I. Estudiar para qué valores de los parametros p, q, es diagonalizable la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculemos el polinomio característico, y hallemos sus raíces para obtener los autovalores y sus multiplicidades.

$$\begin{vmatrix} (0-\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & (p-\lambda) & 0 \\ q & 0 & (0-\lambda) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 0 \\ 0 & p-\lambda & 0 \\ q & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(-\lambda)\begin{vmatrix} p-\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda)(p-\lambda)(-\lambda) = \lambda^2(p-\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$\lambda_1 = 0$; $\lambda_2 = 0$ $[\lambda^2 = 0]$ y $\lambda_3 = p$, es decir

$\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ (multiplicidad 2) siempre que $\lambda_1 \neq \lambda_3 = p \Rightarrow p \neq 0$. o alternativamente; $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ [multiplicidad 3] para $p = 0$. Estudiemos estos casos:

<u>Caso I</u>. $p \neq 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ (multiplicidad 2) $\lambda_3 = p \neq 0$ lo que obliga para que A sea diagonalizable que la dimensión del subespacio de autovectores correspondiente a $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ~~tenga~~ dimensión 2 para que coincida con la <u>multiplicidad</u> de $\lambda_1 = 0$. Veamos:

$$E(0) = \operatorname{Ker}(A - 0.I) = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}$$ cuya

dimensión es $\left(3 - \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$. Ahora bien como

$p \neq 0$, el menor $\begin{vmatrix} 0 & p \\ q & 0 \end{vmatrix} = pq$, sera cero si $q = 0$

$pq = 0$ si $q = 0 \Rightarrow \operatorname{rang}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow$

Caso I

dimensión $E(0) = 3-1 = 2$, es decir **A es diagonizable**, en cambio si $q \neq 0 \Rightarrow pq \neq 0$, de donde obtenemos rango $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$, es decir la dimensión de $E(0)$ es $(3-2) = 1$, como $1 \neq 2$ (multiplicidad de 0) entonces **A no es diagonizable**

Caso II. $p = 0$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, hay un solo autovalor con multiplicidad 3, hallando la dimensión de $E(0) = Ker(A - 0 \cdot I) = Ker \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tenemos $\dim E(0) = 3 - \text{rang}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 \end{bmatrix}\right)$, pero el rango de $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \boxed{q} & 0 & 0 \end{bmatrix}$ es $\begin{matrix} 0 & \text{si } q = 0 \\ 1 & \text{si } q \neq 0 \end{matrix}$, es decir que

si $q = 0$ dimensión $E(0) = 3 - \text{rang}[A] = 3 \Rightarrow$

A DIAGONIZABLE.

En cambio si $q \neq 0$ dimen $E(0) = 3 - \text{rang}(A) = 3 - 1 = 2$ ya que rango de $A = 1$, como $2 \neq 3$, entonces no coincide la multiplicidad del autovalor con la dimensión del subespacio de los autovectores correspondiente de donde se deduce que **A No es diagonalizable**

Resumiendo:

I. Si $p \neq 0$ y $q = 0$ entonces A es DIAGONALIZABLE

II. Si $p \neq 0$ y $q \neq 0$ entonces A no es DIAGONALIZABLE

III Si $p = 0$ y $q = 0$ entonces A es DIAGONALIZABLE

IV Si $p = 0$ y $q \neq 0$ entonces A no es DIAGONALIZABLE

II. Sea $B=\{\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3\}$ una base de V_3, un subespacio vectorial, y sea f un endomorfismo dado por

$$f(\vec{u}_1)=\vec{u}_1+\vec{u}_2\,,\quad f(\vec{u}_2)=2\vec{u}_1\ ;\quad \mathrm{Ker} f = L(\vec{u}_1+\vec{u}_3)$$

Se pide:

a) La matriz de f respecto a la base B

b) La ecuación característica y los autovalores de f

c) Una base B' respecto de la cual f sea diagonal

Si $\mathrm{Ker} f = L(\vec{u}_1+\vec{u}_3)$, entonces $f(\vec{u}_1+\vec{u}_3)=\vec{0}$, es decir $f(\vec{u}_1)+f(\vec{u}_3)=\vec{0} \Rightarrow f(\vec{u}_3)=-f(\vec{u}_1)=-[\vec{u}_1+\vec{u}_2]$ $=-\vec{u}_1-\vec{u}_2$, y teniendo en cuenta que la matriz de f respecto a la base B es $\mathrm{Mat}_B^B(f)=\left[[f(\vec{u}_1)]_B\ [f(\vec{u}_2)]_B\ [f(\vec{u}_3)]_B\right]$ donde $[f(\vec{u}_1)]_B=[\vec{u}_1+\vec{u}_2]_B=(1.\vec{u}_1+1.\vec{u}_2+0.\vec{u}_3)_B=(1,1,0)$
$[f(\vec{u}_2)]_B=[2\vec{u}_1]_B=(2,0,0)$; $[f(\vec{u}_3)]_B=[-\vec{u}_1-\vec{u}_2]_B=$
$=(-1,-1,0) \Rightarrow \boxed{\mathrm{Mat}_B^B(f)=\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}}$. Recordemos el esquema:

$$\begin{tikzcd} V_3 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "B"'] & V_3 \arrow[d, "B"] \\ \mathbb{R}^3 \arrow[r, "\begin{bmatrix}1&2&-1\\1&0&-1\\0&0&0\end{bmatrix}"] & \mathbb{R}^3 \end{tikzcd}$$

b) La ecuación característica es $\begin{vmatrix}1-\lambda & 2 & -1\\ 1 & -\lambda & -1\\ 0 & 0 & -\lambda\end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow (-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=(-\lambda)\left((1-\lambda)(-\lambda)+2\right)=(-\lambda)[-\lambda+\lambda^2-2]$
$=0 \Rightarrow \boxed{(-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0}$. Al resolverla obtenemos los autovalores: $(-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=0$

$(-\lambda)(\lambda^2-\lambda-2)=0 \Rightarrow \lambda^2-\lambda-2=0 \Rightarrow \dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ $\begin{cases}\lambda_2=\frac{1+3}{2}=2\\ \lambda_3=\frac{1-3}{2}=-1\end{cases}$

$\Rightarrow$ Autovalores $\boxed{\lambda_1=0,\ \lambda_2=2;\ \lambda_3=-1}$.

II bis

c) Teniendo en cuenta que los tres autovalores son distintos, existe una base de autovectores respecto de la cual la matriz es diagonal, y por lo tanto lo es el endomorfismo f. Calculemos los autovectores correspondientes a los autovalores obtenidos:

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow E(0) \equiv \mathrm{Ker}\,[A - 0I] \equiv \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{C_1 + C_3} \quad \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix}1\\0\\1\end{matrix}} & \begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\0\\1\end{matrix} \end{bmatrix} \rightarrow \text{base de Ker}(A)$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

base de $\mathrm{Im}\,A$

$$\Rightarrow \mathrm{Ker}(A) = L(\vec{u}_1 + \vec{u}_3) = E(0)$$
$$\boxed{[\vec{u}_1 + \vec{u}_3]_B = (1, 0, 1)}$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow E(2) \equiv \mathrm{Ker}\,[A - 2I] \equiv \mathrm{Ker}\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{C_2 + 2C_1} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{base de } E(2)$$
$$\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$\mathrm{Im}(A - 2I)$

$$\Rightarrow E(2) \equiv L(2\vec{u}_1 + \vec{u}_2)$$
$$\Rightarrow [2\vec{u}_1 + \vec{u}_2]_B = (2, 1, 0)$$

$$\lambda_3 = -1 \Rightarrow E(-1) \equiv \mathrm{Ker}\,(A + I) \equiv \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \underset{\sim}{C_1 - C_2} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \text{base de } E(-1)$$
$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad\qquad \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Imagen $(A+I)$

$$\Rightarrow E(-1) = L[\vec{u}_1 - \vec{u}_2]$$
$$\Rightarrow [\vec{u}_1 - \vec{u}_2]_B = (1, -1, 0)$$

$\Rightarrow B' \equiv$ base de autovectores $\equiv \{\vec{u}_1 + \vec{u}_3;\ 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2;\ \vec{u}_1 - \vec{u}_2\}$

es decir $B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ con
$$\vec{w}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_3$$
$$\vec{w}_2 = 2\vec{u}_1 + \vec{u}_2$$
$$\vec{w}_3 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$
, con la matriz de cambio de la base B' a la base B
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathrm{Mat}_{B'}^{B'}(f) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

matriz diagonal

donde
$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

III. Se considera el giro de centro $(0,0)$ y de angulo α con $\alpha \in (0,\pi)$ [* atención se cambia $(0,2\pi)$, por $(0,\pi)$ para que el enunciado sea válido] en el plano $\mathbb{R}^2$ dado por la aplicación $G(x_1,x_2) = (x_1 \cos\alpha + x_2 \operatorname{sen}\alpha, -x_1 \operatorname{sen}\alpha + x_2 \cos\alpha)$, $\forall (x_1,x_2) \in \mathbb{R}$.

a) Prueba que G es una aplicación lineal

Es evidente que $G: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, ya que está definida respecto a la base canonica B_c de $\mathbb{R}^2$ por medio de la matriz

$$\left[[G(1,0)]_{B_c}, [G(0,1)]_{B_c}\right] = \cancel{[[1 \cos\alpha + 0 \cdot \operatorname{sen}\alpha]]_{B_c}} \quad \text{con}$$

$$[G(1,0)]_{B_c} = [1 \cos\alpha + 0 \cdot \operatorname{sen}\alpha, -1 \cdot \operatorname{sen}\alpha + 0 \cdot \cos\alpha]_{B_c} = [\cos\alpha, -\operatorname{sen}\alpha]$$

$$[G(0,1)]_{B_c} = [0 \cdot \cos\alpha + 1 \cdot \operatorname{sen}\alpha, -0 \operatorname{sen}\alpha + 1 \cdot \cos\alpha]_{B_c} = [\operatorname{sen}\alpha, \cos\alpha]$$

$\Rightarrow \operatorname{Mat}_{B_c}^{B_c}(G) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$, y la aplicación G se representa matricialmente

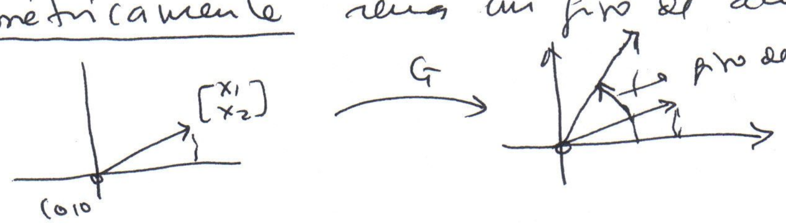
$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "G"] \arrow[d, "B_c"'] & \mathbb{R}^c \arrow[d, "B_c"] \\ \mathbb{R}^2 \arrow[r, "\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}"] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$ lo cual demuestra que G es una aplicación lineal, ya que tiene las propiedades de la linealidad:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix};$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\left[t\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right] = \boxed{t\begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}$$

<u>Geométricamente</u> sería un giro de angulo α, y centro $(0,0)$



III

b) Para que la matriz asociada a G no tenga autovectores basta probar que no tiene autovalores; hallando la ecuación característica tenemos:

$$\left| \begin{bmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \cos\alpha - \lambda & \operatorname{sen}\alpha \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$\Rightarrow (\cos\alpha - \lambda)^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha - 2\lambda\cos\alpha + \lambda^2 + \operatorname{sen}^2\alpha = 0$ pero $\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha = 1$, y ordenando la variable λ tenemos $\lambda^2 + (-2\cos\alpha)\lambda + 1 = 0$, resolviendo esta ecuación en λ tenemos $\lambda = \dfrac{(2\cos\alpha) \pm \sqrt{(2\cos\alpha)^2 - 4\cdot 1}}{2} = \dfrac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4\cos^2\alpha - 4}}{2}$

$$= \frac{2\cos\alpha \pm \sqrt{4[\cos^2\alpha - 1]}}{2} = \frac{2\cos\alpha \pm 2\sqrt{\cos^2\alpha - 1}}{2} \begin{cases} \lambda_1 = \cos\alpha + \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \\ \lambda_2 = \cos\alpha - \sqrt{\cos^2\alpha - 1} \end{cases}$$

Ahora bien λ_1, λ_2 no son números reales, y como estamos trabajando en $\mathbb{R}^2$, no haya autovalores. $\boxed{\text{Nota}}$: A la vez $(\cos^2\alpha - 1) < 0$, ya que $\alpha \in (0, \pi) \Rightarrow \boxed{-1 < \cos\alpha < 1}$, $\sqrt{\cos^2\alpha - 1}$ es un número imaginario. El cambio del enunciado era necesario pues si $\alpha \in (0, 2\pi)$, entonces $\boxed{\cos^2\alpha = 1}$ $\Rightarrow \cos\alpha = \pm 1 \Rightarrow \begin{matrix} \alpha = 0 \\ \alpha = \pi \\ \alpha = 2\pi \end{matrix}$, pero $\pi \in (0, 2\pi)$ y en ese caso habría el autovalor $\lambda_1 = (-1) + 0$; $\lambda_2 = (-1) + 0$ $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$ (doble).

IV. Dada la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Diagonaliza A

b) Calcula A^{33}, A^{2k+1}, A^{2k}

a) Cálculo de la ecuación característica

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 & 6 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 = (-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$(-1-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) = (-1-\lambda)^2(1-\lambda)$$

[1] sigue

$\Rightarrow (-1-\lambda)^2(1-\lambda)=0 \Rightarrow (-1-\lambda)^2=0 \Rightarrow (-1-\lambda)(-1-\lambda)=0$

$(-1-\lambda)=0\,;\ (-1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_1=-1,\ \lambda_2=-1$, o sea $\lambda_1=\lambda_2=-1$ autovalor de multiplicidad 2

$(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_3=1$ autovalor simple. Para diagonalizar A, primero hay que comprobar que A es diagonalizable, ~~es~~ decir, debe verificarse que el subespacio $E(-1)=\mathrm{Ker}(A+I)$ tiene dimensión 2 (= multiplicidad)

$E(-1)$:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 2&4&6\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix} \underset{C_3-3C_1}{\overset{C_2-2C_1}{\sim}} \begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ base de $E(-1)$

$\Rightarrow \dim E(-1)=2=$ multiplicidad

$\Rightarrow A$ es diagonalizable

$E(1)=\mathrm{Ker}(A-I)=\mathrm{Ker}\begin{bmatrix}0&4&6\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix} \Rightarrow E(1)\equiv \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\\hline 0&4&6\\0&-2&0\\0&0&-2\end{bmatrix}$ $\rightarrow$ base de $E(1)$

Hemos obtenido la base de autovectores $B_1=\{(-2,1,0);(-3,0,1),(1,0,0)\}$, con esta base diagonalizamos A:

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&4&6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

b) De donde tenemos que

$$\begin{bmatrix}1&4&6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix}1&4&6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\underbrace{\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}}_{I}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&4&6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^2=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^2\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$ $\Rightarrow$ por inducción

$$\begin{bmatrix}1&4&6\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^n\begin{bmatrix}1&-2&-3\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}^{-1}$$, pero $\begin{bmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}^n$ es

$\begin{bmatrix}1^n&0&0\\0&(-1)^n&0\\0&0&(-1)^n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$ si $n=$ par $=2k$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{array}{l}A^{2k}=I\\A^{2k+1}=A\end{array}}$

si $n=$ impar $=2k$

IV sigue

De donde resulta

$$A^{33} = A^{2\cdot16+1} = \boxed{A^{33} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = A}$$

$$A^{2k+1} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \; ; \; A^{2k} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

<u>Nota</u>. Se podría hacer directamente

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I} \Rightarrow A^3 = A^2 \cdot A = I \cdot A = A$$

$$\Rightarrow A^{33} = A^{2\cdot16+1} = (A^2)^{16} \cdot A = I^{(16)} \cdot A = A$$

y en general $A^{2K} = [A^2]^K = I^k = I$

y $A^{2K+1} = A^{2k} \cdot A^1 = [A^2]^k \cdot A = I^k \cdot A = \underline{\underline{I \cdot A = A}}$