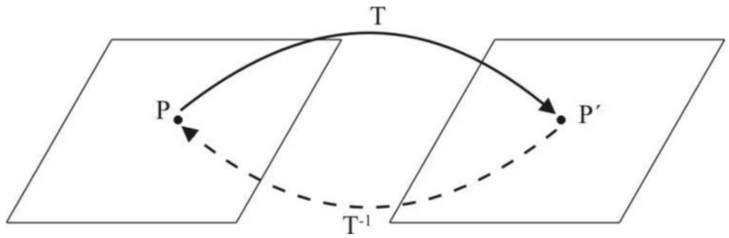

Figura 1 – Transformación Lineal

De todas las transformaciones que existen, nos interesan las lineales, y por supuesto, las que tengan inversa.
Desde el punto de vista práctico de un robot, una traslación, será necesaria para posicionar un objeto (efector final) desde un punto inicial a otro final como se ve en la Figura 18.

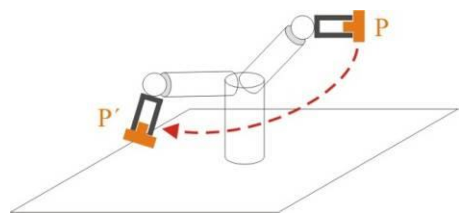

Figura 2 - Posicionamiento

Rotaciones

En este caso será mejor ver primero las rotaciones en un plano, para luego extenderlo al espacio.
Antes de definir la rotación con respecto a un punto o eje cualquiera, es bueno recordar que cada eje cartesiano *x* ó *y* ó *z* está soportado por un vector (vector unitario) que lo generaba, con una dirección determinada. En este caso la terna *x, y, z* (espacio tridimensional) era generada por los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

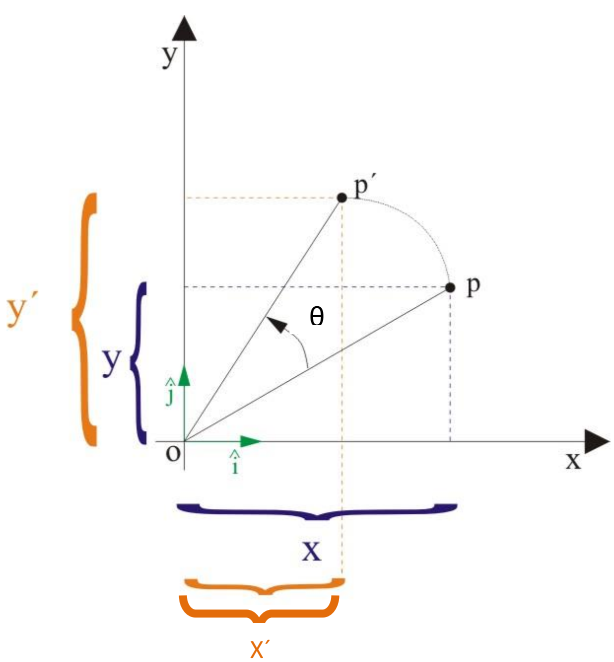

Figura 3 - Transformación rotación

El problema a resolver es: dado el punto *p*, se desea rotar dicho punto un ángulo fijo θ, de modo que el punto, luego de la rotación, se encuentre en el punto *p'*; a la solución se la puede plantear en forma geométrica como se observa en la Figura 19, donde las nuevas coordenadas del punto *p'* se las puede escribir en función de las anteriores, y del ángulo θ rotado; esto es:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - ysen(\theta) \\ y' = xsen(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases} \qquad (1)$$

Que en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (2)$$

<u>Interpretación</u>: las coordenadas *x′, y′* del nuevo punto *p*; se alcanzarán sabiendo las anteriores *x* e *y*, con un ángulo de giro θ conocido.

$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ Esta matriz es llamada matriz de rotación. Es importante comprobar que esta transformación, solo produce rotaciones, y no deformaciones.

Como ocurrió en el caso de la traslación, podemos expresar esta matriz de 2x2 como una de 4x4 homogénea, que nos permita pre-multiplicar ésta por un vector, y lograr las nuevas coordenadas del punto *p′*; la matriz homogénea así definida en tres dimensiones es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Se podría pensar en una rotación de un ángulo θ sobre el eje *z* que "sale" de la hoja, o sea, que se puede pensar el problema del siguiente modo: el punto *p* está en el plano *xy*, y ha sido rotado mediante un ángulo θ con respecto al eje *z*, que sale del plano, sugerimos que el lector lo imagine saliendo de la hoja.

COMENTARIO: ¿Existirá la matriz homogénea que una vez rotado el punto lo devuelva a la posición de donde estaba?, o sea, ¿Existirá H^{-1} tal que $\boxed{p=H^{-1}\cdot p'}$?

Acá es justamente donde se comprueba otra de las ventajas de expresar las transformaciones como matrices, y es que H^{-1} existe y es la inversa matricial de H; y en este caso particular se verifica que $H^{-1}=H^{T}$, esto es la transpuesta de H; lo que se puede lograr con simples manipulaciones de los elementos de la misma H.

Traspuesta de una Matriz

Dada una matriz A de dimensión m×n, se define su matriz transpuesta, que denotaremos por A^t, a la matriz de dimensión n×m cuyo elemento i,j coincide con el elemento a_{ji} de la matriz A.

Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots\ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{3n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ entonces $A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \ldots\ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \ldots\ldots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \ldots\ldots & a_{m3} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \ldots\ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$

Propiedades de la trasposición de matrices:

$i)$	$(A^t)^t = A$
$ii)$	$(A+B)^t = A^t + B^t$
$iii)$	$(\lambda A)^t = \lambda A^t \quad si \ \ \lambda \in \Re$
$iv)$	$(AB)^t = B^t A^t$

Como en general, en robótica, las rotaciones pueden ser dadas en cualquiera de los ejes (*x*, *y* ó *z*), existirán 3 matrices homogéneas que representan giros alrededor de cada uno de los ejes. Estas matrices se laman Matrices de rotación básicas y se expresan a continuación:

Matrices de Rotación Básicas

1. La matriz que permite una rotación de un punto, según el eje *x* (Figura 20), un ángulo θ; es decir, el eje *x* va a rotar llevándose consigo el punto *p*, que está en el plano *yz*, al punto *p'* rotando dicho ángulo θ, es:

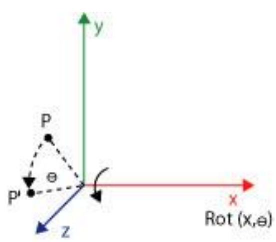

Figura 4 - Rotación según el eje x

$$Rot(x,\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 \\ 0 & sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (4)$$

2. La matriz que permite una rotación de un punto *p* según el eje *y* (Figura 21); esto es que, justamente, el eje *y* va a rotar llevándose consigo el punto *p* que está en el plano *xz*, al punto *p'*, rotando un ángulo θ, es:

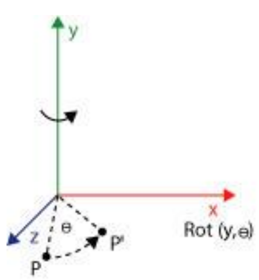

Figura 5 - Rotación según el eje y

$$Rot(y,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & sen(\theta) & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen(\theta) & 0 & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

3. La matriz que permite una rotación de un punto *p* según el eje *z*, (Figura 22, que en realidad es el primer caso planteado); esto es que, justamente, el eje *z* va a rotar llevándose consigo el punto *p* que está en el plano *xy*, al punto *p'*, rotando un ángulo θ, es:

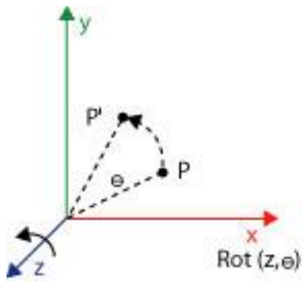

Figura 6 - Rotación según eje z

$$Rot(z,\theta)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0\\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (6)$$

No perdamos de vista que representan estas matrices: son las que hay que pre-multiplicar por un punto *p* para lograr una rotación en un determinado eje, dicha rotación llevará este punto a otra posición *p'* del espacio R^3.

Las matrices expresadas anteriormente se llaman "<u>Matrices de Rotación Basicas</u>"

¿Cómo podemos hacer para rotar un punto cualquiera del espacio según los 3 ejes?

Está claro que se pueden aplicar a un punto tantas transformaciones sucesivas (rotaciones en este caso) como se quiera; la operación resultante vendría expresada por una matriz que sería el producto de las matrices de cada operación, aplicada en el orden debido dado que el **producto de las matrices no es conmutativo**. Se coloca a la derecha la matriz que expresa la primera transformación que se aplique, seguidamente y a la izquierda de esta la segunda (transformación-rotación) y así sucesivamente hasta que la última queda a la izquierda de todo el producto.

<u>Analicemos la expresión:</u>

$\boxed{y = R_3\, R_2\, R_1\, x}$ Esto quiere decir que al punto *y* (que llamaremos destino) llegaremos desde el punto *x* , multiplicando primero Por R_1 (que es la primera *transformación –rotación*), luego a ese resultado hay que multiplicarlo por R_2 y luego por R_3

También es posible resolver el producto $\overleftarrow{R_3\, R_2\, R_1}$ en el orden indicado por la flecha y luego pre-multiplicar esta matriz $R_t = R_3\, R_2\, R_1$, por el vector *x* para obtener *y*, o sea

$$y = R_t x \qquad (7)$$

R_t está representando una matriz que rota sucesivamente el punto *x* en los ejes *x*, luego el *y*, y por último *z*.

$$y = Rot(z,\gamma)Rot(y,\beta)Rot(x,\alpha)x \qquad (8)$$

En principio nada nos impide que hagamos rotaciones sucesivas y varias en cualquiera de los ejes (*x, y o z*) lo importante, es tener presente cual es la transformación-rotación que aplicamos primero y luego las siguientes para definir perfectamente adonde se hallara el punto *y*.

Hay que tener en cuenta que el producto de matrices NO ES CONMUTATIVO, por lo tanto es muy importante respetar el orden en que se multiplican dichas matrices.

¿Cómo quedaría la matriz que representa 3 rotaciones en cada uno de los ejes?

Si suponemos que primero aplicamos una $Rot(x,\alpha)$, rotación según el eje *x* de un ángulo α; luego $Rot(y,\beta)$, una rotación según el eje *y* de un ángulo β; y, por último, una rotación $Rot(z,\gamma)$, según el eje *z*, de un ángulo γ, al producto queda:

$$T = Rot(z,\gamma)Rot(y,\beta)Rot(x,\alpha) =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\gamma & -sen\gamma & 0 & 0 \\ sen\gamma & \cos\gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & sen\beta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -sen\beta & 0 & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (9)$$

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\gamma)sen(\beta) & -sen(\gamma)+\cos(\gamma)sen(\beta)sen(\alpha) & sen(\gamma)sen(\alpha)+\cos(\gamma)sen(\beta)\cos(\alpha) & 0 \\ sen(\gamma)\cos(\beta) & \cos(\gamma)\cos(\alpha)+sen(\gamma)sen(\beta)sen(\alpha) & -\cos(\gamma)sen(\alpha)+sen(\gamma)sen(\beta)\cos(\alpha) & 0 \\ -sen(\beta) & \cos(\beta)sen(\alpha) & \cos(\beta)\cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(10)

T representa una matriz de rotación, con respecto a cada eje, en el orden expresado arriba; si se cambia el orden de las rotaciones también cambiará el resultado final, y dará una "T" totalmente diferente.
Obsérvese que el vector de traslación (última columna), se ha mantenido en 0 (cero) puesto que solo se han practicado 'rotaciones puras', sin traslaciones.

<u>COMENTARIO:</u>
Estas matrices de rotación, no son las únicas utilizadas en robótica, veremos más adelante que se puede rotar no solo a través de los ejes del sistema, sino también alrededor de un eje arbitrario, alrededor de los ejes del sistema, con otra secuencia distinta a la seguida por nosotros, y algo muy importante, a través de lo que en aeronáutica se llama "Roll, Pitch y Yaw"

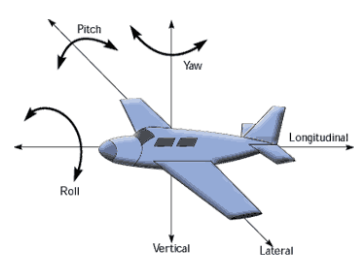

Figura 7 - Roll, Pitch y Yaw

(rolido, cabeceo y guiñada, Figura 23); pero a esto ya lo veremos más adelante.

Un ejemplo de rotaciones:

Supongamos que queremos rotar los puntos del eje *x* en π/2 radianes para colocarlos sobre el eje *y*, como se muestra en la Figura 24. Descripta la rotación, significa que usaremos una rotación tipo $Rot(z,\theta)$, que quiere decir: rotar sobre el eje *z*, un ángulo θ, en este caso π/2; o sea que los puntos girarán un ángulo de 90º positivo.
Recordemos la matriz para este caso:

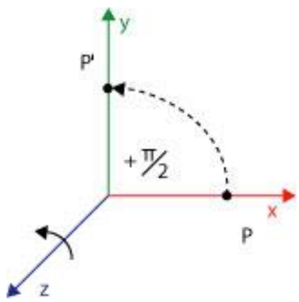

Figura 8 - Rotación sobre el eje z

$$Rot(z,\pi/2)=\begin{bmatrix}\cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0\\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (11)$$

Reemplazando θ = π/2, la matriz de rotación queda:

$$Rot(z,\pi/2)=\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (12)$$

Recordando que los puntos *p'* se hallarán pre-multiplicando la matriz de rotación por el punto *p* (coordenadas del vector), la ecuación para obtenerlos es:

$$p' = Rot(z,\pi/2)\,p \qquad (13)$$

Probemos entonces algunos puntos para ver si en realidad los lleva a una posición de π/2 de donde están, veamos el punto p_1= (3, 0, 0), (Figura 25) que está sobre el eje *x*; recordemos que para que se pueda definir la multiplicación debemos agregar una componente (4ª componente) igual a uno (1). La operación es entonces:

$$\underbrace{\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}}_{\substack{\text{Rotación en Z}\\ \text{De } \pi/2}} \overbrace{\begin{pmatrix}3\\0\\0\\1\end{pmatrix}}^{\text{Punto } p_1} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\3\\0\\1\end{pmatrix}}_{p_1'}$$

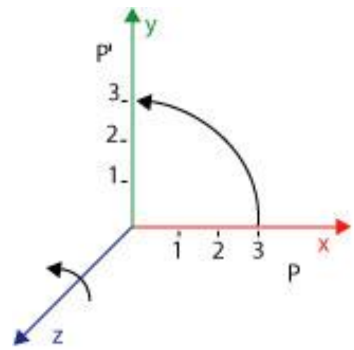

Figura 9 - Rotación sobre el eje z

Efectivamente los puntos del eje *x*, en este caso el punto (3,0,0) se ha transformado en un punto (0,3,0) que está sobre el eje *y*.

¿Podremos definir los movimientos de un robot con las transformaciones de traslación y rotación dadas?

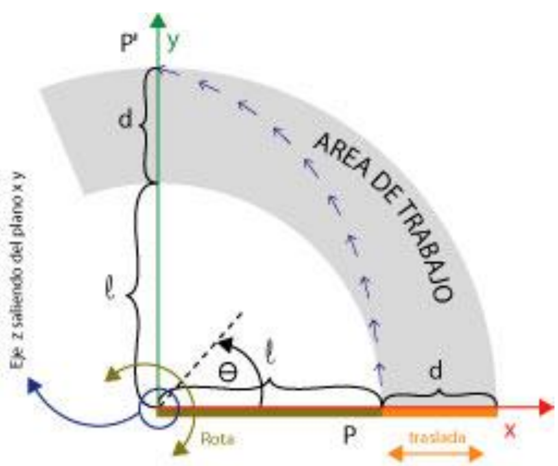

Figura 10 - Posicionamiento

Volvamos a uno de nuestros robots no tan elementales, más precisamente al que cuenta con un grado de libertad rotacional y otro prismático (Figura 26). Este robot tiene un grado de libertad tipo rotacional que coincide con el eje *z*, esto le permite hacer giros en el plano *xy* al mismo tiempo que puede trasladar objetos de modo prismático, como se describió antes

Recordemos que la distancia ℓ es fija, y lo que puede variar es el ángulo θ y *d*, donde $0 \le x \le d$ para la parte prismática, puede valer de 0 (cero) a *d* cuando está totalmente extendida.

Este robot no tan elemental tiene un área de trabajo simple, como la que se muestra en la figura 26.

¿Cuál es el Problema a Resolver?

Queremos saber si existe una matriz homogénea que pueda describir los movimientos del robot, más precisamente el movimiento que describiría un objeto colocado en el extremo libre del

mismo; lo que se pretende es encontrar una matriz que pre-multiplicada por un punto determinado (el efector final), que se encuentra en una posición inicial, permita conocer la posición final del mismo, dado un ángulo de rotación cualquiera, y una longitud cualquiera de su parte prismática.
Imaginemos entonces que el efector final (podría ser una pluma, birome, mano, etc.) se encuentra inicialmente sobre el eje de las *x* y con la parte prismática $x = 0$, o sea totalmente retraída. El punto inicial es el punto *p*, si hacemos girar la primera articulación coincidente con el eje *z* un ángulo θ = +π/2; el punto *p* se encontrará ahora sobre el eje de las *y*; si además desplazamos la articulación prismática en toda su extensión, esto es de 0 a *d*, el efector final se encontrará en el punto *p'*.
Por ahora no nos preocuparemos cual será el camino a recorrer por el efector final, pero si los dos movimientos se hacen conjuntamente (rotación y traslación), seguramente describirá un semicírculo que se va agrandando, o sea, una porción de espiral como se muestra en flechas de punto en la figura de arriba.

No perdamos de vista que lo que se pretende resolver es el problema de la cinemática directa de nuestro robot no tan elemental. O sea, dado un punto inicial y los valores de las articulaciones, averiguar posición y orientación final de la punta libre del robot.

Comenzamos por definir el punto inicial, y los valores de las articulaciones. Como se explicó antes, el punto inicial, es el punto *p*, cuyas coordenadas son:

$$p = \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

puesto que solo tiene componente en *x*; y como la parte prismática se halla retraída, es solo ℓ en *x*; la última componente = 1 es para definir los productos de la matriz homogénea.

Como θ=+π/2, esto quiere decir que efectuaremos una $Rot(z, +\pi/2)$ como el caso del ejemplo de rotaciones, o sea, una rotación sobre el eje *z* de +π/2 radianes (90º), con lo que podemos prever que el efector final irá a parar sobre el eje de las *y*.

La matriz que define esta rotación es:

$$Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

Como en el caso del ejemplo de la rotación, reemplazando θ = +π/2, nos queda:

$$Rot(z,\pi/2) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15)$$

Por otro lado, hay que considerar la traslación que viene dada por una matriz homogénea de traslación que tiene la forma expuesta abajo.

$$V=\begin{bmatrix}1&0&0&v_x\\0&1&0&v_y\\0&0&1&v_z\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Considerando que solo hay una traslación debida al desplazamiento de la articulación retráctil (prismática) según el eje de las x, la matriz queda:

$$V=\begin{bmatrix}1&0&0&d\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

Recordando que para llegar al punto *p'* (como se dijo antes) había que multiplicar en el orden debido las transformaciones en este caso:

$$p' = Rot(z,+\pi/2)Tras(x,d)p \qquad (16)$$

O sea, que para saber la localización final del punto *p*, trasladado y rotado, habrá que pre-multiplicarlo por una matriz homogénea $\boxed{\text{H = Rot }(z,+\pi/2)\text{ Tras }(x,\text{d})\cdot}$, en el orden indicado, de modo que $\boxed{p'\text{= H}\cdot p}$.

Realicemos entonces el cálculo de H:

$$\begin{array}{c|c}
 & \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&d\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{\text{Tras}(x,\text{d})} \\
\hline
\underbrace{\begin{matrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{\text{Rot }(z,\pi/2)} & \underbrace{\begin{matrix}0&-1&0&0\\1&0&0&d\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}}_{\text{Matriz homogénea H}}
\end{array}$$

Veamos a donde nos lleva el punto *p* inicial = $\begin{bmatrix}\ell\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ mediante H

Si nos fijamos en en gráfico que representa el robot, Figura 26, veremos que el efector final de nuestro robot no tan elemental solo tiene componente en y, con lo que podemos afirmar que la matriz H transforma puntos rotándola y trasladándola según
$\theta = +\pi/2$ y $x = d$.

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & \ell \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & d & \ell+d \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\} p' = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell+d \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$p' = \begin{bmatrix} 0 \\ \ell+d \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad p = \begin{bmatrix} \ell \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

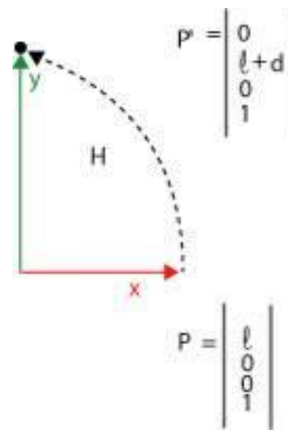

Figura 11 - Rotación sobre el eje z

Se deja al lector la comprobación de transformaciones con diferentes ángulos y longitudes prismáticas.

Se expone abajo la matriz general H, correspondientes a rotaciones y traslaciones que responden a la cinemática directa del robot mostrado en la Figura 11.

$$H = Tras\ (x,y,z)\cdot Rot\ (z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & v_x\cos(\theta)+v_y sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & v_x sen(\theta)+v_y sen(\theta) \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (17)$$

Que es la matriz que deberemos pre-multiplicar por el punto que queremos transformar.
v_x, v_y y v_z representan las componentes de traslación en los ejes correspondientes (en nuestro caso solo v_z = d), y θ el ángulo girado sobre el eje z.

Transformaciones entre Sistemas de Coordenadas: Justificación en Robótica

El problema expresado anteriormente en el que, por medio de un grado de libertad, podíamos girar un objeto (esto es, tomar un objeto y someterlo a un giro, mediante una articulación de rotación), se puede solucionar (como en el caso de la traslación) pre-multiplicando el vector de la posición inicial, por una matriz de rotación.

$$\boxed{p' = R \cdot p}$$

Sin embargo, es muy importante en robótica, poder expresar un punto en el espacio, por caso, las coordenadas del efector final, en diferentes sistemas de coordenadas a lo largo de la cadena cinemática que representa el robot.

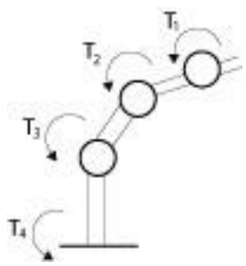

Figura 12 - Transformaciones sucesivas

Como se expresó antes, un robot es un conjunto de enlaces-articulaciones (links-joints) que se pueden mover independientemente, si bien el efector final puede ser siempre referido a un sistema fijo, el robot, el usuario y el controlador del mismo deberán tener los datos de cada una de las articulaciones para saber, por ejemplo, dónde se halla la herramienta, en el caso de un robot; o donde se encuentra, por ejemplo una pata, en el caso de un animatrónico.

Desde el punto de vista práctico dijimos que para que un robot sea diestro (pueda posicionar su muñeca en cualquier posición y orientación) hacían falta, al menos teóricamente, 6 GdL: 3 para posición y 3 para orientación.
En definitiva, la herramienta estará en el punto libre del robot y ésta, unida a una articulación, y luego a un enlace, y luego a otra articulación, hasta llegar a la base del robot; esta situación nos hace ver que, al existir varios grados de libertad, es lógico que cada enlace se posicione y oriente en el espacio de una determinada manera para lograr la posición y orientación del efector final. También parece razonable pensar en un sistema de coordenadas asociado a cada enlace, que se mueva con éste. Imaginemos un robot con “n” grados de libertad (giratorios o prismáticos, no interesa), en los que en cada enlace tiene su sistema asociado; cada vez que el brazo hace una rutina, o movimiento, lo que hace en definitiva es trasladar y/o rotar cada uno, ó alguno, de sus enlaces para lograr la posición deseada.
Como no sirve de mucho tener “n” sistemas moviéndose independientemente, la idea es referir el sistema de la punta libre del robot a un sistema fijo, por ejemplo, a la base (ver Figura 28).
Esto se logra haciendo sucesivas transformaciones (traslaciones y rotaciones de los sistemas asociados) desde la punta del robot, y refiriendo el sistema al anterior, esto es, de la punta a la base, tantas veces como grados de libertad (enlaces-articulaciones) tenga el robot.

Para hacer esas transformaciones, que en definitiva son “expresar un punto p, del espacio tridimensional, en un sistema diferente del que está”, es conveniente hacerlo mediante transformaciones homogéneas, traslaciones y/o rotaciones en forma matricial.
Llegado a este punto, se evidencia la enorme utilidad que tiene, entonces, en robótica, el hecho de poder expresar un punto del espacio en coordenadas, llamémosle propias, y con respecto a “otro” sistema de coordenadas trasladado y/o rotado con respecto al propio.

El problema que aquí aparece entonces es <u>"expresar un punto en un sistema dado y luego referirlo a otro que puede estar, o bien, trasladado, o bien, rotado, o ambas acciones".</u>
Veamos entonces como se puede expresar un punto *x* cualquiera en un sistema fijo, y luego, en uno trasladado o rotado.
Como dijimos antes, un sistema de coordenadas es un conjunto de tres ejes rectilíneos y ortogonales, a cada uno de ellos se le asocia a un vector unitario (versor) que lo genera, y además aclaramos que, estos sistemas, son dextrógiros, o sea que $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$ según la regla del tirabuzón, expresada anteriormente.

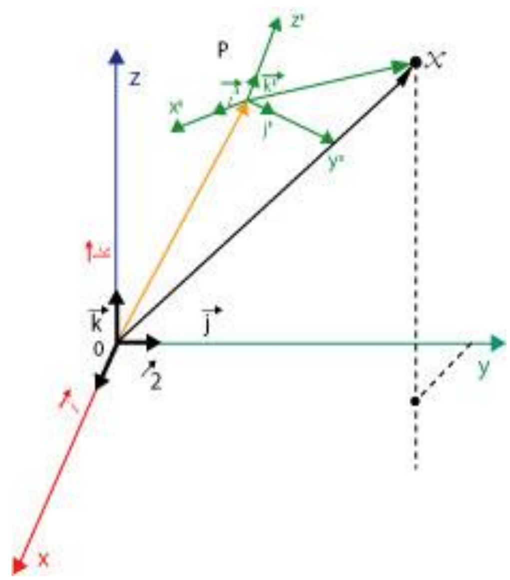

Figura 13 - Transformación genérica

Veremos ahora como podemos referenciar un sistema en otro.

Dados dos sistemas ortogonales dextrógiros cualesquiera, siempre es posible encontrar la transformación que liga las coordenadas de un punto cualquiera (puede estar el segundo sistema trasladado y/o rotado con respecto al primero).
Esta transformación sería lo que rotase y trasladase apropiadamente el segundo sistema de modo que sus ejes se superpongan con el primero.
Para deducir las ecuaciones de transformación genérica que producirán las coordenadas de un punto cualquiera expresadas en un sistema de referencia, a partir de las expresadas en otro sistema, nos ayudará la Figura 29 en la que vemos que el punto *x* se lo puede expresar de acuerdo al sistema *xyz* o al *x'y'z'*, sabiendo que el *x'y'z'* está trasladado y rotado con respecto al *xyz*.
Si llamamos *o* al origen de *xyz* y *p* al origen de *x'y'z'*, y *x* al punto que queremos expresar en uno u otro sistema, vemos que se cumple que a *x* se puede llegar con un único vector $\overrightarrow{ox}$ referido al sistema *xyz* o mediante el vector $\overrightarrow{op}$, que es donde se encuentra el sistema *x'y'z'*, con respecto al *xyz*, más el propio $\overrightarrow{px}$, que referencia el punto *x* al sistema *x'y'z'*. O sea,

$$\overrightarrow{ox} = \overrightarrow{op} + \overrightarrow{px} \qquad (18)$$

Expresando la ecuación (18), colocando las componentes (valores de cada uno de los ejes) con su correspondiente versor, la ecuación queda:

Componente *x* del punto *x* con respecto al sistema *x'y'z'*

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = p_x\vec{i} + p_y\vec{j} + p_z\vec{k} + x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$$

Componente *x* del punto *p* en el que se halla trasladado el sistema *x'y'z'* con respecto al *xyz*

Componente *x* por su versor *i* en el sistema *xyz*

Cada versor del sistema rotado y/o trasladado ($\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'$) puede expresarse (ser descompuesto) como una combinación lineal de los versores del sistema *xyz* (supuesto fijo).

Entonces expresemos los versores $\vec{i}\,', \vec{j}\,', \vec{k}\,'$ como combinación lineal de los $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Haciendo uso de la definición de producto escalar:

$$\begin{aligned}
\vec{i}\,' &= \cos(\alpha_{ix})\vec{i} + \cos(\alpha_{iy})\vec{j} + \cos(\alpha_{iz})\vec{k} \\
\vec{j}\,' &= \cos(\alpha_{jx})\vec{i} + \cos(\alpha_{jy})\vec{j} + \cos(\alpha_{jz})\vec{k} \\
\vec{k}\,' &= \cos(\alpha_{kx})\vec{i} + \cos(\alpha_{ky})\vec{j} + \cos(\alpha_{kz})\vec{k}
\end{aligned} \qquad (19)$$

Si ahora reemplazamos en la ecuación general, e igualamos componente a componente, nos quedarán los valores de *x*, *y*, *z* (componentes del punto *x*, respecto del sistema fijo) como función de *p* (vector de traslado de *x'*, *y'*, *z'*), y de las componentes *x'*, *y'*, *z'* del sistema trasladado y rotado, y los cosenos que vinculan esta rotación.

$$\begin{aligned}
x &= f(p, x', \alpha) \\
x &= p_x + x'\cdot\cos(\alpha_{ix}) + y'\cdot\cos(\alpha_{jx}) + z'\cdot\cos(\alpha_{kx}) \\
y &= p_y + x'\cdot\cos(\alpha_{iy}) + y'\cdot\cos(\alpha_{jy}) + z'\cdot\cos(\alpha_{ky}) \\
z &= p_z + x'\cdot\cos(\alpha_{iz}) + y'\cdot\cos(\alpha_{jz}) + z'\cdot\cos(\alpha_{kz})
\end{aligned} \qquad (20)$$

También lo podemos expresar como matriz:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{ix}) & \cos(\alpha_{jx}) & \cos(\alpha_{kx}) & p_x \\ \cos(\alpha_{iy}) & \cos(\alpha_{iy}) & \cos(\alpha_{ky}) & p_y \\ \cos(\alpha_{iz}) & \cos(\alpha_{jz}) & \cos(\alpha_{kz}) & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Esta ecuación expresa los componentes *x'y'z'* de un sistema girado y/o trasladado en un sistema fijo *xyz*; o sea que pre-multiplicando la matriz por las componentes del punto en el sistema desplazado y rotado, obtendremos las coordenadas en el sistema fijo *xyz*. Como se ve, es una matriz similar a la que usamos para resolver la cinemática directa de nuestro robot no tan elemental, teniendo en cuenta que la que se presenta aquí tiene otro sentido, y es justamente expresar puntos de un sistema en otro sistema no coincidente con el primero.

<u>Analicemos ahora la siguiente matriz:</u>
Se la puede subdividir en 4 matrices: [01], [02]

$$H = \left|\begin{array}{c|c} R_{3x3} & p_{3x1} \\ \hline f_{1x3} & w_{1x1} \end{array}\right|$$

$\boxed{R_{3x3}}$ La sub-matriz R_{3x3} es llamada <u>matriz de rotación</u> y representa la orientación del sistema *x'y'z'* con respecto al *xyz* fijo.
Esta matriz es llamada "matriz de cosenos directores", puesto que en ella se encuentran los cosenos de cada uno de los versores del sistema rotado, con respecto al fijo. Esta matriz R_{3x3} es, además, ortogonal, y si la tratamos independiente de la matriz homogénea verificaremos que $R^{-1}=R^T$ (léase **T**ranspuesta) – se cumple que
$R^T x\ R = I_3$ donde I_3 es la matriz identidad 3x3, R representa la orientación de un sistema con respecto a otro. Además, como los vectores de los productos escalares son vectores unitarios, se le llama también una "transformación ortonormal".

$\boxed{p_{3x1}}$: Es el llamado vector de traslación, y representa el vector por el cual se halla trasladado el sistema *x'y'z'*, con respecto al *xyz* fijo.

$\boxed{f_{1x3}}$: Representa la transformación de perspectiva, muy usada en los paquetes de software de animación computacional y en visión artificial (dan las perspectivas introducidas por las cámaras), pero en el caso de robótica, estas 3 componentes, son nulas.

$\boxed{w_{1x1}}$: Que representa el escalado y que, en robótica, es la unidad; pero en otras aplicaciones puede tomar cualquier valor positivo. Es llamado también "factor de escala global".

Así T o H se puede expresar:

$$T = H = \begin{bmatrix} R_{3\times3} & p_{3\times1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Rotación & Traslación \\ Perspectiva & Escalado \end{bmatrix} \tag{22}$$

A esta matriz se la suele escribir como: $\begin{bmatrix} n_x & 0_x & a_x & p_x \\ n_y & 0_y & a_y & p_y \\ n_z & 0_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

¿En definitiva, que Representa una Matriz de Transformación Homogénea?

A – Una matriz de transformación homogénea puede representar la posición y orientación de un sistema girado y trasladado *x'y'z'* con respecto a un sistema fijo *xyz*.

B – Una matriz de transformación homogénea puede transformar un vector expresado en coordenadas con respecto a un sistema *x'y'z '*(girado y rotado) en un sistema fijo *xyz*.

C – Una matriz de transformación homogénea puede rotar y trasladar un vector con respecto a un sistema fijo *xyz*.

Casos Especiales de la Matriz de Transformación Homogénea

Como se vio antes, una matriz de transformación homogénea puede representar rotaciones, sin traslaciones, ni escalado, ni perspectiva; a una matriz de este tipo se le llama "matriz de rotación homogénea básica". Como ejemplo colocamos la que representa una rotación con respecto al eje *x*, un ángulo α:

$$T(x,\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

La sub-matriz superior de la derecha, 3x1 de la matriz homogénea, tiene el efecto de trasladar el sistema de coordenadas *x'y'z'*, que tiene ejes paralelos al sistema de coordenadas *xyz*, considerado fijo o de referencia, pero cuyo origen está en (d_x, d_y, d_z) ó (v_x, v_y, v_z).

$$T_{Trans} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Es la llamada "matriz de traslación homogénea básica"

Como ya se mencionó antes, la sub-matriz inferior izquierda, 1x3, representa la transformación de perspectiva, que es útil para animación computada, visión artificial, y calibración de cámaras, y se considera 0 (cero) para indicar una transformación de perspectiva nula.

Los elementos de la diagonal principal de una matriz de transformación homogénea producen el escalado local y global.
Si por ejemplo pre-multiplicamos la matriz por el vector de coordenadas (*x*, *y*, *z*):

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_x \\ b_y \\ c_z \\ 1 \end{bmatrix}$$

Los valores de las componentes se alargan mediante los escalares a, b y c.
Obsérvese que las matrices de rotación básicas no producen ningún efecto de escalado local.

Con respecto al escalado global, recordemos que la última componente de la 4ª fila, 4ª columna, podía ser un valor determinado, que dijimos que en robótica era siempre "1" (uno), sin embargo, podemos hacerlo diferente

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ s \end{bmatrix}$$

Al ser "*s*" ó también expresado como "w" en lugar de 1, las coordenadas del vector deben ser afectados por:

$$\boxed{\begin{aligned} p_x &= \frac{x}{s} \\ p_y &= \frac{y}{s} \\ p_z &= \frac{z}{s} \\ s &= \frac{S}{s} = 1 \end{aligned}}$$

Por lo tanto, dependerá del valor de *s*, que cada coordenada se alargue o acorte. Si $s > 1$ se acortarán todas las coordenadas, y si $0 < s < 1$se alargarán.

Más Información a Partir de la Matriz Homogénea

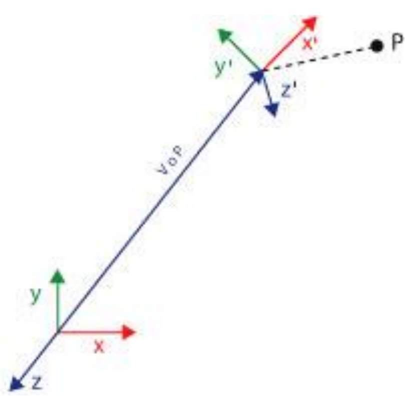

Figura 14 - Traslación y rotación

Supongamos dos sistemas de coordenadas como se muestran en la Figura 30, uno fijo *xyz* con origen en *o,* y uno trasladado y/o rotado x'y'z', ó *uvw*, como se dijo antes, la matriz de transformación homogénea nos da la información de un sistema corrido respecto a otro.

Escribamos la matriz que representa un sistema corrido y rotado.

Por ejemplo, supongamos que el sistema *x'y'z'* ó *uvw* está en el punto de $x = 5, y = 3, z = 2$, y además se ha rotado según el eje *x* (o sea, en el plano *yz*) un ángulo de 45º o +π/4 radianes.

Recordemos la matriz que representa esta rotación, está expresada antes en este mismo trabajo; por otro lado, el vector de traslación expresado en el problema hará que la matriz homogénea sea:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & \cos(45^{\circ}) & -sen(45^{\circ}) & p_y \\ 0 & sen(45^{\circ}) & \cos(45^{\circ}) & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

Colocando los valores que corresponden, la matriz queda:

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0,7071 & -0,7071 & 3 \\ 0 & 0,7071 & 0,7071 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que el punto expresado en el sistema “movido”, es el origen *x’y’z’*= (0,0,0), y se lo quiere expresar en el sistema fijo, o de referencia, *xyz*.

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 0 \\ & & & & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 5 & 5 \\ 0 & 0,7071 & -0,7071 & 3 & 3 \\ 0 & 0,7071 & 0,7071 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ Punto en (*x’y’z’*), o sea el origen

$\Rightarrow$ Punto en (*xyz*), o sea el sistema fijo

¿Cómo interpretamos el resultado?

Si pre-multiplicamos la matriz homogénea que representa el corrimiento y rotación por las coordenadas del punto de origen, lo que nos da como resultado es el vector de traslación puro, o sea que la sub-matriz 3x1, de la derecha, indica la posición del origen del sistema (*x’,y’,z’*) con respecto al (*x,y,z*) fijo.

Supongamos ahora que queremos expresar una transformación parecida a la anterior, con rotación, pero sin traslación, la matriz con rotación según *x*, un ángulo de +π/4, y sin traslación, sería:

$$Rot(x,\pi/4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,7071 & -0,7071 & 0 \\ 0 & 0,7071 & 0,7071 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (24)$$

Supongamos que queremos expresar el punto (1,0,0) del sistema girado *x’y’z’* en el sistema fijo *xyz*; haciendo la pre-multiplicación obtendremos:

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & \left.\begin{array}{c}1\\0\\0\\1\end{array}\right\} \text{Versor } \vec{\hat{i}}\,' \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0{,}7071 & -0{,}7071 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1
\end{array}
$$

Vemos que el versor $\vec{\hat{i}}\,'$ no cambia.

Veamos qué pasará con $\vec{\hat{j}}\,'$ y $\vec{\hat{k}}_i$.

$$
\begin{array}{cccc|cc}
 & & & & \left.\begin{array}{c}0\\1\\0\\1\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Versor}\\ \vec{\hat{j}}\,'\end{array} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & 0{,}7071 & -0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 & y \\
0 & 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 & z \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc|cc}
 & & & & \left.\begin{array}{c}0\\0\\1\\1\end{array}\right\} \begin{array}{c}\text{Versor}\\ \vec{\hat{k}}\,'\end{array} & \\
\hline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & x \\
0 & 0{,}7071 & -0{,}7071 & 0 & -0{,}7071 & y \\
0 & 0{,}7071 & 0{,}7071 & 0 & 0{,}7071 & z \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 &
\end{array}
$$

Los versores $\vec{\hat{j}}\,'$ y $\vec{\hat{k}}\,'$ se ven modificados en el sistema fijo.

Veámoslo gráficamente:
Vemos que, efectivamente, los valores de la matriz de rotación, nos dan información de cómo se modificarán los versores del sistema "movido" en el sistema fijo; de hecho podemos ver a la matriz como un conjunto de columnas en las que cada columna representa las coordenadas de cada versor del sistema movido (*x′*,*y′*,*z′*) con respecto al sistema fijo (*x*, *y*, *z*).

Los versores quedan:

$$\vec{i}\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{Rot+\pi/4}\vec{i}\,'\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$ no se modifica

$$\vec{j}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{Rot+\pi/4}\vec{j}\,'\begin{bmatrix}0\\0,7071\\0,7071\\1\end{bmatrix}$$ se modifica

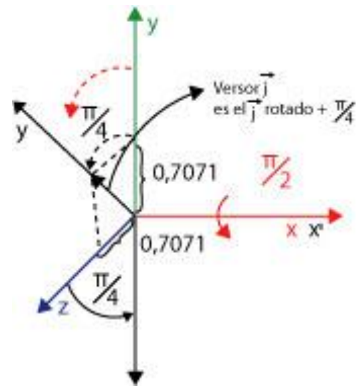

Figura 15 – Rotación del versor j

$$\vec{k}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\1\end{bmatrix}\xrightarrow{Rot+\pi/4}\vec{k}\,'\begin{bmatrix}0\\-0,7071\\0,7071\\1\end{bmatrix}$$ se modifica

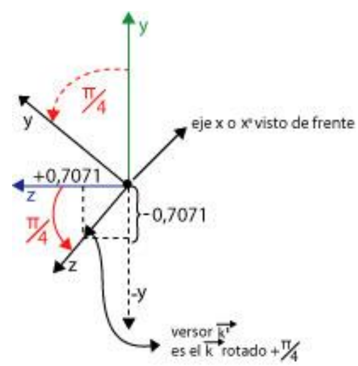

Figura 16 - Rotación del versor k

La matriz puede ser vista como:

$$\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0,7071 & -0,7071 & 0\\0 & 0,7071 & 0,7071 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}$$

Son las componentes del versor $\vec{i}\,'$ en el sistema fijo *xyz*, no se han modificado, puesto que el giro de π/4 es sobre el eje *x*.

Supusimos que no había traslado con respecto al sistema fijo.

Son las componentes del versor $\vec{j}\,'$sobre el sistema fijo *xyz*, no tiene componentes en *x*, pero las componentes en *y* y *z* corresponden al eje *x* girado π/4.

Son las componentes del versor $\vec{k}\,'$ sobre el sistema fijo *xyz*, tampoco tiene componentes en *x*, pero en *y* y *z* sí, y son las que corresponden al giro de π/4 sobre el eje *x*.

Resumiendo:

- Dado un sistema de referencia *xyz* y una matriz de transformación homogénea T ó H, los vectores columnas de la sub-matriz rotación, representan los ejes principales (versores) del sistema de coordenadas "movido" (rotado y/o trasladado) *x'y'z'* ó *uvw* con respecto al sistema de coordenadas de referencia *xyz* fijo.

- El vector cuarta columna de la matriz de transformación homogénea T ó H, representa la posición del origen del sistema "movido" *x'y'z'* con respecto al sistema fijo *xyz* de referencia.

- La matriz de transformación homogénea, geométricamente, representa la localización de un sistema rotado (posición y orientación) con respecto a un sistema de coordenadas de referencia.

Construcción de Matrices Homogéneas

Lo primero a tener en cuenta es el enunciado del problema; por ejemplo, pensemos en un sistema fijo y otro que se va a mover (al principio los dos sistemas coinciden), y se informa lo que se ha realizará al sistema móvil para llevarlo a donde queremos, esto es: se supone que, al comienzo, los dos sistemas, el fijo y el móvil, coinciden y luego se dan las directivas para modificar al sistema móvil. Aclararemos estos conceptos en el siguiente ejemplo.

Ejemplo de construcción:

Supongamos que el sistema *xyz* de la Figura 33 es el sistema de referencia, y que el *uvw* es el que se girará y trasladará; por ejemplo, el sistema *uvw* se a girado π/2 alrededor del eje *z* y, posteriormente, trasladado según el punto *p* cuyas coordenadas son: *p* = (1,2,3). Si un punto *k* tiene coordenadas (1,1,1) en el sistema móvil *uvw*, se pide: averiguar la matriz homogénea T, y los valores de las coordenadas del punto *k*, en el sistema fijo *xyz.*

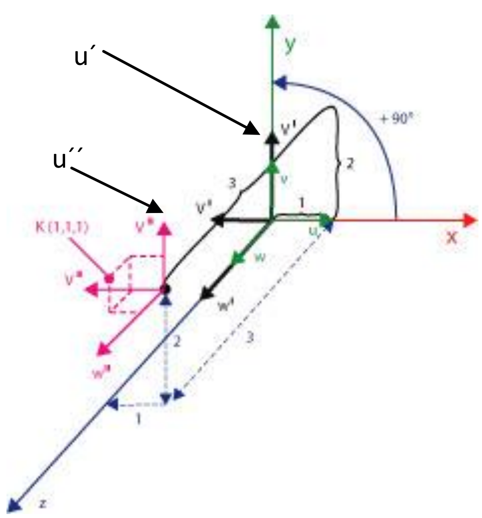

Figura 17 - Ejemplo de construcción

Veamos gráficamente si podemos interpretar los pasos que se han seguido para localizar el sistema móvil.

A – Primero se ha hecho coincidir el sistema *xyz*, en rojo el x, verde el y y en azul el z; con el sistema *uvw*, en verde.

B – El sistema *uvw* se lo ha rotado 90º con respecto al eje *z*, y se lo ha dibujado en negro.

La posición en la que se encuentra el eje *u* ahora es *u'*, y está sobre el eje *y* del sistema fijo; el eje *v* ha pasado a ser *v'*, y se encuentra coincidente con el eje –*x* del sistema fijo; el eje *w* no se ha movido (se ha realizado un giro con respecto a *z*) y es ahora *w',* que coincide con *w* y con el *z* del sistema fijo.

Luego de la rotación, se ha trasladado la terna *u'v'w'* según el vector (1,2,3) con respecto al sistema fijo *xyz* y se lo ha llamado *u"v"w"* que se ha dibujado en rosa. Veamos ahora, en el dibujo, que coordenadas tiene el punto *k* = (1,1,1) en el sistema *xyz* fijo.

El sistema móvil está en la posición según *xyz* fijo de (1,2,3), pero los ejes ahora no son coincidentes con los ejes *xyz*, sino que se hallan rotados según un ángulo de 90º con respecto a *z.*

Inspeccionemos el gráfico, analicemos la ubicación de *k* = (1,1,1) en el sistema fijo *xyz*:

- la coordenada *x* de *k* es 0 (cero), puesto que, si bien el sistema nuevo tiene la coordenada en *x* = 1, el eje *v"* 'mueve' a la izquierda una unidad y esto anula la coordenada *x* del punto *k*, según el sistema fijo.
- La coordenada *y* de *k* es 3, puesto que, con el sistema trasladado en 2 unidades según *y*, hay que sumarle una unidad más, aportada por *u"*, porque este eje es paralelo al *y* del sistema fijo, y tiene el mismo sentido que éste.

- La coordenada *z* de *k* es 4, puesto que ya tiene 3 unidades con respecto a éste eje, según el sistema fijo, más una unidad que se aporta según *w"* que es paralelo y de igual sentido que el *z* del sistema fijo.

Lamentablemente no es práctico el análisis gráfico cada vez que necesitemos la ubicación de un punto ó un sistema en el espacio, para ello existen las matrices de transformación homogénea, que nos permiten ubicar sistemas móviles o puntos con respecto a uno u otro sistema.

<u>La matriz correspondiente a la traslación es:</u>

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & p_x \\ 0 & 1 & 0 & p_y \\ 0 & 0 & 1 & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reemplazando por el punto *p* = (1,2,3), queda:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz que representa un giro sobre el eje *z*, de 90º ó +π/2 está expresada anteriormente en este trabajo.

$$Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{25}$$

Reemplazando θ por +π/2 (90º), queda:

$$Rot(z,\theta) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{26}$$

Al componer las dos matrices, hallaremos la T total, que describe la *uvw* con respecto al *xyz*.

$$\begin{array}{c|c} & \left.\begin{matrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{matrix}\right\}\text{Rotación} \\ \hline \underbrace{\begin{matrix}1&0&0&1\\0&1&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{matrix}}_{\text{Traslación}} & \left.\begin{matrix}0&-1&0&1\\1&0&0&2\\0&0&1&3\\0&0&0&1\end{matrix}\right\}\text{H} \end{array}$$

Pre- multipliquemos H por k = (1,1,1), para verificar el resultado

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix} \quad \text{H} \\
\hline
\underbrace{\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}}_{\text{H}} & \begin{matrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 1 \end{matrix}
\end{array}
$$

El punto k, expresado en el sistema *xyz*, que es el mismo resultado al que hemos llegado haciendo el análisis gráfico.

Como se dijo antes, es muy importante comprender muy bien el enunciado para poder construir la matriz homogénea.

¿Qué hubiese pasado si primero se hubiera trasladado el sistema móvil y luego hubiese rotado?
Para lograr H, habría que, primero pre-multiplicar la matriz de traslación por la de rotación, para llegar a la homogénea, que describe este corrimiento, por ejemplo.

<u>Otro ejemplo:</u>
Un sistema *ouvw* ha sido trasladado por un vector p = (1,2,3) con respecto al sistema *oxyz* y luego girado un ángulo alrededor del eje z, de π/2. Calcular la matriz homogénea que describe la localización de *ouvw* con respecto al sistema fijo *oxyz* y averiguar las coordenadas del punto k= (1,1,1) del sistema *ouvw* con respecto al eje *oxyz*.

Si multiplicamos en orden la matriz de la matriz traslado de p = (1,2,3) por la de rotación de +π/2, H quedaría:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} \\
\hline
\begin{matrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = H_{2do \quad ejemplo}
\end{array}
\qquad (27)
$$

Si ahora pre-multiplicamos H_{2do} por el punto (1,1,1) hallaremos el punto con respecto al sistema fijo *xyz*.

$$\left.\begin{matrix}1\\1\\1\\1\end{matrix}\right\}\ \text{El mismo punto (1,1,1,1) referido al sistema fijo } \mathit{ouvw}$$

$$\begin{bmatrix}0 & -1 & 0 & -2\\1 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 3\\0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = H_{2do\ ejemplo} \qquad \left.\begin{matrix}-3\\2\\4\\1\end{matrix}\right\}\ \text{Punto } \textit{en el sistema fijo 0xyz}$$

Como lo habíamos anticipado, comprobamos que el resultado de rotar y trasladar no es igual que el resultado de trasladar y rotar.

Inversa de la Matriz Homogénea

Como debe quedar claro hasta ahora, una matriz de transformación homogénea, geométricamente representa la localización (posición y orientación) de un sistema de coordenadas rotado y/o trasladado con respecto a un sistema de referencia. No hemos mencionado hasta ahora la forma de expresar un punto que está en el sistema de referencia en un sistema "móvil" o trasladado y/o rotado con respecto a uno fijo, esto es en qué posición está un punto expresado en el sistema el sistema fijo con respecto al que se ha trasladado y/o rotado.
La forma es calcular la inversa de la matriz homogénea que referencia el sistema móvil al fijo.
Como se expresó antes, entre las propiedades de la sub-matriz de rotación 3x3, de la parte superior derecha de la matriz homogénea, estaba la de poder calcular sencillamente la inversa de ésta, que es a su vez la transpuesta $R^{-1}= R^{T}$, con lo cual tendremos solucionada gran parte del cálculo de la inversa de la homogénea.
Lamentablemente, la cuarta columna no se la puede calcular tan sencillamente, pero podremos usar cualquiera de los métodos aprendidos en álgebra para arribar a su valor. Igualmente podemos calcular la cuarta fila, o calcular toda la matriz inversa por métodos computacionales ó directamente por calculadora o computadora.

Calculemos la inversa de la matriz homogénea, que sirvió para construirla en el primer ejemplo:

$$H = \left[\begin{array}{ccc:c}0 & -1 & 0 & 1\\1 & 0 & 0 & 2\\0 & 0 & 1 & 3\\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Trasponiendo la sub-matriz de rotación obtendremos a su matriz de rotación de la inversa de H; o sea:

$$R_H = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (28)$$

Para calcular la 4ta columna de la matriz podemos aplicar el método de los cofactores, o sea, cada elemento de la matriz inversa M lo llamaremos $m^{-1}(i,j)$, es igual a $(-1)^{i+j} \cdot \det\left[H(j,i)\right]$, donde H(j,i) es la matriz adjunta al elemento (i,j), obtenida al suprimir de H la fila *j* y la columna *i*. Esto es, cada elemento de la inversa se lo obtiene de la siguiente manera:
$m^{-1}(i,j)$ = el elemento *i,j* de la inversa es igual al determinante de la matriz H, donde se han eliminado la fila *j* y la columna *i*, multiplicado por (-1), elevado a la suma de la posición, fila *i* + columna *j*, el elemento $m^{-1}(1,4) = (-1)^{1+4} \cdot$ det H (eliminadas fila 4, columna 1).
Calculemos el elemento $m^{-1}(1,4)$ de la matriz inversa de H

$$\det \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ \hline -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

= 0-(-2); det = 2, ahora lo multiplicamos por $(-1)^{1+4}=(-1)^5=-1$; luego, 2·(-1) implica que

$\boxed{m^{-1}(1,4) = -2}$

Del mismo modo podemos calcular cada uno de los elementos de la 4ª columna, o directamente, usar un programa, como por ejemplo "Matlab®[1]", para calcular la inversa.

Se deja para el lector el cálculo de la 4ª columna, y comprobar que la 4ª fila no cambia; así la inversa de H queda:

$$H^{-1} = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Esta matriz, como expresamos antes, está representando la localización (posición y orientación) del sistema *oxyz* con respecto al *ouvw*, como si el sistema ouvw estuviese fijo con respecto a ouvw ahora movido.

El vector de traslación estaba representado por la 4ª columna, o sea que, el eje *oxyz* está trasladado según (-2,1,-3), con respecto al sistema *ouvw*, que se puede verificar en la figura 33.

[1] Matlab® es marca registrada de The Mathworks.

Los vectores filas de la sub-matriz rotación de H^{-1} representan ahora los ejes principales del sistema de coordenadas de referencia *oxyz* con respecto a *ouvw.*

$$\left.\begin{array}{c}1\\2\\0\\1\end{array}\right\}\text{En el } oxyz$$

$$\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}0\\0\\0\\0\end{array}}\right\}\begin{array}{c}\text{El mismo punto}\\ \text{en } ouvw\end{array}$$

Para comprobar que H^{-1} refiere a los puntos que están en *oxyz* al sistema *ouvw*, tomemos del gráfico el punto p_1 = (1,2,3) en *x* e *y*, y pre-multipliquemos la matriz H^{-1} por este punto para saber las coordenadas que tiene en el sistema *ouvw*.

Si nos fijamos en la Figura 33, el sistema *ouvw* había sido corrido por las coordenadas (1,2,3); por lo que el punto (1,2,0) tiene coordenadas nulas en *u* y *v*, y –3 en *w*, lo cual se puede observar claramente en el gráfico; el sistema *oxyz* está “atrás” del *ouvw*.

Más sobre H^{-1}

Si escribimos la matriz homogénea en forma genérica, y calculamos su inversa por cualquier método (por ejemplo, co-factores), obtendremos:

$$H = \begin{bmatrix} n_x & o_x & a_x & p_x \\ n_y & o_y & a_y & p_y \\ n_z & o_z & a_z & p_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

el elemento H(1,4), primera fila, cuarta columna (que ya se explicó cómo se calculaba) queda:

$$\begin{vmatrix} o_x & a_x & p_x \\ o_y & a_y & p_y \\ o_z & a_z & p_z \\ o_x & a_x & p_x \\ o_y & a_y & p_y \end{vmatrix} \quad m^{-1}(1,4) = (-1)^{1+4}\ \text{Det (cof 1,4)}$$

$= o_x \cdot a_y \cdot p_z + o_y \cdot a_z \cdot p_x + o_z \cdot a_x \cdot p_y - (o_y \cdot a_x \cdot p_z + o_x \cdot a_z \cdot p_y + o_z \cdot a_y \cdot p_x)$

que por definición es: $-n^T \cdot p$

Porque la matriz H, contiene en su matriz de rotación R_{3x3} , en sus columnas, los versores del sistema corrido y/o rotado *ouvw* con respecto al *oxyz*; además es una sub-matriz ortonormal, y verifica que el producto:

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{o} &= \vec{a} \\ \vec{n} \times \vec{a} &= \vec{o} \\ \vec{o} \times \vec{a} &= \vec{n} \end{aligned} \qquad (29)$$

Lo que quiere decir que $\vec{n},\vec{o},\vec{a}$ vectores, definen una terna ortonormal a "derechas", lo que significa que el producto vectorial de dos de ellos da el tercero, además de que:

$$\|n\| = \|o\| = \|a\| = 1 \tag{30}$$

por lo tanto, la inversa de H se puede expresar como:

$$\left[\begin{array}{ccc:c} n_x & n_y & n_z & -n^T \cdot p \\ 0_x & 0_y & 0_z & -0^T \cdot p \\ a_x & a_y & a_z & -a^T \cdot p \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Así, todos los elementos de la matriz H^{-1} se pueden calcular en forma más o menos sencilla.

Recordemos que para expresar un punto del sistema "móvil" *ouvw* en el de referencia *oxyz*, debemos pre-multiplicar a H por el vector que se quiere expresar en el sistema fijo, o sea:

$$r_{xyz} = Hr_{uvw}$$

Veamos qué pasa si se pre-multiplican ambos miembros por H^{-1}

$$\begin{aligned} H^{-1}r_{xyz} &= H^{-1}Hr_{uvw} \\ H^{-1}r_{xyz} &= Ir_{uvw} \\ H^{-1}r_{xyz} &= r_{uvw} \end{aligned} \tag{31}$$

que es lo que venimos explicando de H, expresado en forma matemática.

O sea, el punto r_{uvw} expresado en coordenadas o*uvw* se puede expresar en coordenadas *oxyz*; sencillamente pre-multiplicando a r_{xyz} por H.

Ó , el punto r_{xyz} expresado en coordenadas *xyz* se puede expresar en coordenadas *ouvw*; sencillamente pre-multiplicando a r_{xyz} por la inversa de H.

Esta relación es muy importante, tanto en el ámbito teórico como práctico, puesto que nos permite referenciar puntos de un sistema en otro, calculando las inversas de las matrices homogéneas correspondientes.