

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 0. Los Números Complejos

0.1. Halla el módulo y el argumento de los números complejos:

$$3 + 4i, \quad (3 + 4i)^{-1}, \quad (1 + 5i)^5 \quad \text{y} \quad \frac{1+i}{1-i}.$$

0.2. Dibuja los conjuntos de números complejos que verifican las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } |z| < 1 - \operatorname{Re} z & \text{b) } \operatorname{Re} \frac{z-a}{z-b} = 0 & \text{c) } \left| \frac{z-3}{z+3} \right| = 2 \\ \text{d) } |z-1| = 1 & \text{e) } |z-1| = |z+1| & \text{f) } \bar{z} = z^{-1} \end{array}$$

0.3. Prueba las siguientes igualdades:

$$\text{a) } |z| = |\bar{z}| \quad \text{b) } \bar{\bar{z}} = z \quad \text{c) } \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \text{d) } \overline{zw} = \bar{z} \bar{w} \quad \text{e) } \overline{-z} = -\bar{z} \quad \text{f) } \overline{z^{-1}} = (\bar{z})^{-1}$$

0.4. Para cualquier número complejo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , prueba que:  $z, -z, \overline{1/z}, \overline{-1/z}$  y 0 están alineados (o lo que es lo mismo, están sobre una misma recta).

0.5. a) Sea  $z \neq 1, -1$  y con  $|z| = 1$ . Prueba que  $\frac{1+z}{1-z}$  es un complejo imaginario puro.  
b) Sea  $z$  un complejo de módulo 1. Prueba que  $z + z^{-1}$  es un número real.

0.6. Determina los números complejos  $z$  que verifican:

$$\text{a) } z^2 = 3 - 4i \quad \text{b) } z^2 + zi + 2 = 0 \quad \text{c) } z^4 - 2z^2 + 4 = 0$$

$$\text{0.7. Calcula: a) } \sqrt[5]{-1} \quad \text{b) } \sqrt[3]{i} \quad \text{c) } \sqrt[3]{1+i} \quad \text{d) } \sqrt[5]{-4+3i}$$

0.8. a) Halla todas las raíces cuartas de  $i$ .

b) Determina los números complejos tales que su cuadrado coincide con alguna de sus raíces cuadradas.

c) Demuestra que las raíces  $n$ -ésimas de un número complejo no nulo se obtienen multiplicando una de ellas por las raíces  $n$ -ésimas de 1.

d) Prueba que el producto de dos raíces  $n$ -ésimas de la unidad es de nuevo una raíz  $n$ -ésima de la unidad.

0.9. Demuestra que las raíces  $n$ -ésimas de 1 distintas de 1 son las soluciones de la ecuación polinómica:

$$z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0$$

0.10. Prueba que si  $m$  y  $n$  son dos números enteros y  $m$  divide a  $n$ , entonces el polinomio  $x^m - 1$  divide al polinomio  $x^n - 1$ .

0.11. Sean 1,  $z_1$  y  $z_2$  las tres raíces cúbicas de 1. Calcula  $\alpha$  para que  $\alpha z_2 = 1$ . ¿Y para qué  $\alpha z_1 = 1$ ?

0.12. Expresa  $\cos 3t$  y  $\sin 3t$  como polinomios de  $\sin t$  y  $\cos t$ .

0.13. Si  $n = 2, 3, 4, \dots$ ; prueba que:

a)  $\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \dots + \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} = -1$ .    b)  $\sin \frac{2\pi}{n} + \sin \frac{4\pi}{n} + \dots + \sin \frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$ .

0.14. Sea  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  una serie de números complejos. Decimos que la serie es convergente si las series de números reales  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n$  y  $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$  son convergente. Y se dice que la serie converge a:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z_n = \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

a) Si  $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$  es convergente, prueba que  $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$  también lo es.

b) Prueba que  $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  converge para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

c) Comprueba que  $e^{it} = \cos t + i \sin t$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Deduce que  $-1 = e^{i\pi}$ .

0.15. Para  $t \in \mathbb{R}$ , prueba las siguientes igualdades: a)  $e^{i(t+2\pi)} = e^{it}$     b)  $|e^{it}| = 1$     c)  $\overline{e^{it}} = e^{-it}$

d)  $\cos nt = \frac{e^{int} + e^{-int}}{2}$     e)  $\sin nt = \frac{e^{int} - e^{-int}}{2i}$     f)  $\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} dt = \frac{e^{int}}{in} \Big|_{-\pi}^{\pi}$

(Indicación: Se define  $\int f(t) + ig(t) dt := \int f(t) dt + i \int g(t) dt$ ).

0.16. a) Si  $z$  es una raíz del polinomio con coeficientes reales  $z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0$ , prueba que  $\bar{z}$  también lo es.

b) Utiliza la ecuación  $z^2 + zi + 2 = 0$ , para ver que el apartado anterior no es cierto en general si los coeficientes son complejos.

0.17. Encuentra las soluciones de la ecuación  $z^3 - (2 + 3i)z^2 - z + (2 + 3i) = 0$ , si se sabe que  $2 + 3i$  es una solución de la misma.

0.18. Se pide descomponer el polinomio  $x^4 + 1$  en

a) producto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{Q}$ .

b) producto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{R}$ .

c) producto de polinomios con coeficientes en  $\mathbb{C}$ .

Haz lo mismo para los polinomios:  $x^3 - x^2 - x - 2$  y  $x^4 + x^2 + 1$ .

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 1. Matrices y sistemas lineales

1.1. Resolver por Gauss:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 1 \\ x - y + z = 7 \\ -x + y + z = 3 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 12 \\ y + z = 8 \\ x + z = 6 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 3 \\ 2y + 3z = 15 \\ 3x + y = 12 \end{array} \right. \end{array}$$

1.2. Resolver por Gauss:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 5y + z = -4 \\ 4x - 7y + z = 5 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} 5x + 2y - 3z = -2 \\ 2x - 2y + 5z = 0 \\ 3x + 4y + 2z = -10 \end{array} \right. & \text{c)} \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ 2x + y + 3z = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1.3. Resolver por Gauss:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 6 \\ x - y + z - t = -2 \\ 3x - y + 3z - t = 2 \\ 7x - 5y + 7z - 5t = -6 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 0 \\ x + z = 0 \\ x + 3y + z + 3t = 0 \\ x - y + z + t = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1.4. Resolver por Gauss:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x - y + z - u + v = 0 \\ x + y + 2z + 2u - v = 0 \\ -x + 5y + z + 7u - 5v = 0 \end{array} \right. & \text{b)} \left\{ \begin{array}{l} x - y + t = 0 \\ -x + 2y + z = 0 \\ y - 3z + 2t = 0 \end{array} \right. \end{array}$$

1.5. Supongamos que 5 corderos, 4 patos, 3 pollos y 2 conejos cuestan 1496 monedas; que 4 corderos, 2 patos, 6 pollos y 3 conejos cuestan 1175 monedas; que 3 corderos, un pato, 7 pollos y 5 conejos cuestan 958 monedas y que 2 corderos, 3 patos, 5 pollos y 1 conejos cuestan 861 monedas. ¿Cuál es el precio de un cordero, de un pato, de un pollo y de un conejo? (Del libro "Jiuzhang Suanshu"s. III a.C., compendio de matemáticas chinas).

1.6. En los siguientes apartados se dan una serie de puntos del plano  $\mathbb{R}^2$ . Encuentra funciones polinómicas, del grado  $n$  que se indica, de modo que sus respectivas gráficas contengan a dichos puntos.

- a)  $(1, 4)$  y  $(4, 7)$ ;  $n = 1$ .
- b)  $(1, 4)$ ,  $(4, 7)$  y  $(5, 0)$ ;  $n = 2$ .
- c)  $(1, 4)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(5, 0)$  y  $(6, 1)$ ;  $n = 3$ .
- d)  $(0, 0)$ ,  $(1, 4)$ ,  $(4, 7)$ ,  $(5, 0)$  y  $(6, 1)$ ;  $n = 4$

1.7. Dado el sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{array} \right.$$

- a) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema que resulte sea incompatible.
- b) Añadir una ecuación lineal de modo que el sistema de resulte sea compatible indeterminado. Resolver el sistema formado.

1.8. Calcular el valor de  $m$  para que el siguiente sistema tenga alguna solución distinta de la trivial  $(0, 0, 0)$ . Resolverlo por Gauss para ese valor.

$$\begin{cases} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{cases}$$

1.9. Discutir y resolver, en los casos en que sea posible, por Gauss

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases}$$

1.10. Para las siguientes matrices, calcular su forma normal de Hermite por filas y su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.11. Hallar la forma normal de Hermite por filas y el rango:

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.12. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix},$$

efectúa las operaciones:  $A \cdot B$ ,  $(3A) \cdot (-4B)$ ,  $AA^t$ ,  $B^t B$ .

1.13. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices cuadradas del mismo orden. Las siguientes igualdades, ¿son ciertas?

$$\begin{aligned} \text{a) } (A + B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \\ \text{b) } (A - B)^2 &= A^2 - 2AB + B^2 \\ \text{c) } (A + B)(A - B) &= A^2 - B^2 \end{aligned}$$

1.14. Resuelve la ecuación en  $X$ ,  $AX - 2B + C = D$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1.15. Halla todas las matrices que conmuten con la matriz  $B$  del ejercicio anterior.

1.16. Resuelve el sistema

$$\begin{cases} X + 3Y = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \\ 3X - 2Y = \begin{pmatrix} -2 & -7 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

1.17. Calcula la matriz  $A^n$ , con  $n \in \mathbb{N}$ , siendo:

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{b) } A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{c) } A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.18. Calcula  $A^n$  con  $n \in \mathbb{N}$ , siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1.19. Calcula

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{40} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{83}.$$

1.20. Sea  $A$  una matriz cuadrada cualquiera. Demuestra que  $A + A^t$  es simétrica, mientras que  $A - A^t$  es antisimétrica.

1.21. Sea  $A$  una matriz cualquiera. Demuestra que  $AA^t$  y  $A^tA$  son simétricas.

1.22. Sea  $A$  una matriz antisimétrica. Demuestra que  $A^2$  y  $A^4$  son simétricas, mientras que  $A^3$  y  $A^5$  son antisimétricas.

1.23. Sean  $A$  y  $B$  matrices ortogonales, demuestra que  $AB$  es ortogonal.

1.24. Identificar las transformaciones elementales representadas por las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.25. Halla, si es posible, utilizando la definición, la inversa de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.26. Determinar cuáles de las siguientes matrices son regulares y calcular, por Gauss, la inversa de las que lo sean:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ -1 & -2 & -3 & -4 \\ -5 & -6 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

1.27. Calcula el rango de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 7 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1.28. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

calcula, en cada caso, una matriz regular  $Q$  tal que

$$QA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad QB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

1.29. Pensemos en un sistema de ecuaciones lineales  $n \times n$ , y en el método de eliminación de Gauss para resolverlo. Pongámonos de acuerdo para llamar "operación simple" a toda suma, resta, producto o división del método.

a) Si el sistema tiene solución única ¿cuántas operaciones simples como máximo tenemos que realizar para resolverlo?

b) De forma razonable se puede pensar que tenemos un ordenador que realiza  $10^{10}$  operaciones por segundo y su hora de servicio cuesta 1000 euros. ¿Cómo de grande es el sistema que podemos resolver con 1 euro? ¿Y con 1000 euros?

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 2. Espacios vectoriales

2.1. Demostrar que el conjunto  $A = \{a + b\sqrt{2} : a, b \in \mathbb{Q}\}$  respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) &= a + a' + (b + b')\sqrt{2} \\ \alpha(a + b\sqrt{2}) &= \alpha a + \alpha b\sqrt{2}\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ .

2.2. Estudiar si el conjunto  $A = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$  respecto de las operaciones

$$\begin{aligned}(x, y) + (x', y') &= (x + x', y + y') \\ \alpha(x, y) &= (\alpha x, 0)\end{aligned}$$

es un espacio vectorial sobre  $\mathbb{R}$ .

2.3. Calcular el valor de  $a$  y  $b$  para que el vector  $\vec{v} = (a, -2, 1, b)$  se pueda expresar como combinación lineal de los vectores  $\vec{u}_1 = (1, 2, 3, 4)$  y  $\vec{u}_2 = (-1, 0, -2, 3)$ .

2.4. Siendo  $\vec{u}_1 = (-5, 2, 8, -16)$ ,  $\vec{u}_2 = (-5, 3, 17, -14)$  y  $\vec{u}_3 = (1, 1, 11, 6)$ , expresa  $\vec{u}_1$  como combinación lineal de  $\vec{u}_2$  y  $\vec{u}_3$ .

2.5. Sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  un sistema de vectores de  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$ , tal que  $\vec{u}_1 = (1, 2, 3)$ ,  $\vec{u}_2 = (2, 1, 0)$  y  $\vec{u}_3 = (-1, -1, 0)$ . Demostrar que estos vectores forman una base de  $\mathbb{R}^3$  y calcular las coordenadas del vector  $(1, -1, 0)$  respecto de esta base.

2.6. En el espacio vectorial  $(V_3, +, \cdot \mathbb{R})$ , demostrar que si los vectores  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  forman una base, también es una base la formada por los vectores  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  siendo

$$\vec{v}_1 = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2, \quad \vec{v}_2 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2, \quad \vec{v}_3 = \vec{u}_3$$

2.7. Demostrar que el conjunto formado por los vectores

$$\{1 + x, x^2, 1 + x^2, 3x - 2x^2\}$$

es linealmente dependiente en el espacio de los polinomios con coeficientes racionales y grado menor o igual que dos. A partir de dicho conjunto, encontrar un conjunto máximo de vectores linealmente independientes.

2.8. Sea  $(V_3, +, \cdot \mathbb{R})$  un espacio vectorial, y sea  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  un conjunto linealmente independiente. Demostrar que también es linealmente independiente el conjunto

$$\{\vec{u}_1 + \vec{u}_2, \vec{u}_1 + \vec{u}_3, \vec{u}_2 + \vec{u}_3\}$$

2.9. Estudiar si tiene estructura de subespacio vectorial el subconjunto de  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$  formado por todas las ternas  $(x, y, z)$  tales que  $x + y + z = 1$ . ¿Y si cumple la condición  $x + y + z = 0$ ?

2.10. Determinar cuánto deben valer  $a$  y  $b$  para que el vector  $\vec{v} = (a, 1, b, -5)$  pertenezca al subespacio vectorial engendrado por los vectores  $\vec{u}_1 = (2, 1, 0, 4)$  y  $\vec{u}_2 = (-1, 1, -1, 1)$ .

2.11. a) Demostrar que el subconjunto de  $\mathbb{Q}^4$  formado por los elementos  $(w, x, y, z)$  que verifican

$$w + x + y + z = 0 \quad w - x + y - z = 0,$$

es un subespacio vectorial de  $(\mathbb{Q}^4, +, \cdot \mathbb{Q})$ .

b) Probar que los vectores  $\vec{u}_1 = (2, 1, -2, -1)$  y  $\vec{u}_2 = (1, 0, -1, 0)$  son base de dicho subespacio.

c) Hallar las coordenadas del vector  $\vec{u} = (4, 1, -4, -1)$  respecto de dicha base.

2.12. En  $\mathbb{R}^3$  se considera el conjunto de los vectores  $(x, y, z)$  definido por

$$S = \{(x, y, z) : 2x - y + z = 0 \text{ y } x + y + z = 0\}.$$

Demostrar que  $S$  es un subespacio de  $\mathbb{R}^3$  de dimensión 1 y hallar una base del mismo.

2.13 Se considera el conjunto de las funciones reales de variable real  $F = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ función}\}$

a) Comprueba que  $F$  es un espacio vectorial con las operaciones de suma de funciones y el producto de un escalar por una función.

b) Sea el conjunto de las funciones continuas sobre un intervalo  $[a, b]$ ,

$$C([a, b]) = \{f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ continua}\}.$$

Prueba que  $C([a, b])$  es un subespacio vectorial de  $F$ .

2.14 La ecuación

$$x''(t) + ax'(t) + x(t) = 0 \quad (*)$$

donde  $a, b \in \mathbb{R}$  son coeficientes conocidos, se denomina ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden. Esta ecuación se relaciona con el comportamiento de los circuitos eléctricos RLC. Una solución de esta ecuación es toda función  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaga la ecuación  $(*)$ .

a) Comprueba que las funciones  $f_1 = e^{-t}$  y  $f_2 = te^{-t}$  son soluciones de la ecuación  $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$ .

- b) Sea  $S$  el conjunto de todas las soluciones de la ecuación (\*). Prueba que es un subespacio vectorial del conjunto de las funciones reales de variable real.
- c) Se puede probar que dados dos valores cualesquiera  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ , existe una única función  $f$  que es solución de (\*) y que cumple que  $f(0) = x_1$  y  $f'(0) = x_2$ . Usando lo anterior prueba que  $S$  el conjunto de soluciones de (\*) es un espacio vectorial de dimensión 2.
- d) Comprueba que las funciones  $f_1$  y  $f_2$  del apartado a) forman una base del conjunto de soluciones de la ecuación  $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$ .

2.15. En  $\mathbb{R}^4$  se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z, t) : x + y + z = 0, z + t = 0\} \quad \text{y} \\ S' &= \{(\lambda + \mu, \lambda + 2\mu, \lambda + 3\mu, \lambda + \mu), \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones y las bases de  $S \cap S'$  y de  $S + S'$ .

2.16. En  $\mathbb{R}^3$  se consideran los subespacios

$$\begin{aligned} U &= L\{(2, 0, 1), (1, 1, 0), (0, 2, 2)\} \quad \text{y} \\ W &= \{(x, y, z) : x = 0, y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Hallar las ecuaciones y las bases de  $U \cap W$  y de  $U + W$ .

2.17. Hallar: a) Las coordenadas del vector  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$  respecto de la nueva base  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  sabiendo que

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3, \quad \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

b) Las coordenadas del vector  $\vec{v} = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 + \vec{v}_3$  respecto de la base  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ .

2.18. Halla las ecuaciones del cambio de base:

a) De la base  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  a la base  $B' = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ , sabiendo que

$$\vec{u}_1 = \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \quad \vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \vec{v}_3, \quad \vec{u}_3 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3.$$

b) De la base  $B'$  a la base  $B$ .

c) Las coordenadas del vector  $\vec{w} = (1, 0, 3)_B$  respecto de  $B'$  y las de  $\vec{x} = (5, 3, 1)_{B'}$  respecto de  $B$ .

2.19. Halla la dimensión de los subespacios de  $\mathbb{R}^5$  generados por los siguientes subconjuntos de vectores:

$$\begin{aligned} A &= \{(1, 1, 1, -1, -1), (2, 0, 2, 0, 1), (3, 1, 3, -1, 0), (5, 1, 5, -1, 1)\}, \\ B &= \{(6, 3, 9, 3, 3), (8, 4, 12, 4, 4), (10, 5, 15, 5, 5)\}, \\ C &= \{(1, 2, 3, 4, 5), (2, 2, 2, 2, 2), (-5, -4, -3, -2, -1), (6, 7, 8, 9, 10)\}. \end{aligned}$$

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 3. Aplicaciones lineales

3.1. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$ , son lineales:

- |                                  |                                    |
|----------------------------------|------------------------------------|
| a) $f(x, y) = (0, y, 0)$         | c) $f(x, y) = (2x + y, 0, 2y + x)$ |
| b) $f(x, y) = (x, x + y, x - y)$ | d) $f(x, y) = (x + y, 2)$          |

3.2. Estudia cuáles de las siguientes aplicaciones, definidas de  $(\mathbb{R}^3, +, \cdot \mathbb{R})$  en sí mismo, son lineales:

- |   |  |
|---|--|
| a) $f(x, y, z) = (3x, 4y, 5z)$          | c) $f(x, y, z) = (2x - y, 2y - z, 2z - x)$ |
| b) $f(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$ | d) $f(x, y, z) = (x, -y, z + 1)$           |

3.3. Sea  $f$  un aplicación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  tal que  $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - 3\vec{v}_3$ ,  $f(\vec{u}_2) = -\vec{v}_1 + 4\vec{v}_2 - \vec{v}_3$ , siendo  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  y  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  las correspondientes bases. Halla la imagen del vector  $\vec{u} = (2, -1)$ .

3.4. Calcula la matriz asociada a la aplicación lineal  $f$  definida entre los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^2$  por  $f(x, y, z) = (x - y + z, 2x - z)$  respecto de las bases canónicas.

3.5. Se considera la aplicación lineal de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  que está dada por  $f(x, y) = (x + y, -y, y - x)$ . Halla, respecto de las bases canónicas:

- La matriz asociada.
- Las ecuaciones de la aplicación.
- Una base del núcleo.
- La dimensión del núcleo.
- Una base de la imagen.
- El rango de la aplicación.
- Comprueba la fórmula  $n = \dim \text{Ker } f + \dim \text{Im } f$

3.6. Se dice que un vector  $\vec{u}$  es invariante por una aplicación lineal  $f$  si verifica que  $f(\vec{u}) = \vec{u}$ . Halla todos los vectores invariantes por las aplicaciones lineales de los apartados a), b), c) del ejercicio 3.2.

3.7. Halla todos los vectores que verifican la igualdad  $f(\vec{u}) = \lambda \vec{u}$ , para algún escalar  $\lambda$ , para las aplicaciones lineales de los apartados a), b) c) del ejercicio 3.2.

3.8. Sea  $f$  la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales  $(V_3, +, \cdot \mathbb{R})$  y  $(V_4, +, \cdot \mathbb{R})$  tal que  $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 - 2\vec{v}_4$ ,  $f(\vec{u}_2) = \vec{v}_1 - \vec{v}_3$ ,  $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_4$ , donde  $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  son las bases correspondientes. Halla:

- La imagen del vector  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 - 2\vec{u}_3$ .
- La matriz de la aplicación lineal.

- c) El núcleo y el rango de la aplicación lineal.  
 d) ¿Qué vectores  $\vec{u}$  verifican  $f(\vec{u}) = -\vec{v}_1 - \vec{v}_2 + \vec{v}_3 + \vec{v}_4$ ?

3.9. Sea  $f$  la aplicación lineal de  $(V_3, +, \cdot \mathbb{R})$  en sí mismo, tal que  $f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ ,  $f(\vec{u}_2) = 2\vec{v}_1 - \vec{v}_2$ ,  $f(\vec{u}_3) = \vec{v}_2 - \vec{v}_3$ , donde  $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  son dos bases de  $V_3$ . Halla:

- a) La matriz de la aplicación lineal.  
 b) La dimensión de  $\text{Ker } f$  y el rango de la aplicación.  
 c) Las ecuaciones de la aplicación y la imagen del vector  $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3$ .  
 d) ¿Es inyectiva? ¿Es sobreyectiva? ¿Es biyectiva?

3.10. Sea  $f$  una aplicación lineal de  $(V_3, +, \cdot \mathbb{R})$  en sí mismo, tal que  $f(\vec{u}_1) = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 - \vec{u}_3$ ,  $f(\vec{u}_2) = -7\vec{u}_2 + \vec{u}_3$ ,  $f(\vec{u}_3) = 3\vec{u}_1 - 2\vec{u}_3$ , donde  $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  es una base de dicho espacio. Halla la matriz de la aplicación lineal  $f$  respecto de la base  $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$  donde  $\vec{v}_1 = \vec{u}_1 - \vec{u}_3$ ,  $\vec{v}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$ ,  $\vec{v}_3 = \vec{u}_3$ .

3.11. Sean  $f$  y  $g$  dos aplicaciones lineales de  $(V_2, +, \cdot \mathbb{R})$  en sí mismo, tales que  $f(\vec{u}_1) = 2\vec{e}_1 - \vec{e}_2$ ,  $f(\vec{u}_2) = \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ ,  $g(\vec{e}_1) = \vec{v}_1 - 3\vec{v}_2$ ,  $g(\vec{e}_2) = 2\vec{v}_1 + \vec{v}_2$ , siendo  $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$ ,  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ ,  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$  tres bases del espacio vectorial. Halla:

- a) La matriz de la aplicación  $g \circ f$ .  
 b) El núcleo y la imagen de  $g \circ f$ .  
 c) La imagen del vector  $\vec{u} = 5\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2$ .  
 d) Las ecuaciones de la composición.

3.12. Sean  $f$  y  $g$  las aplicaciones lineales definidas de  $\mathbb{R}^2$  en  $\mathbb{R}^3$  y de  $\mathbb{R}^3$  en  $\mathbb{R}^4$  tales que  $f(-1, 1) = (-2, 1, -2)$ ,  $f(2, 1) = (1, 1, 4)$ ,  $g(1, 1, 2) = (4, 1, 1, 7)$ ,  $g(-1, 0, -2) = (-3, 0, -2, -7)$ ,  $g(3, 2, 0) = (11, 2, -2, -3)$ . Halla:

- a) La matriz de la aplicación  $g \circ f$  respecto de las bases canónicas.  
 b) La dimensión del núcleo de  $g \circ f$ .  
 c) El rango y las ecuaciones de  $g \circ f$ .

3.13. Sea  $f$  la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  tal que

$$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + 2\vec{v}_3 + \vec{v}_4, \quad f(\vec{u}_2) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3, \quad f(\vec{u}_3) = \vec{v}_2 + \vec{v}_4,$$

donde  $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  son las bases de los espacios vectoriales. Halla:

- a) La matriz de la aplicación lineal.  
 b) El núcleo de la aplicación.  
 c) El rango.

3.14. Halla la matriz de la aplicación lineal definida entre  $\mathbb{R}^3$  y  $\mathbb{R}^4$  por

$$f(\vec{u}_1) = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + 2\vec{v}_3 - \vec{v}_4, \quad f(\vec{u}_3) = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 + 3\vec{v}_3,$$

donde  $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  y  $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  son las bases y se sabe además que el vector  $\vec{u}_2$  pertenece al núcleo. Halla una base de  $Im f$ .

3.15. Sea  $f$  la aplicación lineal definida entre los espacios vectoriales  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{R}^4$  tal que respecto de las bases  $B_1 = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2\}$  y  $B_2 = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4\}$  su matriz asociada es  $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ . Se eligen unas nuevas bases  $B_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$  y  $B_4 = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3, \vec{w}_4\}$  donde

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{w}_1 = \vec{v}_1 - 2\vec{v}_2 - \vec{v}_3 - \vec{v}_4 \\ \vec{w}_2 = -\vec{v}_2 - \vec{v}_3 \\ \vec{w}_3 = \vec{v}_1 - \vec{v}_3 \\ \vec{w}_4 = \vec{v}_1 \end{cases}$$

Halla la matriz de la aplicación lineal  $f$  :

- Cuando se consideran las bases  $B_1$  y  $B_4$ .
- Con relación a  $B_3$  y  $B_2$ .
- Respecto de  $B_3$  y  $B_4$ .

3.16. Se define la aplicación  $T : C([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$  del siguiente modo  $T(f) = \int_a^b f(t)dt, \forall f \in C([a, b])$ . Prueba que  $T$  es una aplicación lineal. Dado  $n \in \mathbb{N}$  encuentra  $n$  funciones linealmente independientes pertenecientes al núcleo de la aplicación.

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 4. Rangos y determinantes

4.1. Demuestra que los determinantes

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 7 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix},$$

son múltiplos de 5 y de 4 respectivamente, sin desarrollarlos.

4.2. Calcula los determinantes de Vandermonde

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 2^3 & 3^3 & 4^3 & 5^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & \ln 2 & (\ln 2)^2 & (\ln 2)^3 \\ 1 & \ln 4 & (\ln 4)^2 & (\ln 4)^3 \\ 1 & \ln 8 & (\ln 8)^2 & (\ln 8)^3 \\ 1 & \ln 16 & (\ln 16)^2 & (\ln 16)^3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

4.3. Demuestra la igualdad

$$\begin{vmatrix} x & a & d & f \\ x & x & b & e \\ x & x & x & c \\ x & x & x & x \end{vmatrix} = x(x-a)(x-b)(x-c)$$

4.4. Demuestra las siguientes igualdades sin desarrollar los determinantes

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{vmatrix} b & c & b+c \\ a+c & c & a \\ b & a+b & a \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} c & b & 0 \\ 0 & a & c \\ a & 0 & b \end{vmatrix}, \quad b) \quad \begin{vmatrix} a^2 & b^2 & ab \\ 2a & 2b & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (b-a)^3, \\ c) \quad & \begin{vmatrix} a+b & b+c & c+a \\ m+n & n+l & l+m \\ x+y & y+z & z+x \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & l \\ x & y & z \end{vmatrix}, \quad d) \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} bc & ca & ab \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

4.5. Sean  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ , números reales distintos. Encuentra una función polinómica  $f$  de grado  $n-1$  de modo que  $f(x_i) = a_i$ , donde  $a_1, a_2, \dots, a_n$  son números dados y  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Encuentra un polinomio de grado 3,  $P$ , tal que  $P(1) = 3, P(0) = 7, P(1/2) = 2$  y  $P(1/3) = 1/4$ .

4.6. ¿Cuántos determinantes de  $k$ -ésimo orden se pueden formar de una matriz de  $m$  filas y  $n$  columnas?

4.7. Resuelve las ecuaciones

$$\begin{aligned} a) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 3 & x-5 \\ 4 & x+2 & x \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 0, \quad b) \quad \begin{vmatrix} 1 & 3x+6 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & x+4 & -1 \end{vmatrix} = 0, \\ c) \quad & \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0, \quad d) \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix} = 0, \quad e) \quad \begin{vmatrix} x & a & b & c & d \\ a & x & b & c & d \\ a & b & x & c & d \\ a & b & c & x & d \\ a & b & c & d & x \end{vmatrix} = 0 \end{aligned}$$

4.8. Demuestra, sin desarrollar, que son nulos los determinantes

$$a) \begin{vmatrix} 12 & 15 & 18 & 21 \\ 0 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & 2a-b \\ b & c & a & 2b-c \\ c & a & b & 2c-a \end{vmatrix}, \quad c) \begin{vmatrix} 1 & a & b & c+d \\ 1 & b & c & d+a \\ 1 & c & d & a+b \\ 1 & d & a & b+c \end{vmatrix}$$

4.9. Calcula los determinantes de orden  $n$

$$a) \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ n & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} -1 & x & x & x & \cdots & x \\ x & -1 & x & x & \cdots & x \\ x & x & -1 & x & \cdots & x \\ x & x & x & -1 & \cdots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x & x & x & x & \cdots & -1 \end{vmatrix}$$

4.10. Calcula los determinantes de orden  $n$

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots & n \end{vmatrix}, \quad b) \begin{vmatrix} 1 & a & a & a & \cdots & a \\ a & 1 & a & a & \cdots & a \\ a & a & 1 & a & \cdots & a \\ a & a & a & 1 & \cdots & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & a & a & a & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

4.11. Sean  $A$  y  $B$  dos matrices de orden  $m \times n$ . Prueba que el rango de la matriz suma  $A + B$  no es mayor que la suma de los rangos de las matrices  $A$  y  $B$ .

4.12. Demuestra que si el producto de dos matrices cuadradas conmuta, es decir si  $AB = BA$ , entonces es cierto que  $A^{-1}B = BA^{-1}$

4.13. Halla por determinantes, la matriz inversa de las siguientes si la tienen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ -1 & -4 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & -4 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

4.14. Halla el rango por determinantes:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & 0 & 1 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 5. Sistemas lineales

5.1. Resuelve por la regla de Cramer:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

5.2. Resuelve por Cramer:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x + y - z = 4 \\ -x + y - z = 2 \\ y - z = 3 \end{array} \right\} \quad \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y + z = 3 \\ -x - y + z = 5 \\ y - z = 1 \end{array} \right\} \quad \text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y - z - w = 0 \\ x - y + z - w = 6 \\ x - w = 3 \\ 2x - y + z - 2w = 9 \\ 3x - 2y + 2z - 3w = 15 \end{array} \right\} \end{array}$$

5.3. En el sistema siguiente, calcula el valor de  $m$  para que tenga alguna solución distinta de la trivial y resuélvelo para ese valor, por la regla de Cramer:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 3y - z = 0 \\ -4x - 2y + mz = 0 \\ 3x + 4y + 6z = 0 \end{array} \right\}$$

5.4. Discute y resuelve, en los casos en que sea posible, por Cramer:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} mx + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{array} \right.$$

5.5. Discute por Rouché y resuelve, si es posible:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} y = x \\ x + y = 0 \\ ax + by = 0 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - y + z = a \\ 3x + 2y - az = 4 \\ x - y + z = 1 \end{array} \right.$$

5.6. Discute por Rouché y resuelve en  $\mathbb{R}^3$ :

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = a - 1 \\ y + z = b \\ (a^2 - b^2)z = a + b \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} mx + y + z = 2m \\ x - my + z = 0 \\ x + my + z = 2 \end{array} \right.$$

5.7. Un gallo vale 5 monedas, una gallina 3 monedas y 3 pollos una moneda. Con 100 monedas queremos comprar 100 aves ¿Cuántos gallos, gallinas y polluelos podemos comprar?  
( **Problema de las 100 aves**, sacado del libro "Zhang Qiujiang Suanjing" s. V d.C.)

5.8. Dados dos vectores  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ,  $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ , se llama **producto escalar** de los vectores anteriores al número  $\sum_{k=1}^n x_k y_k = \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ ; la segunda parte de la igualdad es la notación que se usa.

a) Para los siguientes pares de vectores calcula sus respectivos productos escalares: 1)  $(7, 5)$  y  $(3, 3/2)$  2)  $(1, 7, 2)$  y  $(3, \pi, 6/7)$  3)  $(1, 0, 0, 1)$  y  $(0, 1, 1, 0)$ .

b) Si  $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$  ¿por qué  $\sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$  es la distancia que hay de  $\vec{x}$  a  $\vec{0}$ ?  
 ¿Por qué  $\sqrt{\langle \vec{x} - \vec{y}, \vec{x} - \vec{y} \rangle}$  es la distancia que hay de  $\vec{x}$  a  $\vec{y}$ ?

c) Dos vectores de  $\mathbb{R}^n$  se llaman **ortogonales** si su producto escalar es cero. Encuentra dos vectores ortogonales en  $\mathbb{R}^2$ , otro par en  $\mathbb{R}^3$  y otro en  $\mathbb{R}^4$ . Dibuja cuando sea posible los pares de vectores.

d) Dados dos vectores  $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{y} = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ , se llama **producto vectorial** de los vectores anteriores al vector de  $\mathbb{R}^3$ :

$$\vec{x} \times \vec{y} = \left( \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right)$$

¿Por qué el vector  $\vec{x} \times \vec{y}$  es ortogonal a los vectores  $\vec{x}$  y  $\vec{y}$ .

5.9. Elimina los parámetros de los siguientes sistemas:

$$\begin{cases} x_1 = 2a + b + c - 1 \\ x_2 = -a - 2b + c + 2 \\ x_3 = a + 3b - 2c - 5 \\ x_4 = 4a - 2b + 6c + 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 - 3p + 2q \\ y = 2 + p + q \\ z = -2p + q \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1 + 4\lambda + 2\mu \\ y = 2 - 2\lambda - \mu \\ z = 1 + 2\lambda + \mu \end{cases}$$

5.10. Demuestra que el sistema siguiente tiene solución única si  $abc \neq 0$ . Resuélvelo:

$$\begin{cases} bx + ay = c \\ cx + az = b \\ cy + bz = a \end{cases}$$

5.11. Discute por Rouché:

$$\left. \begin{cases} 3x - 5y + 2z + 4t = 2 \\ x - 4y + z + 3t = 5 \\ 5x + y - 4z - t = 3 \end{cases} \right\} \quad \left. \begin{cases} (m+2)x + y + z = m-1 \\ mx + (m-1)y + z = m-1 \\ (m+1)x + (m+1)z = m-1 \end{cases} \right\} \quad \left. \begin{cases} x + y + z = 1 \\ ax + by + cz = d \\ a^2x + b^2y + c^2z = d^2 \end{cases} \right\}$$

5.12. Discute por Rouché los siguientes sistemas según los valores de los parámetros:

$$\begin{cases} 3y - ax + 2z = 2 \\ 2z + 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + 2z = 2 \\ 5x + 2y = 1 \\ x - 2y + bz = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} ax + by = a \\ ay + bz = b \\ az + bt = a^2 \\ bx + at = b^2 \end{cases}$$

5.13. ¿Cuál es la condición analítica para que el vector  $(1, 0, -1, 2)$  de  $\mathbb{R}^4$  tenga originales en la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , cuya matriz, respecto de las bases canónicas, es  $M$ . Halla todos sus originales.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5.14. Calcula todos los originales del  $(2, 0, -2)$  en la aplicación lineal  $f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , sabiendo que  $(2, 1, 0, -1)$  es uno de ellos y que la matriz de  $f$  respecto de las bases canónicas es

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

# MÉTODOS MATEMÁTICOS DE LA INFORMÁTICA

## 6. Diagonalización

6.1. Calcula los autovalores y autovectores de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 7 & -6 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

6.2. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

- a) Autovalores y autovectores.
- b) ¿Es diagonalizable?
- c) La matriz de paso y la matriz diagonal.

6.3. Halla la forma diagonal, si es posible, de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

6.4. Dado el endomorfismo  $f$  de matriz asociada

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

¿se puede encontrar otra base  $B'$ , tal que respecto de ella sea  $f$  diagonalizable?

6.5. Halla los autovalores y autovectores del endomorfismo de  $\mathbb{R}^3$  dado por

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 2y + z, 2y + 3z).$$

6.6. Halla los valores propios y los vectores propios de los siguientes endomorfismos:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= (4x_1 + 3x_2, 3x_1 - 4x_2), \\ g(x, y, z) &= (2y - z, 2x - z, 2x - y). \end{aligned}$$

6.7 Se considera el giro de centro  $(0,0)$  de ángulo  $\alpha \in (0, 2\pi)$  en el plano  $\mathbb{R}^2$  dado por la aplicación  $G(x_1, x_2) = (x_1 \cos \alpha + x_2 \sin \alpha, -x_1 \sin \alpha + x_2 \cos \alpha), \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ .

a) Prueba que  $G$  es una aplicación lineal.

b) Prueba que la matriz asociada a  $G$  no tiene ningún autovector. ¿Sabrías dar una justificación geométrica de este hecho?

6.8. Halla los autovectores de la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6.9. ¿Son diagonalizables las siguientes matrices?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2+k \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6.10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) ¿Es diagonalizable?

b) Halla la base y la forma diagonal.

6.11. Sea  $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  una base de un espacio vectorial  $V_3$  y sea  $f$  el endomorfismo de  $V_3$  dado por

$$f(\vec{u}_1) = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad f(\vec{u}_2) = 2\vec{u}_1, \quad \text{Ker } f = L(\vec{u}_1 + \vec{u}_3).$$

Se pide:

a) La matriz de  $f$  respecto de la base  $B$ .

b) La imagen de  $f$  y su dimensión.

c) Los autovalores y la ecuación característica de  $f$ .

d) Una base  $B'$  respecto de la cual  $f$  sea diagonalizable.

e) La matriz del cambio de base de  $B$  a  $B'$ .

6.12. Estudia para qué valores de los parámetros son diagonalizables las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ p & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & q \\ 3 & 0 & p \end{pmatrix}.$$

6.13. Halla  $A^{33}$ , siendo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

6.14 Se tiene dos sucesiones de números reales  $(x_n)_{n=1}^{\infty}$  y  $(y_n)_{n=1}^{\infty}$  de modo que:

$$x_{n+1} = 6x_n - y_n$$

$$y_{n+1} = 3x_n + 2y_n$$

Calcula  $\frac{1}{4}(3x_{n+1} + y_{n+1})$ , siendo  $x_1 = y_1 = 1$ .

6.15 ¿Cuántas parejas de conejos se tendrán en un año, comenzando con una sola, si cada mes una de las parejas da origen a una nueva, la cual vuelve a reproducirse a partir del segundo mes? (Fibonacci, " *Liber Abaci*" s. XIII).

6.16 Para aprobar una asignatura de grado se tiene un máximo de 6 convocatorias. En cada convocatoria ocurre que los alumnos que se presentan por primera vez aprueban 3 de cada 10, obtienen compensable (entre 4 y 5) otros 3 de cada 10 y suspende el resto. Además los alumnos compensables de otras convocatorias aprueban 7 de cada 10, saca compensable 1 de cada 10 y suspenden los demás. Y por último, los alumnos suspensos de otras convocatorias aprueban 3 de cada 10 y el resto suspende. Partiendo de un grupo de 125 alumnos que cursan por primera vez la asignatura, ¿cuántos de ellos no llegarán a aprobarla?