Ecuaciones de centro de giro para programar

Las ecuaciones más exactas parecen ser las de Helander.

$$(6.24) \Rightarrow \dot{\vec{R}} = \frac{1}{B_{\parallel}^{*}}\left[V_{\parallel}\vec{B}^{*} + \vec{E}^{*}\times\hat{b} + \frac{\mu\,\hat{b}\times\nabla B}{Ze}\right] \qquad (1)$$

$$\vec{B}^{*} = \vec{B} + \frac{mV_{\parallel}}{Ze}\nabla\times\vec{b} \qquad \vec{E}^{*} = \vec{E} - \frac{mV_{\parallel}}{Ze}\frac{\partial\hat{b}}{\partial t}, \quad B_{\parallel}^{*} = \hat{b}\cdot\vec{B}^{*}$$

En (1) aparecen los campos, que se suponen conocidos, $V_{\parallel}$ y μ. El μ se supone constante, por lo que necesitamos una ecuación para $V_{\parallel}$ (Ec. (54) de Hu)

$$\dot{V}_{\parallel} = \frac{1}{m}\frac{\vec{B}^{*}}{B_{\parallel}^{*}}\cdot\left(Ze\,\vec{E} - \mu\,\nabla B\right) \qquad (2)$$

Esta es válida en ambos sistemas de unidades.

Estas ecuaciones están en unidades SI, para pasarlo a Gaussian. hay que agregar un factor "c" en los 2 últimos términos de (1). También hay que agregar una "c" en el segundo término de $\vec{B}^{*}$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{B_{\parallel}^{*}}\left[V_{\parallel}\vec{B}^{*} + c\,\vec{E}^{*}\times\hat{b} + \frac{\mu c\,\hat{b}\times\nabla B}{Ze}\right] \qquad (1')$$

Interesa ver qué relación hay entre esta ecuación y la de Morozov - Solov'ev. Reemplazamos $\vec{B}^{*}$ y $\vec{E}_{\parallel}$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{\hat{b}\cdot\left[\vec{B} + \frac{mV_{\parallel}}{Ze}c\,\nabla\times\hat{b}\right)}\left\{V_{\parallel}\left[\vec{B} + \frac{mV_{\parallel}}{Ze}c\,\nabla\times\hat{b}\right] + c\left[\vec{E} - \frac{mV_{\parallel}}{Ze}\frac{\partial\hat{b}}{\partial t}\right]\times\hat{b} + \frac{mV_{\perp}^{2}}{2B}\frac{c}{Ze}\hat{b}\times\nabla B\right\}$$

Sea $\frac{Ze B}{mc} = \Omega_c$

$$\dot{\vec{R}} = \frac{1}{\hat{b}\cdot\left[\vec{B} + \frac{v_\parallel B}{\Omega_c}\nabla\times\hat{b}\right]}\left\{ v_\parallel \vec{B} + \frac{v_\parallel^2 B}{\Omega_c}\nabla\times\hat{b} + c(\vec{E}\times\hat{b}) - \frac{v_\parallel B}{\Omega_c}\frac{\partial\hat{b}}{\partial t}\times\hat{b}\right.$$

$$\left. + \frac{v_\perp^2}{2\Omega_c}\hat{b}\times\nabla B \right\}$$

Eliminamos el término en $\frac{\partial\hat{b}}{\partial t}$. En principio habría que eliminar el segundo término del denominador, pero, en realidad, si desarrollamos el denominador, el término en $v_\parallel$ nos da otro término en $v_\parallel^2$ que puede ser del mismo orden que el que tiene $\nabla\times\hat{b}$.

$$\frac{1}{\hat{b}\cdot\left[\vec{B} + \frac{v_\parallel B}{\Omega_c}\nabla\times\hat{b}\right]} = \frac{1}{B + \frac{v_\parallel}{\Omega_c}B\,\hat{b}\cdot(\nabla\times\hat{b})} = \frac{1}{B\left[1 + \frac{v_\parallel}{\Omega_c}\hat{b}\cdot\nabla\times\hat{b}\right]} \simeq$$

Notar que el 2do término es de orden ρ respecto del primero

$$\simeq \frac{1}{B}\left[1 - \frac{v_\parallel}{\Omega_c}\hat{b}\cdot\nabla\times\hat{b}\right]$$

$$\dot{\vec{R}} \simeq \frac{1}{B}\left\{ v_\parallel\vec{B} - \frac{v_\parallel^2}{\Omega_c}(\hat{b}\cdot\nabla\times\hat{b})\vec{B} + \frac{v_\parallel^2 B}{\Omega_c}\nabla\times\hat{b} + c(\vec{E}\times\hat{b}) + \frac{v_\perp^2}{2\Omega_c}\hat{b}\times\nabla B\right\}$$

$$\dot{\vec{R}} \simeq v_\parallel\hat{b} - \frac{v_\parallel^2}{\Omega_c}(\hat{b}\cdot\nabla\times\hat{b})\hat{b} + \frac{v_\parallel^2}{\Omega_c}\nabla\times\hat{b} + c\frac{(\vec{E}\times\vec{B})}{B^2} + \frac{v_\perp^2}{2\Omega_c B^2}\vec{B}\times\nabla B$$

La diferencia con las ecs. de M-S parece estar en el término en $v_\parallel^2$

$$\frac{v_\parallel^2}{\Omega_c}\left[-(\hat{b}\cdot\nabla\times\hat{b})\hat{b} + \nabla\times\hat{b}\right] \quad \text{vs} \quad \frac{v_\parallel^2}{\Omega_c B^3}\vec{B}\times(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$\nabla\times\hat{b} = \nabla\times\left(\frac{\vec{B}}{B}\right) = \frac{1}{B}\nabla\times\vec{B} + \nabla\left(\frac{1}{B}\right)\times\vec{B}$$

$$\nabla(B^2) = \nabla(\vec{B}\cdot\vec{B}) = 2\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B}) + 2(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B}$$

$$(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{1}{2}\nabla(B^2) - \vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})$$

$$\vec{B}\times(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{1}{2}\vec{B}\times\nabla(B^2) - \vec{B}\times\left[\vec{B}\times(\nabla\times\vec{B})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\vec{B}\times\nabla(B^2) - \left(\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{B}\right)\vec{B} + B^2\,\nabla\times\vec{B}$$

$$\frac{1}{B^3}\vec{B}\times(\vec{B}\cdot\nabla)\vec{B} = \frac{1}{2B^3}\vec{B}\times\nabla(B^2) - \frac{(\vec{B}\cdot\nabla\times\vec{B})\vec{B}}{B^3} + \frac{1}{B}\nabla\times\vec{B}$$

$$= \frac{1}{2B^2}\hat{b}\times\nabla(B^2) - \underline{\frac{(\hat{b}\cdot\nabla\times\vec{B})\hat{b}}{B}} + \underline{\frac{1}{B}\nabla\times\vec{B}}$$

$$-(\hat{b}\cdot\nabla\times\hat{b})\hat{b} + \nabla\times\hat{b} = -\frac{1}{B}\underline{\left[\hat{b}\cdot(\nabla\times\vec{B})\right]\hat{b}} + \left(\hat{b}\cdot\left[\nabla\left(\frac{1}{B}\right)\times\vec{B}\right]\right)\hat{b} +$$

$$+ \underline{\frac{1}{B}\nabla\times\vec{B}} + \nabla\left(\frac{1}{B}\right)\times\vec{B}$$

Hay 2 términos que coinciden, habría que ver la diferencia entre los restantes

En resumen, tenemos que resolver

$$\begin{cases} \dot{\vec{R}} = \dfrac{1}{B^*_{\parallel}}\left[V_{\parallel}\vec{B}^* + c\,\vec{E}^*\times\hat{b} + \dfrac{\mu c\,\hat{b}\times\nabla B}{Ze}\right] & (1') \\ \dot{V}_{\parallel} = \dfrac{1}{m}\dfrac{\vec{B}^*}{B^*_{\parallel}}\cdot\left(Ze\vec{E} - \mu\nabla B\right) & (2) \end{cases}$$

Suponiendo que los campos $\vec{E}$ y $\vec{B}$ son conocidos y $\mu = cte$

<u>Normalización y adimensionalización</u>

Sea $\Omega_0 = \dfrac{ZeB_0}{mc}$, a: longitud característica (radio menor del toroide),

V_0: velocidad característica (inicial de la partícula)

$$\frac{mV_0^2}{2} = E_0 \text{ (energía cinética inicial de la partícula)}$$

B_0: campo magnético típico

$$\frac{\dot{\vec{R}}}{\Omega_0 a} = \frac{B_0}{B^*_{\parallel}}\left[\frac{V_0 V_{\parallel}}{V_0}\frac{\vec{B}^*}{B_0} + \frac{c}{V_0 B_0}(\vec{E}^*\times\hat{b})V_0 + \frac{\mu c}{ZeB_0}\,\hat{b}\times\nabla B\right]\frac{1}{\Omega_0 a}$$

$$\frac{1}{\Omega_0 a}\dot{\vec{R}} = \frac{1}{\Omega a}\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{d\hat{\vec{R}}}{d\tau} \qquad \tau = \Omega_0 t \quad \hat{\vec{R}} = \frac{\vec{R}}{a};$$

$$\frac{d\hat{\vec{R}}}{d\tau} = \frac{1}{\hat{B}^*_{\parallel}}\left[\hat{V}_{\parallel}\hat{\vec{B}}^* + \hat{\vec{E}}^*\times\hat{b} + \frac{\mu c}{ZeV_0 a}\,\hat{b}\times\hat{\nabla}\hat{B}\right]\frac{V_0}{\Omega_0 a}$$

$$\hat{\vec{B}}^* = \frac{\vec{B}^*}{B_0} \qquad \hat{\vec{E}}^* = \frac{c}{V_0}\frac{\vec{E}^*}{B_0} \qquad \hat{\nabla} = a\nabla$$

$$\frac{\mu c}{ZeV_0 a} = \hat{\mu} = \frac{mV_{\perp}^2 c}{2B\,ZeV_0 a} = \frac{mV_0^2\hat{V}_{\perp}^2 c}{2\hat{B}B_0 ZeV_0 a} = \frac{V_0\hat{V}_{\perp}^2}{2\Omega_0 a\hat{B}}$$

$$\hat{\mu} = \frac{\delta\hat{V}_{\perp}^2}{2\hat{B}} \qquad \delta = \frac{V_0}{\Omega_0 a}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{\vec{R}}}{d\tau} = \frac{\cancel{\gamma}}{\hat{B}^*_{\parallel}}\left[\hat{V}_{\parallel}\,\hat{\vec{B}}^* + \hat{\vec{E}}^* \times \hat{b} + \hat{\mu}(\hat{b} \times \hat{\nabla}\hat{B})\right]}$$

$$\hat{\vec{B}}^* = \frac{\vec{B}}{B_0} + \frac{m V_{\parallel} c}{ZeB_0}\nabla\times\hat{b} = \hat{\vec{B}} + \frac{m V_0 c}{ZeB_0 a}\hat{V}_{\parallel}\,\hat{\nabla}\times\hat{b} = \hat{\vec{B}} + \gamma\hat{V}_{\parallel}\,\hat{\nabla}\times\hat{b}$$

$$\hat{B}^*_{\parallel} = \hat{b}\cdot\hat{B}^* \qquad \hat{\vec{E}}^* = \frac{c}{V_0 B_0}\vec{E}^* = \frac{c}{V_0 B_0}\left(\vec{E} - \frac{m V_{\parallel}}{Ze}\frac{\partial\hat{b}}{\partial t}\right) = \hat{\vec{E}} - \hat{V}_{\parallel}\frac{\partial\hat{b}}{\partial\tau}$$

Notar que $\hat{\mu}$ debe calcularse usando la condición inicial y luego debe mantenerse constante. Luego $\hat{\mu}$ se usa para calcular $\hat{V}_{\perp}$ (suponiendo conocido el valor de B)

$$\hat{V}_{\perp}^2 = \frac{2\hat{B}\hat{\mu}}{\gamma}.$$

$$\frac{dV_{\parallel}}{dt} = V_0\Omega_0\frac{d\hat{V}_{\parallel}}{d\tau} = \frac{1}{m}\frac{\hat{\vec{B}}^*}{\hat{B}^*_{\parallel}}\left[\frac{ZeV_0B_0}{c}\hat{\vec{E}} - \frac{B_0}{a}\mu\;\hat{\nabla}\hat{B}\right]$$

$$\frac{d\hat{V}_{\parallel}}{d\tau} = \frac{\hat{\vec{B}}^*}{\hat{B}^*_{\parallel}}\left[\frac{ZeB_0}{mc}\frac{\cancel{V_0}}{\cancel{V_0}\Omega_0}\hat{\vec{E}} - \frac{B_0}{a}\frac{\mu}{m V_0\Omega_0}\hat{\nabla}\hat{B}\right]$$

$$\frac{\cancel{B_0}\,\mu}{a\cancel{m}V_0}\frac{\cancel{m}c}{Ze\cancel{B_0}} = \frac{\mu c}{aV_0Ze} = \hat{\mu}$$

$$\boxed{\frac{d\hat{V}_{\parallel}}{d\tau} = \frac{\hat{\vec{B}}^*}{\hat{B}^*_{\parallel}}\cdot\left[\hat{\vec{E}} - \hat{\mu}\,\hat{\nabla}\hat{B}\right]}$$

Para el código necesitamos la ecuación para $\frac{d\vec{R}}{d\tau}$ en cilíndricas.

$$\frac{d\hat{\vec{R}}}{d\tau} = \dot{\hat{R}}\hat{e}_R + \dot{\hat{z}}\hat{e}_z + \hat{R}\dot{\theta}\hat{e}_\theta$$

$$\nabla\times\hat{b} = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial\hat{b}_z}{\partial\theta} - \frac{\partial\hat{b}_\theta}{\partial z}\right)\hat{e}_R + \left(\frac{\partial\hat{b}_r}{\partial z} - \frac{\partial\hat{b}_z}{\partial R}\right)\hat{e}_\theta + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R\hat{b}_\theta) - \frac{1}{R}\frac{\partial\hat{b}_r}{\partial\theta}\right)\hat{e}_z$$

$$\nabla\hat{B} = \frac{\partial\hat{B}}{\partial R}\hat{e}_R + \frac{1}{R}\frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta}\hat{e}_\theta + \frac{\partial\hat{B}}{\partial z}\hat{e}_z$$

$$\hat{b}\times\hat{\nabla}\hat{B} = \begin{vmatrix} \hat{e}_R & \hat{e}_\theta & \hat{e}_z \\ \hat{b}_R & \hat{b}_\theta & b_z \\ \frac{\partial\hat{B}}{\partial R} & \frac{1}{R}\frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta} & \frac{\partial\hat{B}}{\partial z}\end{vmatrix} = \hat{e}_R\left(b_\theta\frac{\partial\hat{B}}{\partial z} - \frac{b_z}{R}\frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta}\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial\hat{B}}{\partial R}b_z - \frac{\partial\hat{B}}{\partial z}b_r\right) +$$

$$+ \hat{e}_z\left(\frac{1}{R}\frac{\partial\hat{B}}{\partial\theta}b_r - \frac{\partial\hat{B}}{\partial R}b_\theta\right)$$

$$\hat{\vec{E}}^*\times\hat{b} = \hat{\vec{E}}\times\hat{b} - \hat{V}_\parallel\frac{\partial\hat{b}}{\partial\tau}\times\hat{b} = \hat{e}_R\left(\hat{E}_\theta b_z - \hat{E}_z b_\theta\right) + \hat{e}_\theta\left(\hat{E}_z b_r - \hat{E}_R b_z\right) +$$

$$+ \hat{e}_z\left(\hat{E}_R b_\theta - \hat{E}_\theta b_R\right) - \hat{V}_\parallel\left[\hat{e}_R\left(\frac{\partial b_\theta}{\partial\tau}b_z - \frac{\partial b_z}{\partial\tau}b_\theta\right) + \hat{e}_\theta\left(\frac{\partial b_z}{\partial\tau}b_r - \frac{\partial b_r}{\partial\tau}b_z\right)\right.$$

$$\left. + \hat{e}_z\left(\frac{\partial b_R}{\partial\tau}b_\theta - \frac{\partial b_\theta}{\partial\tau}b_R\right)\right]$$

$$\vec{E}^*\times\hat{b} = \hat{e}_R\left[\hat{E}_\theta b_z - \hat{E}_z b_\theta - \hat{V}_\parallel\left(\frac{\partial b_\theta}{\partial\tau}b_z - \frac{\partial b_z}{\partial\tau}b_\theta\right)\right] + \hat{e}_\theta\left[\hat{E}_z b_R - E_R b_z - \hat{V}_\parallel\left(\frac{\partial b_z}{\partial\tau}b_r - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\partial b_r}{\partial\tau}b_z\right)\right] + \hat{e}_z\left[\hat{E}_R b_\theta - \hat{E}_\theta b_R - \left(\frac{\partial b_R}{\partial\tau}b_\theta - \frac{\partial b_\theta}{\partial\tau}b_R\right)\hat{V}_\parallel\right]$$

De aquí en adelante eliminamos el "^". Son todas cantidades normalizadas.

$$\frac{dR}{d\tau} = \frac{\gamma}{B^*_\parallel}\left\{V_\parallel B_R + \gamma V_\parallel^2\left(\frac{1}{R}\frac{\partial b_z}{\partial\theta} - \frac{\partial b_\theta}{\partial z}\right) + E_\theta b_z - E_z b_\theta - V_\parallel\left(\frac{\partial b_\theta}{\partial\tau}b_z - \frac{\partial b_z}{\partial\tau}b_\theta\right) + \right.$$

$$\left. + \mu\left(b_\theta\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{b_z}{R}\frac{\partial B}{\partial\theta}\right)\right\}$$

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{\gamma}{B^*_\parallel}\left\{V_\parallel B_z + \gamma V_\parallel^2\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(Rb_\theta) - \frac{1}{R}\frac{\partial b_r}{\partial\theta}\right) + E_R b_\theta - E_\theta b_R - V_\parallel\left(\frac{\partial b_R}{\partial\tau}b_\theta - \frac{\partial b_\theta}{\partial\tau}b_R\right) + \right.$$

$$\left. + \mu\left(\frac{1}{R}\frac{\partial B}{\partial\theta}b_r - \frac{\partial B}{\partial R}b_\theta\right)\right\}$$

$$\frac{d\theta}{d\tau} = \frac{\gamma}{B^*_{\parallel} R}\left\{ V_{\parallel} B_\theta + \gamma V_{\parallel}^2\left(\frac{\partial b_R}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial R}\right) + E_z b_R - E_R b_z - V_{\parallel}\left(\frac{\partial b_z}{\partial \tau} b_R - \frac{\partial b_R}{\partial \tau} b_z\right) + \right.$$

$$\left. + \mu\left(\frac{\partial B}{\partial R} b_z - \frac{\partial B}{\partial z} b_R\right)\right\}$$

$$\frac{dV_{\parallel}}{d\tau} = \frac{1}{B^*_{\parallel}}\left\{\left[B_R + \gamma V_{\parallel}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \frac{\partial b_\theta}{\partial z}\right)\right]\cdot\left[E_R - \mu\frac{\partial B}{\partial R}\right] + \left[B_\theta + \gamma V_{\parallel}\left(\frac{\partial b_r}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial R}\right)\right]\cdot\right.$$

$$\left.\left[E_\theta - \frac{\mu}{R}\frac{\partial B}{\partial \theta}\right] + \left[B_z + \gamma V_{\parallel}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R b_\theta) - \frac{1}{R}\frac{\partial b_R}{\partial \theta}\right)\right]\left[E_z - \mu\frac{\partial B}{\partial z}\right]\right\}$$

$$B^*_{\parallel} = b_R\left[B_R + \gamma V_{\parallel}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial b_z}{\partial \theta} - \frac{\partial b_\theta}{\partial z}\right)\right] + b_\theta\left[B_\theta + \gamma V_{\parallel}\left(\frac{\partial b_R}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial R}\right)\right] +$$

$$+ b_z\left[B_z + \gamma V_{\parallel}\left(\frac{1}{R}\frac{\partial}{\partial R}(R b_\theta) - \frac{1}{R}\frac{\partial b_R}{\partial \theta}\right)\right]$$

$$\frac{\partial b_R}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{B_R}{B}\right) = \left(\frac{\partial B_R}{\partial \tau} B - B_R\frac{\partial B}{\partial \tau}\right)\frac{1}{B^2} = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial B_R}{\partial \tau} - \frac{B_R}{B}\frac{\partial B}{\partial \tau}\right)$$

$$\frac{\partial b_\theta}{\partial \tau} = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} - \frac{B_\theta}{B}\frac{\partial B}{\partial \tau}\right) \qquad \frac{\partial b_z}{\partial \tau} = \frac{1}{B}\left(\frac{\partial B_z}{\partial \tau} - \frac{B_z}{B}\frac{\partial B}{\partial \tau}\right)$$

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial \tau}\left[(B_{0r} + B_{1r})^2 + (B_{0\theta} + B_{1\theta})^2 + (B_{0z} + B_{1z})^2\right]^{1/2}$$

$$\cancel{\frac{\partial B}{\partial \tau} = \frac{1}{2}\frac{2}{B}\left[\frac{\partial B_{1r}}{\partial \tau} + \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \tau} + \frac{\partial B_{1z}}{\partial \tau}\right]}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \tau} = \frac{1}{\cancel{2}}\frac{\cancel{2}}{B}\left\{(B_{0r} + B_{1r})\frac{\partial B_{1r}}{\partial \tau} + (B_{0\theta} + B_{1\theta})\frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \tau} + (B_{0z} + B_{1z})\frac{\partial B_{1z}}{\partial \tau}\right\}$$

$$\frac{\partial B_R}{\partial \tau} = \frac{\partial B_{1R}}{\partial \tau} \; ; \; \frac{\partial B_\theta}{\partial \tau} = \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \tau} \; ; \; \frac{\partial B_z}{\partial \tau} = \frac{\partial B_{1z}}{\partial \tau}$$

Equilibrio Mc Carthy (R, z cilíndricas)

$$\Psi(R,z) = c_1 + c_2 R^2 + R J_1(pR)(c_3 + c_4 z) + c_5 \cos(pz) + c_6 \operatorname{sen}(pz) + R^2(c_7 \cos(pz) + c_8 \operatorname{sen}(pz)) + c_9 \cos(p\sqrt{R^2+z^2}) + c_{10} \operatorname{sen}(p\sqrt{R^2+z^2}) + R J_1(\nu R)(c_{11} \cos(qz) + c_{12} \operatorname{sen}(qz)) + R J_1(qR)(c_{13} \cos(\nu z) + c_{14} \operatorname{sen}(\nu z)) + R Y_1(\nu R)(c_{15} \cos(qz) + c_{16} \operatorname{sen}(qz)) + R Y_1(qR) \times (c_{17} \cos(\nu z) + c_{18} \operatorname{sen}(\nu z))$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = R J_1(pR) c_4 - c_5 p \operatorname{sen}(pz) + c_6 p \cos(pz) + R^2\left[-c_7 p \operatorname{sen}(pz) + c_8 p \cos(pz)\right] - c_9 \operatorname{sen}(p\sqrt{R^2+z^2}) \frac{pz}{\sqrt{R^2+z^2}} + c_{10} \cos(p\sqrt{R^2+z^2}) \frac{pz}{\sqrt{R^2+z^2}} + R J_1(\nu R)\left[-q c_{11} \operatorname{sen}(qz) + q c_{12} \cos(qz)\right] + R J_1(qR)\left[-c_{13} \nu \operatorname{sen}(\nu z) + c_{14} \nu \cos(\nu z)\right] + R Y_1(\nu R)\left[-q c_{15} \operatorname{sen}(qz) + q c_{16} \cos(qz)\right] + R Y_1(qR) \times \left[-c_{17} \nu \operatorname{sen}(\nu z) + c_{18} \nu \cos(\nu z)\right]$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = c_4 R J_1(pR) + p\left[-c_5 \operatorname{sen}(pz) + c_6 \cos(pz)\right] + R^2 p\left[-c_7 \operatorname{sen}(pz) + c_8 \cos(pz)\right] + \frac{pz}{\sqrt{R^2+z^2}}\left[-c_9 \operatorname{sen}(p\sqrt{R^2+z^2}) + c_{10} \cos(p\sqrt{R^2+z^2})\right] + R J_1(\nu R) q\left[-c_{11} \operatorname{sen}(qz) + c_{12} \cos(qz)\right] + R \nu J_1(qR)\left[-c_{13} \operatorname{sen}(\nu z) + c_{14} \cos(\nu z)\right] + R Y_1(\nu R) q \times \left[-c_{15} \operatorname{sen}(qz) + c_{16} \cos(qz)\right] + R Y_1(qR) \nu\left[-c_{17} \operatorname{sen}(\nu z) + c_{18} \cos(\nu z)\right]$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = 2c_2 R + R p J_1'(pR)(c_3 + c_4 z) + J_1(pR)(c_3 + c_4 z) + 2R\left[c_7 \cos(pz) + c_8 \operatorname{sen}(pz)\right] - c_9 p \frac{R}{\sqrt{R^2+R^2}} \operatorname{sen}(p\sqrt{R^2+z^2}) + c_{10} \frac{pR}{\sqrt{R^2+z^2}} \cos(p\sqrt{R^2+z^2}) +$$

$$+RVJ_1'(VR)\left[C_{11}\cos(qZ)+C_{12}\,\mathrm{sen}(qZ)\right]+J_1(VR)\left[C_{11}\cos(qZ)+C_{12}\,\mathrm{sen}(qZ)\right]$$

$$+RqJ_1'(qR)\left[C_{13}\cos(VZ)+C_{14}\,\mathrm{sen}(VZ)\right]+J_1(qR)\left[C_{13}\cos(VZ)+C_{14}\,\mathrm{sen}(VZ)\right]$$

$$+\left[C_{15}\cos(qZ)+C_{16}\,\mathrm{sen}(qZ)\right]\left(Y_1(VR)+RVY_1'(VR)\right)+$$

$$+\left[C_{17}\cos(VZ)+C_{18}\,\mathrm{sen}(VZ)\right]\left(Y_1(qR)+RqY_1'(qR)\right)$$

$$\frac{\partial\Psi}{\partial R}=2C_2R+RpJ_1'(pR)(C_3+C_4Z)+J_1(pR)(C_3+C_4Z)+2R\left[C_7\cos(pZ)+C_8\,\mathrm{sen}(pZ)\right]+$$

$$+\frac{pR}{\sqrt{R^2+Z^2}}\left[-C_9\,\mathrm{sen}\left(p\sqrt{R^2+Z^2}\right)+C_{10}\cos\left(p\sqrt{R^2+Z^2}\right)\right]+\left[C_{11}\cos(qZ)+C_{12}\,\mathrm{sen}(qZ)\right]\times$$

$$\times\left[RVJ_1'(VR)+J_1(VR)\right]+\left[C_{13}\cos(VZ)+C_{14}\,\mathrm{sen}(VZ)\right]\left(RqJ_1'(qR)+J_1(qR)\right)$$

$$+\left[C_{15}\cos(qZ)+C_{16}\,\mathrm{sen}(qZ)\right]\left(Y_1(VR)+RVY_1'(VR)\right)+\left[C_{17}\cos(VZ)+\right.$$

$$\left.+C_{18}\,\mathrm{sen}(VZ)\right]\left(Y_1(qR)+RqY_1'(qR)\right)$$

$J_1'(pR)=J_0(pR)-\dfrac{J_1(pR)}{pR}$, lo mismo para el resto

Estas expresiones corresponden al flujo poloidal por radian, con la ec. de G-S escrita en unidades SI.

$$-\left(\frac{\partial^2\Psi}{\partial R^2}-\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial Z^2}\right)=\mu_0R^2\frac{dp}{d\Psi}+F\frac{dF}{d\Psi}\qquad B_R=-\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial Z}\qquad B_Z=\frac{1}{R}\frac{\partial\Psi}{\partial R}$$

Si adimensionalizamos B_R y B_Z con B_0 (campo toroidal en el eje magnético), R y Z con a (radio menor, zona de bajo campo)

$$\frac{B_R}{B_0}=-\frac{1}{B_0a\hat{R}}\frac{\partial\Psi}{a\,\partial\hat{Z}}\Rightarrow\hat{B}_R=-\frac{1}{B_0a^2}\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial\Psi}{\partial\hat{Z}}=-\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\hat{Z}}\quad\text{donde}$$

$$\hat{B}_Z=\frac{1}{\hat{R}}\frac{\partial\hat{\Psi}}{\partial\hat{R}}\qquad\qquad\hat{\Psi}=\frac{\Psi}{B_0a^2}$$

04/02/2020 El equilibrio parece estar funcionando bien. ECG10

Campos perturbados

1- Se supone que la componente toroidal del campo magnético perturbado es cero.

2- Para cada componente de campo se leerán 2 funciones de R y Z de una matriz (grilla). Estas funciones se calculan en una grilla R, Z fija y luego hay que interpolarlas para tenerlas en la posición de la partícula. Finalmente, una de estas funciones se multiplica por $\cos(n\theta + \omega t)$ y la otra por $\operatorname{sen}(n\theta + \omega t)$

Ej Sea $B_{1R} = \tilde{B}_{1R}(\rho)\, e^{i(m\phi - n\theta - \omega t)}$ la componente "R" del campo perturbado, donde "ρ" es la coordenada "radial" en toroidales y ϕ es el ángulo poloidal.

$$B_{1R} = \tilde{B}_{1R}(\rho)\, e^{-i(\theta n + \omega t)}\, e^{im\phi}$$

$$= \tilde{B}_{1R}(\rho) \left\{ [\cos(m\phi) + i\operatorname{sen}(m\phi)]\, [\cos(n\theta + \omega t) - i\operatorname{sen}(n\theta + \omega t)] \right\}$$

$$= \tilde{B}_{1R}(\rho) \left\{ \cos(m\phi)\cos(n\theta + \omega t) - i\cos(m\phi)\operatorname{sen}(n\theta + \omega t) + \right.$$
$$\left. + i\operatorname{sen}(m\phi)\cos(n\theta + \omega t) + \operatorname{sen}(m\phi)\operatorname{sen}(n\theta + \omega t) \right\}$$

$$= \tilde{B}_{1R}(\rho) \left\{ \cos(m\phi)\cos(n\theta + \omega t) + \operatorname{sen}(m\phi)\operatorname{sen}(n\theta + \omega t) + \right.$$
$$\left. + i\left[\operatorname{sen}(m\phi)\cos(n\theta + \omega t) - \cos(m\phi)\operatorname{sen}(n\theta + \omega t)\right] \right\}$$

Tomando la parte real

$$B_{1R} = \tilde{B}_{1R}(\rho) \left\{ \cos(m\phi)\cos(n\theta + \omega t) + \operatorname{sen}(m\phi)\operatorname{sen}(n\theta + \omega t) \right\}$$

Luego la dependencia respecto de ρ, ϕ se mapea sobre una grilla R, Z. Por lo tanto, podemos escribir:

$$B_{1z} = B_{1za}(R,z)\cos(m\theta+wt) + B_{1zb}\,\mathrm{sen}(m\theta+wt)$$
$$B_{1R} = B_{1Ra}(R,z)\cos(m\theta+wt) + B_{1Rb}\,\mathrm{sen}(m\theta+wt)$$

Como se dijo, B_{1Ra} y B_{1Rb} se conocen en una grilla R,z y luego hay que interpolarlos para calcularlos en la posición de la partícula.

Cálculo de derivadas

Las derivadas de las componentes del campo perturbado se podrían calcular y almacenar en la misma grilla y luego leerlas p.e interpolarlas.. El probleema es que esto requiere leer y guardar muchas matrices grandes en la placa. La otra posibilidad es usar los valores leidos de B_{1R} y B_{1z} para calcular las derivadas en los puntos de la grilla y luego interpolar. Los campos perturbados se identifican por un único índice $k = i + j \times nr$, donde "i" da el valor de r y "j" el de z y nr es el número de nodos radiales.
Para movernos en r, con z fijo hay que variar el i (de modo que k aumenta o disminuye 1) para movernos en z hay que variar el j, de modo que k varía en $\pm nr$

Ej

$$\left.\frac{dB_{1z}}{dr}\right|_k = \left[\frac{B_{1za}(k+1) - B_{1za}(k-1)}{2hr}\right]\cos(m\theta+wt) + \left[\frac{B_{1zb}(k+1) - B_{1zb}(k-1)}{2hr} \times \mathrm{sen}(m\theta+wt)\right]$$

$$\left.\frac{dB_{1r}}{dz}\right|_k = \frac{1}{2hz}\Big\{\left[B_{1ra}(k+nr) - B_{1ra}(k-nr)\right]\cos(m\theta+wt) + \left[B_{1rb}(k+nr) - B_{1rb}(k-nr)\right]\mathrm{sen}(m\theta+wt)\Big\}$$

Las derivadas respecto de θ son analíticas

$$\frac{dB_{1z}}{d\theta} = -B_{1za}\,\mathrm{sen}(m\theta+wt)\,m + B_{1zb}\,m\cos(m\theta+wt)$$

$$\frac{dB_{1z}}{d\theta} = m\left[-B_{1za}\,\mathrm{sen}(m\theta+wt) + B_{1zb}\cos(m\theta+wt)\right]$$

$$\frac{dB_{1R}}{d\theta} = m\left[-B_{1Ra}\,\mathrm{sen}(m\theta+\omega t) + B_{1Rb}\cos(m\theta+\omega t)\right]$$

Necesitamos también las derivadas temporales.

$$\frac{\partial B_{1R}}{\partial t} = \tilde{B}_{1R}(\rho)\left\{-\cos(m\phi)\,\omega\,\mathrm{sen}(m\theta+\omega t) + \mathrm{sen}(m\phi)\,\omega\cos(m\theta+\omega t)\right\}$$

$$= \omega\,\tilde{B}_{1R}(\rho)\left\{-\cos(m\phi)\,\mathrm{sen}(m\theta+\omega t) + \mathrm{sen}(m\phi)\cos(m\theta+\omega t)\right\}$$

Lo mismo para las otras componentes.