [O(t)]' = \boxed{\lambda_1 x_1'(t) + \lambda_2 x_2'(t) = O(t) = 0}$$

para todo $t \in \mathbb{R}$, si hacemos $t = 0$ tenemos que se cumple

$\lambda_1 x_1(0) + \lambda_2 x_2(0) = O(0) = 0$; pero $x_1(0) = 1$; $x_2(0) = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = 0}$

$\lambda_1 x_1'(0) + \lambda_2 x_2'(0) = O(0) = 0$; pero $x_1'(0) = 0$; $x_2'(0) = 1$, entonces

$\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \boxed{\lambda_2 = 0}$

lo que quiere decir que $x_1(t)$, $x_2(t)$ son funciones (vectores) de S linealmente independientes, es decir $\{x_1(t), x_2(t)\}$ es una base de S, es decir $\boxed{\dim S = 2}$.

Iδ) Comprueba que las funciones $f_1(t)=e^{-t}$, $f_2(t)=te^{-t}$ (estudiadas en Iα) forman una base del subespacio vectorial de las soluciones de la ecuación diferencial $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0$

Como hemos visto en el apartado anterior el conjunto (subespacio vectorial) de las soluciones de la ecuación diferencial $x''(t)+a\,x'(t)+b\,x(t)=0$ es un subespacio S de dimensión 2, para cualesquiera valores $a,b\in\mathbb{R}$, es decir cuando $\underline{a=2,\ b=1}$ el subespacio de las funciones que son soluciones de $x''(t)+\underset{a}{2}\cdot x'(t)+\underset{b}{1}\cdot x(t)=0$ también tiene dimensión 2. Habiendo demostrado que a ese subespacio ~~...~~ pertenecen las funciones $f_1(t)=e^{-t}$; $f_2(t)=t.e^{-t}$ (en el apartado Iα), basta probar que estas funciones son linealmente independientes: Sea una combinación lineal de $f_1(t)$; $f_2(t)$ nula

$$\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)=0(t)=0 \Rightarrow \lambda_1 e^{-t}+\lambda_2 te^{-t}=0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2 t)e^{-t}=0 \Longrightarrow \boxed{\lambda_1+\lambda_2 t=0} \quad \forall t\in\mathbb{R},$$

haciendo $t=0 \Rightarrow \lambda_1+\lambda_2\cdot 0=0 \Rightarrow \lambda_1=0 \Rightarrow \lambda_2 t=0$ $\forall t$, con $t=1 \Rightarrow \lambda_2=0$; es decir $f_1(t)$; $f_2(t)$ son linealmente independientes lo que demuestra que $\{f_1(t);f_2(t)\}=\{e^{-t};\ te^{-t}\}$ es una base del subespacio de las soluciones de la ecuación diferencial $x''(t)+2x'(t)+x(t)=0$

II. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones de $(\mathbb{R}^3,+,\cdot\,\mathbb{R})$ en sí mismo, son aplicaciones lineales

IIα) $f[(x,y,z)]=(2x-y,\ 2y-z,\ 2z-x)=f(x,y,z)$

Podemos demostrarlo <u>directamente</u> comprobando las dos propiedades que caracterizan una aplicación lineal:

1) $f(\vec{u}+\vec{v})=f(\vec{u})+f(\vec{v})$

2) $f(\alpha\vec{u})=\alpha f(\vec{u})$.

III α) sigue

1) Dado $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f[(x,y,z)] = (2x-y, 2y-z, 2z-x)$ tenemos

$\vec{u} \equiv (x_1,y_1,z_1) \longrightarrow \boxed{f(\vec{u}) = (2x_1-y_1, 2y_1-z_1, 2z_1-x_1)}$

$\vec{v} \equiv (x_2,y_2,z_2) \longrightarrow \boxed{f(\vec{v}) = (2x_2-y_2), 2y_2, z_2), 2z_2-x_2)}$

$\vec{u}+\vec{v} = (x_1+x_2, y_1+y_2, z_1+z_2) \to f(\vec{u}+\vec{v}) = (2(x_1+x_2)-(y_1+y_2), (2(y_1+y_2)-(z_1+z_2)), 2(z_1+z_2)-(x_1+x_2)).$

$\Rightarrow f(\vec{u}+\vec{v}) = (2x_1+2x_2-y_1-y_2, 2y_1+2y_2-z_1-z_2, 2z_1+2z_2-x_1-x_2) =$

$= \underbrace{(2x_1-y_1, 2y_1-z_1, 2z_1-x_1)}_{f(\vec{u})} + \underbrace{(2x_2-y_2, 2y_2-z_2, 2z_2-x_2)}_{f(\vec{v})}$

$\Rightarrow f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u})+f(\vec{v})$

2) Dado $\alpha \in \mathbb{R}$ $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (x,y,z) \Rightarrow \alpha.(x,y,z) = \alpha\vec{u} =$

$= (\alpha x, \alpha y, \alpha z) \Rightarrow f(\alpha x, \alpha y, \alpha z) = (2(\alpha x)-(\alpha y); 2(\alpha y)-(\alpha z), 2(\alpha z)-(\alpha x)$

$= (\alpha(2x-y), \alpha(2y-z), \alpha(2z-x)) = \alpha\underbrace{(2x-y, 2y-z, 2z-x)}_{f(\vec{u})} \Rightarrow$

$f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$, es decir f es LINEAL.

También podríamos expresar f en forma matricial

$f[(x,y,z)] = (2x-y, 2y-z, 2z-x)$, que usando la notación en columnas (según la costumbre de clase) tendríamos

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x-y \\ 2y-z \\ 2z-x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

, es decir, la aplicación funciona así $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$. Debemos probar las dos propiedades

1) $f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u})+f(\vec{v})$; 1) Sea $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}$, $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}$, entonces

2) $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$

$$f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) =$$

$$= \left(\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}}_{f\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}}_{f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right)}\right) = f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}\right) + f\left(\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix}\right) = f(\vec{u})+f(\vec{v})$$

$$\Rightarrow \boxed{f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u})+f(\vec{v})}$$

II α) sigue

2) $f(\alpha\vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$, donde hacemos $\vec{u} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow \alpha\vec{u} = \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \Rightarrow f\left(\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \alpha \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}}_{f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \vec{u}} = \alpha f(\vec{u})$

con lo que hemos probado que la aplicación f es LINEAL

II β) Lo mismo para $g[(x,y,z)] = (3x, 4y, 5z)$, usando la representación matricial (convención columnas)

$$f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x \\ 4y \\ 5z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

, se ve, al igual que en el caso II α) que f es una aplicación lineal [Nota], en general, cuando f admite una representación matricial de este tipo $f\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ entonces f es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

II γ) $h[(x,y,z)] = (x, -y, z+1) \Rightarrow f\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z+1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} x+0 \\ -y+0 \\ z+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

, como se ve f no admite una representación matricial del tipo anterior (le sobra el vector $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$) y por ello no podrá ser una aplicación lineal, como se demuestra fácilmente viendo que $f(\vec{0}) \neq \vec{0}$, lo cual impide que f sea lineal pues para toda aplicación lineal $f(\vec{0}) = \vec{0}$

$$f(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow f(\vec{0}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \doteq \vec{0} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ f NO ES UNA APLICACIÓN LINEAL