UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Informática
Universidad Técnica Federico Santa María

Optimización

Proyecto semestral

Paralelo: 1

Matias Lara	ROL: 202204030-0
José Meza	ROL: 202204041-6
Franco Cerda	ROL: 202204018-1
Matias Barraza	ROL: 202204030-3

Profesores: Sergio Campos -Yoslandy Lazo

Índice

1. Definición de conjuntos y parámetros

- I: Conjunto de asignaturas ($i \in I$)
- S: Conjunto de salas ($s \in S$)
- T: Conjunto de bloques horarios disponibles por día ($t \in T = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$)
- D: Días de la semana ($d \in D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$).
- C_s: Capacidad de la sala s, que varía entre 20 y 45 estudiantes.
- E_i: Estudiantes interesados en la asignatura i, valor entre 10 y 40.
- $$A_i = \begin{cases} 1 \text{ Si la asignatura } i \text{ es indispensable.} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$
- P_i: Prioridad de la asignatura i, valor aleatorio entre 6 y 10 si es indispensable, y entre 1 y 5 si no lo es.
- $$B_{i,d,t} = \begin{cases} 1 \text{ si el bloque } t \text{ del día } d \text{ está bloqueado para el profesor que dicta la asignatura } i. \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$
- $$R_i = \begin{cases} 1 \text{ Si la asignatura } i \text{ requiere 1 bloque a la semana.} \\ 2 \text{ Si la asignatura } i \text{ requiere 2 bloques a la semana.} \end{cases}$$

2. Variables de decisión

$$x_{i,s,d,t} = \begin{cases} 1 \text{ si la asignatura } i \text{ se asigna a la sala } s \text{ en el día } d \text{ y bloque } t. \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

$$y_i = \begin{cases} 1 \text{ si la asignatura } i \text{ es asignada} \\ 0 \text{ en caso contrario.} \end{cases}$$

3. Función Objetivo

Maximizar la prioridad total de las asignaturas asignadas a las salas:

$$\text{Maximizar } z = \sum_{i \in I} P_i \times y_i$$

4. Restricciones

1. **Evitar solapamientos en una sala:** Cada sala solo puede tener una asignatura en un horario específico.

$$\sum_{i \in I} x_{i,s,d,t} \leq 1 \quad \forall s \in S, \quad \forall t \in T, \quad \forall d \in D$$

La suma de todas las asignaturas en una sala s durante un bloque t en un día d debe ser 1 o menor, es decir, la sala **puede** estar asignada a una **única asignatura** o permanecer vacía.

2. **Consecutividad de bloques para asignaturas de dos bloques:** Si una asignatura requiere dos bloques consecutivos ($R_i = 2$), entonces sus bloques deben ser adyacentes en el mismo día y sala.

$$x_{i,s,d,t} - x_{i,s,d,t+1} \leq y_i, \quad \forall i \in I \text{ tal que } R_i = 2,\ \forall s \in S,\ \forall t \in T-1,\ \forall d \in D$$

Esta restricción asegura que si la asignatura i es asignada ($y_i = 1$) y además es de bloques consecutivos ($R_i = 2$), los bloques asignados deben ser consecutivos en el mismo día. Cuando $y_i = 1$, la desigualdad obliga a que, si $x_{i,s,d,t} = 1$, entonces $x_{i,s,d,t+1}$ también debe ser 1, garantizando la consecutividad. En cambio, si $y_i = 0$, la desigualdad permite que ambos $x_{i,s,d,t}$ y $x_{i,s,d,t+1}$ sean 0, sin imponer la condición de consecutividad, ya que la asignatura no se asigna.

Si una asignatura requiere dos bloques consecutivos ($R_i = 2$), esta debe asignarse en bloques adyacentes en el mismo día y sala. La Restricción 3 se encargará específicamente del último bloque del día.

3. **Asignación consecutiva en el penúltimo y último bloque del día**: Si una asignatura requiere dos bloques consecutivos ($R_i = 2$), el último bloque del día ($T = 7$) solo puede ser asignado si el bloque anterior ($T = 6$) también está asignado a la misma asignatura y la asignatura está efectivamente asignada ($y_i = 1$).

$$x_{i,s,d,7} \leq x_{i,s,d,6}$$

$$x_{i,s,d,7} \leq y_i$$

$$x_{i,s,d,6} \leq y_i$$

Esta restricción está compuesta por tres desigualdades clave:

1. **Primera Desigualdad**: $x_{i,s,d,7} \leq x_{i,s,d,6}$. Esta desigualdad asegura que, si la asignatura i está asignada al último bloque del día (bloque 7), entonces debe estar asignada también en el penúltimo bloque (bloque 6). Esto cumple con la condición de consecutividad, evitando asignaciones no adyacentes para asignaturas que requieren dos bloques continuos.

2. **Segunda Desigualdad**: $x_{i,s,d,7} \leq y_i$. Esta desigualdad asegura que, si se asigna la asignatura en el último bloque (bloque 7), la variable y_i debe ser igual a 1, indicando que la asignatura está asignada efectivamente en el horario.

3. **Tercera Desigualdad**: $x_{i,s,d,6} \leq y_i$. Similar a la segunda desigualdad, esta asegura que, si se asigna la asignatura en el penúltimo bloque (bloque 6), la variable y_i también debe ser igual a 1. Esto evita asignaciones parciales en las que solo se ocuparía el penúltimo bloque sin la confirmación de asignación completa.

A diferencia de la **Restricción 2**, que se enfoca en asegurar la consecutividad para todos los bloques en caso de que la asignatura requiera dos bloques ($R_i = 2$), esta restricción es específica para los últimos dos bloques del día. Así, se garantiza que el último bloque solo se puede asignar si el penúltimo también está ocupado y la asignatura está realmente asignada, manteniendo la consistencia en los bordes del horario diario y evitando asignaciones inadecuadas en los bloques finales.

4. **Capacidad de la sala:** El número de estudiantes interesados en una asignatura no debe exceder la capacidad de la sala asignada.

$$E_i \times x_{i,s,d,t} \leq C_s, \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in S, \quad \forall d \in D, \quad \forall t \in T$$

Si $x_{i,s,d,t} = 1$, es decir, si la asignatura i se ha asignado a la sala s en el día d y bloque t, entonces se cumple que $E_i \leq C_s$, lo que implica que la sala s tiene capacidad suficiente para albergar a todos los estudiantes interesados en la asignatura i.

5. **Restricción de Asignación Exacta de Bloques:** Cada asignatura debe recibir exactamente el número de bloques requeridos (R_i) si está asignada ($y_i = 1$), y ningún bloque si no está asignada ($y_i = 0$).

$$\sum_{s \in S} \sum_{d \in D} \sum_{t \in T} x_{i,s,d,t} = R_i \times y_i, \quad \forall i \in I$$

Esta restricción asegura que, si la asignatura i está asignada ($y_i = 1$), entonces recibe exactamente R_i bloques en el horario, cumpliendo con los requisitos de asignación completa. Si $y_i = 0$, la asignatura no recibe ningún bloque asignado, permitiendo flexibilidad en la asignación de asignaturas no indispensables. A diferencia de la Restricción 2, que controla la consecutividad de los bloques, esta restricción se enfoca en asegurar la cantidad exacta de bloques asignados.

6. **Prioridad de Asignación de Asignaturas según Importancia:** Las asignaturas indispensables ($A_i = 1$) deben ser asignadas en todos los bloques requeridos, mientras que las asignaturas no indispensables ($A_i = 0$) pueden ser asignadas opcionalmente si hay disponibilidad de bloques.

$$y_i \geq A_i, \quad \forall i \in I$$

Esta restricción asegura que, si una asignatura es indispensable ($A_i = 1$), entonces $y_i = 1$, garantizando su asignación. Si la asignatura no es indispensable ($A_i = 0$), entonces y_i puede ser 0 o 1, permitiendo que la asignatura sea asignada opcionalmente, según la disponibilidad de bloques.

7. **Restricciones de horario de los profesores:** Los profesores tienen restricciones sobre en qué bloques pueden dictar clases.

$$x_{i,s,d,t} \leq 1 - B_{i,d,t}, \quad \forall i \in I, \quad \forall s \in S, \quad \forall d \in D, \quad \forall t \in T$$

De esta forma, si $B_{i,d,t} = 1$, es decir, la asignatura i no se puede dictar en el bloque t del día d debido al horario personal del profesor, la restricción se convierte en $x_{i,s,d,t} \leq 0$, lo que implica que el bloque no se puede asignar a esa asignatura. En caso contrario, si $B_{i,d,t} = 0$, la restricción se relaja y el modelo permite $x_{i,s,d,t} \leq 1$, es decir, la asignatura i puede asignarse o no en ese bloque.

5. Descripción de la Función Objetivo y Restricciones

La función objetivo busca maximizar la prioridad de las asignaturas asignadas, priorizando aquellas que son indispensables. Las restricciones aseguran que se cumplan las limitaciones de capacidad de salas, disponibilidad de bloques horarios, y las necesidades específicas de cada asignatura, tanto en términos de bloques consecutivos como en la asignación de uno o dos bloques por semana, según sea necesario. Además, se da prioridad a las asignaturas indispensables, que deben ser asignadas obligatoriamente.

6. Análisis de la Función Objetivo

La función objetivo se genera a través de un generador de instancias, ya que involucra un número de variables igual a $I \times S \times T \times D$. La magnitud de la función objetivo depende directamente del tamaño de la instancia, ya que tanto I como S varían considerablemente entre instancias pequeñas, medianas y grandes.

A medida que crece el tamaño de la instancia, particularmente en el número de asignaturas (I) y salas (S), la función objetivo se vuelve más compleja debido al incremento exponencial en el número de combinaciones posibles de asignaturas y bloques horarios. Esto implica que, en instancias más grandes, el número de variables en el modelo aumenta significativamente, lo que puede complicar el proceso de optimización.

En instancias pequeñas, el número de variables es manejable y la solución se obtiene de forma eficiente. Sin embargo, en instancias medianas y grandes, el número de combinaciones posibles aumenta de manera exponencial, haciendo que el modelo de programación lineal requiera más recursos computacionales y tiempo para encontrar una solución óptima o factible. Esto puede provocar que, en instancias grandes, el tiempo de cómputo se incremente y la función objetivo tarde más en converger a un valor óptimo.

7. Análisis de Infactibilidad

La infactibilidad en el modelo puede ocurrir debido a varias razones, principalmente por la interacción entre las restricciones impuestas y la cantidad de parámetros disponibles. Una de las causas más comunes de infactibilidad surge cuando el modelo no logra asignar todas las asignaturas indispensables a los bloques horarios y salas disponibles. Esto puede ocurrir si la demanda de bloques horarios o de capacidad de las salas excede la oferta disponible, especialmente cuando hay más asignaturas que bloques o cuando los aforos de las salas son insuficientes para acomodar a todos los estudiantes interesados.

Otro factor relevante es la restricción de bloques consecutivos para ciertas asignaturas. Si la asignatura requiere dos bloques consecutivos en el mismo día, pero las salas o los bloques ya están ocupados por otras asignaciones, puede no ser posible encontrar una solución factible para esa asignatura. Además, las restricciones impuestas por los horarios bloqueados de los profesores pueden limitar aún más la disponibilidad de bloques, creando situaciones en las que no sea posible satisfacer todas las condiciones simultáneamente.

Es importante destacar que las restricciones relacionadas con la capacidad de las salas también juegan un rol crucial. Si la cantidad de estudiantes inscritos en una asignatura excede el aforo de la sala asignada, el modelo debe encontrar otra sala o bloque, lo cual puede no ser factible si las opciones son limitadas.

Finalmente, estas situaciones de infactibilidad se vuelven más comunes y difíciles de evitar en instancias grandes del problema. A medida que aumentan el número de asignaturas, salas, días y bloques, las combinaciones de restricciones se vuelven más complejas, lo que incrementa la probabilidad de que no exista una solución que satisfaga todas las condiciones impuestas de manera simultánea. Esto pone de relieve la importancia de generar instancias donde los parámetros estén balanceados y las restricciones sean manejables para garantizar la factibilidad del modelo.

8. Generación de Instancias y Uso de Aleatoriedad

El proceso de generación de instancias en este modelo se basa en la creación aleatoria de los parámetros clave que definen las restricciones y condiciones del problema. Para cada instancia, se generan aleatoriamente los siguientes parámetros:

- **Asignaturas (I):** Se crea un conjunto de 25 asignaturas en total. Cada asignatura puede tener un número aleatorio de estudiantes interesados, entre 10 y 40 estudiantes.
- **Salas (S):** Solo se cuenta con una sala en esta instancia, y su capacidad se genera de forma aleatoria entre 20 y 45 estudiantes.
- **Días y bloques horarios (D y T):** Se consideran 5 días de la semana, con 7 bloques horarios disponibles por día.
- **Asignaturas indispensables (A_i):** Se genera aleatoriamente si una asignatura es indispensable con una probabilidad del 20 % (es decir, 1 de cada 5 asignaturas será indispensable).
- **Prioridades (P_i):** Las asignaturas indispensables tienen una prioridad asignada entre 6 y 10, mientras que las no indispensables tienen una prioridad entre 1 y 5.
- **Requerimiento de bloques (R_i):** Se determina aleatoriamente si cada asignatura requiere uno o dos bloques semanales. El 65 % de las asignaturas solo requiere un bloque, mientras que el 35 % requiere dos bloques consecutivos.
- **Bloques bloqueados por los profesores (B_{itd}):** Los profesores tienen entre 7 y 21 bloques bloqueados semanalmente. Estos bloques se seleccionan de forma aleatoria para cada asignatura, garantizando que los profesores no estarán disponibles en esos horarios.

La función objetivo maximiza la asignación de asignaturas a las salas, priorizando las asignaturas indispensables según las prioridades definidas.

En cuanto a las restricciones, el modelo asegura que:

- No se produzcan solapamientos en las salas (es decir, solo se puede asignar una asignatura a la vez a una sala en un mismo horario).
- Las asignaturas se asignen el número correcto de bloques, según su requerimiento de uno o dos bloques semanales.
- La capacidad de las salas no sea excedida.
- Las asignaturas indispensables sean asignadas al menos una vez.
- Los horarios bloqueados por los profesores sean respetados.

9. Enlace GitHub

El código fuente y la documentación del proyecto están disponibles en el repositorio de GitHub:

`https://github.com/Matias-Lara/Proyecto1-OPTIMIZACION-INF292`