- # Apunte de Robótica y Animatrónica

Propiedad Intelectual de

Hugo Nicolás Pailos y Juan Pablo Pedroni

Primera Entrega

Glosario

DH: Denavith Hartenberg
FCEFyN: Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
GdL: Grado(s) de Libertad.
GRSI: Grupo Robótica y Sistemas Integrados.
TCP: Tool Center Point

Plan de Especialidad

Introducción

En la Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de la Universidad Nacional de Córdoba trabajan dos grupos de investigación en las áreas de control y robótica: El Grupo Robótica y Sistemas Integrados (GRSI) y el Laboratorio de Animatrónica y Control Dinámico.

Teniendo en cuenta que miembros de ambos grupos se han vinculado de distintas maneras con la Maestría en Ingeniería en Control Automático y con el objeto de afianzar los vínculos entre ambos grupos, se propone realizar un Trabajo de Especialidad donde sus representantes trabajen en conjunto buscando el beneficio común.

Se propone como Trabajo de Especialidad el diseño y simulación del sistema de control cinemático digital de un robot de Tres grados de Libertad.

Ámbito y Justificación

En estos momentos, ambos grupos se encuentran ante la necesidad de desarrollar herramientas sencillas y eficaces para facilitar el estudio, diseño e implementación de sistemas de control aplicables a robots de distintas configuraciones, así como también brindar al alumno interesado, material didáctico con un enfoque concreto, sencillo y práctico de los conceptos básicos de la robótica, de manera tal de facilitar el abordaje de la bibliografía clásica actual.

Objetivo General

Diseñar y simular un sistema de control digital de la cinemática de un robot de tres grados de libertad, desprendiéndose de este trabajo material didáctico para la asignatura Robótica y Animatrónica, de las carreras de Ingeniería Electrónica e Ingeniería en Computación de la mencionada Facultad.

Objetivos Específicos

1. Exponer la matemática asociada a la definición de traslaciones y rotaciones en el espacio como base para la posición y orientación del efector final de un manipulador.
2. Explicar el método de Denavit-Hartenberg para el cálculo de la Cinemática Directa de un robot y su posterior aplicación en el manipulador elegido.
3. Exponer diferentes métodos para la resolución de la Cinemática Inversa del Robot.
4. Realizar el modelo del robot en Simulink basado en los puntos anteriores.
5. Diseñar un sistema de control digital para el robot.
6. Implementar en Matlab el control diseñado.
7. Simular el comportamiento del robot con el control diseñado.
8. Examinar las posibilidades del programa de simulación gráfica 3D Studio Max para probar su capacidad de soportar simulaciones que provengan de una aplicación como Matlab y verificar si este software es útil para dicha aplicación.
9. Generar material didáctico para la materia Robótica y Animatrónica.

Introducción

A continuación se exponen algunas definiciones y explicaciones que servirán para comprender los problemas clásicos a resolver en robótica.

¿Qué es la Robótica?

La robótica es una ciencia o rama de la tecnología, que estudia el diseño y construcción de máquinas capaces de desempeñar tareas realizadas por el ser humano o que requieren del uso de inteligencia. Las ciencias y tecnologías de las que deriva son: el álgebra, los autómatas programables, las máquinas de estados, la mecánica, la electrónica y la informática.

A partir de esta definición, se hace evidente que la robótica incluye disciplinas muy variadas como lo son: la mecánica, la electrónica, las matemáticas, el control automático, la programación, la sensorística, la informática, etc. Esto hace que el estudio de la robótica sea complejo, puesto que se debe tener destreza en diversos campos de la ingeniería.

¿Qué es un Robot Industrial?

De acuerdo con los destacados autores Fu, González y Lee en su libro de robótica [01]: "Un Robot Industrial (Figura 1) es un manipulador de uso general, controlado por computador, que consiste en algunos elementos rígidos conectados en serie mediante articulaciones prismáticas o de revolución. El final de la cadena está fijo a una base soporte, mientas que el otro extremo está libre y equipado con una herramienta para manipular objetos o realizar tareas de montaje. El movimiento de las articulaciones resulta en, o produce un movimiento relativo de los distintos elementos".
Para que un robot sea útil, éste debe ser capaz de ubicar su mano (efector final) en una posición dada y con una orientación determinada.

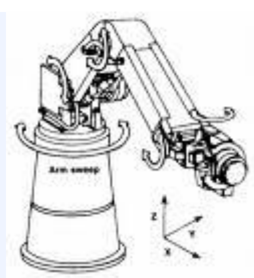

Figura 1 – Ejemplo de robot industrial

El Primer Problema Básico que se le Plantea a un Robot

Imaginemos que le pedimos a un robot que destrabe una puerta que está cerrada con llave. Esto sugiere un robot capaz de posicionar la llave frente al agujero de la cerradura, con una orientación acordada; es justamente lo que se le solicita a un robot industrial que haga con un objeto determinado. Si imaginamos que nuestro robot tiene solo un brazo, este deberá tener en la parte libre del mismo un elemento similar a una mano de modo de colocar correctamente la llave. Pero allí no termina el problema, puesto que luego de introducir la llave habrá que girar ésta en un sentido determinado, para que la puerta se destrabe.

En un robot la posición del efector final viene dada principalmente por el brazo propiamente dicho, y la orientación del mismo, por su muñeca.

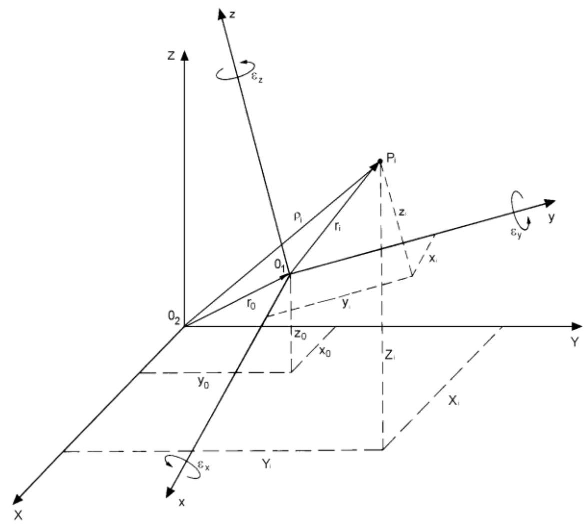

Figura 2 - Posición y Orientación

Teóricamente el posicionamiento y la orientación del efector final se pueden lograr con 6 articulaciones; 3 para su posicionamiento en el espacio y 3 para su orientación (Figura 2)

Como segundo ejemplo consideremos ahora tratar de posicionar una linterna o puntero láser a una determinada distancia del cuerpo y apuntar con el láser en cualquier dirección.

Definiciones

Espacio de Trabajo

Nuestro cuerpo humano y un robot son bastante similares en lo que respecta a posición y orientación; en el ejemplo anterior el brazo posicionará un láser que una mano sostiene, y la mano podrá señalar casi cualquier punto en el espacio; pruebe usted mismo: sostenga en su mano derecha una pluma o birome e intente señalar su propio antebrazo o muñeca de la misma mano.
Pruebe ahora alcanzar con su mano un objeto que está a 3 centímetros más allá del alcance de su brazo y mano (no haga trampa, no mueva su torso).
Este sencillo ejemplo nos da pie para explicar algunas cuestiones importantes con respecto a las limitaciones que tienen los seres humanos, pero en este caso nos referiremos a las limitaciones que tienen los robots en cuanto a su posicionamiento y orientación.
Es evidente que un robot, cuya base está fija, tendrá un alcance máximo con su muñeca (pruebe tocar su rodilla estando parado de pie y bien erguido) y éste vendrá dado por la extensión de todo su brazo y antebrazo (en una sola línea); si la base fuera rotante se puede dar una primera

aproximación de los puntos más distantes a los que puede llegar el efector final (la muñeca). A ese volumen se lo llama justamente “área de trabajo” o “volumen de trabajo”

Si uno quiere visualizar el área de trabajo de su propio brazo; podría decir que se parece a una esfera.

Los fabricantes de robots colocan en sus catálogos las áreas de trabajo acotadas (Figura 3[1]), y en diferentes vistas, para que el usuario pueda saber cuál será el alcance del mismo.

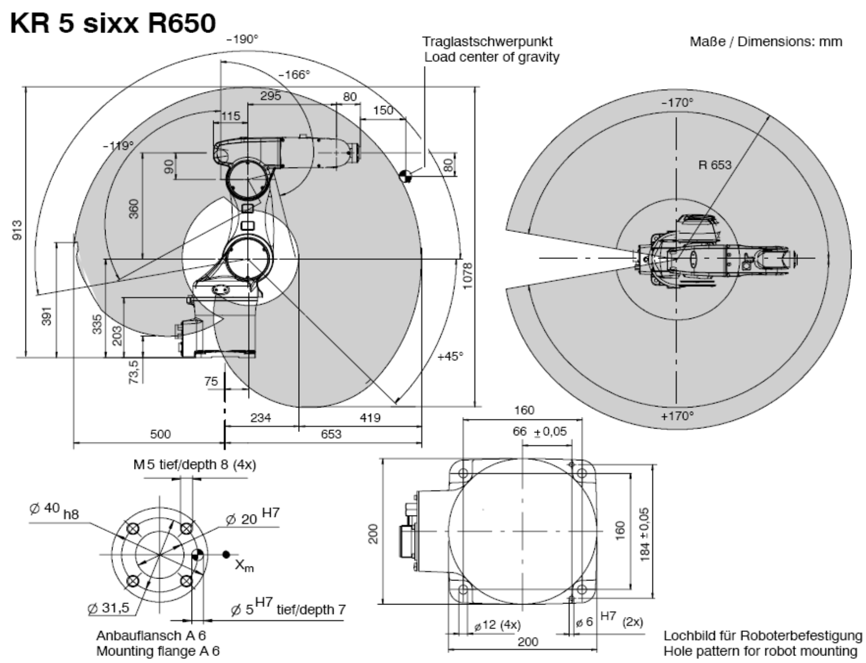

Figura 3 - Volumen de trabajo de un robot industrial de la empresa KUKA

El área de trabajo o campo de acción, o región accesible, es el volumen espacial al que puede llegar el extremo del robot. Este volumen está determinado por el tamaño, forma y tipos de eslabones que integran el robot.

Existe un tipo de robot muy común en la industria, llamado antropomorfo (que tiene forma de brazo humano, Figura 4) en el cual todas sus articulaciones son de rotación (R). Esta particularidad hace que también se le llame de revolución y es muy usado para todo tipo de tareas debido a la versatilidad de su "anatomía".
Además de este tipo de robot, existen otros, cuya morfología dependerá de los tipos de articulaciones que posea.

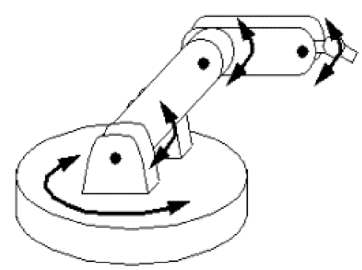

Figura 4 - Robot antropomorfo

[1] Tomado de la hoja de datos del robot KR 5 SIXX R650 de la empresa KUKA.

Articulación

Recordemos que una articulación en anatomía es el punto de contacto entre huesos del cuerpo que se pueden clasificar en sinartrosis, sínfisis e hidartrosis. El cuerpo humano tiene diversos tipos de articulaciones móviles. En un robot una articulación es un punto en el cual una parte se mueve con respecto a otra considerada fija, dependiendo de la forma en que se mueva tendremos dos tipos:

Articulación de Rotación: cuando la parte móvil gira alrededor de la fija.

Figura 5 - Articulación de rotación

Articulación Prismática: cuando la parte móvil se traslada con respecto a la fija.

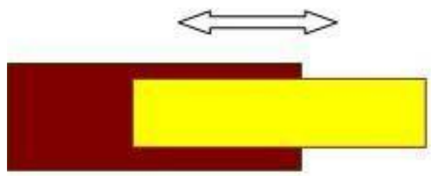

Figura 6 - Articulación prismática

Veremos más adelante que, a los fines de definir un robot geométrica y matemáticamente, alcanzan las articulaciones mencionadas para modelar cualquier tipo de articulación utilizada en robótica.

Grado de Libertad

Cada uno de los movimientos independientes que pueda realizar cada articulación con respecto a la anterior se denomina Grado de Libertad. Como un robot es básicamente (mecánicamente) una secuencia de cuerpos rígidos conectados mediante articulaciones, cada par *articulación-elemento rígido* constituye un grado de libertad.

Morfología de un Robot

La morfología es, en general, "el estudio de la configuración física y el tamaño de un espécimen, planta, animal o robot". Sabemos ya que un robot está formado por una serie de elementos o eslabones unidos mediante articulaciones que permiten un movimiento relativo entre ellos; justamente el tipo de articulación y los grados de libertad que posea un robot determinan la morfología del mismo, a la vez que su destreza para determinadas tareas.

Como se mencionó, los movimientos relativos que se pueden lograr entre dos elementos que están unidos por una articulación son dos: *desplazamiento y giro*, y se pueden combinar para generar cualquier tipo de robot.

Nota:

Como se ha expresado arriba en teoría, un robot debiera tener 6 grados de libertad; en la práctica, no todos los robot los poseen y eso no quiere decir que sean poco útiles, simplemente ocurre que para determinadas tareas, no los necesitan.

Se construyen, también, robots de más de 6 GL con el fin de evitar obstáculos, o de ampliar su área de trabajo; en este caso se dice que el robot es *redundante* como los mostrados en la Figura 7[2]. Actualmente algunas empresas japonesas, y estadounidenses, están construyendo robots humanoides con más de 6 GL, con fines experimentales momentáneamente, aunque sus creadores están convencidos de que estos robots y animatrónicos se van a seguir construyendo y llegarán a estandarizarse, ocupando un nicho en el mercado.

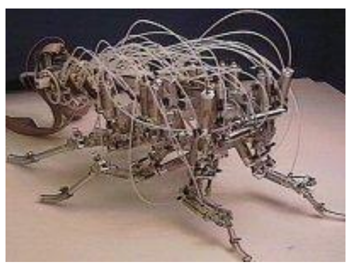

Figura 7 - Robots con más de 6 grados de libertad

Animatrónico (animatronic)

Llamaremos así a cualquier robot diseñado que no tenga como objetivo fundamental el trabajo en la industria sino más bien la imitación de movimientos naturales (hombre, animales, personajes etc.)

Robot "Diestro"

Un robot diestro es aquel que cuenta con los suficientes grados de libertad para ubicar un elemento en el espacio. Para lograr este objetivo, son suficientes 6 grados de libertad, 3 normalmente para su posición y otros 3 para su orientación.

[2] La primera imagen corresponde al robot humanoide QRIO de la empresa SONY. La segunda imagen corresponde al robot III de el Biologicalli Inspired Robotics Laboratory de la Case Western Reserve University. La tercera imagen corresponde al Mars´s Pathfinder, Sojouner Rover construido por la NASA.

Coordenadas

Dependiendo de la tarea que deberá realizar un robot, será conveniente un tipo de robot determinado, por ejemplo XYZ (cartesiano), cilíndrico, esférico, antropomorfo, vehículo, etc. Sin embargo cualquiera sea el tipo de robot, siempre necesitaremos expresar o conocer la posición y orientación del efector final.

Aceptaremos también que dependiendo del robot (su forma y utilidad) será más conveniente expresar la posición del efector final en coordenadas cartesianas, cilíndricas, esféricas, etc., como se muestra en la Figura 8 [02]

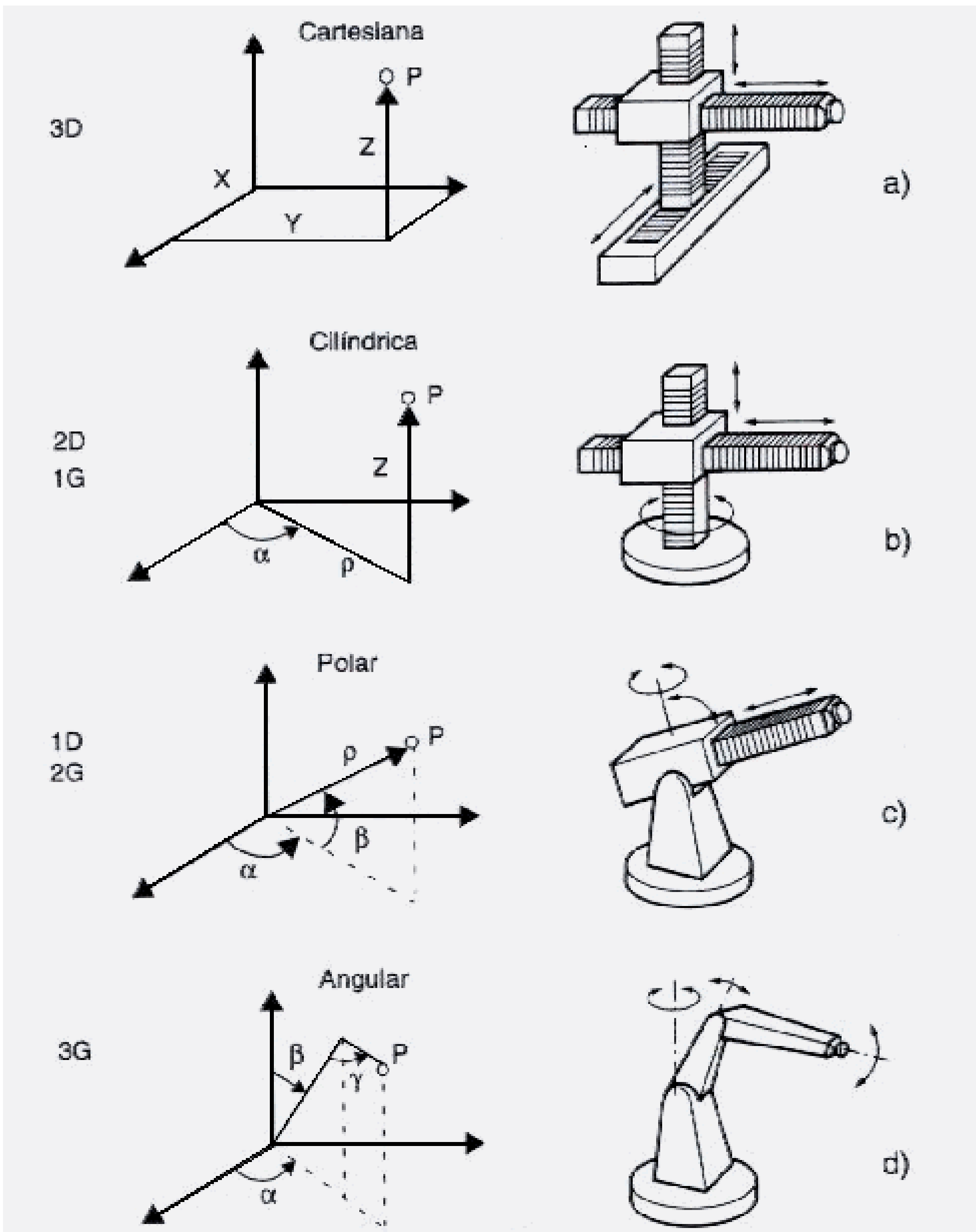

Figura 8 - Sistemas de coordenadas en robótica

Tool Center Point:

Es el origen del sistema de coordenadas de la herramienta del robot.

Un Robot no tan Elemental

La sencillez de los robots con los que se trabajará en los apartados siguientes facilitará la introducción de los tópicos más importantes en lo que respecta a la matemática y diseño de los mismos.

Imagine un robot con dos grados de libertad con articulaciones rotaciones que en su muñeca (efector final) tenga una pluma (marcador). Las longitudes de los eslabones y los ángulos de las articulaciones vendrán definidos como $\ell_1, \ell_2, \theta_1 y \theta_2$. El robot tiene el aspecto que se muestra en la Figura 9.

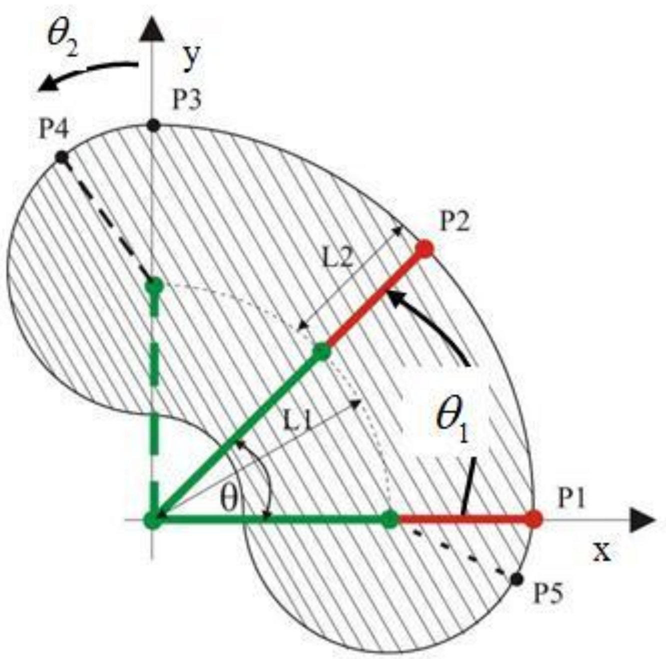

Figura 9 – Robot con articulaciones rotacionales

Con este robot se puede dibujar sobre un plano *xy*, donde su área de trabajo es la superficie rayada, en la que se supone a $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ y $-\pi \leq \theta_2 \leq +\pi$

Si se pretende conocer la ubicación de la pluma, veremos que su posición en el plano *xy* serán función de $\ell_1, \ell_2, \theta_1 y \theta_2$, esto es $p = f(\ell_1, \ell_2, \theta_1, \theta_2)$. Veamos una fórmula que pueda vincular las coordenadas (*x, y*) del punto *p* (pluma), con los valores antedichos.

Se aclara que los únicos parámetros que pueden variar en este robot son θ_1 y θ_2, pero no ℓ_1 y ℓ_2 que se consideran fijos para todo el razonamiento. En estas condiciones:

$$\begin{cases} x = \ell_1 \cdot \cos\theta_1 + \ell_2 \cdot \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ y = \ell_1 \cdot sen\theta_1 + \ell_2 \cdot sen(\theta_1 + \theta_2) \end{cases} \tag{1}$$

Calculemos algunos puntos para ver si se cumplen las ecuaciones:

Si $\left.\begin{array}{l}\theta_1 = 0 \to x = \ell_1 \cdot 1 + \ell_2 \cdot 1 \Rightarrow x = \ell_1 + \ell_2 \\ \theta_2 = 0 \to y = \ell_1 \cdot 0 + \ell_2 \cdot 0 \Rightarrow y = 0\end{array}\right\}$ que es el punto p_1

En donde la componente *x* es directamente la suma de los dos eslabones, y sobre el eje *y* no hay proyección.

Supongamos ahora:

Si $\begin{array}{l}\theta_1 = \pi / 4 \\ \theta_2 = 0\end{array}$ entonces $\left.\begin{array}{l}x = \ell_1 \cdot 0{,}707 + \ell_2 \cdot 0{,}707 \\ y = \ell_1 \cdot 0{,}707 + \ell_2 \cdot 0{,}707\end{array}\right\}$ o sea

$$\begin{array}{l}x = (\ell_1 + \ell_2) \cdot 0{,}707 \\ y = (\ell_1 + \ell_2) \cdot 0{,}707\end{array} \qquad (2)$$

Que es justamente la posición p_2 en donde el brazo y el antebrazo están alineados en un único ángulo π/4.
El lector podrá calcular y sacar sus propias conclusiones para los puntos p_3, p_4 y p_5.

Se deduce que las ecuaciones planteadas permiten calcular la posición de la pluma de este robot *no tan elemental*, y además, que habrá zonas inaccesibles para la pluma (fuera del área de trabajo).

Concluimos que nuestro robot no es muy bueno para dibujar, o al menos aceptamos que su área de dibujo es muy reducida, y que, por ejemplo, un plotter tipo XY es más conveniente para la tarea de "dibujar" sobre un plano. Sin embargo, este simple robot de 2 grados de libertad, nos permitirá introducirnos en dos temas muy importantes, como lo son la cinemática directa y cinemática inversa de un robot.

Cinemática Directa y Cinemática Inversa

Otra de las conclusiones que sacamos es que basta definir $\ell_1, \ell_2, \theta_1 y \theta_2$ para conocer la ubicación de la pluma, solución para lo que en robótica se denomina *problema cinemático directo*.

El *problema cinemático inverso* (como muchos problemas de síntesis en ingeniería) tiene, a veces, más de una solución. Si se desea posicionar la pluma en el punto p_1, ó p_2, está claro que se obtendrán solo pares (θ_1, θ_2) únicos, con los cuales se puedan alcanzar esos puntos, dadas las restricciones físicas de nuestro robot; pero si se busca acceder al punto p_i, se ve en la Figura 10 que es posible hacerlo mediante 2 configuraciones de nuestro "brazo dibujante".

Se debe aclarar que dadas las coordenadas p_i (*x*, *y*) de la pluma, lo que se pretende averiguar es el par o en este caso, los 2 pares de ángulos (θ_1,θ_2) y (θ_1',θ_2') que hacen que la pluma llegue al punto P_i, este es el denominado *problema cinemático inverso*.

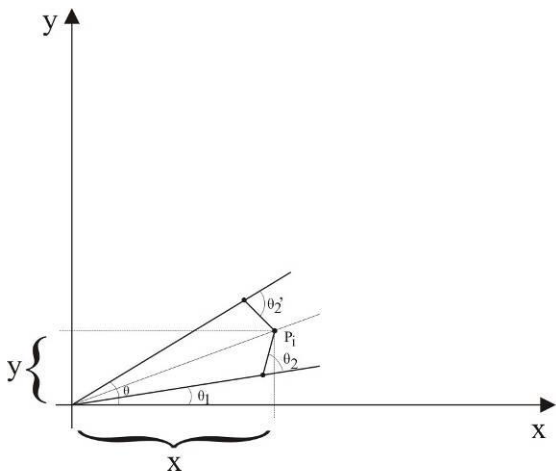

Figura 10 - Ejemplo de cinemática inversa

La Figura 10 muestra claramente que al punto p_i lo podemos alcanzar con θ_1 positivo y θ_2 positivo, o con θ_1' positivo y mayor que θ_1 y θ_2' negativo. A la primera configuración se la suele llamar de “hombro abajo”, y a la segunda de “hombro arriba”.

Otro Robot no tan Elemental

Imaginemos un robot en el cual la segunda articulación (entre los eslabones $\ell_1 y.\ell_2$) no es rotacional, sino prismática.

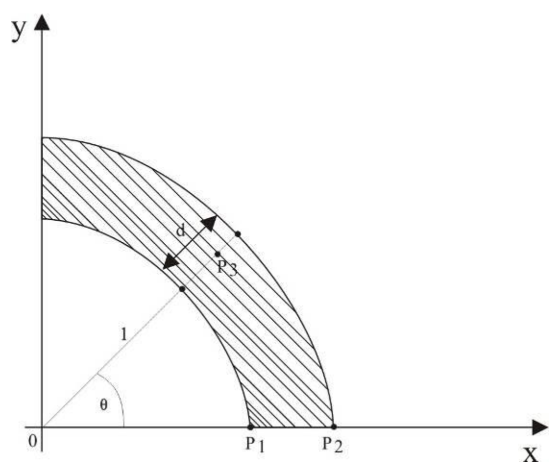

Figura 11 - Robot con articulación prismática

En este caso, la pluma se ubica en el plano *xy* mediante las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} x = (\ell_1 + \ell_2) \cdot \cos\theta \\ y = (\ell_1 + \ell_2) \cdot sen\theta \end{cases} \tag{3}$$

Nuevamente, el área de trabajo de este robot es la superficie rayada suponiendo que:
$0 \leq \theta \leq \pi/2$.
Se sugiere al lector que compruebe las ecuaciones para los puntos p_1,p_2 y p_3.

En este robot el *problema de cinemática inversa* tiene una única solución.

Concluimos que dados $\theta, \ell(fijo)$ y *d*; el punto (*x,y*) de alcance de pluma, queda perfectamente definido.

Los problemas de cinemática directa e inversa se ven reflejados en la Figura 12

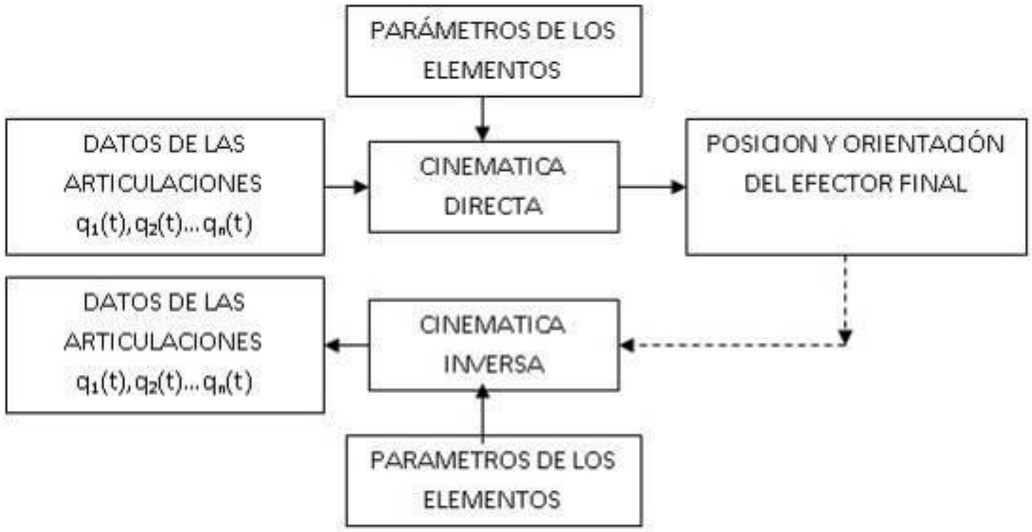

Figura 12 - Cinemática directa e inversa

Cuando se estudian exclusivamente los movimientos (posición y velocidad de cada articulación ó del extremo libre) se dice que estamos haciendo el estudio cinemático del robot.

<u>*Cinemática directa*</u>:
Este problema puede ser visto desde las "coordenadas propias" del robot; dados los ángulos (en el caso de articulaciones rotacionales) ó longitudes (en el caso de las articulaciones prismáticas o deslizantes) que conjuntamente con los parámetros propios del robot (morfología y dimensiones de cada elemento o enlace); averiguaremos la posición del efector final, como así también, la orientación del mismo.

<u>C*inemática inversa*</u>:
Si vemos el problema desde el punto de vista de las "coordenadas externas" del robot, decimos que queremos posicionar y orientar su efector final, entonces deberemos dar como datos la posición y orientación deseadas, y calcular los ángulos y longitudes de las articulaciones que lo coloquen en el punto deseado, teniendo en cuenta los propios parámetros del robot. Recordemos que este problema puede tener múltiples soluciones.

Herramientas Matemáticas

Como se puso en evidencia en el apartado anterior, el uso de las matemáticas, geometría y funciones trigonométricas es fundamental en robótica, en especial cuando deseamos ubicar y posicionar la muñeca del robot en el espacio.

En esta parte pondremos de manifiesto algunos conceptos matemáticos que nos ayudaran a entender cómo se puede expresar la posición y orientación de un robot en el espacio.

En realidad los conocimientos del álgebra lineal, trigonometría y matrices debieran bastar para llegar a un entendimiento adecuado de la problemática robótica en lo que es la cinemática del robot.

Cinemática del Robot

La cinemática del robot estudia el movimiento del mismo, o sea que se dedica al análisis y solución de los problemas derivados del posicionamiento y orientación de cada uno de los elementos del manipulador (ver Figura 13)

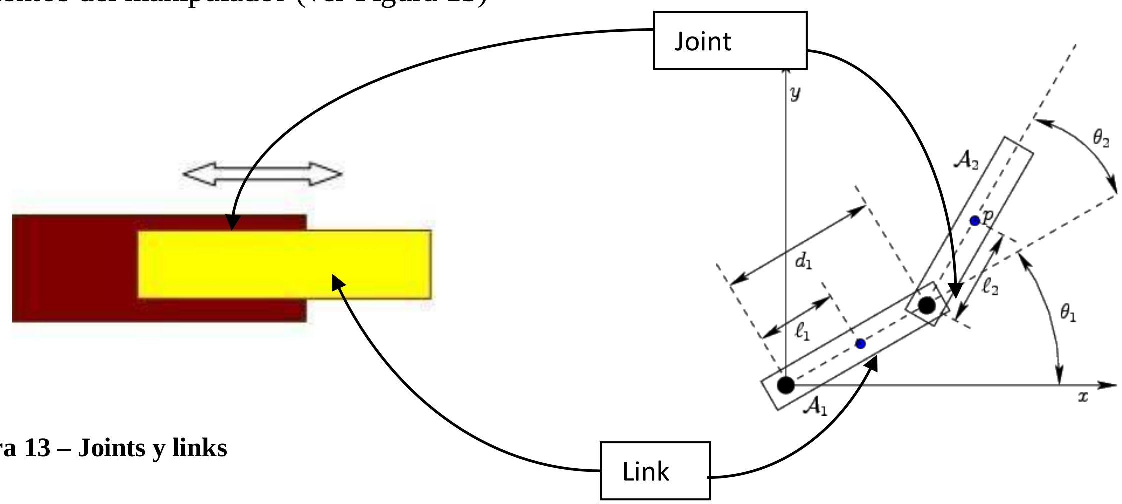

Figura 13 – Joints y links

Como el movimiento relativo de las articulaciones (joints en inglés) da como resultado el movimiento de un eslabón (link en inglés) a la ubicación deseada, la cinemática del robot se interesa por la descripción espacial del elemento final (muñeca) referenciándola a un sistema fijo, este sistema (de coordenadas) suele situarse en la base de la cadena cinemática, o sea, en la base del robot.

<u>Nota:</u>

Lo que importa en la cinemática de un robot es el estudio analítico y geométrico del movimiento de un robot con respecto a un sistema de coordenadas fijo sin considerar las fuerzas y/o momentos que produce dicho movimiento.

Para poder plantear la cinemática de un robot, se hace evidente el uso de conceptos fundamentales que definan el problema, estos son:

1. La estructura del manipulador (mecánica, tipo de robot)
2. Grados de libertad para el posicionamiento del elemento final (efector final del robot y manos, patas, etc. en animatrónicos).

3. Dados 1 y 2, se desea entonces resolver los problemas de cinemática directa y cinemática inversa.

Si bien en los primeros apartados dimos una idea de los grados de libertad necesarios para posicionar y orientar el efector final de un robot, así como los problemas clásicos de cinemática directa e inversa, ahora plantearemos las herramientas necesarias para poder solucionar de una forma metódica estos problemas.

Como un robot es una secuencia de cuerpos rígidos llamados enlaces (links ≡ eslabones o elementos) que se conectan unos a otros por medio de articulaciones (joints ≡ articulaciones), formando así una cadena cinemática, es evidente que un diseño se hará de modo que al mover sus articulaciones, estas colocarán los enlaces o cuerpo rígidos en algún lugar del espacio.
De acuerdo a lo visto es evidente que el elemento final necesitará una referencia fija, por ejemplo en la base del robot, para poder describir su movimiento. Deberemos entonces estudiar las coordenadas de ese elemento final con respecto a un sistema de coordenadas fijo y tridimensional.

Sistemas de Coordenadas

Si colocamos un robot en un ambiente determinado, sabemos que este podrá interactuar solo en su “área de trabajo”, y ese espacio de trabajo es generalmente un volumen. Para definir tanto el espacio de trabajo como la posición y orientación del efector final del robot, deberemos hacerlo entonces en tres dimensiones.

De todos los sistemas posibles para definir un espacio tridimensional (volumétrico, Figura 14), el más conveniente es el espacio euclídeo tridimensional, en el que, mediante tres cantidades (coordenadas), se determina la posición de un punto en el espacio [03].
De aquí en adelante, cuando hablemos de sistemas coordenados o sistemas simplemente, estaremos refiriéndonos a uno que permite ubicar puntos en el espacio, pero que además tiene las siguientes características:

- **Es rectilíneo**: o sea, que sus ejes son rectas.
- **Es ortogonal**: cada eje es perpendicular a los otros dos
- **Es normalizado**: la longitud de lo vectores básicos que generan cada eje es igual a la unidad.
- **Es dextrógiro**: el tercer eje es producto vectorial de los otros dos

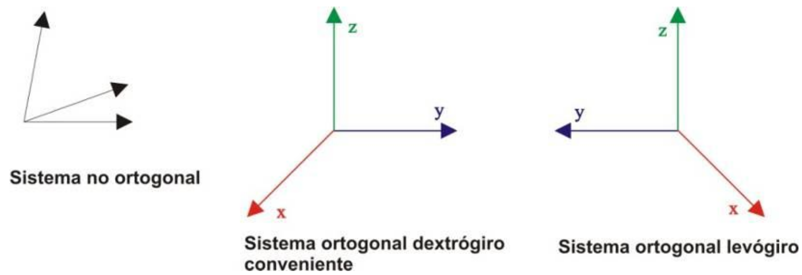

Figura 14 - Sistemas de coordenadas

Nota:

Si bien existen otros sistemas de coordenadas (polares, cilíndricas y esféricas, por ejemplo) en este trabajo nos concentraremos en la aplicación de sistemas de coordenadas cartesianas, ortogonales y dextrógiras, para la aplicación de las técnicas de resolución de problemas asociados a la robótica.

Volvamos por unos momentos a nuestros robots no tan elementales descriptos anteriormente; en sus articulaciones había dos tipos de movimiento: el rotacional y el prismático, ambos básicos; luego, para estudiar la ubicación del extremo libre, tendremos que estudiar traslaciones debidas a las articulaciones prismáticas y rotaciones debidas a las articulaciones rotacionales.

Llegado a este punto es bueno aclarar que, el que los ejes sean dextrógiros, no quiere decir que los vayamos a encontrar siempre con una misma orientación, los ejes pueden ser “vistos” por el usuario, máquina, PC, robot o cámara, de diferentes ángulos.
En la Figura 15 se pueden ver varios sistemas dextrógiros orientados de diferentes maneras.

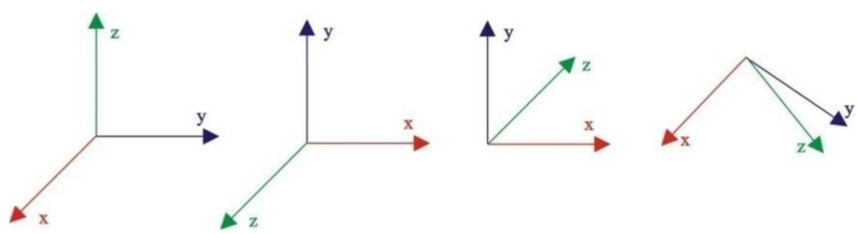

Figura 15 - Sistemas de coordenadas dextrógiros

¿Cómo se pueden ubicar los ejes para orientarlos en forma dextrógira?

Recordando la “regla del tirabuzón”: plegar el eje *x* sobre el eje *y* en sentido antihorario, o sea positivo, y hacer funcionar un tirabuzón (saca-corchos); ello ubicará y dará sentido al eje *z*. O sea, llevo el eje *x* a la posición del eje *y*, y luego me fijo para donde sale el tirabuzón, el sentido en el que avanza el tirabuzón será, justamente, el sentido del eje *z*.
Matemáticamente significa multiplicar *x* por *y* vectorialmente, o sea, hacer $\vec{x} \times \vec{y} = \vec{z}$. Si recordamos la definición del producto vectorial, veremos que nos da el mismo resultado de la regla del tirabuzón.

¿Por qué es tan importante este punto?

Puesto que todo robot tiene uno o más grados de libertad (GdL), esto supone al menos una traslación o rotación, lo que ya supone un sistema de coordenadas fijo y otro que se traslada o rota. Esto hace que tenga especial importancia la orientación de ambos ejes de coordenadas, puesto que el eje que se mueve tiene que estar referido al fijo, y esta referencia (en el arranque o desde el comienzo, con el robot “parado”), tiene que estar perfectamente definido, ¿Porqué? Para “saber” a donde va a parar el extremo libre (el elemento que es movido) en un par ARTICULACIÓN-ESLABÓN. Además de usar sistemas de coordenadas dextrógiros, también deberemos saber cómo asignarlos en un eslabón, luego de una articulación, pero eso lo veremos más adelante. Al i-ésimo sistema de coordenadas asociado al i-ésimo eslabón del robot lo denominaremos $\{S_i\}$.

Consideraciones Especiales

En robótica, y en algunas aplicaciones de animación computada, se supone que los objetos con los que trabajemos no van a sufrir deformaciones apreciables en su estructura física. Esto quiere decir que, si no se menciona lo contrario, los elementos usados, a los que se aplicarán traslaciones y rotaciones, se consideran rígidos.

Esta situación valdrá tanto para los elementos componentes (eslabones, articulaciones, manos, brazos, patas, etc.), como para los objetos que se pudieran manipular con ellos, esto es, herramientas, soldadores, garfios, luces, etc.

Cabe acotar que en algunas aplicaciones como la animación computada es deseable la “deformación” del cuerpo, por ejemplo, para dar realismo.

Traslaciones

Como bien se explicó antes, la traslación es una de las acciones dadas por una articulación de tipo prismática, en este caso plantearemos, al igual que en las rotaciones, traslaciones en el espacio, o sea en 3D o R^3, que llamaremos en general *transformaciones*.

Si queremos trasladar un punto *p* al un punto *p’*, Figura 16, recurriremos al álgebra y análisis para la notación de los vectores y matrices involucrados.

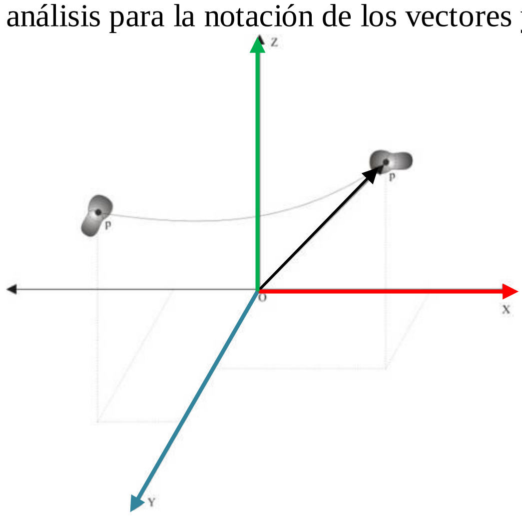

Figura 16 - Transformación en R^3

$\vec{p}\,' = \vec{p} + \vec{v}$, como estamos en el espacio R^3 se pueden escribir las coordenadas de los puntos involucrados en forma de vector columna como sigue

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \tag{4}$$

En donde cada elemento representa la coordenada correspondiente asociada al sistema de referencia.
Para calcular las coordenadas de *p'* simplemente deberemos sumar las coordenadas homólogas de *p* y *v*.

$$\begin{aligned} p_x' &= p_x + v_x \\ p_y' &= p_y + v_y \\ p_z' &= p_z + v_z \end{aligned} \tag{5}$$

Como vemos en este caso, definir una traslación en el espacio, es muy simple, solo se deben sumar las coordenadas homólogas. Si bien la suma de vectores es muy útil para traslaciones, no nos es práctica a nivel de generalización; en lo que respecta a la transformación de rotación, esto es, debemos buscar una operación que nos permita tanto trasladar como rotar, veremos que esto tiene enormes ventajas en todo sentido.

Si planteamos ahora la transformación traslación que lleva un punto cualquiera del espacio a otro del mismo espacio como matriz, la ecuación, ahora matricial y no vectorial queda:

$$\begin{bmatrix} p_x' \\ p_y' \\ p_z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

¿Por qué complicar las cosas si con la suma vectorial andaba bien?; como se explicará más adelante, esto tiene ventajas.
Reordenando ahora el procedimiento de multiplicación de matrices, queda:

$H_{4x4} \cdot p_{4x1} = p'_{4x1}$

por definición
resultado

$$\begin{array}{cccc|c} & & & & p_x \\ & & & & p_y \\ & & & & p_z \\ & & & & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & v_x & p_x' = p_x + v_x \\ 0 & 1 & 0 & v_y & p_y' = p_y + v_y \\ 0 & 0 & 1 & v_z & p_z' = p_z + v_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

Como T es una matriz de *4x4* (filas x columnas), y *p* es un vector de *4x1*, el resultado es un vector de *4x1*. Recordemos que los productos de arreglos matriciales están definidos solo cuando “el número de columnas del primer factor sea el mismo que el número de filas de segundo factor”, a su vez, el resultado es un arreglo cuyo número de filas es igual al número de filas del primer factor, y las columnas igual al número de columnas del segundo factor.

Evidentemente deben aparecer los unos en el vector *p'* como así también en la matriz que tiene el vector traslación que llamaremos H, esto es así para que podamos definir el producto entre arreglos matemáticos; pero además tiene otras ventajas:

Ventaja: Al definir "H" como matriz de traslación vemos que para llegar al punto *p'* basta con *pre-multiplicar* la matriz H con el vector *p*, esto es, $\boxed{p' \text{ es ahora } p'=H\cdot p}$ y quiere decir que, resolviendo este producto, obtendremos las nuevas coordenadas del punto *p* trasladado por "H".

Nos preguntamos si existe una matriz que nos traslade desde el punto *p'*, al original *p*.

Si encontrásemos esa matriz que nos "refleje" o nos devuelva los puntos al origen, estaríamos encontrando otra transformación, otra matriz que llamaremos H^{-1}, y que no es otra que la inversa de la original.

Entonces podemos decir que:

$$p = H^{-1} p' \tag{7}$$

Estas matrices así definidas H_{4x4}, en donde tres componentes se representan en realidad por 4, esto es (n+1), se llaman "de representación en coordenadas homogéneas" y se usarán luego para expresar rotaciones, y en general, expresaran *traslaciones* y *rotaciones conjuntas*.

Coordenadas Homogéneas

Un vector en R^3 vendrá dado en coordenadas homogéneas por cuatro componentes de tal forma que el vector $p(x, y, z)$ vendrá representado por $p(wx, wy, wz, w)$, donde *w* tiene un valor arbitrario y representará una escala, en robótica es siempre igual a uno, sin embargo no hay que perder de vista de que si *w* es distinto de uno, para lograr los verdaderos valores de las coordenadas reales *X, Y, Z* deberemos hacer:

$$X = x/w$$
$$Y = y/w$$
$$Z = z/w$$

En donde *X, Y, Z* serán las componentes sobre los ejes del sistema, luego se tratará más ampliamente este punto cuando se estudien las Matrices Homogéneas y sus propiedades.

El lector podrá pensar que bien se podría seguir con la opción de sumar vectores y que el problema sería solo encontrar el opuesto, sí, esto es verdad, pero independientemente de la elegancia del producto matricial. La ventaja adicional está cuando se hacen rotaciones y traslaciones al mismo tiempo.

Nota:
La forma matemática del problema de traslación de puntos en el plano, o espacio, se conoce como *transformación*.

Por definición: una transformación es una correspondencia entre puntos de planos (espacios) distintos o superpuestos. A cada punto *p* de un espacio le hace corresponder otro *p'*, ver Figura 17.

$$p' = Tp,\ p' = Hp \tag{8}$$

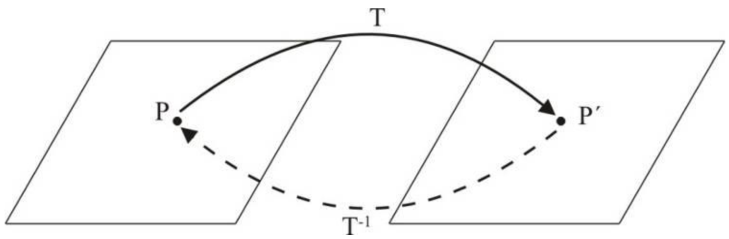

Figura 17 – Transformación Lineal

De todas las transformaciones que existen, nos interesan las lineales, y por supuesto, las que tengan inversa.
Desde el punto de vista práctico de un robot, una traslación, será necesaria para posicionar un objeto (efector final) desde un punto inicial a otro final como se ve en la Figura 18.

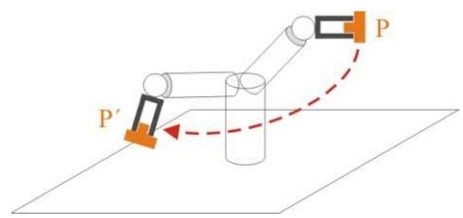

Figura 18 - Posicionamiento

Rotaciones

En este caso será mejor ver primero las rotaciones en un plano, para luego extenderlo al espacio.
Antes de definir la rotación con respecto a un punto o eje cualquiera, es bueno recordar que cada eje cartesiano *x* ó *y* ó *z* está soportado por un vector (vector unitario) que lo generaba, con una dirección determinada. En este caso la terna *x, y, z* (espacio tridimensional) era generada por los versores $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$.

El problema a resolver es: dado el punto *p*, se desea rotar dicho punto un ángulo fijo θ, de modo que el punto, luego de la rotación, se encuentre en el punto *p'*; a la solución se la puede plantear en forma geométrica como se observa en la Figura 19, donde las

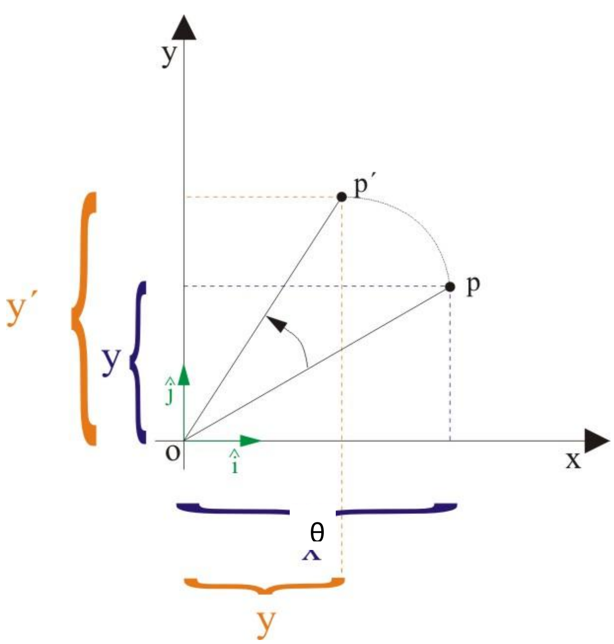

Figura 19 - Transformación *rotación*

nuevas coordenadas del punto *p'* se las puede escribir en función de las anteriores, y del ángulo θ rotado; esto es:

$$\begin{cases} x' = x\cos(\theta) - y sen(\theta) \\ y' = x sen(\theta) + y\cos(\theta) \end{cases} \qquad (9)$$

Que en forma matricial queda

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (10)$$

<u>Interpretación</u>: las coordenadas *x', y'* del nuevo punto *p*; se alcanzarán sabiendo las anteriores *x* e *y*, con un ángulo de giro θ conocido.

$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) \\ sen(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$ Esta matriz es llamada matriz de rotación. Es importante comprobar que esta transformación, solo produce rotaciones, y no deformaciones.

Como ocurrió en el caso de la traslación, podemos expresar esta matriz de 2x2 como una de 4x4 homogénea, que nos permita pre-multiplicar ésta por un vector, y lograr las nuevas coordenadas del punto *p'*; la matriz homogénea así definida en tres dimensiones es:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sen(\theta) & 0 & 0 \\ sen(\theta) & \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (11)$$

Se podría pensar en una rotación de un ángulo θ sobre el eje *z* que "sale" de la hoja, o sea, que se puede pensar el problema del siguiente modo: el punto *p* está en el plano *xy*, y ha sido rotado mediante un ángulo θ con respecto al eje *z*, que sale del plano, sugerimos que el lector lo imagine saliendo de la hoja.

COMENTARIO: ¿Existirá la matriz homogénea que una vez rotado el punto lo devuelva a donde estaba?, o sea, ¿Existirá H^{-1} tal que $\boxed{p=H^{-1}\cdot p'}$?

Acá es justamente donde se comprueba otra de las ventajas de expresar las transformaciones como matrices, y es que H^{-1} existe y es la inversa matricial de H; y en este caso particular se verifica que $H^{-1}=H^{T}$, esto es la transpuesta de H; lo que se puede lograr con simples manipulaciones de los elementos de la misma H.