

**Estudio de Pérdida de Iones
Energéticos en Tokamaks Debido a
Inestabilidades
Magnetohidrodinámicas con un
Código de Centro de Giro**

Matias Alberto Aguirre

Director: Dr. Hugo Emilio Ferrari

Co-Director: Dr. Ricardo Farengo



Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Septiembre 2021

ALUMNO: Aguirre, Matias Alberto

L.U. : 722/11

LUGAR DE TRABAJO: CNEA - Gerencia d/Area Investigación Y Aplicaciones No Nucleares / Gerencia de Física (CAB)

DIRECTOR: Dr. Hugo Emilio Ferrari

FECHA DE INICIO: Septiembre 2020

FECHA DE FINALIZACIÓN: Octubre 2021

FECHA DE EXAMEN:

Informe Final Aprobado por:

Autor

Jurado

Director

Jurado

Profesor de Tesis de Licenciatura

Jurado

Resumen

En esta tesis se estudió la implementación del cálculo de trayectorias de partículas cargadas dentro de una configuración axisimétrica tipo *Tokamak* mediante la descripción de centro de giro. Para esto se utilizó un equilibrio magnetohidrodinámico de sección transversal no-circular reconstruido a partir de datos de descargas experimentales. A dicho equilibrio se le agregaron campos magnéticos y eléctricos para estudiar el efecto de inestabilidad tipo NTM reconstruidos de datos experimentales de corrientes y desplazamiento perturbados.

Con los campos reconstruidos se procedió a escribir los módulos de códigos que integraran las ecuaciones de centro de giro obtenidas a partir de una descripción Lagrangiana bajo la aproximación de radio de Larmor pequeño y los campos de equilibrio y sus perturbaciones.

Con dichos módulos terminados se compararon los resultados entre los resultados de calcular las trayectorias mediante la descripción de orbita completa y de centro de giro, siempre buscando que la variación de la energía del sistema esté dentro de una cota impuesta del 1% y que las trayectorias no difieran a más de un radio de Larmor, para asegurar que ambos describen el mismo caso.

Finalmente, se implementaron dichos módulos en un código llamado FOCUS, el cual bajo la descripción de orbitas completas, calcula las trayectorias de varias partículas al mismo tiempo usando el procesamiento en paralelo de una placa gráfica con sus distintos procesadores. De comparar los resultados para un ensamble de partículas entre antes y después de reemplazar los módulos de integración, se observaron diferencias significativas en los tiempos de cálculo.

Palabras clave: FUSION NUCLEAR, TOKAMAK, CENTRO DE GIRO

Agradecimientos

Índice General

Resumen	III
Agradecimientos	v
Índice General	vii
1. Introducción	1
1.1. Fusión Termonuclear	2
1.2. Balance de Potencias	3
1.3. Métodos de Confinamiento	4
1.4. Tokamaks	5
1.5. Motivación de la Tesis	7
2. Bases Teóricas	9
2.1. Movimientos de Cargas Aisladas en Campos Electromagnéticos	9
2.1.1. Movimiento en Campos Estáticos y Homogéneos	9
2.1.2. Movimiento en Campo Magnético Inhomogéneo	12
2.1.3. Movimiento en Campo Eléctrico Variable en el Tiempo	13
2.2. Momento Magnético y Espejos Magnéticos	14
2.3. Campo de Equilibrio e Inestabilidades	17
2.3.1. Modelo Magnetohidrodinámico	17
2.3.2. Ecuación de Grad-Shafranov	18
2.3.3. Inestabilidades Ideales y Resistivas	19
3. Códigos Computacionales	21
3.1. Código Órbita Completa	22
3.1.1. Ecuaciones de Movimiento	22
3.1.2. Campo de Equilibrio y Perturbaciones	24
3.2. Código Centro de Giro	25
3.2.1. Ecuaciones de Movimiento	25

Índice General

3.2.2. Campo de Equilibrio y Perturbaciones	28
3.3. Códigos en CUDA para Varias Partículas	28
4. Resultados	31
4.1. Superficies de Flujo	31
4.1.1. Campos de Equilibrio	32
4.1.2. Perturbación e Islas Magnéticas	32
4.2. Comparación Códigos OC y CG	34
4.2.1. Observaciones Generales	34
4.2.2. Comparación Sin Perturbaciones	37
4.2.3. Con Perturbaciones Independientes del Tiempo	39
4.2.4. Con Perturbaciones Dependientes del Tiempo	42
4.2.5. Tiempos de Cómputo	48
4.3. Implementación en FOCUS	49
5. Conclusión	51
Bibliografía	53

1

Introducción

El futuro energético es un tema central a nivel mundial debido, en gran parte, al calentamiento global consecuencia del aumento de gases de efecto invernadero producto del quemado de combustibles fósiles, combustibles que además no son renovables o sustentables; y el aumento constante de la población mundial, y por ende, de la demanda energética.

En las últimas décadas se ha incrementado la búsqueda y desarrollo de energías “alternativas”, es decir, con menores emisiones contaminantes. En este contexto es que toman relevancia la energía solar y eólica, pero debido a que dependen de fuentes con ciclos naturales propios (día-noche y vientos, respectivamente) no son capaces de proveer una oferta constante de energía, y no siempre pueden ser usadas como fuente de carga base de una red eléctrica. Así es que aparecen los reactores de fusión nuclear controlada que, como su nombre lo indica, busca obtener energía de la fusión entre núcleos de átomos en oposición de los reactores nucleares de fisión, los cuales presentan cierta oposición de la opinión pública por la posibilidad de accidentes. Los reactores de fusión funcionarían como complemento de centrales solares y eólicas, proveyendo de una carga base constante y segura, ya que a diferencia de los reactores de fisión, no se pueden producir reacciones en cadena debido a la poca cantidad de combustible empleado (de algunos gramos) y de agotarse el reactor simplemente se apagaría naturalmente.

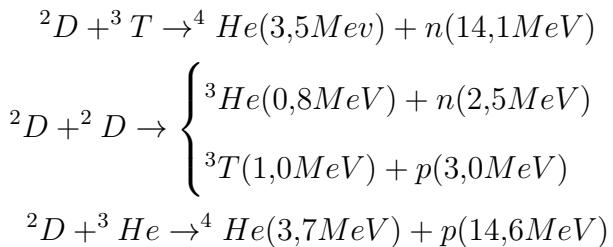
Para lograr este proceso se requiere confinar a dichas partículas y elevar su energía cinética, promoviendo el fluido al estado de plasma, de tal manera que los iones logren superar la repulsión Coulombiana. Una de las formas más atractivas de lograr este confinamiento es mediante campos magnéticos, los cuales son descriptos a partir del modelo magnetohidrodinámico ideal (MHD Ideal) permitiendo estudiar el comportamiento de los plasmas de fusión.

1.1. Fusión Termonuclear

Dados dos reactivos con densidades n_1 y n_2 , la tasa de reacciones de fusión por unidad de volumen está dado por

$$f = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle$$

donde $\langle \sigma v \rangle$ es la reactividad, definida como el promedio entre la sección eficaz σ de la reacción y la velocidad v de los reactivos. Como la reactividad depende fuertemente de la temperatura, buscamos reactivos que tengan una reactividad alta a temperaturas relativamente bajas. En este sentido, las tres reacciones de fusión de mayor interés son



La figura 1.1 se muestra la reactividad en función de la temperatura en KeV de las 3 reacciones anteriormente mencionadas.

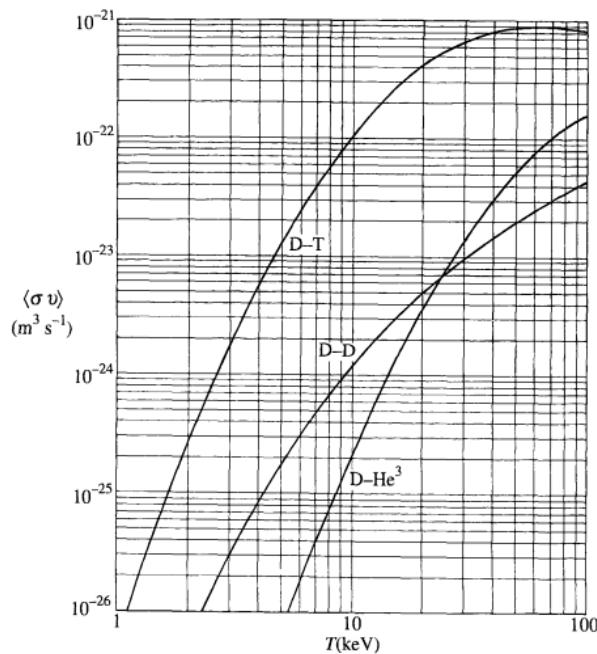


Figura 1.1: Reactividad para las reacciones D-D y D-He en función de la temperatura del plasma. Se observa como estas son menores que para la reacción D-T.

Como se puede ver, la reacción D+T es la más eficiente para energías prácticas de entre

(1-10)KeV. A estas temperaturas (que corresponden al rango entre 10^7 y 10^8 °K, mucho más altas que las temperaturas de ionización) estos átomos son despojados completamente de sus electrones orbitales. Este gas quasi-neutro de iones y electrones se denomina plasma termonuclear.

1.2. Balance de Potencias

La potencia producida por unidad de volumen proveniente de la fusión de dos especies de partículas con densidades n_1 y n_2 será

$$P_{fus} = n_1 n_2 \langle \sigma v \rangle E_{fus} \quad (1.1)$$

donde E_{fus} es la energía liberada en cada reacción de fusión y la densidad total del combustible será $n = n_1 + n_2$. La potencia máxima se dará cuando $n_1 = n_2 = \frac{n}{2}$ reduciendo la ecuación (1.1) a

$$P_{fus} = \frac{n^2}{4} \langle \sigma v \rangle E_{fus}$$

En el rango de temperaturas en el que se espera que operen los reactores de fusión, la tasa de reacción depende cuadráticamente con la temperatura del plasma, pudiendo obtener una relación con la presión del plasma

$$P_{fus} \sim n^2 T^2 \sim p^2$$

la cual deberá ser compensada mediante algún método de confinamiento, una dificultad adicional para sus valores típicos de varias decenas de atmósferas.

Otro aspecto importante de un reactor de fusión es su tiempo de confinamiento τ_E . Esta es la tasa de pérdida de energía hacia el medio, y se define mediante la relación

$$\tau_E = \frac{W}{P_p}$$

donde P_p es la potencia de pérdida de energía del reactor y W la energía del plasma de fusión. Esta pérdida es compensada parcialmente por una fracción de la potencia de fusión total, la potencia de fusión de calentamiento P_{fus}^{cal} (de la interacción con las partículas α en el caso de las reacciones D-T) y por fuentes de calentamiento externo con potencia total P_H . En equilibrio las fuentes de calentamiento compensan exactamente las fuentes de pérdida, llegándose a la relación

$$P_p = P_H + P_{fus}^{cal}$$

En resumen, la potencia de fusión es proporcional al cuadrado del producto nT y la potencia de pérdida es inversamente proporcional a τ_E . En consecuencia, en general se busca maximizar el producto de estas tres cantidades $nT\tau_E$, denominado *triple producto de fusión*.

Finalmente, dadas las adecuadas condiciones de confinamiento se alcanza un punto donde se puede mantener la temperatura del plasma solo con la potencia de fusión de calentamiento. Al cociente entre la potencia de fusión total y la potencia de calentamiento externa es el llamado factor Q,

$$Q \doteq \frac{P_{fus}^{tot}}{P_H}$$

donde la condición $Q = \infty$ ($P_H = 0$) se conoce como *condición de ignición* y requiere $nT\tau_E > 5 \times 10^{15} \text{ cm}^{-3} \text{ KeVs}$. Al día de la fecha se alcanzó el valor máximo de $Q = 0,67$ obtenido por JET (del inglés *Joint European Torus*) quienes alcanzaron producir 16 MW de energía de fusión con 24 MW de energía de calentamiento. Este experimento junto con los avances de otros (el *Tore Supra Tokamak* en Francia y su récord en tiempo de duración del plasma, el JT-60 japonés con el más alto triple producto, el TFTR estadounidense con logros en potencia, temperatura, triple producto y operar bajo combustible D-T, entre otros) son los que llevaron al diseño de dispositivos mejores como ITER, el cual se prevé que tendrá un $Q \geq 10$, produciendo 500 MW de energía de fusión a partir del consumo de 50 MW de energía para los sistemas de calentamiento[1].

1.3. Métodos de Confinamiento

El aspecto más difícil al construir un reactor es encontrar un método de confinamiento que permita mantener al plasma en una configuración estable y con valores de τ_E tales que permitan la ignición. Para aumentar τ_E es necesario reducir los procesos de transporte dentro del plasma, causantes de la disipación energética de este. Además, distintas configuraciones de confinamiento llevan diversos tipos de inestabilidades que pueden ser difíciles de evitar. Estas inestabilidades no necesariamente son destructivas, pero pueden llevar a que el plasma adopte una configuración con parámetros de transporte no deseados.

Existen tres métodos principales de confinamiento de plasma:

1. **Confinamiento Gravitatorio:** Totalmente estable, pero ineficiente e imposible de aplicar en escala terrestre. Es el responsable de los procesos de fusión en las estrellas.

2. **Confinamiento Inercial:** Alta densidad de combustible y tiempos cortos de confinamiento. Se irradia un plasma con láseres desde distintas direcciones, calentándolo y confinándolo por presión de radiación. Su mayor problema son las inestabilidades de Rayleigh-Taylor.
3. **Confinamiento Magnético:** Baja densidad de combustible y largos tiempos de confinamiento. Se mantiene al plasma confinado en una región del espacio mediante campos magnéticos, aprovechando su condición de fluido conductor y por lo tanto las partículas cargadas constituyentes se mueven al rededor de las líneas de campo magnético. Suelen presentar inestabilidades a corrientes eléctricas y presiones elevadas. Existen distintas topologías para dichos campos magnéticos siendo las más estudiadas los *Stellarators* y los *Tokamaks*, siendo estos últimos los estudiados en este trabajo.

En el método de confinamiento magnético las líneas de campo forman un conjunto de superficies magnéticas anidadas alrededor de un eje. La última superficie magnética que se cierra sobre si misma sin tocar las paredes internas del recipiente se la denomina *separatriz*. Esto puede lograrse mediante configuraciones cilíndricas o toroidales siendo estas últimas las que acaparon más la atención, a pesar de que su construcción es más complicada, debido a que las primeras presentan perdidas de iones por los extremos.

Este trabajo se centra en el estudio de las trayectorias de iones mediante el cálculo del desplazamiento de dicha partícula y compararlo con el cálculo del desplazamiento de su centro de giro en presencia de equilibrios magnetohidrodinámicos (MHD) con inestabilidades para configuraciones del tipo *Tokamaks*.

1.4. Tokamaks

Los *Tokamaks* (acrónimo ruso que significa “cámara toroidal con bobinas magnéticas”) son dispositivos de confinamiento magnético toroidales de relación de aspecto $A = \frac{R_0}{a} \sim 3-4$, con R_0 el radio mayor del toroide y a el radio menor. Se distinguen dos direcciones principales, la *toroidal* y la *poloidal*, representado en la figura 1.2. En un *Tokamak*, el campo magnético apunta principalmente en la dirección toroidal, siendo generado tanto por corrientes externas como internas al plasma.

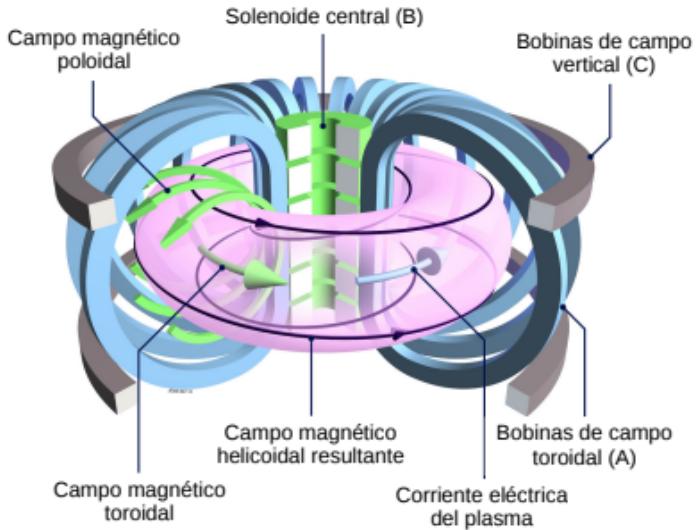


Figura 1.2: Esquema de un Tokamak de sección circular.

La mayor contribución al campo magnético toroidal proviene de un sistema de bobinas que rodean al plasma, marcada con la letra A en la figura 1.2. Un solenoide central, marcado con la letra B en la misma figura, se utiliza para inducir una corriente eléctrica toroidal en el plasma mediante una variación de flujo magnético. En este sentido, el plasma actúa como el secundario de un transformador. La corriente eléctrica toroidal generada calienta el plasma por disipación óhmica y genera el campo magnético poloidal. Por último, se utiliza un sistema de bobinas paralelas al *Tokamak*, marcadas con la letra C en la figura ya mencionada, para controlar la posición del plasma, limitar su expansión, y guiar las partículas que se escapan de la configuración hacia una región donde se las extrae, denominada divertor. Dicho divertor suele estar ubicado en la parte inferior del reactor.

Si bien las secciones transversales de la separatriz de los primeros *Tokamaks* eran circulares, esta forma ha variado a lo largo del tiempo. En la actualidad, la separatriz de la mayor parte de estos dispositivos tiene forma de D.

En particular en este trabajo se utilizarán los parámetros de uno de los proyectos más importantes llamado ASDEX-U (del inglés *AxiSimetric Divertor EXperiment Upgrade*) operado con combustible H-D y su plasma analizado con 40 diagnósticos obteniéndose hasta 4 GB de datos crudos por descarga[2]. El objetivo principal de este reactor es preparar la física básica para, por ejemplo, el ya nombrado reactor ITER (del inglés *International Thermonuclear Experimental Reactor*, todavía en construcción) una colaboración internacional que busca

demostrar la factibilidad del uso de la fusión nuclear como fuente de energía, pudiendo llevar a los *Tokamaks* en los primeros reactores de fusión comercial de la historia.

1.5. Motivación de la Tesis

Si bien los progresos hacia la construcción de un reactor de fusión nuclear capaz de entregar energía limpia son alentadores, aún quedan muchos problemas de física básica por resolver. En un plasma de D-T las reacciones de fusión producen partículas α de 3,5 MeVs de energía cinética. En condiciones adecuadas estas partículas depositarán su energía en el plasma, contribuyendo a su calentamiento y sostenimiento. Estas partículas, con energía mucho mayor que la energía térmica del plasma se conocen como partículas supratérmicas. En *Tokamaks* de tamaño medio, como ASDEX-U, se generan iones supratérmicos de ~ 80 keVs mediante la inyección de haces neutros en un plasma cuya temperatura es ~ 2 keVs.

La distribución espacial de las partículas supratérmicas afecta el rendimiento del reactor y, como ya dijimos, puede verse afectado por inestabilidades MHD [7], y en particular nos interesa aquí la inestabilidad conocida como *Neoclassical Tearing Mode* o NTM. En ASDEX-U, se observaron pérdida de iones supratérmicos en presencia de NTMs [8].

Las partículas supratérmicas constituyen en general una pequeña parte de la población de partículas y pueden tratarse con la aproximación de trazadores, esto es sin considerar el efecto de las mismas sobre la inestabilidad. Este es un problema altamente paralelizable. Para el caso que nos interesa, las islas magnéticas producidas por la inestabilidad tienen un tamaño similar al del radio de Larmor de las partículas energéticas. El Grupo de Fusión Nuclear y Física de Plasma del Centro Atómico Bariloche (GFNFP) tiene una vasta experiencia en tratar estos problemas analizando órbita completa [9]. La principal ventaja de este método radica en la simplicidad para describir la perturbación, la geometría y las colisiones. Estudios preliminares muestran que una descripción de órbita completa permite reproducir algunas características de la redistribución de partículas energéticas en presencia de NTM [3].

Por otra parte, los códigos de órbita completa son significativamente más lentos que los de aproximación de centro de giro (CG) ya que en general requieren resolver el período de ciclotrón. Además los código tipo CG aprovechan simetrías del sistema para simplificar el cálculo de las órbitas [10]. Es posible acelerar el cálculo con el uso de placas gráficas.

El GFNFP desarrolló el código FOCUS que se ejecuta en placas gráficas y mostró que es posible hacer cálculos realistas con recursos moderados [11]. Sin embargo a medida que la energía del ion decrece la descripción con órbita completa deja de tener sentido. En este trabajo se propone estudiar el efecto de la aproximación de centro de giro para el caso de iones energéticos en presencia de NTMs.

2

Bases Teóricas

Necesitamos plantear las bases teóricas para poder escribir los códigos que van a calcular las trayectorias de los iones. Siempre partiendo de un problema de condiciones iniciales, podemos hacer una descripción completa de la trayectoria o usar el hecho que los centros de giro de iones se desplazan sobre las líneas de campo magnético.

2.1. Movimientos de Cargas Aisladas en Campos Electromagnéticos

En la aproximación de trazadores el movimiento de la carga no modifica los campos, entonces la ecuación fundamental será la correspondiente a la fuerza de Lorentz de una partícula cargada q

$$\mathbf{F} = q_\alpha (\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}) \quad (2.1)$$

donde α será la especie a considerar (ion o electrón)

2.1.1. Movimiento en Campos Estáticos y Homogéneos

En el caso de campos que no dependan del tiempo y no poseen gradientes espaciales, podemos considerar distintos casos.

Como primer caso podemos ver qué pasa si $\mathbf{E} = 0$ pero no \mathbf{B} . En este caso la ecuación (2.1) quedará

$$\mathbf{F} = q_\alpha (\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}) \quad (2.2)$$

donde se puede observar que la fuerza es perpendicular a la dirección de movimiento, por lo tanto el campo magnético no hará trabajo sobre la carga conservando la energía cinética de

dicha partícula, pudiendo cambiar su dirección de movimiento pero no su magnitud. Esto nos indica que podemos descomponer convenientemente la velocidad de la partícula en sus componentes paralela y perpendicular al campo \mathbf{B} , donde definimos

$$\hat{b} = \frac{\mathbf{B}}{|\mathbf{B}|}$$

y por lo tanto $v_{\parallel} = \mathbf{v} \cdot \hat{b}$ y $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - v_{\parallel}\hat{b}$.

Para estudiar el movimiento de la carga podemos elegir el eje \hat{z} en la dirección de \mathbf{B} y en el plano perpendicular a \mathbf{B} podemos elegir el eje \hat{y} de modo que la velocidad inicial resulte

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t=0) = (0, v_{\perp}, v_{\parallel}) \quad (2.3)$$

Utilizando (2.2) y la condición inicial (2.3) llegamos a

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}[1 - \cos(\Omega_{\alpha}t)] + x_0 \\ y(t) &= \frac{v_{\perp}}{\Omega_{\alpha}}[\sin(\Omega_{\alpha}t)] + y_0 \\ z(t) &= z_0 + v_{\parallel}t \end{aligned}$$

donde $\Omega_{\alpha} = \frac{q_{\alpha}B}{mc}$ se lo denomina frecuencia de ciclotrón, la frecuencia del movimiento circular alrededor \mathbf{B} , ver figura 2.1.

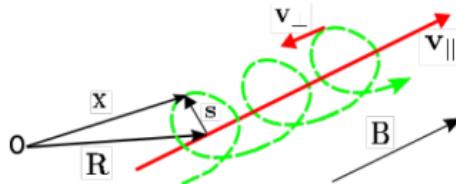


Figura 2.1: Movimiento de una partícula a lo largo de la dirección de \mathbf{B} . Definición de los parámetros del centro de giro.

Como se muestra en la figura 2.1, podemos descomponer el movimiento de la partícula \mathbf{x} como la posición de su centro de giro \mathbf{R} , que se mueve con velocidad $v_{\parallel}\hat{b}$, y su rotación en el plano perpendicular \mathbf{s} cuyo módulo se lo denomina radio de Larmor

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} + \mathbf{s} \quad (2.4)$$

$$\mathbf{s} = \frac{mc}{q_{\alpha}B}\mathbf{v} \times \hat{b} = \frac{\mathbf{v} \times \hat{b}}{\Omega_{\alpha}}$$

Si ahora hacemos el caso donde $\mathbf{E} \neq 0$ pero $\mathbf{B} = 0$ observamos que la ecuación de movimiento (2.1) nos queda

$$\mathbf{F} = q_{\alpha}\mathbf{E}$$

con lo que se obtiene

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \frac{q_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} t$$

lo que corresponde a un movimiento acelerado en la dirección del campo eléctrico.

Finalmente, si tenemos tanto $\mathbf{E} \neq 0$ como $\mathbf{B} \neq 0$ la ecuación de movimiento será (2.1) lo cual conlleva un movimiento extra que para su descripción nos será útil verlo como un caso más general agregando una fuerza \mathbf{F} constante, quedando la ecuación de movimiento como

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q_\alpha}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \mathbf{F} \quad (2.5)$$

Si nuevamente utilizamos la descripción de centro de giro, usando la ecuación (2.4) obtenemos una expresión para la velocidad de centro de giro:

$$\mathbf{v}_{cg} \equiv \dot{\mathbf{R}} = \mathbf{v} - \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{v} + \frac{1}{B^2} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \frac{c}{q_\alpha B^2} \mathbf{F} \times \mathbf{B}$$

y usando que $(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = -\mathbf{v}_\perp B^2$ y $\mathbf{v} - \mathbf{v}_\perp = v_\parallel \hat{b}$, obtenemos

$$\mathbf{v}_{cg} = v_\parallel \hat{b} + \frac{c}{q_\alpha B^2} \mathbf{F} \times \mathbf{B} \quad (2.6)$$

de donde se puede deducir que de existir una fuerza \mathbf{F} constante su componente perpendicular a \mathbf{B} producirá una velocidad de deriva

$$\mathbf{v}_D = \frac{c}{q_\alpha B^2} \mathbf{F}_\perp \times \mathbf{B} \quad (2.7)$$

y su componente paralela producirá una aceleración en dicha dirección $m_\alpha \frac{dv_\parallel}{dt} = \mathbf{F}_\parallel$. Esto producirá una deriva, o trayectorias no cerradas debido a una variación periódica (aceleración y desaceleración según dirección de movimiento) del radio de Larmor, perpendicular a dicha fuerza y campo magnético como se muestra en la figura 2.2.

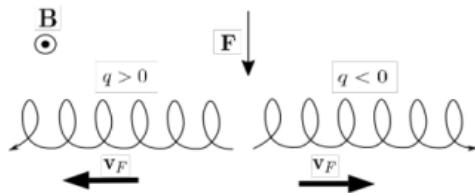


Figura 2.2: Movimiento de deriva del centro de giro producido por una fuerza adicional \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{B} .

Por lo tanto, para el caso con un campo electromagnético tendremos la llamada Deriva $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ donde la fuerza adicional será $\mathbf{F} = q_\alpha \mathbf{E}$ y por lo tanto su velocidad de deriva será

$$\mathbf{v}_{E \times B} = \frac{c}{B^2} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$$

la cual no depende del signo o masa de la carga, por lo tanto será la misma para iones y

electrones, ejemplificado en la figura 2.3

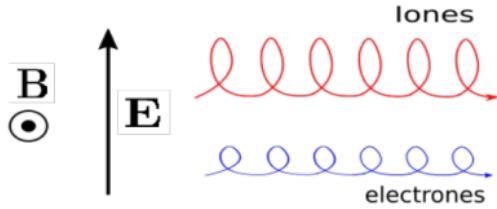


Figura 2.3: Movimiento de deriva del centro de giro producido por una fuerza adicional \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{B} .

generando un desplazamiento neto de todo el plasma sin generar corrientes.

2.1.2. Movimiento en Campo Magnético Inhomogeneo

Si para ciertas configuraciones queremos que las líneas de campo se cierren sobre sí mismas (como es el caso de los *Tokamaks*) indefectiblemente necesitamos que estas líneas se curven, como también podemos encontrar gradientes transversales en la intensidad de dicho campo. Estas variaciones en las estructuras de los campos producen derivas en el movimiento de centro de giro.

Comencemos por el caso donde las líneas de campo se curvan. Para una partícula que se mueve sobre dicha linea con su velocidad de centro de giro paralela a esta, esta partícula estará sometida a una fuerza centrífuga (en promedio sobre un período de rotación)

$$\mathbf{F}_c = \frac{m_\alpha v_\parallel^2}{R_B} \hat{R}_B$$

donde R_B es el radio de curvatura de la linea de campo y \hat{R}_B el versor correspondiente. Si introducimos \mathbf{F}_c en la ecuación (2.7) vemos que producirá una velocidad de deriva

$$\mathbf{v}_{curv} = \frac{v_\parallel^2}{\Omega_\alpha R_B} (\hat{R}_B \times \hat{b}) \quad (2.8)$$

Esta es la deriva debida a la curvatura del campo y vemos que depende de la masa de la partícula y del signo de la carga, por lo que originará una corriente.

El otro caso a considerar, es debido a un gradiente. En este caso el radio de Larmor será menor si el campo magnético es más intenso que conllevará a una deriva perpendicular tanto a dicho campo y a su gradiente. Si suponemos que la longitud típica asociada con el gradiente de campo es mucho mayor que el radio de Larmor de la partícula, podemos usar

esta condición para desarrollar el campo magnético alrededor del centro de giro como

$$\mathbf{B} \approx \mathbf{B}_0 + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{B}_0$$

donde \mathbf{B}_0 es el campo en la posición de centro de giro y \mathbf{r} se mide a partir de esta misma posición. Si ahora tomamos a la velocidad de la partícula como la suma de el caso de campo uniforme más una corrección a primer orden debido al gradiente del campo $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$ y teniendo en cuenta que $m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_0 = \frac{q_\alpha}{c} (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{B}_0)$ la ecuación de movimiento a primer orden queda

$$m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_1 = \frac{q_\alpha}{c} (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{B}_0 + \mathbf{v}_0 \times [\mathbf{r} \cdot \nabla] \mathbf{B}_0) \quad (2.9)$$

donde \mathbf{r} debe ser calculado usando \mathbf{B}_0 para ser consistente orden asumido.

Como en la ecuación (2.9) solo nos interesa un movimiento de deriva constante en dirección perpendicular a \mathbf{B} , se toma el promedio sobre un período de giro y de esta forma se aísla dicha contribución, se dice que se toma la deriva "promedio" sobre un período. Por lo tanto, la ecuación (2.9) en el caso más general nos queda

$$\mathbf{v}_1 = -\frac{1}{2B_0^2} \frac{v_\perp^2}{\Omega_\alpha} (\nabla B_0 \times \mathbf{B}_0) \quad (2.10)$$

Si pensamos en una configuración con simetría cilíndrica ($\frac{\mathbf{R}_B}{R_B^2} = -\frac{\nabla B_0}{B_0}$), la ecuación (2.10) nos queda

$$\mathbf{v}_{\nabla B} = \frac{v_\perp^2}{2R_B \Omega_\alpha} (\hat{R}_B \times \hat{b}) \quad (2.11)$$

Si pensamos que todo campo cuyas líneas se curvan debe estar generado por una distribución localizada de corrientes y por lo tanto, junto con la curvatura siempre habrá un ∇B , podemos combinar (2.8) y (2.11) obteniendo

$$\mathbf{v}_D = \frac{\hat{R}_B \times \hat{b}}{R_B \Omega_\alpha} (v_\parallel^2 + \frac{v_\perp^2}{2})$$

2.1.3. Movimiento en Campo Eléctrico Variable en el Tiempo

Nos queda analizar el caso donde el campo eléctrico no es homogéneo, en este caso dependiente del tiempo. Para simplificar se considerará el caso donde $\mathbf{B} = B_0 \hat{z}$ constante y $\mathbf{E} = -\dot{E} t \hat{y}$, con \dot{E} constante (poco realista ya que implicaría un crecimiento indefinido pero ilustrativo para exemplificar) y como ya dijimos anteriormente, la frecuencia de variación debe ser lenta comparada con el período de ciclotrón. Según lo visto en las secciones anteriores el movimiento del centro de giro estará compuesto por:

- Un desplazamiento del centro de giro en dirección de las líneas de campo.

- Un movimiento de rotación alrededor de las líneas de campo.
- Una deriva del centro de giro debido al producto $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ en dirección $-\hat{x}$ en este caso variable.
- Debido a que el movimiento de deriva en la dirección $-\hat{x}$ es variable, el centro de giro experimenta una fuerza de inercia en dicha dirección, por lo tanto habrá una deriva debido al producto $\mathbf{F} \times \mathbf{B}$.

Descomponiendo la velocidad en sus contribuciones

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + v_E \hat{x} + v_P \hat{y}$$

donde \mathbf{v}_0 será el sobre las líneas de campo, v_E la deriva debido al campo eléctrico y v_P la deriva debido a la fuerza de inercia (deriva de polarización). Suponiendo que v_P es constante al escribir componente a componente se observa

$$\begin{aligned} m_\alpha \dot{\mathbf{v}}_0 &= \frac{q_\alpha}{c} \mathbf{v}_0 \times \mathbf{B} \\ m_\alpha \dot{v}_E &= \frac{q_\alpha}{c} v_E B \\ 0 &= -q_\alpha \dot{E} t - \frac{q_\alpha}{c} v_E B \end{aligned}$$

Combinando la tercera ecuación con la segunda se puede obtener

$$\mathbf{v}_P = -\frac{c\dot{E}}{\Omega_\alpha B} \hat{y} = \frac{c}{\Omega_\alpha B} \frac{d\mathbf{E}}{dt} \quad (2.12)$$

Notar que se supuso v_P constante debido a que \dot{E} es constante. Lo que en realidad se necesita para que (2.12) sea válida es que la frecuencia de variación del campo eléctrico sea mucho menor que la de ciclotrón. Nuevamente como la velocidad de deriva depende de la carga se generará una corriente eléctrica.

2.2. Momento Magnético y Espejos Magnéticos

Para el cálculo de órbitas en el código de centro de giro va a ser necesario utilizar cierta magnitud invariante frente a cambios lentos del sistema, a estas magnitudes se las llama invariantes adiabáticos, y más precisamente se usará el momento magnético de la partícula.

Cuando se tiene un sistema que cambia a una escala de tiempo τ mucho menor que la frecuencia ω de algún movimiento periódico, si se calcula la acción $I = \oint P dQ$, tomada sobre un período, P el momento generalizado y Q la correspondiente coordenada generalizada; esta

permanece aproximadamente constante y se la denomina *invariante adiabática*.

Si aplicamos esto al caso del movimiento de una partícula cargada en un campo magnético, sabemos que esta va a efectuar un movimiento alrededor de un centro de giro con frecuencia Ω_α . Para la coordenada x vimos que efectúa un movimiento dado por

$$x(t) = \frac{v_\perp}{\Omega_\alpha} [1 - \cos(\Omega_\alpha t)] \quad \dot{x}(t) = v_\perp \sin(\Omega_\alpha t)$$

entonces la acción asociada a este movimiento será

$$I = \int m_\alpha v_x dx = \int m_\alpha \dot{x}^2 dt = \int_0^{\frac{2\pi}{\Omega_\alpha}} m_\alpha v_\perp^2 \sin^2(\Omega_\alpha t) dt$$

$$I = m_\alpha v_\perp^2 \frac{\pi}{\Omega_\alpha} = 2\pi \frac{m_\alpha v_\perp^2}{2} \frac{m_\alpha c}{q_\alpha B} = 2\pi \frac{m_\alpha c}{q_\alpha} \frac{W_\perp}{B} = 2\pi \frac{m_\alpha c}{q_\alpha} \mu$$

donde W_\perp es la contribución perpendicular a la energía cinética y por lo tanto μ será

$$\mu = \frac{W_\perp}{2B} \quad (2.13)$$

Se observa que las condiciones $I = cte$ y $\mu = cte$ son equivalentes.

Una forma de ver que μ se conserva es calculando las variaciones de W_\perp y B siguiendo la trayectoria de los centros de giro de las partículas. Tomando el caso de la figura 2.4, la fuerza de Lorentz será como en la ecuación (2.2) con F_\perp en la misma dirección que v_\perp (si la partícula se mueve en el mismo sentido que el campo, $v_z > 0$, la fuerza apunta en la dirección de rotación) esto acelera la partícula, aumentando la contribución perpendicular a la energía cinética.

$$\frac{dW_\perp}{dt} = v_\perp F_\perp = \frac{qv_z}{c} v_\perp |B_r| > 0$$

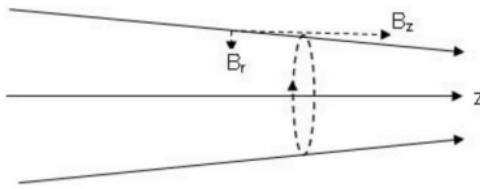


Figura 2.4: Partícula en un campo con un gradiente longitudinal.

Usando que $B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{z=0}$ (obtenido a partir de considerar $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ en cilíndricas para campos que no varían considerablemente respecto al radio de Larmor) se obtiene

$$\frac{dW_\perp}{dt} = W_\perp v_z \frac{1}{B} \frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{z=0}$$

Finalmente si calculamos la variación de μ

$$\frac{d\mu}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{W_\perp}{B} \right) = \frac{1}{B} \frac{dW_\perp}{dt} - \frac{W_\perp}{B^2} \frac{dB_z}{dt} = \frac{W_{perp} v_z}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} - \frac{W_{perp} v_z}{B^2} \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

donde se usó que la derivada total del campo siguiendo la trayectoria de la partícula es $\frac{dB_z}{dt} = \frac{\partial B_z}{\partial t} + v_z \frac{\partial B_z}{\partial z}$. Por lo tanto, si suponemos que \mathbf{B} no varía apreciablemente respecto al radio de Larmor ni en de un período de rotación el momento magnético se conserva.

Debido a que el momento magnético es una constante de movimiento, dependiendo de las condiciones iniciales de nuestra partícula podemos obtener trayectorias muy distintas, como ser verá a continuación. Considerando una situación como la de la figura 2.5 donde el campo magnético estará generado por dos espiras, y para simplificar el análisis la partícula tiene energía W , momento magnético μ y su centro de giro se encuentra inicialmente en $z = -\frac{L}{2}$ (la primer bobina), si inicialmente $v_z > 0$ se moverá hacia la derecha y sentirá una fuerza debido al gradiente $F = -\mu \nabla B$, podrá llegar más allá de $z = \frac{L}{2}$? (la segunda bobina)

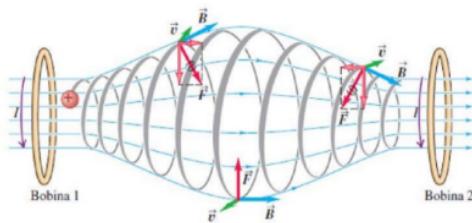


Figura 2.5: Movimiento de una partícula en un espejo magnético.

Recordando que la expresión para μ es (2.13) y que este se conserva tenemos

$$\mu = \frac{m_\alpha v_{\perp 0}^2}{2B_{min}} = \frac{m_\alpha v_\perp^2}{2B} \quad W = \frac{m_\alpha v_{\perp 0}^2}{2} + \frac{m_\alpha v_{z0}^2}{2} = \frac{m_\alpha v_\perp^2}{2} + \frac{m_\alpha v_z^2}{2}$$

Si la partícula se desplaza hacia la derecha, el módulo del campo aumenta y por consiguiente la contribución perpendicular a la energía también debe aumentar para mantener invariante el momento magnético. Pero como la energía cinética también debe mantenerse constante (la fuerza de Lorentz es perpendicular al movimiento, no hace trabajo) la velocidad en la dirección \hat{z} debe disminuir. Si en algún punto $W_\perp = W$ entonces $v_z = 0$ y la partícula se ve reflejada por el espejo y tendremos

$$\frac{m_\alpha v_{\perp max}^2}{2} = \frac{m_\alpha v_{\perp 0}^2}{2} + \frac{m_\alpha v_{z0}^2}{2} \quad \mu = \frac{m_\alpha v_{\perp 0}^2}{2B_{min}} = \frac{m_\alpha v_{\perp max}^2}{2B_{max}}$$

y por lo tanto

$$v_{\perp max}^2 = v_{\perp 0}^2 \frac{B_{max}}{B_{min}}$$

La condición de reflexión (o atrapamiento) se puede escribir como

$$v_{\perp 0}^2 \frac{B_{max}}{B_{min}} \leq v_{\perp 0}^2 + v_{z0}^2 \quad o \quad v_{z0}^2 \leq v_{\perp 0}^2 (R - 1)$$

donde $R = \frac{B_{max}}{B_{min}}$ es la relación de espejo. Para toda partícula que cumpla esa relación sus órbitas se verán atrapadas entre dos valores de campo magnético, a estas órbitas se las llama *atrapadas* (y para el caso particular de la configuración estudiada en este trabajo son también llamadas *banana* por la forma similar a la fruta de la proyección poloidal de sus trayectorias) mientras a las partículas que logran escapar y se las llama órbitas *pasantes*.

2.3. Campo de Equilibrio e Inestabilidades

2.3.1. Modelo Magnetohidrodinámico

Para describir las líneas de campo magnético dentro de la configuración del reactor para poder simular las distintas trayectorias necesitamos introducir un modelo que nos permita describir al plasma magnetizado. En este trabajo se utilizará el modelo denominado magnetohidrodinámico (MHD) el cual es un modelo de fluido que describe el equilibrio macroscópico y las propiedades de estabilidad de dicho plasma.

Para el modelo MHD las ecuaciones son:

$$\text{Conservación Masa:} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

$$\text{Conservación Momento:} \quad \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\rho \mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla P - \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = 0$$

$$\text{Conservación Energía:} \quad \frac{\partial P}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla P + \frac{5}{3} P \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$\text{Ley de Ohm:} \quad \mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} = \eta \mathbf{J}$$

$$\text{Ecuaciones de Maxwell:} \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

donde las variables del fluido son ρ la densidad de masa, \mathbf{v} la velocidad del fluido, y P su presión. Las variables electromagnéticas son \mathbf{E} el campo eléctrico, \mathbf{B} el campo magnético y \mathbf{J} la densidad de corriente. Estas ecuaciones pueden simplificarse si se considera que el plasma está en equilibrio ($\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$), reduciendo el número de ecuaciones. Además, si el plasma está

a temperaturas muy altas, como el caso para los plasma termonucleares, la resistencia del plasma η puede despreciarse lo que serían las ecuaciones MHD Ideal.

Con las ecuaciones de Maxwell y la Ley de Ohm podemos obtener una ecuación de difusión para el campo magnético en el plasma

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \frac{c\eta}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{B})$$

que como dijimos anteriormente, para plasmas termonucleares la resistividad se puede despreciar y el termino resistivo se elimina. Para dicho caso se dice que el plasma además de ser ideal, las líneas de campo magnético están "congeladas" en el plasma, en otras palabras, en un plasma ideal la topología de las líneas de campo magnético no puede cambiar.

2.3.2. Ecuación de Grad-Shafranov

Si se toma el caso donde tenemos un equilibrio estático ($\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$ y $\mathbf{v} \equiv 0$) se obtiene de la ecuación para el momento que la fuerza de Lorentz es contrarrestada por el gradiente de presión del plasma

$$\nabla P = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} \quad (2.14)$$

En configuraciones axisimétricas como pueden ser los *Tokamaks* ($\frac{\partial}{\partial \phi} = 0$) se tiene que el campo magnético se puede escribir

$$\mathbf{B} = \nabla \times (A_\phi \hat{\phi}) + \left(\frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R} \right) \hat{\phi} \quad (2.15)$$

donde se usó coordenadas cilíndricas y que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Definiendo dos nuevas funciones, el *flujo poloidal*

$$\Psi(R, Z) = -RA_\phi$$

y el *campo toroidal*

$$g(R, Z) = R \left(\frac{\partial A_R}{\partial Z} - \frac{\partial A_Z}{\partial R} \right)$$

podemos escribir (2.15) como

$$\mathbf{B} = \nabla \phi \times \nabla \Psi(R, Z) + g(R, Z) \nabla \phi \quad (2.16)$$

donde se usó $\nabla \phi = \frac{1}{R} \hat{\phi}$. Esta última expresión es general para sistemas axisimétricos con campos expresables según dos funciones escalares siendo un equilibrio o no. Si calculamos el rotor de la ecuación (2.16) obtenemos la corriente con la forma

$$\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} = \Delta^* \Psi \nabla \phi + \nabla g \times \nabla \phi \quad (2.17)$$

donde se definió el operador elíptico toroidal como

$$\Delta^* \Psi = R^2 \nabla \cdot \frac{1}{R^2} \nabla \Psi = R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial \Psi}{\partial R} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2}$$

Si se sustituye las ecuaciones (2.16) y (2.17) en la ecuación (2.14) y se toman las proyecciones en las direcciones $\nabla \phi$, \mathbf{B} y $\nabla \Psi$ se obtienen tres condiciones

$$g = g(\Psi) \quad (2.18)$$

$$P = P(\Psi) \quad (2.19)$$

$$\Delta^* \Psi - 4\pi R^2 \frac{dP}{d\Psi} + g \frac{dg}{d\Psi} = 0 \quad (2.20)$$

respectivamente. Lo que se observa de las ecuaciones es que la presión P y la función de campo toroidal g son función del flujo poloidal Ψ , en el equilibrio, y estas tres están relacionadas por la ecuación de Grad-Shafranov (2.20).

Algo que no debe olvidarse es que como el sistema de ecuaciones propuesto no es cerrado, existirán infinitas soluciones. Para solucionar esto al momento de resolver (2.20) se deben especificar las formas funcionales de (2.18) y (2.19) a partir de mediciones experimentales o alguna forma particular que simplifique los cálculos sin perder sentido físico.

Finalmente, se suele buscar la condición $\Psi(R, Z) = cte$ (denominadas superficies magnéticas) cerrado dentro de la cámara de descarga, ya que esto implica que el plasma está confinado formando superficies anidadas. Esto también implica que estos contornos son de presión constante, ya que $P = P(\Psi)$, y que tanto el campo magnético como la corriente yacen sobre dichas superficies de $\Psi = cte$ debido a combinar (2.16), (2.17) y (2.18) se obtiene

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \Psi = 0 \qquad \mathbf{J} \cdot \nabla \Psi = 0$$

2.3.3. Inestabilidades Ideales y Resistivas

Si se considera que los campos están perturbados a primer orden, de forma tal que $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$, lo mismo para \mathbf{E} , \mathbf{J} , ρ , P y $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1$ ($\mathbf{u}_0 = 0$ por estar en el caso de equilibrio estático) con $\mathbf{u}_1 = \dot{\vec{\xi}}$ y $\vec{\xi}$ el desplazamiento del plasma debido a la perturbación, de la ecuación de Maxwell para el campo eléctrico y de la Ley de Ohm obtenemos

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0) + \frac{c\eta}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{B}_1 \qquad \mathbf{E}_1 = -\frac{\mathbf{u}_1 \times \mathbf{B}_0}{c} + \eta \mathbf{J}_1$$

Si se considera η despreciable, se denominan inestabilidades ideales, de lo contrario resistivas

vas, las cuales ocurren cuando la resistencia se vuelve apreciable en ciertas zonas del plasma haciendo apreciable la difusión del campo magnético permitiendo un cambio en la topología de las líneas de campo.

Las inestabilidades de ruptura TM (*tearing mode* en inglés) son del tipo resistivas que permiten la rotura y reconexión de líneas magnéticas como muestra la figura 2.6. En estos casos el campo magnético tiende a romperse y formar islas magnéticas. La aparición de estas islas aumenta significativamente el transporte.

Si el origen de las inestabilidades es por la disminución de la corriente, proporcional a la presión del plasma, se la llama NTM (*Neoclassical Tearing Modes*). Estas inestabilidades son producto de la reducción en la temperatura y gradientes de densidad, presentes en todo sistema confinado a un volumen como puede ser el reactor.

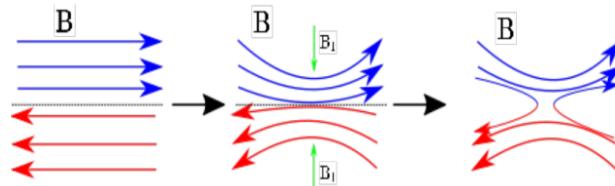


Figura 2.6: Reconexión de líneas de campo magnético debido a perturbaciones. Se observa el cambio de la topología del sistema.

3

Códigos Computacionales

Debido a que la idea principal es reemplazar los módulos encargados de resolver las ecuaciones de órbita completa del código FOCUS[12] por otros que resuelvan las ecuaciones de centro de giro permitiendo permutar de una formulación a otra, la estructura de ambos códigos es modular y similares descripta en el diagrama de flujo de la figura 3.1. En dicha figura se observa que ambos códigos siguen una misma estructura para el cálculo de órbitas para el cálculo de las órbitas. Las diferencias principales se encuentran en las ecuaciones a resolver, y en el caso de centro de giro además se genera una grilla de derivadas de campo magnético para las perturbaciones de los campos, ambos módulos dentro del Integrador.

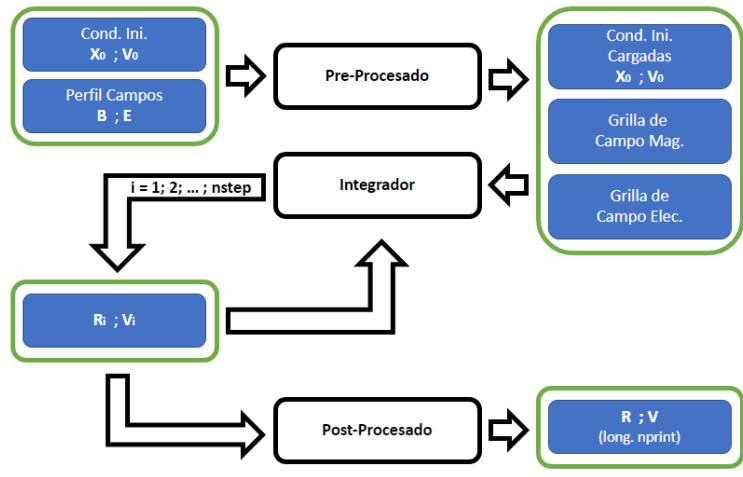


Figura 3.1: Diagrama cualitativo general para ambos códigos.

Inicialmente se cargan en un primer módulo las posiciones y velocidades iniciales junto con los archivos de lectura de datos experimentales para el cálculo de las perturbaciones a partir de la reconstrucción de la corriente perturbada. Luego de esto un segundo módulo resuelve las ecuaciones de movimiento correspondientes utilizando la información provista por el módulo anterior. Este módulo opera según la figura 3.2. Para una cantidad $nstep$ pasos

establecidos previamente según la cantidad de tiempo que se quiera simular, se utiliza un algoritmo tipo Runge-Kutta de cuarto orden, seis etapas y baja difusividad (RK46_NL)[16] el cual calcula los valores del lado derecho de las ecuaciones diferenciales a integrar. Por cada etapa es necesario interpolar los campos de equilibrio y sus perturbaciones para la posición y velocidad de la partícula en dicha configuración.

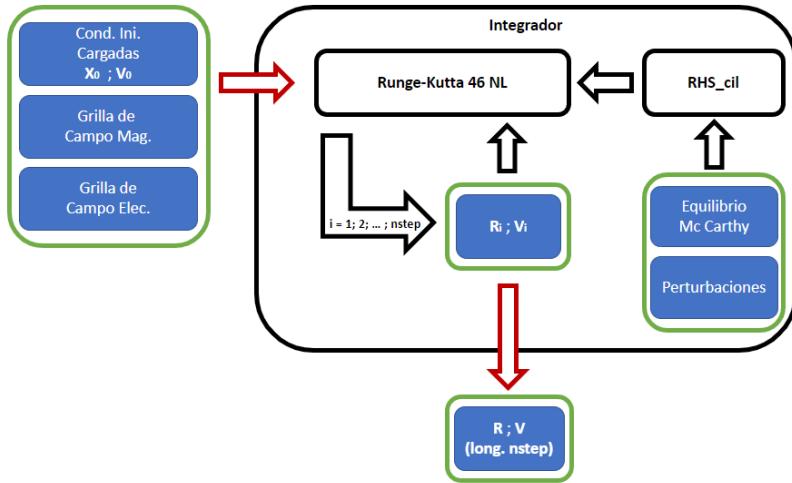


Figura 3.2: Diagrama cualitativo del módulo de integración para ambos códigos.

Finalmente, luego de finalizar la cantidad de iteraciones introducidas, un último módulo toma los datos obtenidos y los procesa para obtener los archivos que se utilizaran para los análisis post-simulación.

3.1. Código Órbita Completa

3.1.1. Ecuaciones de Movimiento

En el programa de órbita completa (OC) se simulan las trayectorias de las partículas según las ecuaciones de Newton con la fuerza de Lorentz completa. Dichas ecuaciones son

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m}(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c}) \quad (3.1)$$

El código está adimensionalizado para todas las variables según:

$$r \rightarrow \tilde{r} = \frac{r}{a}$$

$$\begin{aligned} v &\rightarrow \tilde{v} = \frac{v}{v_0} \\ t &\rightarrow \tilde{t} = \Omega_0 t \\ B &\rightarrow \tilde{B} = \frac{B}{B_0} \\ E &\rightarrow \tilde{E} = \frac{E}{B_0 v_0 / c} \end{aligned}$$

El conjunto a , v_0 , Ω_0 y B_0 son escogidos a partir de los parámetros del *Tokamak ASDEX-U* con el cual se basa este trabajo. De esta forma, $a = 0,5m$ será el radio menor del reactor, $B_0 = 2 - 2,5T$ es el campo magnético toroidal de vacío en la posición del radio mayor $R_0 = 1,71m$, Ω_0 es la frecuencia de ciclotrón calculada con B_0 y v_0 la velocidad inicial de la partícula. Con estas cantidades adimensionales se pueden reescribir las ecuaciones (3.1) como

$$\frac{d\tilde{\mathbf{r}}}{d\tau} = \gamma \tilde{\mathbf{v}}$$

$$\frac{d\tilde{\mathbf{v}}}{d\tau} = \tilde{\mathbf{E}} + \tilde{\mathbf{v}} \times \tilde{\mathbf{B}} \quad (3.2)$$

donde $\gamma = \frac{v_0}{\Omega_0 a}$ es el único parámetro adimensional que aparece en las ecuaciones. Debido a que la configuración magnética en un *Tokamak* tiene, en principio, simetría de revolución, se trabajará en un sistema de coordenadas cilíndricas (R , ϕ , Z) quedando las ecuaciones (3.2) quedarán

$$\frac{dR}{d\tau} = \gamma v_R \quad (3.3)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = \gamma \frac{v_\phi}{R} \quad (3.4)$$

$$\frac{dZ}{d\tau} = \gamma v_Z \quad (3.5)$$

$$\frac{dv_R}{d\tau} = \gamma \frac{v_\phi^2}{R} + (v_\phi B_Z - v_Z B_\phi) + E_R \quad (3.6)$$

$$\frac{dv_\phi}{d\tau} = \gamma \frac{v_R v_\phi}{R} + (v_Z B_R - v_R B_Z) + E_\phi \quad (3.7)$$

$$\frac{dv_Z}{d\tau} = (v_R B_\phi - v_\phi B_R) + E_Z \quad (3.8)$$

donde se eliminaron las tildes para simplificar la notación.

3.1.2. Campo de Equilibrio y Perturbaciones

Para el cálculo de los campos se utiliza la suma de campos de equilibrio axisimétrico 2D más perturbaciones 3D donde

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{B}_1(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t)$$

donde \mathbf{B}_0 es el campo magnético de equilibrio y, \mathbf{B}_1 y \mathbf{E}_1 son los campos perturbados.

Para el campo magnético de equilibrio se utilizó una solución analítica de sección transversal no circular, elongada en forma de "D", experimentalmente obtenida con una serie de espiras. Este tipo de secciones demostraron ser más eficientes para confinar el plasma alcanzando mayores parámetros $\beta = \frac{P}{B^2/8\pi}$ donde relaciona la presión del plasma y la llamada presión magnética. Para el cálculo se utilizó el trabajo de J. P. Mc Carthy [14] donde muestra una serie de soluciones de la ecuación (2.20) tomando $P(\Psi) = S\Psi$ y $g^2(\Psi) = T\Psi^2 + 2U\Psi + G_0^2$. Debido a que esta suposición hace que la ecuación (2.20) resulte lineal, cualquier combinación de lineal de soluciones también será solución. Utilizando una combinación lineal apropiada, es posible realizar un ajuste de una reconstrucción de un equilibrio producto de una descarga experimental. En [14] se muestran los ajustes usados para reconstruir distintas descargas en ASDEX-U.

Como ya dijimos, las inestabilidades NTM producen perturbaciones en los campos tanto eléctrico como magnético. Estas inestabilidades se producen sobre las denominadas superficies racionales donde $q = \frac{m}{n}$, m y n los modos toroidal y poloidal respectivamente, y q el factor de seguridad o el número de vueltas en la dirección toroidal siguiendo las líneas de campo magnético para efectuar una vuelta completa en la dirección poloidal. En una superficie racional se vuelve a la misma posición poloidal luego de un número entero de vueltas en la dirección toroidal. Para introducir esto en la simulación y reproducir el cambio en la estructura del campo magnético, se utiliza un desarrollo de Fourier de forma tal que la perturbación a cualquier cantidad A , se escribe

$$A(s, \theta, \phi) = \sum_{m,n} A_{m,n}(s) \cos(m\theta - n\phi - \omega t)$$

donde (m, n) están definidos por el modo que se quiere estudiar y así observar los efectos

que producen en las trayectorias. En este trabajo se estudia el modo (2,1)

Para la reconstrucción de dicha perturbación se utiliza la técnica propuesta por Igochine [15] donde se reconstruye la corriente perturbada J_{pert} usando datos experimentales con la ecuación (6) en [15]. Usando que $J_{pert} = hJ_1(\rho)$, h un parámetro libre, se obtiene Ψ_{pert} resolviendo la Ley de Ampère y finalmente usando $\mathbf{B}_1 = \nabla\Psi_{pert} \times \nabla\phi$ y diferencias finitas obtenemos el campo perturbado. El parámetro h se ajusta para obtener el tamaño de isla deseada. En la sección 4.1.2 se pueden observar ejemplos de islas para distintos h . Finalmente, la reconstrucción de la perturbación sobre el equilibrio empleado se hizo utilizando una grilla cuadrada en el plano (R,Z), ya que el código utiliza coordenadas cilíndricas.

Debido a la dependencia con t ($\omega \neq 0$), habrá perturbación del campo eléctrico. Esta es calculada a partir de la Ley de Ohm

$$\mathbf{E}_1 = -\frac{\dot{\vec{\xi}} \times \mathbf{B}_0}{c} + \eta \mathbf{J}_{pert}$$

donde $\vec{\xi}$ es el desplazamiento del plasma parametrizado a partir de la ecuación (2) de [15]. Nuevamente usando una grilla (R,Z) se reconstruye la perturbación para las distintas posiciones.

3.2. Código Centro de Giro

3.2.1. Ecuaciones de Movimiento

La diferencia entre ambos códigos son las ecuaciones de movimiento que se utilizan para calcular las trayectorias. Para el código de centro de giro (CG) se sigue el razonamiento según [6]. En este caso se utiliza mecánica Lagrangiana para describir el movimiento de la partícula de mas m y carga q en un campo electromagnético

$$L(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}, t) = \frac{m\dot{\mathbf{r}}^2}{2} + q\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \cdot \dot{\mathbf{r}} - q\Phi(\mathbf{r}, t) \quad (3.9)$$

es una función de la posición \mathbf{r} , la velocidad $\dot{\mathbf{r}}$ y el tiempo t , donde

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

con \mathbf{A} el potencial vector y Φ el potencial escalar. La partícula se moverá de forma tal que minimizará la acción. Se sigue que si los límites de la integral de camino están fijos ($\delta\mathbf{r}(t_0) = \delta\mathbf{r}(t_1) = 0$) el Lagrangiano satisface la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}}\right) = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} \quad (3.10)$$

Sustituyendo (3.9) en (3.10) se obtiene

$$\frac{d}{dt}(m\dot{\mathbf{r}} + q\mathbf{A}) = q\nabla(\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \Phi)$$

de donde se puede obtener la ecuación (3.1).

Como se dijo anteriormente, para un campo que varía lentamente tanto espacial como temporalmente ($\max(\frac{\rho}{L_B}, \frac{1}{\Omega\tau_B}) \ll 1$, con L_B y τ_B la longitud y tiempo característico de variación espacio-temporal del campo magnético, y ρ y Ω el radio de Larmor y la frecuencia de ciclotrón) el movimiento será una rotación al rededor de un centro de giro que sigue una trayectoria paralela al campo y descripto por la ecuación (2.4) donde $\mathbf{s} = \rho(\cos(\vartheta)\hat{x} + \sin(\vartheta)\hat{y})$ con $\rho = v_\perp/\Omega$ el radio de Larmor, \hat{x} y \hat{y} versores perpendiculares al campo magnético, el cual está se lo piensa en la dirección \hat{z} ($\hat{z} = \hat{x} \times \hat{y}$) y ϑ la fase.

Si se toma el promedio sobre ϑ de la ecuación (3.9) entre 0 y 2π obtenemos para el primer y el tercer término

$$\frac{m\overline{|\dot{\mathbf{r}}|^2}}{2} - q\overline{\Phi(\mathbf{r}, t)} \approx \frac{m}{2}[(\hat{b} \cdot \dot{\mathbf{R}})^2 + (\rho\dot{\vartheta})^2] - q\Phi(\mathbf{R}, t)$$

a orden más bajo de ρ/L_B . Para el segundo término hay que tener más cuidado respecto al orden de los términos. Si se expande este término al rededor de \mathbf{R}

$$\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}} \approx (\mathbf{A}(\mathbf{R}) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}\rho\cos(\vartheta) + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}\rho\sin(\vartheta)) \cdot [\dot{\mathbf{R}} + \rho\dot{\vartheta}(-\sin(\vartheta)\hat{x} + \cos(\vartheta)\hat{y})]$$

por lo tanto el promedio es

$$\overline{\mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{r}}} = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{\rho^2\dot{\vartheta}}{2}(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}) = \mathbf{A} \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{B\rho^2\dot{\vartheta}}{2}$$

donde e usó que $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$. Si se juntan los promedios de los tres términos, el Lagrangiano quedará

$$\bar{L}(\mathbf{R}, \rho, \vartheta, \dot{\mathbf{R}}, \dot{\rho}, \dot{\vartheta}, t) = \frac{m(\hat{b}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}})^2}{2} + \frac{m\rho^2\dot{\vartheta}^2}{2} + q\mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} + \frac{q\rho^2\dot{\vartheta}}{2}B(\mathbf{R}) - q\Phi(\mathbf{R}) \quad (3.11)$$

Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.10) para el Lagrangiano dado en (3.11) se obtienen varios resultados ya discutidos. Aplicando dichas ecuaciones para la coordenada ρ se obtiene que $\dot{\vartheta} = -\Omega$, algo esperable, pero el signo negativo nos agrega la información que el giro para partículas positivas será en sentido anti-horario. Si aplicamos para ϑ obtenemos que el momento magnético μ es constante para este orden, también explicado en la sección anterior. Finalmente, de aplicar para \mathbf{R} se puede observar que el segundo término no depende ni de \mathbf{R} ni $\dot{\mathbf{R}}$, con lo el Lagrangiano para el centro de giro, el cual nos dará las ecuaciones de movimiento, será

$$\bar{L}(\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}, t) = \frac{m(\hat{b}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}})^2}{2} + q\mathbf{A}(\mathbf{R}) \cdot \dot{\mathbf{R}} - \mu B(\mathbf{R}) - q\Phi(\mathbf{R}) \quad (3.12)$$

Aplicando (3.10) para \mathbf{R} en la ecuación (3.12) obtenemos

$$m\dot{v}_{\parallel}\hat{b} = q(\mathbf{E} + \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}) - \mu\nabla B + mv_{\parallel}\dot{\mathbf{R}} \times (\nabla \times \hat{b}) - mv_{\parallel}\frac{\partial \hat{b}}{\partial t} \quad (3.13)$$

Si se introduce el potencial vector modificado

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \frac{mv_{\parallel}}{q}\hat{b}$$

y los correspondientes campos modificado

$$\mathbf{B}^* = \nabla \times \mathbf{A}^* = \mathbf{B} + \frac{mv_{\parallel}}{q}\nabla \times \hat{b} \quad \mathbf{E}^* = -\frac{\partial \mathbf{A}^*}{\partial t} - q\nabla\Phi = \mathbf{E} - \frac{mv_{\parallel}}{q}\frac{\partial \hat{b}}{\partial t}$$

donde se trató a v_{\parallel} como constante, la ecuación (3.13) puede ser expresada como

$$m\dot{v}_{\parallel}\hat{b} = q(\mathbf{E}^* + \dot{\mathbf{R}} \times \mathbf{B}^*) - \mu\nabla B \quad (3.14)$$

y tomando el producto vectorial entre \hat{b} y (3.14) obtenemos

$$\dot{\mathbf{R}} = \frac{1}{B_{\parallel}^*}(v_{\parallel}\mathbf{B}^* + \mathbf{E}^* \times \hat{b} + \frac{\mu}{q}\hat{b} \times \nabla B) \quad (3.15)$$

las cuales serán nuestras ecuaciones de movimiento, con $B_{\parallel}^* = \hat{b} \cdot \mathbf{B}^*$.

Nuevamente es necesario escribirlas en coordenadas cilíndricas (R, ϕ, Z) y adimensionalizar con los mismos parámetros que en el caso del código de OC quedándonos las ecuaciones (3.14) y (3.15) como

$$\begin{aligned} \frac{dR}{d\tau} &= \frac{\gamma}{B_{\parallel}^*}[v_{\parallel}B_R + \gamma v_{\parallel}^2(\frac{1}{R}\partial_{\phi}\hat{b}_Z - \partial_Z\hat{b}_{\phi}) + E_{\phi}\hat{b}_Z - E_Z\hat{b}_{\phi} + \\ &\quad + v_{\parallel}(\partial_{\tau}(\hat{b}_Z)\hat{b}_{\phi} - \partial_{\tau}(\hat{b}_{\phi})\hat{b}_Z) + \mu(\hat{b}_{\phi}\partial_Z B - \frac{1}{R}\hat{b}_Z\partial_{\phi} B)] \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{d\tau} &= \frac{\gamma}{B_{\parallel}^* R}[v_{\parallel}B_{\phi} + \gamma v_{\parallel}^2(\partial_Z(\hat{b}_R) - \partial_R\hat{b}_Z) + E_Z\hat{b}_R - E_R\hat{b}_Z + \\ &\quad + v_{\parallel}(\partial_{\tau}(\hat{b}_R)\hat{b}_Z - \partial_{\tau}(\hat{b}_Z)\hat{b}_R) + \mu(\hat{b}_Z\partial_R B - \hat{b}_R\partial_Z B)] \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dZ}{d\tau} &= \frac{\gamma}{B_{\parallel}^*}[v_{\parallel}B_Z + \gamma v_{\parallel}^2(\frac{1}{R}\partial_R(R\hat{b}_{\phi}) - \frac{1}{R}\partial_{\phi}\hat{b}_R) + E_R\hat{b}_{\phi} - E_{\phi}\hat{b}_R + \\ &\quad + v_{\parallel}(\partial_{\tau}(\hat{b}_{\phi})\hat{b}_R - \partial_{\tau}(\hat{b}_R)\hat{b}_{\phi}) + \mu(\frac{1}{R}\hat{b}_R\partial_{\phi} B - \hat{b}_{\phi}\partial_R B)] \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \frac{dv_{\parallel}}{d\tau} &= \frac{1}{B_{\parallel}^*}\{[B_R + \gamma v_{\parallel}(\frac{1}{R}\partial_{\phi}\hat{b}_Z - \partial_Z\hat{b}_{\phi})][E_R - v_{\parallel}\partial_{\tau}\hat{b}_R - \mu\partial_R B] + \\ &\quad + [B_{\phi} + \gamma v_{\parallel}(\partial_Z\hat{b}_R - \partial_R\hat{b}_Z)][E_{\phi} - v_{\parallel}\partial_{\tau}\hat{b}_{\phi} - \frac{\mu}{R}\partial_{\phi} B] + \\ &\quad + [B_Z + \gamma v_{\parallel}(\frac{1}{R}\partial_R(R\hat{b}_{\phi}) - \frac{1}{R}\partial_{\phi}\hat{b}_R)][E_Z - v_{\parallel}\partial_{\tau}\hat{b}_Z - \mu\partial_Z B]\} \end{aligned} \quad (3.19)$$

con

$$\begin{aligned} B_{\parallel}^* = & [B_R + \gamma v_{\parallel} \left(\frac{1}{R} \partial_{\phi} \hat{b}_Z - \partial_Z \hat{b}_{\phi} \right)] \hat{b}_R + \\ & + [B_{\phi} + \gamma v_{\parallel} (\partial_Z \hat{b}_R - \partial_R \hat{b}_Z)] \hat{b}_{\phi} + \\ & + [B_Z + \gamma v_{\parallel} \left(\frac{1}{R} \partial_R (R \hat{b}_{\phi}) - \frac{1}{R} \partial_{\phi} \hat{b}_R \right)] \hat{b}_Z \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde también se eliminaron las tildes para simplificar notación.

3.2.2. Campo de Equilibrio y Perturbaciones

Para calcular los campos se procedió de la misma forma que en código de OC, como la suma de campos de equilibrio 2D más perturbaciones MHD 3D, calculando el equilibrio a partir de la solución analítica propuesta por Mc Carthy, reconstruyendo las perturbaciones utilizando los mismos datos experimentales y empleando una grilla (R,Z) para asignar los valores correspondientes según la posición de la partícula.

La principal diferencia en esta parte del código proviene de la descripción a partir del centro de giro y su componente de velocidad paralela a $\hat{b}(\mathbf{R})$. Al agregar dicha descripción aparecen varios términos de derivadas parciales tanto espaciales como temporales para los campos **E** y **B** y para \hat{b} , observables en las ecuaciones de movimiento anteriormente escritas, por lo que fue necesario crear un módulo que los calcule. Este no solo se calcula los campos de equilibrio como ya se mencionó, si no que además por diferencias finitas calcula las derivadas parciales del campo **B**. También a este módulo se le agregó una modificación del módulo encargado de realizar las interpolaciones, que ahora no solo debía asignar los valores de campo magnético y eléctrico según la posición en la grilla, sino que también debía hacerlo para las derivadas parciales espacio-temporales $\{\frac{\partial \hat{b}_R}{\partial R}; \frac{\partial \hat{b}_R}{\partial Z}; \frac{\partial \hat{b}_R}{\partial \tau}; \frac{\partial \hat{b}_{\phi}}{\partial R}; \dots\}$.

3.3. Códigos en CUDA para Varias Partículas

Los códigos anteriormente mencionados realizar la simulación de una única partícula. Para una descripción completa del plasma, es necesario tener un ensamblaje de condiciones iniciales y observar como es la dinámica para estos casos. Dado que en la aproximación de trazadores las partículas no interactúan entre sí y tampoco modifican el plasma, el problema de varias partículas es automáticamente paralelizable. Para ello se utilizó el código FOCUS, acrónimo de “Full-Orbit CUda Solver” desarrollado este mismo grupo de investigación [12]

En la versión original, cada partícula es identificada con un "hilo" de la Unidad de Procesamiento Gráfico (GPU, por sus siglas en inglés) o "CUDA *thread*", y cada una de estas partículas se las considera independientes del resto. El código resuelve las ecuaciones de movimientos para OC. Debido a que las GPU tienen miles de núcleos y poseen suficiente capacidad de almacenamiento de memoria, es capaz de calcular miles de partículas en una fracción del tiempo que le llevaría a una CPU.

Al tener el código para CG, se modificó el código FOCUS intercambiando los nuevos módulos creados por los relacionados a OC y así poder realizar las simulaciones a partir de los centros de giro, mejorando altamente los tiempos de cómputo debido al bajo costo que tienen estos cálculos.

4

Resultados

En el siguiente capítulo se expondrán los resultados obtenidos para ambos códigos, los estudios de convergencia y estabilidad, así como también los resultados de incluir los módulos del código CG al código FOCUS.

4.1. Superficies de Flujo

Para una correcta simulación de las trayectorias es necesario poder describir los campos. Como ya se dijo en el capítulo anterior, en este trabajo se utiliza la expresión analítica propuesta por Mc Carthy[14] para la reconstrucción del flujo poloidal el cual es usado para obtener las componentes para el campo magnético con (2.16). Este método propuesto da una correcta representación para las descargas experimentales en ASDEX-U.

Las perturbaciones se calcularon siguiendo el método propuesto por Igochine[15] para reconstruir la corriente perturbada y el desplazamiento producidos por un NTM. Como se dijo en el capítulo anterior, resolviendo la ley de Ampère se obtiene el flujo poloidal perturbado dependiente de un parámetro que llamamos h . Finalmente se obtiene el campo magnético usando (2.15) y el campo eléctrico usando la ley de Ohm. Estas perturbaciones son sumadas a los campos de equilibrio para obtener el campo total. Basándonos en los experimentos de Garcia-Muñoz[8] el caso que nos interesa es una isla de 11 cm. Más adelante se verá que se obtiene una isla de estas dimensiones con $h = 0,0003$.

Para la visualización de los resultados con y sin perturbación se tomaron curvas de nivel para $\Psi(R, Z)$ (el flujo poloidal) para el caso de los campos de equilibrio; y un mapa de Poincaré para el caso de la suma del equilibrio y la perturbación.

4.1.1. Campos de Equilibrio

En la figura 4.1 se pueden observar las superficies de flujo poloidal que coinciden con superficies magnéticas cerradas. Dichas superficies magnéticas son concéntricas a un punto llamado eje magnético, que no necesariamente tiene que ser el eje geométrico de la configuración.

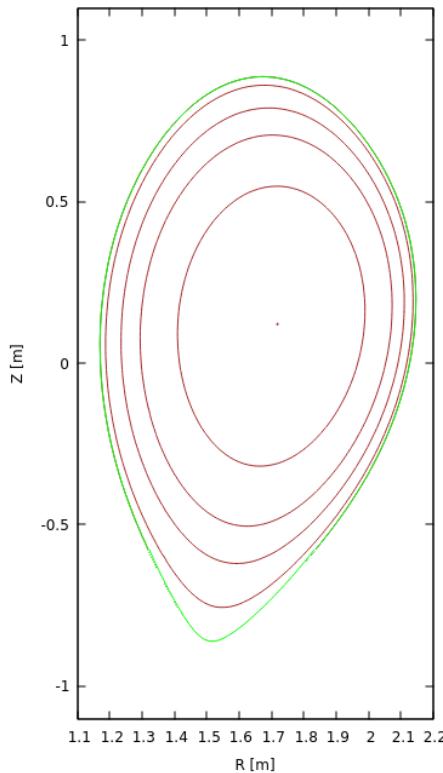


Figura 4.1: Superficies de flujo poloidal para los campos en equilibrio.

En esta misma figura se marcó en verde la última superficie cerrada o separatriz. Esta superficie es importante ya que toda partícula que la sobrepase se la considera como perdida. Fuera de la separatriz todas las superficies magnéticas son abiertas, y las partículas son guiadas hacia los "divertores", donde son neutralizadas y extraídas.

4.1.2. Perturbación e Islas Magnéticas

Para la implementación de las perturbaciones se varió la magnitud de los campos perturbados (parámetro h en el código) de los campos reconstruidos antes de realizar la interpolación en la grilla.

De suponer correcta la implementación, a escalas muy chicas, las perturbaciones serían poco apreciables y lo opuesto para escalas grandes. En la figura 4.2 se pueden observar tres escalas distintas $h = \{3 \cdot 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-4}, 10^{-3}\}$, siendo 4.2a la menor (distinta de 0, la cual corresponde al caso sin perturbación) y 4.2c la mayor.

Se puede observar dos características importantes. La primera es la formación del modo (2,1) buscado para este trabajo. La segunda es la variación del ancho de las islas respecto a la escala usada, siendo mayor el ancho cuanto mayor la escala. Esto último será motivo de estudio para la estabilidad del código ya que como se dijo anteriormente para que las aproximaciones hechas en las ecuaciones de movimiento de centro de giro sean válidas, necesitamos que la longitud típica de variación del campo magnético sea mayor que el radio de Larmor.

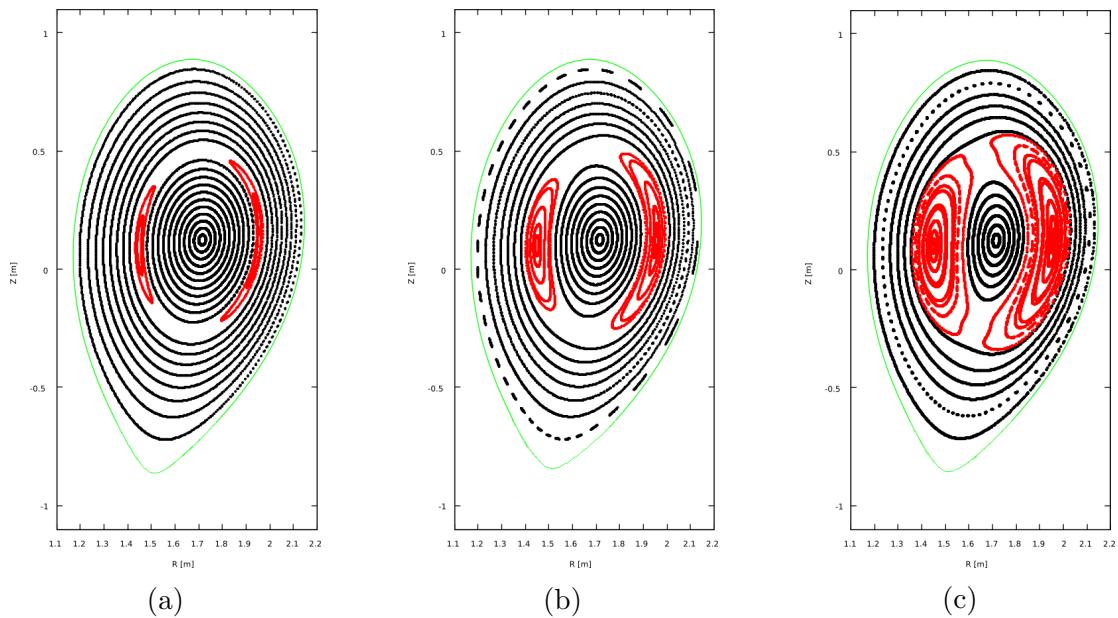


Figura 4.2: Mapa de Poincaré de las superficies de flujo para los campos de equilibrio más perturbación NTM del modo (2,1) para $h=0.00003$ (a), $h=0.0003$ (b) y $h=0.001$ (c).

En el caso de agregar dependencia temporal, la frecuencia ω de la perturbación agrega una fase a los campos produciendo una rotación de las islas como se puede ver en la figura 4.3. En esta figura se graficaron los resultados para múltiplos de $t = m\pi/2\omega$, repitiéndose a partir de $m = 4$ en adelante.

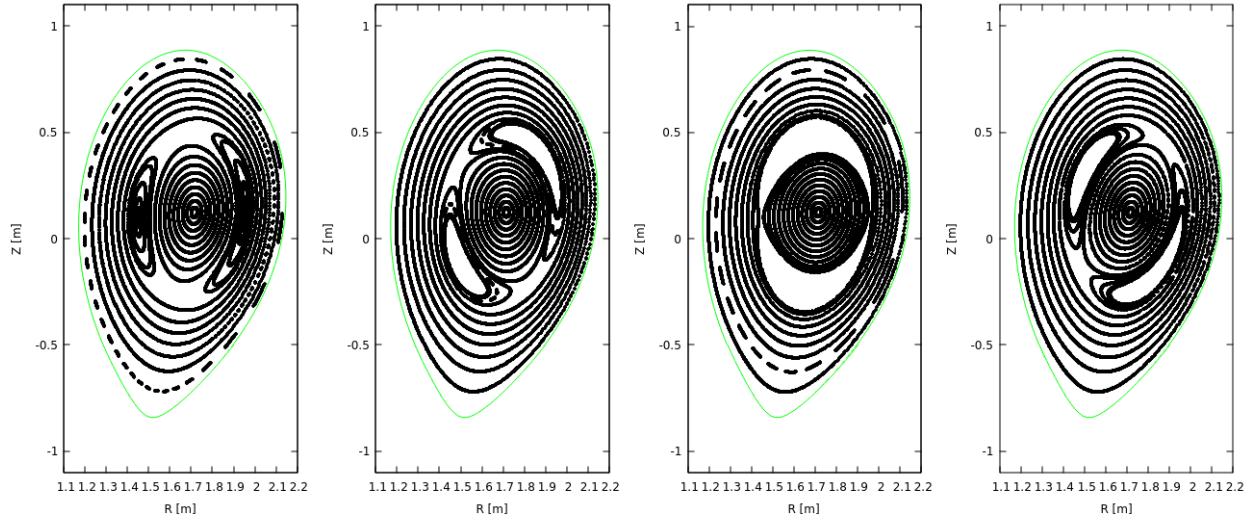


Figura 4.3: Mapa de Poincaré de las superficies de flujo para los campos de equilibrio más perturbación NTM del modo (2,1) para $h = 0,0003$ y $\omega = -0,0008$. De izquierda a derecha los múltiplos $m = 0, 1, 2, 3$ de $\pi/2$. En verde la separatriz.

4.2. Comparación Códigos OC y CG

4.2.1. Observaciones Generales

Una vez obtenidos los campos se comenzó por calcular las trayectorias de algunas partículas con comportamientos conocidos y comparar los resultados entre los códigos de OC y CG. En la figura 4.4 se observan las posiciones iniciales de las partículas elegidas, cada una con velocidades iniciales distintas.

Las partículas P, A, 167 y 64 tienen una energía inicial $E_0 \sim 70$ keV y por ende un radio de Larmor $\rho_L = 2,2\text{cm}$, mientras que las partículas 77 y 40 tienen $E_0 \sim 93$ keV dando $\rho_L = 3,2\text{cm}$.

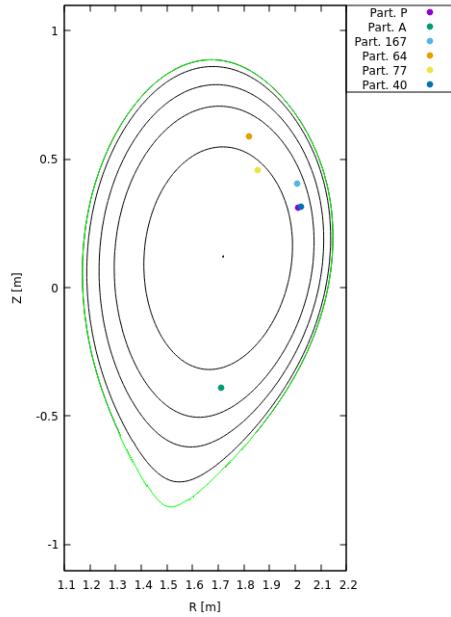


Figura 4.4: Posición inicial de partículas de prueba en la proyección poloidal.

En la figura 4.5 se observan los tipos de trayectorias posibles siendo 4.5a la partícula P una partícula pasante y 4.5b la partícula A una partícula atrapada. Cabe destacar que el sentido de la componente toroidal de la velocidad para la partícula P es igual al sentido de la corriente del plasma, de lo contrario se la llamaría contra-pasante. A pesar de esta salvedad, la proyección poloidal de las pasantes y contra-pasante son similares.

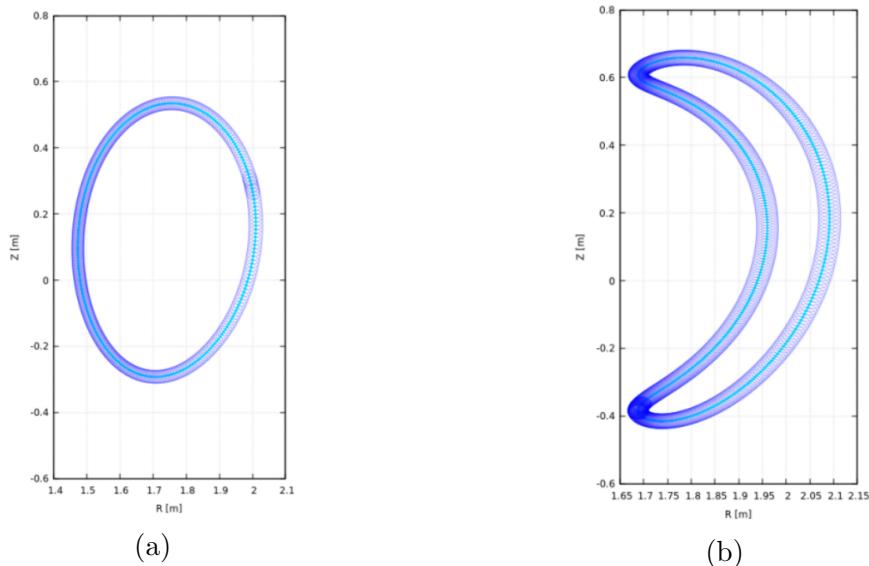


Figura 4.5: Proyecciones poloidales para las partículas P y A en campos de equilibrio sin perturbación. Se comparan las trayectorias de órbitas completas y de centro de giro para pasantes (a) y atrapadas o "banana" (b).

En esta misma figura se puede observar ambas descripciones para el movimiento de las partículas. En color azul se observa la trayectoria completa, utilizando la resolución de las ecuaciones (3.3)-(3.8) para el código de OC y en celeste el cálculo de su centro de giro a partir de estos resultados usando (2.4). En la partícula 4.5a se puede observar como su frecuencia de ciclotrón aumenta debido al aumento de campo magnético y por ende su velocidad es menor en la zona interna del *Tokamak*. También se observa como los puntos de rebote en 4.5b van a ser zonas importantes para la comparación con el código de CG, requiriendo mayor precisión en dicha zona donde la velocidad paralela cambia su signo.

Como ya se dijo, los centros de giro de las partículas pasantes (o contra-pasantes) siguen una dirección aproximada a las de las líneas de campo magnético desplazadas debido a la deriva de gradiente y curvatura. En la figura 4.6 se pueden ver una proyección y una vista en planta para la partícula P para una configuración de campo sin perturbación donde se puede apreciar este comportamiento.

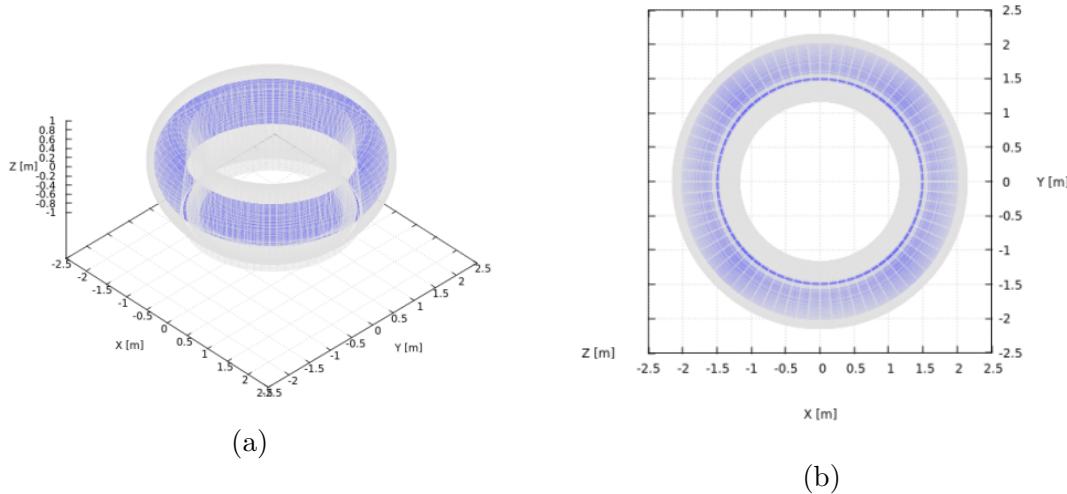


Figura 4.6: Trayectoria partícula P dentro de la última superficie cerrada en gris. Vista en perspectiva (a) y planta (b). Se observa como la partícula no escapa de la última superficie.

Finalmente, en la figura 4.7 se pueden ver nuevamente las trayectorias de los centros de giro calculados a partir de los resultados del código de OC para las partículas P y A para unos pocos ms. En dicha figura se puede observar como para el caso 4.7b hay ciertos puntos donde la partícula rebota y cambia de sentido en la dirección toroidal, mientras que en 4.7a esto no sucede.

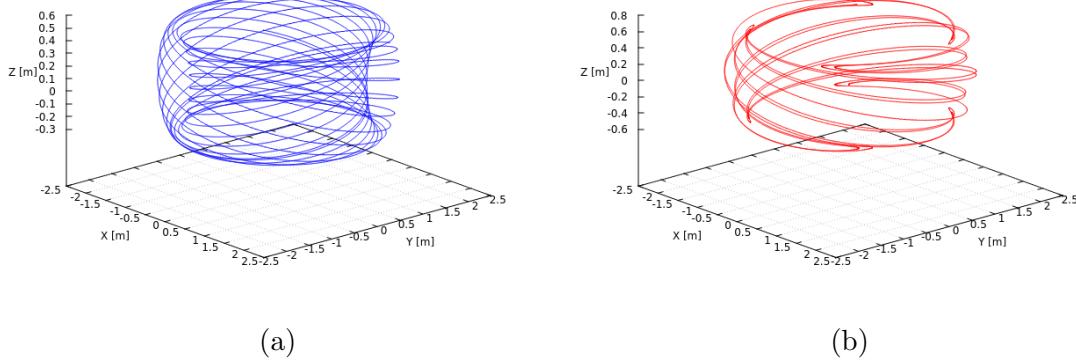


Figura 4.7: Órbitas 3D para partícula pasante P (a) y atrapada A (b). En la partícula atrapada se pueden observar los puntos de rebote.

4.2.2. Comparación Sin Perturbaciones

Para determinar las escalas temporales de integración con las que se puede utilizar ambos códigos se observó la variación de la energía cinética en función del tiempo ya que esta debe conservarse como ya se dijo en el capítulo 2.

En la figura 4.8 se puede observar la evolución de E_c en función de t para el código OC en varias escalas distintas. Se tomó como válidas soluciones que conservaban la energía dentro de un error del 1% aproximadamente. Se observó que para valores de $\delta t > 0,2$ se superaba la cota impuesta, por lo tanto se tomó este valor como el usado en el cómputo. Si bien para valores menores se puede ver que la variación de la energía es menor, el tiempo de computo aumenta bastante, por ejemplo para una simulación de aproximadamente 1ms el $t_{computo} \approx 110s$. por partícula para un $\delta t = 0,01$ en contraste a $t_{computo} \approx 5s$. para $\delta t = 0,2$.

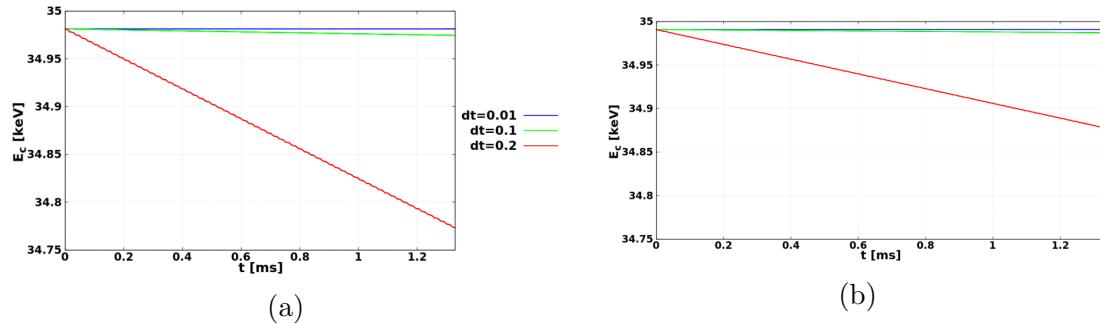


Figura 4.8: Evolución de la energía cinética en función del tiempo para distintas escalas temporales calculando la trayectoria con el código OC para el campo de equilibrio. En (a) los resultados para la partícula P, y en (b) los resultados para la partícula A.

Teniendo en cuenta lo anterior, se procedió a buscar los valores de δt para el código CG el cual resuelve las ecuaciones (3.16)-(3.20) para obtener las trayectorias. En la figura 4.9 se puede observar la evolución de E_c en función de t para dicho código nuevamente para la partícula P y A.

Nuevamente se tomó como válidas soluciones que conservaban la energía dentro de un error del 1% aproximadamente. Se observó que para $\delta t > 400$ se superaría la cota impuesta y por lo tanto se toma este valor de δt como el máximo a utilizar con este código dando un tiempo de cómputo menor, siendo $t_{computo} \approx 0,4s$. Sin embargo, se observó que para valores $\delta t = 10$ el tiempo de cómputo seguía siendo bajo ($t_{computo} \approx 0,8s$) por lo que se usó dicho tiempo para los cálculos.

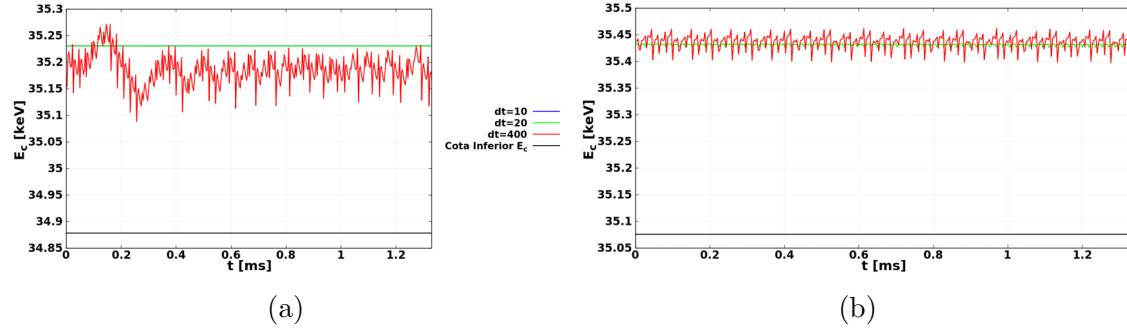


Figura 4.9: Evolución de la energía cinética en función del tiempo para distintas escalas temporales calculando la trayectoria con el código CG para el campo de equilibrio. En (a) para la partícula P y en (b) para la partícula A. En negro la cota menor para el error del 1% de la energía cinética E_c .

Otra característica importante a comparar son las trayectorias calculadas. Si contrastamos las proyecciones poloidales de las trayectorias de centros de giro calculadas por OC y CG podemos observar en el gráfico 4.10 que para simulaciones de aproximadamente 1 ms, las diferencias no superan un radio de Larmor con lo cual se concluye que ambas trayectorias describen la misma evolución.

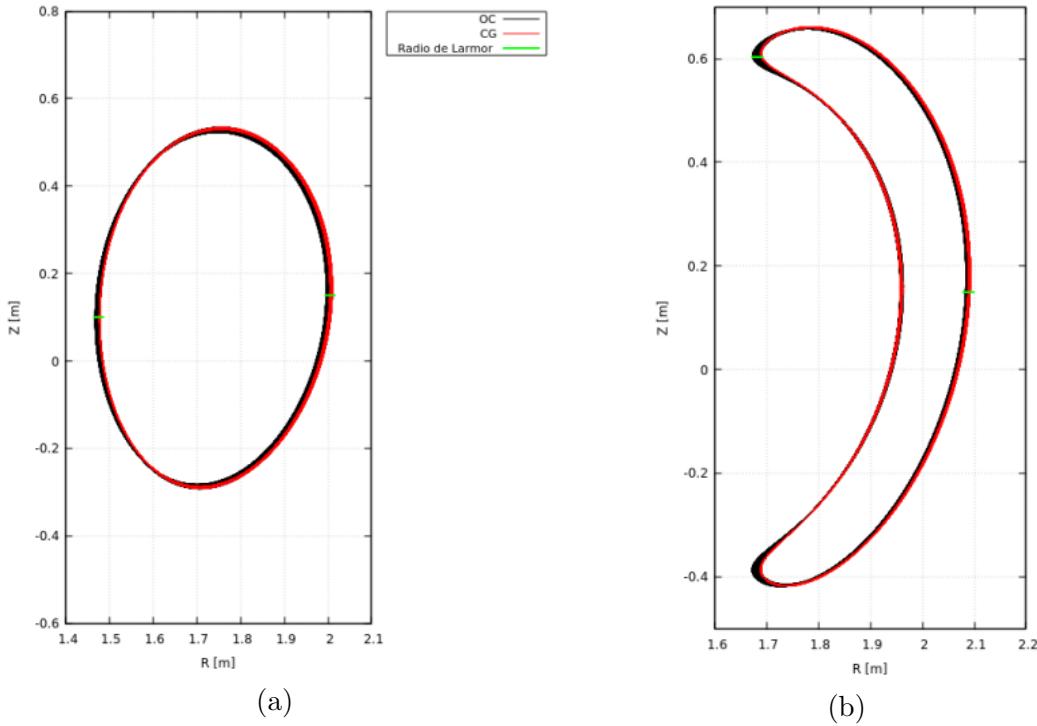


Figura 4.10: Órbitas con campos en equilibrio para las partículas P (a), A (b) calculadas a partir de OC (negro) y CG (rojo).

4.2.3. Con Perturbaciones Independientes del Tiempo

Para las perturbaciones se procedió a observar el comportamiento del código OC para distintos tamaños de islas. Recordando que la aproximación $\max(\frac{\rho}{L_B}, \frac{1}{\Omega_{TB}}) \ll 1$ nos exige que la longitud característica de las variaciones del campo sean mayores al radio de Larmor de la partícula. Se observaron las trayectorias para distintas escalas de perturbación sin variar la energía inicial de la partícula trazadora.

En la figura 4.2 ya se presentaron los mapas de Poincaré de los campos perturbados independientes del tiempo. Para estas tres escalas se observaron que los tamaños de las islas correspondían a islas de tamaño $\Delta W = 3cm$ para 4.2a, $\Delta W = 11cm$ para 4.2b y $\Delta W = 20cm$ para 4.2c.

Si observamos en la figura 4.11 podemos observar los comportamientos predichos según los tipos de perturbación aplicados. Vemos que para una perturbación muy chica como 4.2a las trayectorias en el código de OC no se modifican como se muestra en 4.11a y 4.11b, manteniéndose dentro de un radio de Larmor, y por consiguiente considerándolas iguales.

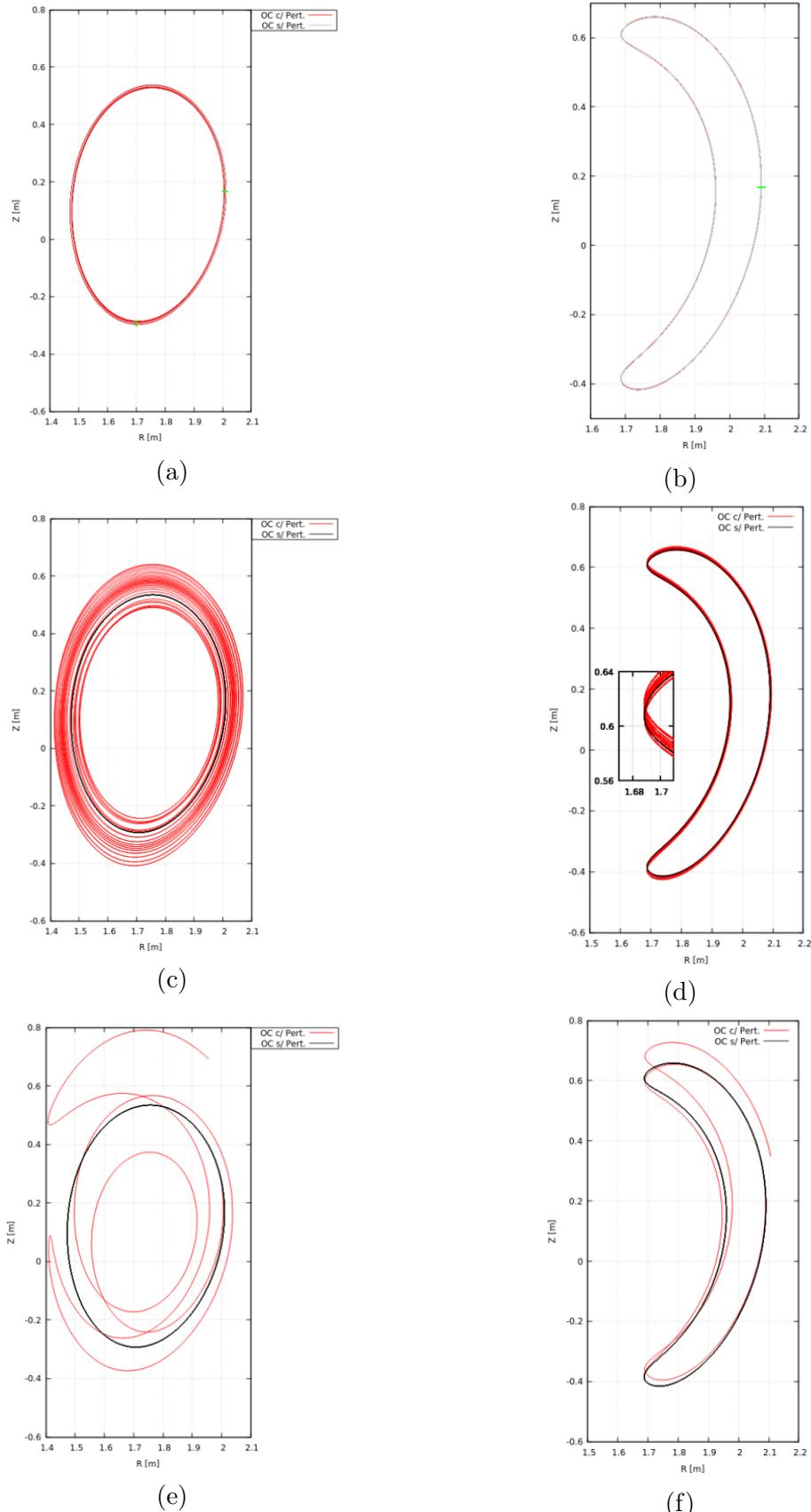


Figura 4.11: Órbitas con campos perturbados (en rojo) para las partículas P (derecha) y A (izquierda). En (a) y (b) para $h=0.00003$, (c) y (d) con $h=0.0003$, y (e) y (f) con $h=0.003$. Órbitas sin perturbación en negro.

Sin embargo, como se ve en 4.11c y 4.11d cuando aplicamos una perturbación un poco mayor como del tipo 4.2b la trayectoria empieza a modificarse debido a la deriva. Y como era de esperarse para el caso de una perturbación como 4.2c las trayectorias 4.11e y 4.11f se ven bastante modificadas.

Si ahora comparamos los resultados obtenidos con el código de CG, podemos ver en la figura 4.12 como para perturbaciones con un tamaño de isla similar al del radio de Larmor como es 4.2b (no cumpliéndose la condición anteriormente mencionada) las trayectorias no coinciden. Esta diferencia se ve más exacerbada para una perturbación como 4.2c donde el tamaño de la isla es un orden mayor al radio de Larmor y por lo tanto, longitudes características del campo chicas respecto a dicho radio.

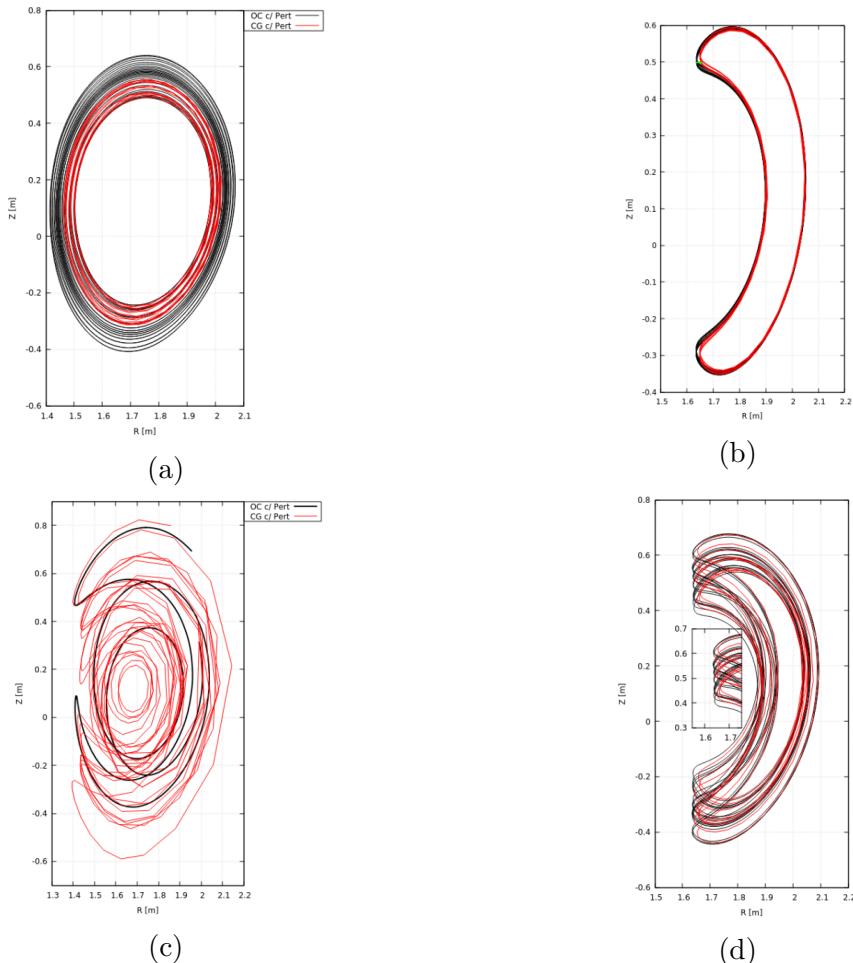


Figura 4.12: Órbitas con campos perturbados (en rojo) para las partículas P (derecha) y 64 (izquierda). En (a) y (b) para $h=0.0003$, y en (c) y (d) con $h=0.003$. En (c) se marcó en verde el tamaño del radio de Larmor de esta partícula. En (d) se muestra un acercamiento de la zona de rebote donde se observa el cambio en las trayectorias. Órbitas sin perturbación en negro.

La elección de la partícula para mostrar los cambios de trayectorias según la perturbación es debido a las zonas que recorren cada una de ellas. Como se puede observar en la figura 4.13 las partículas A y 167 recorren zonas con poca perturbación, por lo tanto sus trayectorias se ven poco modificadas para una escala como 4.2b, no siendo así el caso para la partícula 64 mostrada anteriormente y de la cual se puede obtener más información respecto a la perturbación.

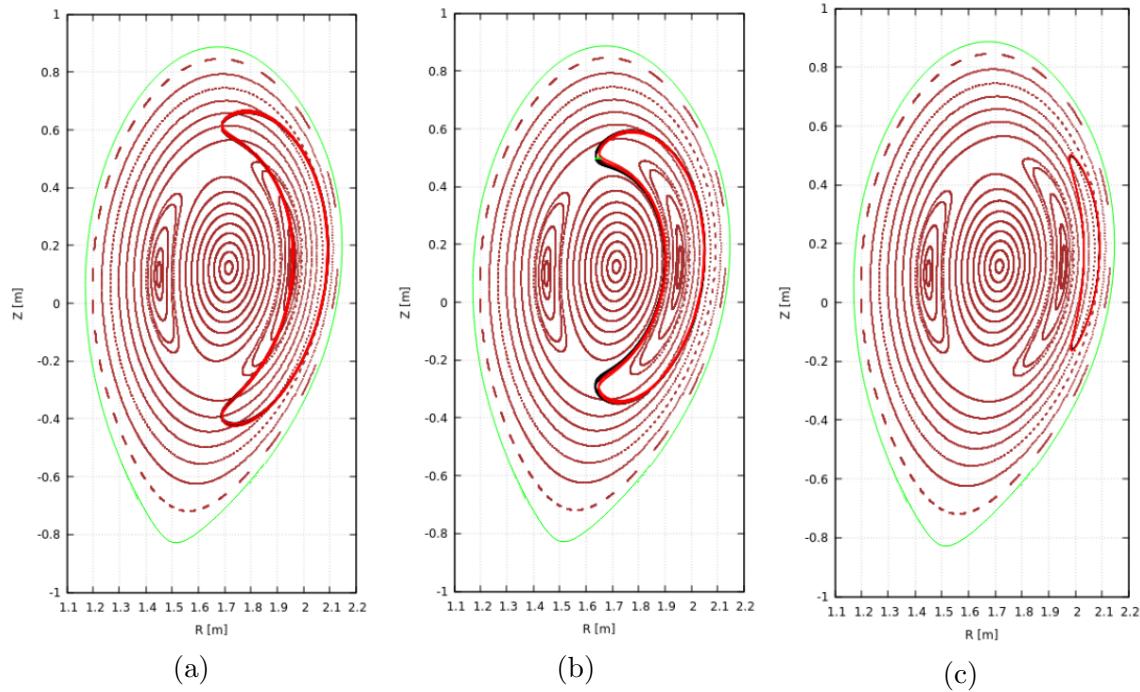


Figura 4.13: Órbitas con campos mapa de Poincaré para $h=0.0003$. En (a) la partícula A, en (b) la partícula 64 y en (c) la partícula 167. En marrón la suma del campo de equilibrio con la perturbación estática y en verde la última superficie cerrada. En todas están tanto la trayectoria del código OC como CG, pero solo en (b) se observa una diferencia de un radio de Larmor entre ellas.

4.2.4. Con Perturbaciones Dependientes del Tiempo

Al agregar al campo la dependencia temporal sin perturbación eléctrica las derivas de las partículas cambian debido a que aparecen términos de derivadas temporales como ya se vio en el capítulo anterior.

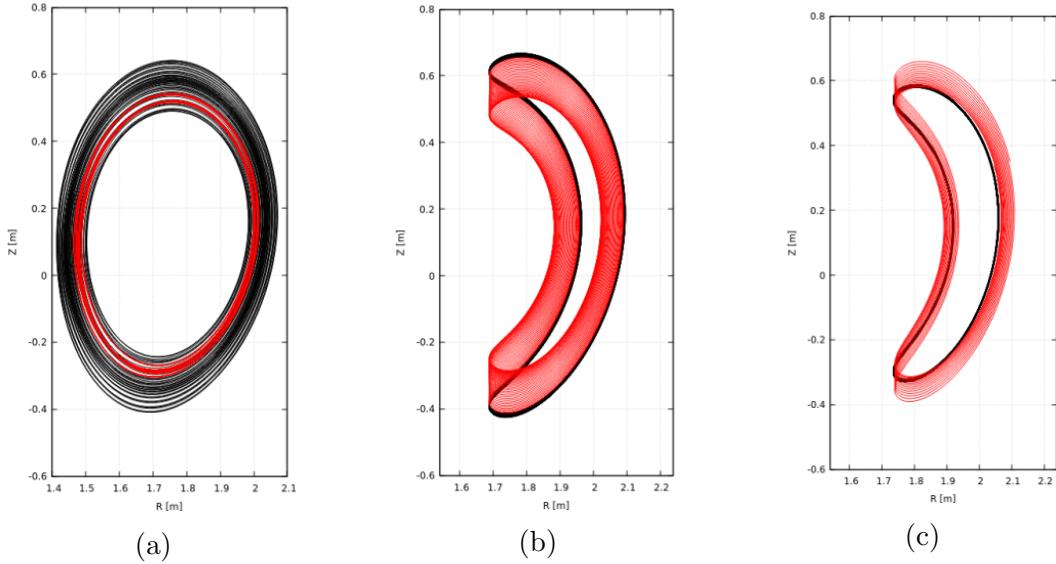


Figura 4.14: Orbitas con perturbaciones para $h=0.0003$ y dependencia temporal calculadas con OC. En (a) la partícula P, en (b) la partícula A y en (c) la partícula 40. En negro las trayectorias con perturbación estática, y en rojo dependientes del tiempo.

Si comparamos las derivas de las partículas como se observa en la figura 4.14 encontramos que para la partícula P en 4.14a su trayectoria no se extiende tanto como pasaba para el caso independiente del tiempo. Sin embargo, el comportamiento de la partícula A es totalmente contrario, el punto de rebote se desplaza aproximadamente unos 15cm en un tiempo de simulación de 1ms. Algo similar le ocurre a la partícula 40, pero a diferencia de la partícula A, esta alcanza la última superficie cerrada, o dicho de otro modo, se escapa.

Para establecer el criterio de escape se calcula el flujo poloidal Ψ para cada posición y a partir del valor para la última curva de nivel cerrada vista en 4.1 (la separatrix, en verde) se estableció que si $\Psi < 0,01$ la partícula ya había sobrepasado dicha superficie y por ende ya se encontraba en la zona de superficies abiertas. Se puede ver en la figura 4.15 este ejemplo para la partícula 40.

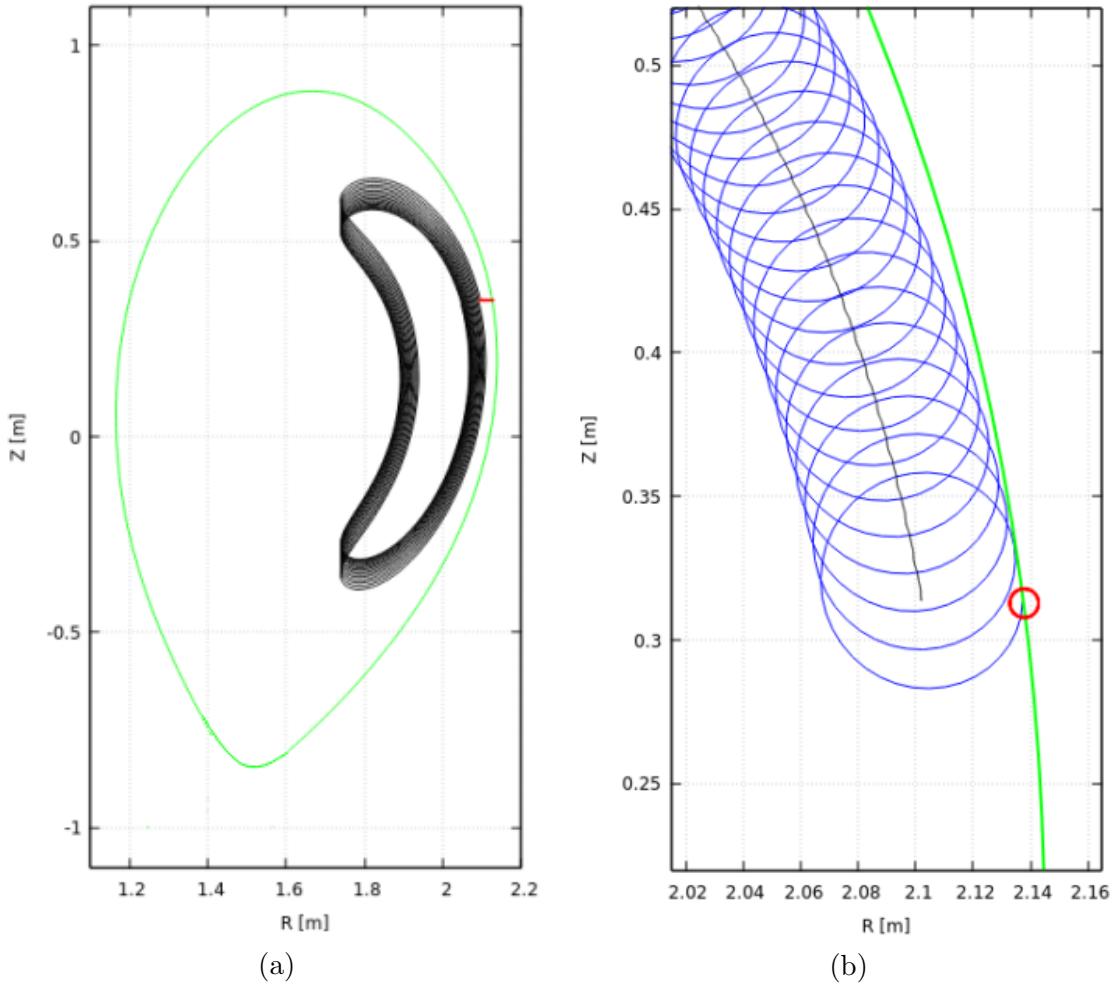


Figura 4.15: Proyección poloidal de la trayectoria de centro de giro de la partícula 40 en negro con la última superficie cerrada en verde. En (a) se marcó en rojo un radio de Larmor. En (b) se superpuso en azul la trayectoria de órbita completa y se marcó con un círculo rojo donde toca la órbita la separatriz.

Si ahora comparamos los resultados obtenidos a partir del código de CG podemos ver en la figura 4.16 que para el caso de la partícula P (4.16a) y la 40 (4.16c) las descripciones son las mismas ya que la diferencia se encuentra dentro de un radio de Larmor. Sin embargo, para la partícula A (4.16b) se puede observar que en la zona de rebote las trayectorias no coinciden.

Las diferencias en las trayectorias para la partícula A nos está hablando de los límites para nuestra aproximación para CG algo que se va a repetir más adelante. De todas formas, debido a que las condiciones de perdida (o de no perdida) se siguen manteniendo para las partículas vistas, dependiendo de qué se quiera estudiar todavía sigue siendo útil esta aproximación.

Si ahora permitimos que los términos de perturbación de campo eléctrico entren en la

simulación obtenemos diferencias significativas entre los ambos cálculos. Al igual que la perturbación de campo magnético depende del factor h que guarda relación con el ancho de las islas magnéticas, la perturbación eléctrica depende de un factor e el cual guarda relación con el desplazamiento aplicado. Se usaron dos escalas distintas, $e=0.005$ que equivale a un desplazamiento de 0,7cm y un $e=0.01$ equivalente a 1,4cm.

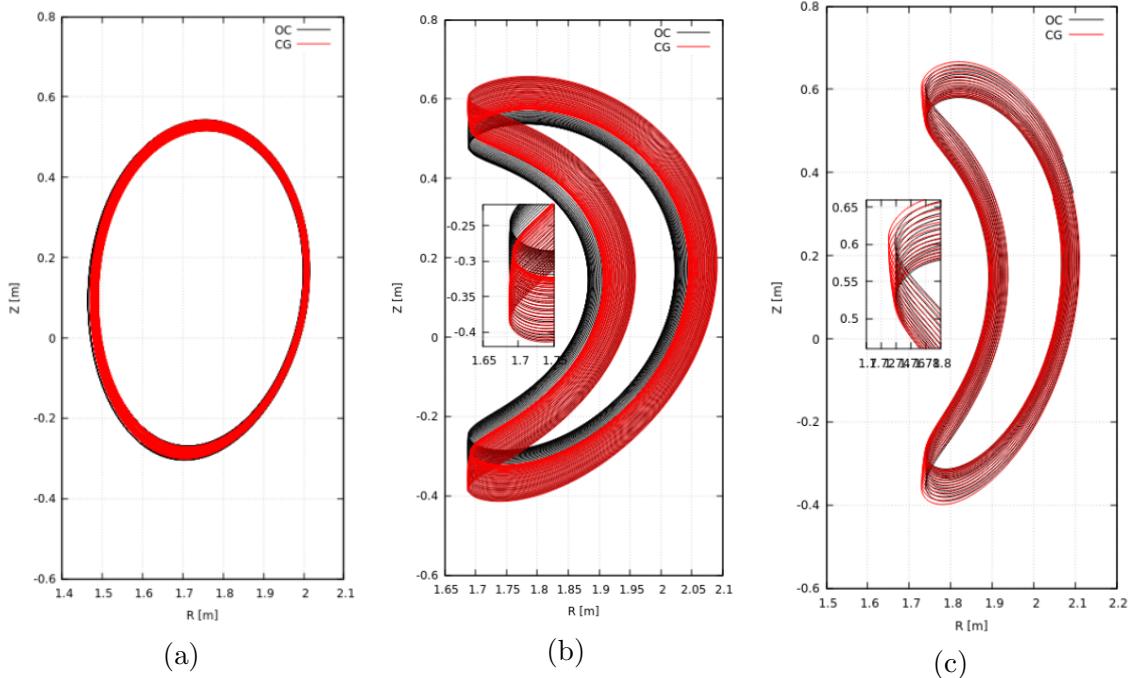


Figura 4.16: Orbitas con perturbaciones para $h=0.0003$ y dependencia temporal para OC y CG. En (a) la partícula P, en (b) la partícula A y en (c) la partícula 40.

En la figura 4.17 se puede ver como las trayectorias de la partícula 40 para un desplazamiento de 0,7cm ($e=0.005$) de la perturbación eléctrica. A esta escala no se encuentran diferencias significativas al comparar ambos código. Esto no se repite para la partícula 77 que se observan diferencias entre ambas trayectorias que provienen principalmente de la dependencia temporal, ya que al cambiar la escala de la perturbación eléctrica no produjo ningún cambio como se verá más adelante.

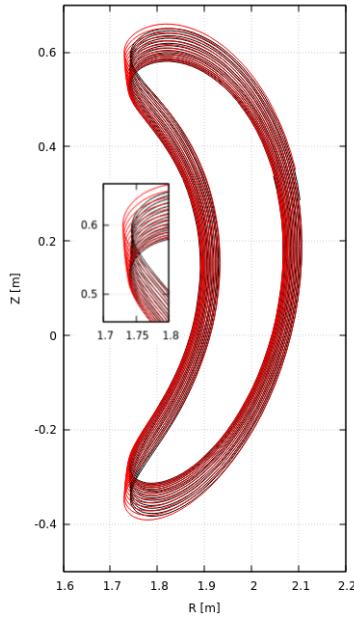


Figura 4.17: Orbitas con perturbaciones para $h=0.0003$ y dependencia temporal y campo eléctrico con $e=0.005$ para OC y CG para la partícula 40 con una energía inicial $E_0 = 93keV$.

Si aumentamos la amplitud de la perturbación a $e=0.01$ observamos en la figura 4.18 que para las partículas P y A (4.18a y 4.18b, respectivamente) ambas trayectorias calculadas se mantienen similares, no separándose en ninguna zona una distancia mayor a un radio de Larmor. Sin embargo, este comportamiento se rompe para las partículas 40 y la ya mencionada 77.

Se puede observar en las figuras 4.18c y 4.18d que ambas trayectorias difieren bastante fenomenológicamente. Para la partícula 40 (la 4.18c) podemos ver que para el cálculo por medio del código OC la deriva de esta tiende a hacer que se produzca una inversión en el sentido del recorrido en la coordenada Z (la partícula estaba aumentando su Z, para luego disminuir y nuevamente aumentar) siendo la zona con líneas negras más pegadas, y por ende más marcadas. Para cuando se calcula esta misma partícula con el código CG este comportamiento no se pudo imitar.

De la misma forma, si observamos la partícula 77, la trayectoria es más angosta en los puntos de rebote algo que no se repite para el código de CG.

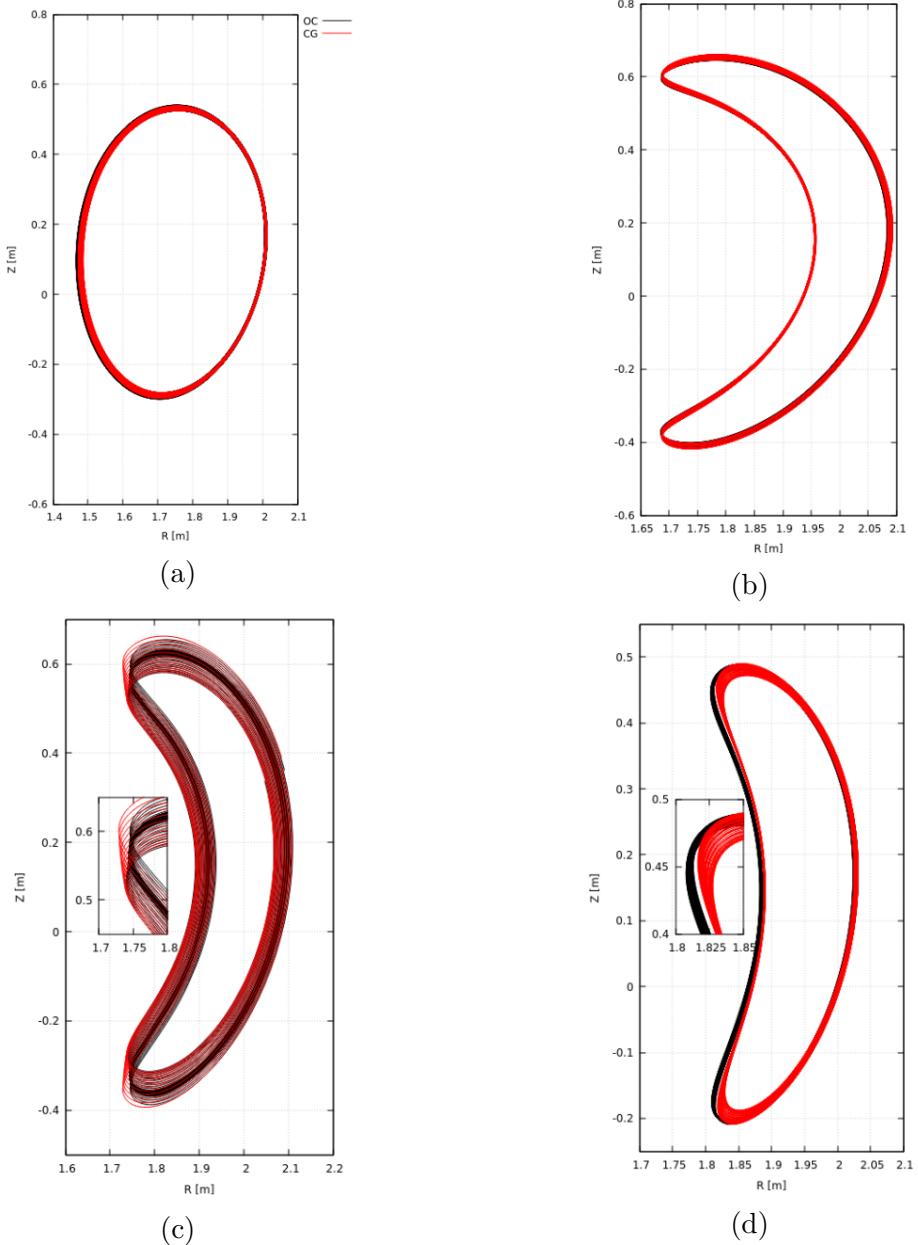


Figura 4.18: Orbitas con perturbaciones para $h=0.0003$ y dependencia temporal y campo eléctrico con $e=0.01$ para OC y CG. En (a) la partícula P, en (b) la partícula A, ambas con $E_0 = 70\text{keV}$; en (c) la partícula 40 y en (d) la partícula 77 ambas con $E_0 = 93\text{keV}$.

Debido que un haz neutro de partículas tiene una distribución de energías entre los 20keV y 93 keV, para estudiar un poco más estas diferencias se disminuyó la energía de las partículas para observar que sucedía. Como era de esperarse, para las partículas que no presentaban diferencias significativas entre sus trayectorias de OC y CG, esto se siguió manteniendo. Cuando se observaron las partículas que sí presentaban diferencias, se observó que para energías menores estas diferencias desaparecían. En la figura 4.19 se muestran las proyeccio-

nes poloidales para las partículas 40 y 77, ambas con energía 20keV donde se puede observar que ambos cálculos de trayectorias vuelan a ser similares.

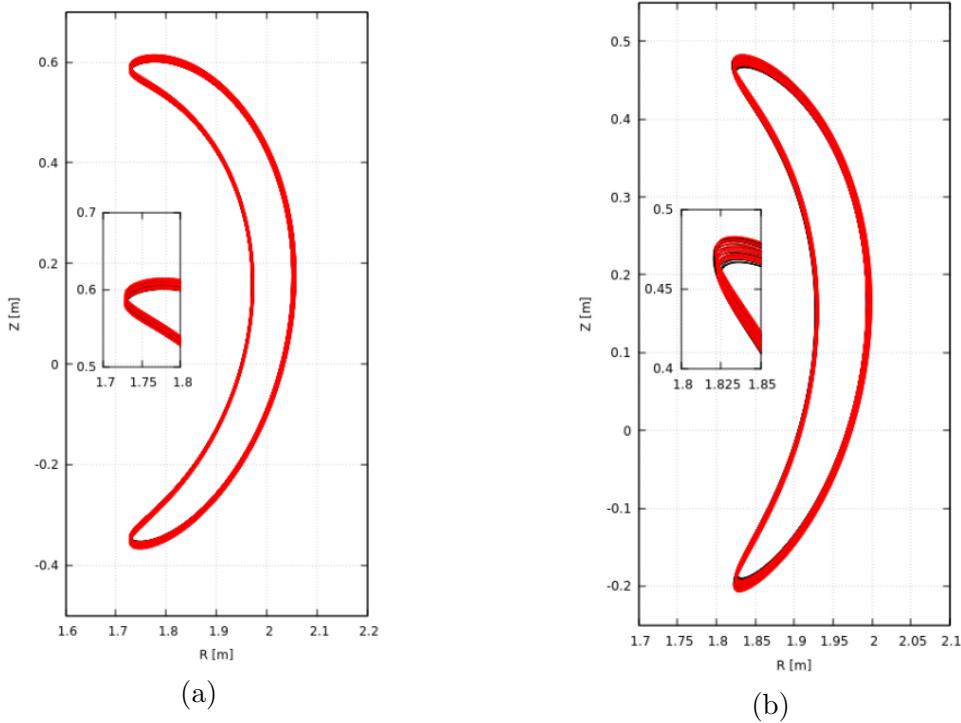


Figura 4.19: Orbitas con perturbaciones para $h=0.0003$ y dependencia temporal y campo eléctrico con $e=0.01$ para OC y CG para la partícula 40 (a) y 77 (b) con una energía inicial $E_0 = 20keV$.

4.2.5. Tiempos de Cómputo

Antes de implementar los módulos de cálculo del código de CG al programa FOCUS, se quiso observar si con este nuevo programa se mejoraban los tiempos de cálculo.

Como se observa en la figura 4.20 para los tiempos que se utilizaron para mostrar los distintos resultados y usando los δt que mejor conservaban la energía en cada código, $\delta t = 0,2$ en el caso de OC y $\delta t = 10$ para CG, para tiempos de simulación cortos la diferencia no es muy grande, pero para una simulación de $1ms$ la diferencia de cálculo es de dos ordenes de magnitud. Este resultado nos dice que, como ya dijimos anteriormente, en la aproximación de trazadores las partículas no interactúan entre sí ni con el plasma, por ende el cálculo de cada partícula se haría al finalizar la anterior y por lo tanto para ensambles grandes de partículas donde se quieren simular 250000 partículas, con los tiempos anteriormente mencionados, se obtendrían los resultados en aproximadamente 823 días para OC y en 8 días para CG.

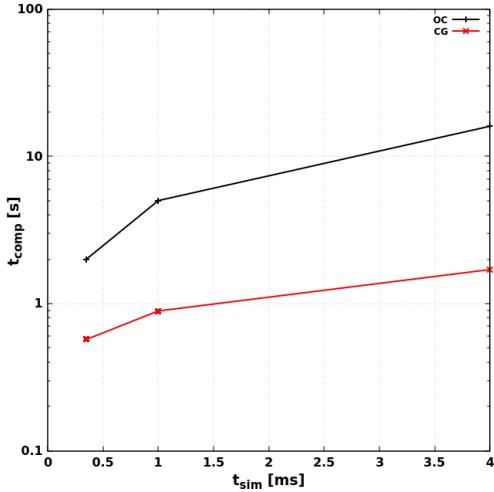


Figura 4.20: Tiempos de cómputo en función de los tiempos de simulación para ambos códigos ambos ejes en escala logarítmica. En el caso de OC se usó $\delta t = 0,2$ y para CG $\delta t = 10$.

Si bien el tiempo para OC puede mejorarse mediante la paralelización del problema como lo hace el programa FOCUS, de implementar los módulos de CG en dicho programa hará que los resultados sigan siendo más favorables.

4.3. Implementación en FOCUS

Se reemplazaron los bloques de cálculo de trayectorias de órbitas completas en el código FOCUS con los bloques correspondientes del código de CG con todas las perturbaciones para luego adaptarlos al lenguaje CUDA y poder utilizar esta nueva versión para el cálculo a partir de centros de giro. En particular se utilizaron los bloques que resuelven el lado derecho de las ecuaciones de movimiento en cilíndricas (o RHS_cil de las ecuaciones (3.16)-(3.20) para CG) y el bloque encargado del cálculo de las perturbaciones de los campos.

Utilizando una placa gráfica GeForce GTX 1080 Ti se procedió a comparar los resultados con CG (de ahora en más OC y CG van a referirse al FOCUS sin y con los bloques de CG, respectivamente) para el estudio de pérdida de iones en función de la frecuencia de la perturbación magnética dependiente del tiempo para un ensamble de 250000 partículas de energía $E_0 = 93\text{keV}$ en una simulación de 4.17 ms.

Como se puede ver en la figura 4.21 se obtuvieron resultados similares entre los de OC y CG con un tiempo de cómputo mucho menor. En el caso de OC el tiempo de cómputo para este ejemplo fue de $\approx 10h$ mientras que para CG fueron de $\approx 25\text{min}$.

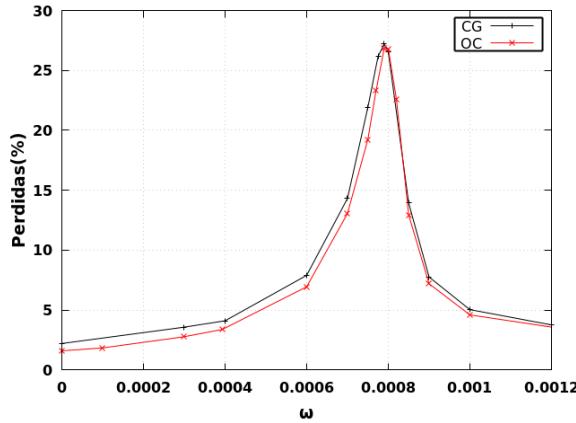


Figura 4.21: Cantidad de partículas perdidas de energía $E_0 = 93\text{keV}$ en función de la frecuencia de perturbación magnética.

Debido a que la trayectoria vista desde el centro de giro dista un radio de Larmor de 3.2 cm ($\rho_L = 0,064$ adimensionalizado) de la trayectoria calculada de forma completa, para considerar las perdidas fue necesario cambiar el criterio de pérdida. Como se ve en la figura 4.22 si bien antes de implementar los bloques de CG se tomaba como perdida aquella partícula que se encontraban en superficies de flujo $\Psi < 0,01$ (la última superficie) luego de implementar los bloques esa cota se extendió a $\Psi < 0,2$ obteniéndose entonces resultados congruentes. Las diferencias entre los resultados provienen de la distancia media entre ambas superficies elegidas en la coordenada z del eje magnético es del orden del radio de Larmor, produciendo que algunas partículas no se las considere perdidas.

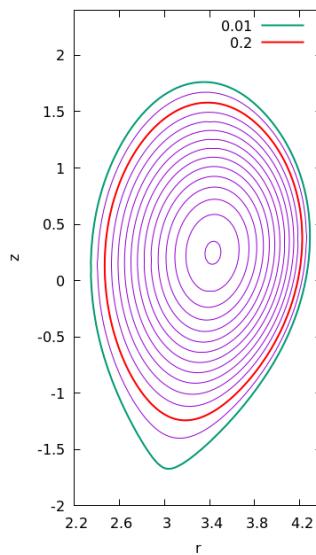


Figura 4.22: Superficies de flujo poloidal. En verde la última superficie cerrada y la usada para el caso OC, en rojo la superficie considerada para el caso de CG.

5

Conclusión

En esta tesis se calcularon bajo la aproximación de trazadores las trayectorias de partículas cargadas dentro de un plasma de un *Tokamak* mediante el uso de un programa modular que resuelve las ecuaciones de centro de giro. El objetivo final era utilizar sus módulos para adaptar el programa FOCUS, programa que resuelve las trayectorias completas y utiliza el poder de las placas gráficas para el cálculo de múltiples partículas a la vez, y de esta forma disminuir los tiempos de cálculo permitiendo la simulación de ensambles de partículas mayores o mayor cantidad de simulaciones distintas para tiempos de cómputo similares del programa original.

Primero fue necesario obtener las ecuaciones que rigen la solución de centro de giro de dichas trayectorias. Para ello se siguió el razonamiento de [6] donde se utiliza una descripción Lagrangiana para describir el movimiento de dicha partícula y la introducción de un potencial vector modificado. Bajo la aproximación de campos variables lentos tanto espacial como temporalmente respecto de parámetros característicos de la trayectoria (radio de Larmor y período de ciclotrón) y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange se obtuvieron las ecuaciones a integrar, las cuales fueron adimensionalizadas y escritas en coordenadas cilíndricas debido a la simetría axisimétrica que presenta el problema.

También fue necesario conocer los campos de equilibrio y sus perturbaciones para observar en particular como influyen las llamadas perturbaciones NTM a los cálculos debido a que estas están presentes en descargas en reactores como ASDEX-U, el cual nos basamos en este trabajo. Para ello primero se obtuvieron los campos de equilibrio calculados según el trabajo [14] donde se propone una solución a la ecuación de Grad-Shafranov la cual hace que resulte lineal. Utilizando la linealidad de la ecuación se realiza un ajuste para una reconstrucción del campo de equilibrio a partir de datos de descargas experimentales de dicho reactor. Al campo

de equilibrio se le suma la perturbación reconstruida usando la técnica propuesta por [15] que utiliza los datos experimentales de la corriente perturbada. Resolviendo la ecuación de Ampère, la relación entre el campo magnético y el flujo magnético perturbado y diferencias finitas, se puede obtener las perturbaciones. Las perturbaciones dependen de un parámetro de escala h el cual fue ajustado utilizando el ancho de las islas magnéticas, zonas donde las líneas de campo se rompen y re conectan entre sí debido a las inestabilidades, para poder estudiar el caso de islas de tamaño $\approx 11\text{cm}$ correspondiente a $h = 0,0003$.

Finalmente se escribieron los módulos encargados del cálculo de la integración del problema con las ecuaciones obtenidas para las trayectorias y para los campos de equilibrio y perturbación donde se utilizó el método iterativo de [16] debido a la baja disipación que lo caracteriza, necesario para mantener la energía del sistema dentro de una variación del 1 %, condición necesaria derivada de las ecuaciones vistas. Comparando los códigos de órbita completa y centro de giro para un grupo de partículas particulares se encontró que en los casos para campos magnéticos sin perturbación o con perturbaciones chicas independientes o dependientes del tiempo ambos códigos describían las mismas trayectorias, a menos de un radio de Larmor, para incrementos temporales bien distintos, pudiendo llegarse a utilizar hasta incrementos de $\delta t = 200$ para el caso de centro de giro, cuando lo máximo llegado al caso de órbita completa era $\delta t = 0,2$.

Para un mismo tiempo de simulación, estas diferencias en los incrementos temporales permitió al código de centro de giro realizar cálculos de trayectorias en fracciones de segundos, uno o dos órdenes de magnitud menores a los cálculos realizados por el código de órbita completa. Esto se vio reflejado en al implementar los sus módulos al código FOCUS, pudiendo resolver y obtener resultados similares para un ensamble de 250000 partículas en $\approx 30\text{min}$ en comparación a las $\approx 10\text{h}$ para el mismo código sin dichos módulos.

Para el caso donde se incluía una perturbación del campo eléctrico se encontró que las trayectorias ya no eran bien descriptas encontrando diferencias entre ambos códigos, con lo cual esto nos podría sugerir que se estaba llegando al límite de la aproximación de centro de giro. Esto en particular quedará como trabajo a futuro para su mejor análisis.

Bibliografía

- [1] www.iter.org
- [2] www.ipp.mpg.de
- [3] I. M. Montellano Duran, "*Interacción de Partículas Supratérmicas con Perturbaciones Electromagnéticas en Plasmas de Fusión*". Tesis de Maestría, Instituto Balseiro, Argentina (2015)
- [4] P. E. Montes, "*Cálculo de Equilibrios Toroidales en Plasmas de Fusión Nuclear*". Tesis de Maestría, Instituto Balseiro, Argentina (2017)
- [5] J. Wesson, "*Tokamaks*". Clarendon Press, Oxford (2004)
- [6] P. Helander, D. J. Sigmar, "*Collisional Transport in Magnetized Plasmas*" Cambridge Monograph on Plasma Physics, Cambridge University Press (2002)
- [7] R. Farengo, H. E. Ferrari, M.-C. Firpo, P. L. Garcia-Martinez, A. F. Lifschitz, Plasma Phys. Control. Fusion 54 025007 (2012).
- [8] M. García-Muñoz, "*NTM Induced Fast Ion Losses in ASDEX Upgrade*" Nucl. Fusion 47 (2007) L10-L15.
- [9] R. Farengo, H. E. Ferrari, P. L. Garcia-Martinez, M.-C. Firpo, W. Ettoumi and A. F. Lifschitz, Phys. Plasmas 21, 082512 (2014).
- [10] R. B. White, "*The Theory of Toroidally Confined Plasmas*" Imperial College Press, 3rd Ed. 2014.
- [11] C. F. Clauser, R. Farengo and H. E. Ferrari, Comp. Phys. Comm. 23, January 2019, Pages 126-136.
- [12] C. F. Clauser, R. Farengo, H. E. Ferrari, "*FOCUS: A Full-Orbit CUDA Solver for Particle Simulations in Magnetized Plasmas*" Computer Physics Communications, 2018.
- [13] J. Freidberg, "*Ideal MHD*" Cambridge University Press (2014)

Bibliografía

- [14] P. J. Mc Carthy, "Analytical Solutions to the Grad-Shafranov Equation for Tokamak Equilibrium with Dissimilar Source Functions" Phys. Plasmas 6, 3554 (1999)
- [15] V. Igochine, S. Günter, M. Maraschek, and the ASDEX Upgrade Team, "Investigation of Complex MHD Activity by a Combined Use of Various Diagnostic" Nuclear Fusion 43, 1801 (2003)
- [16] J. Berlnad, "Low-Dissipation and Low-Dispersion Fourth-Order Runge-Kutta Algorithm" Computers and Fluids 35, 1459 (2006)
- [17] E. Strumberger, S. Günter, E. Schwatz, C. Tichmann and the ASDEX Upgrade Team, "Fast Particle Losses to NTMs and Magnetic Field Ripple" New Journal of Physics 10, 023017 (2008)

