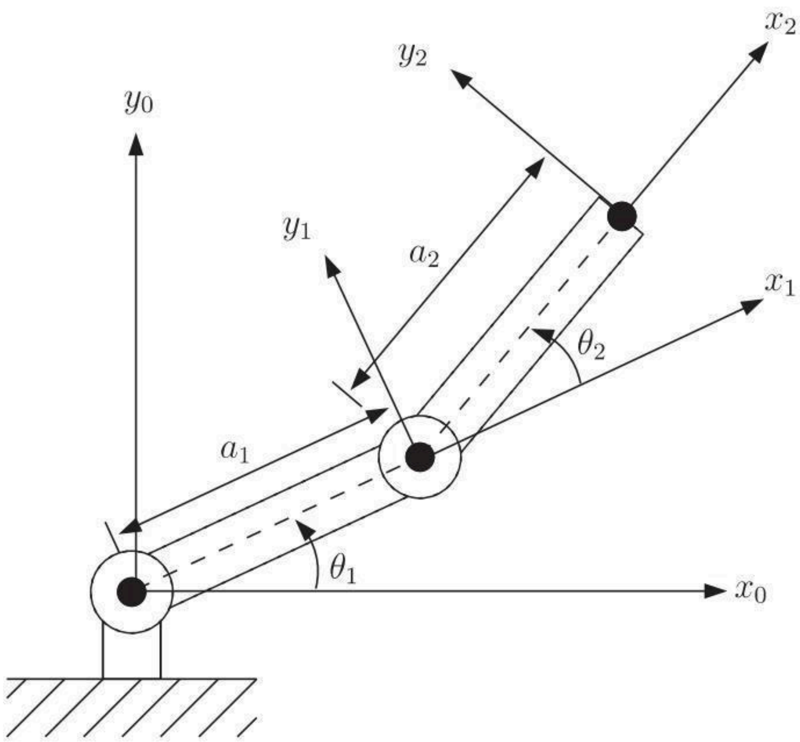
Cinemática Inversa A

*Para aprobar y regularizar la materia, en cada trabajo práctico debe tener aprobado los ejercicios marcados como **obligatorios**. Se recomienda realizar todos los ejercicios para lograr un mayor entendimiento de los conceptos teóricos volcados en las clases, además le servirán también para la elaboración del trabajo final integrador. Se atenderán consultas de todos los ejercicios por igual.*

Ejercicio 1 (***obligatorio***): considere el robot de planar de 2 g.d.l. de la figura a continuación:



1. Utilice el método geométrico para hallar un conjunto de ecuaciones cerradas que resuelvan el siguiente problema:

$$\bar{q} = f(x, y, \gamma)$$

Donde:

a. x: es la coordenada en x_0 del origen del $S\{2\}$.
b. y: es la coordenada en y_0 del origen del $S\{2\}$.
c. γ: es el ángulo formado entre x_0 y x_2 alrededor de z_0.

$$\boldsymbol{\gamma = q1 + q2}$$

$$\boldsymbol{x = a1.\cos(q_1) + a2.\cos(\gamma)}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{q1 = \operatorname{acos}\left(\frac{x - a2\cos(\gamma)}{a1}\right)} \\ \boldsymbol{q2 = \gamma - q1} \end{cases}$$

El problema de este planteo es que se está buscando satisfacer tres restricciones, coordenadas x e y del punto P y ángulo γ, con dos grados de libertad. En la mayoría de los casos no vamos a poder satisfacer una combinación de coordenadas x e y, y una orientación γ deseada con un robot de únicamente dos articulaciones. Con el planteo realizado estamos cumpliendo con la coordenada x y el ángulo γ, pero nada implica que estemos cumpliendo con la coordenada y.

2. Utilice el método geométrico para hallar un conjunto de ecuaciones cerradas que resuelvan el siguiente problema:

$$\bar{q} = f(x, y)$$

Donde:

a. x: es la coordenada en x_0 del origen del $S\{2\}$.

b. y: es la coordenada en y_0 del origen del $S\{2\}$.

$$(q1, q2) = f(x\,, y)$$

$$x2 = a2 * \cos(q1) + a2 * \cos(q1 + q2) \qquad (1)$$

$$y2 = a1 * \sin(q1) + a2 * \sin\,(q1 + q2) \qquad (2)$$

$$r^2 = x^2 + y^2 \qquad (3)$$

$$\beta = atan2(y, x) \qquad (4)$$

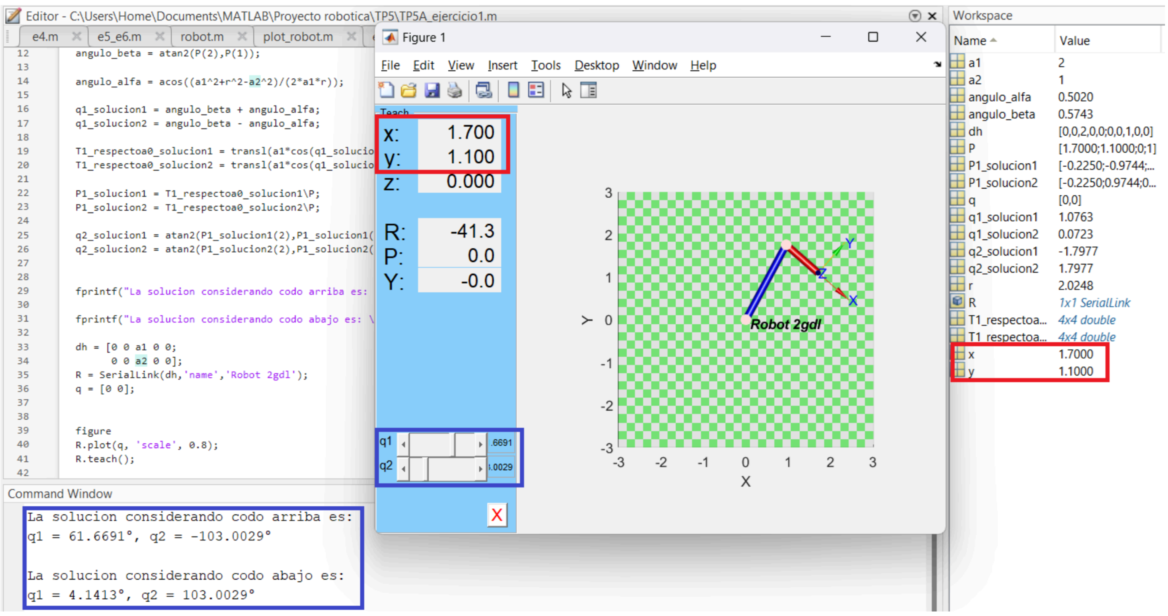
$$\alpha = \arccos\,(\frac{a1^2+r^2-a2^2}{2*a1*r}) \qquad (5)$$

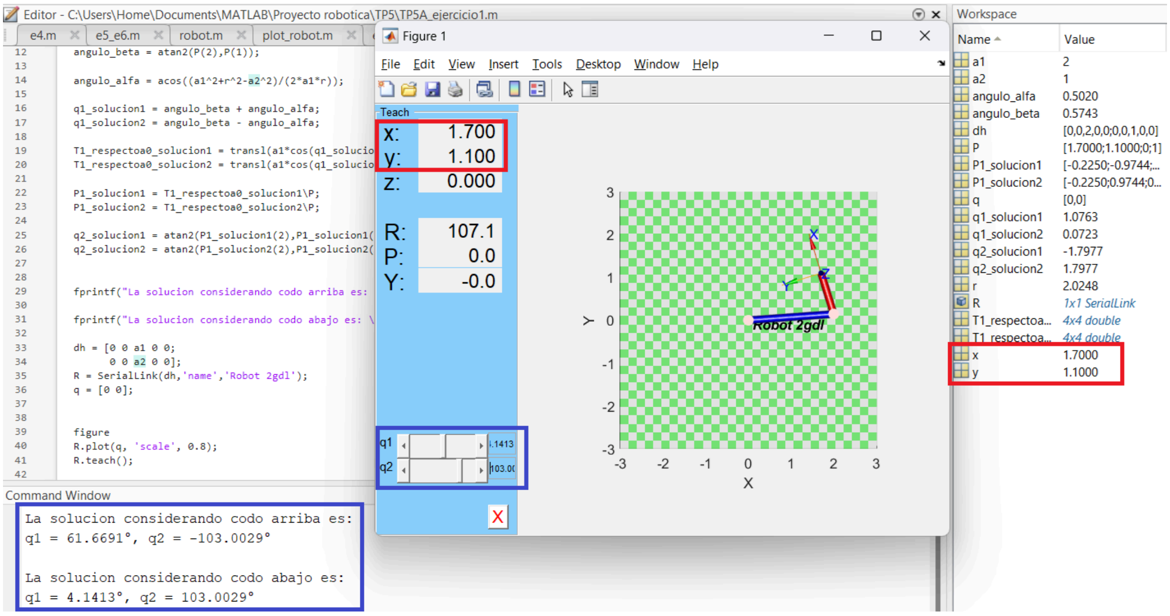
$$q1 = \beta \pm \alpha \qquad (6)$$

$${}^{1}p = {}^{1}T_0 \backslash {}^{0}p \qquad (7)$$

Se planteó una solución en MATLAB implementando un algoritmo genérico para variar parámetros a1 y a2 y el punto de coordenadas (x0,y0) del efector final deseado.

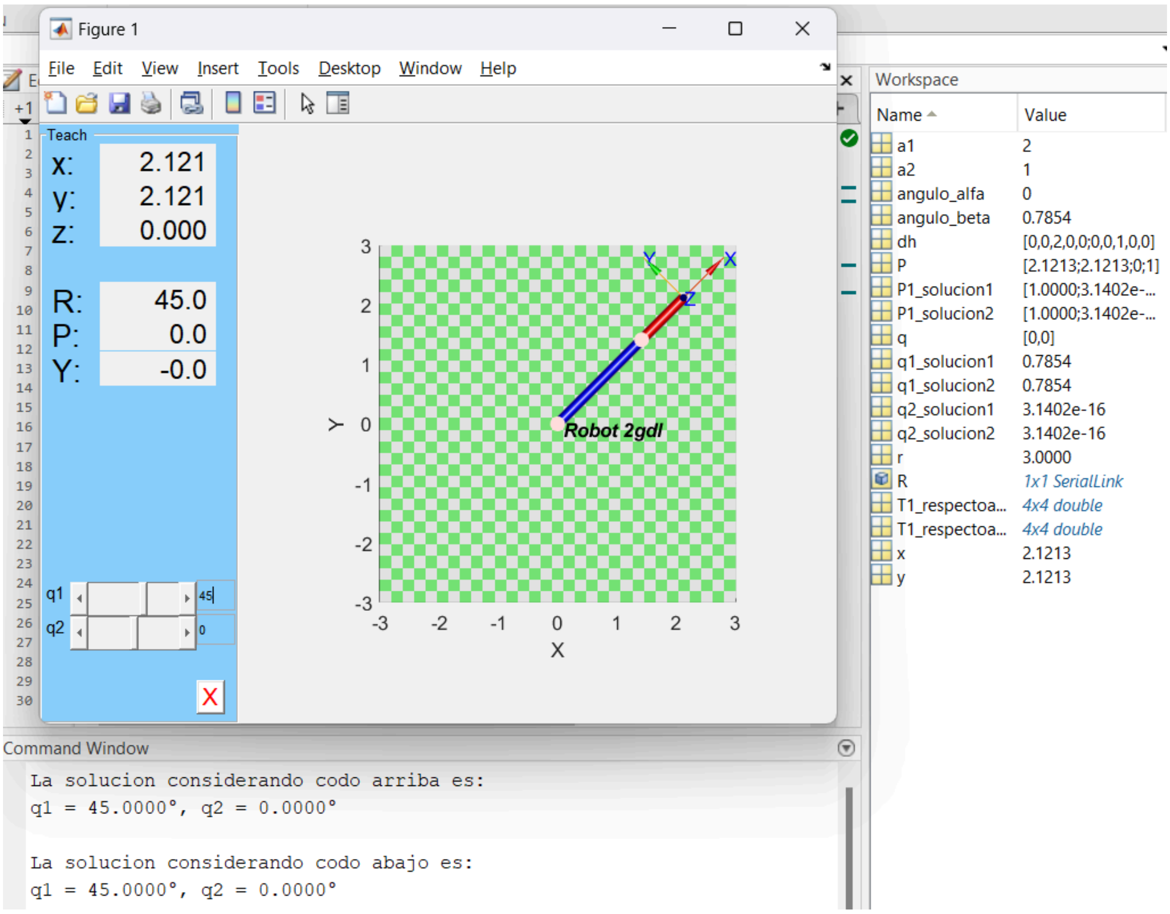
Con valores a1 = 2, y a2 = 1 para los brazos del robot de 2 grados de libertad, y un punto de coordenadas (1.7 , 1.1) se obtuvieron las siguientes soluciones:





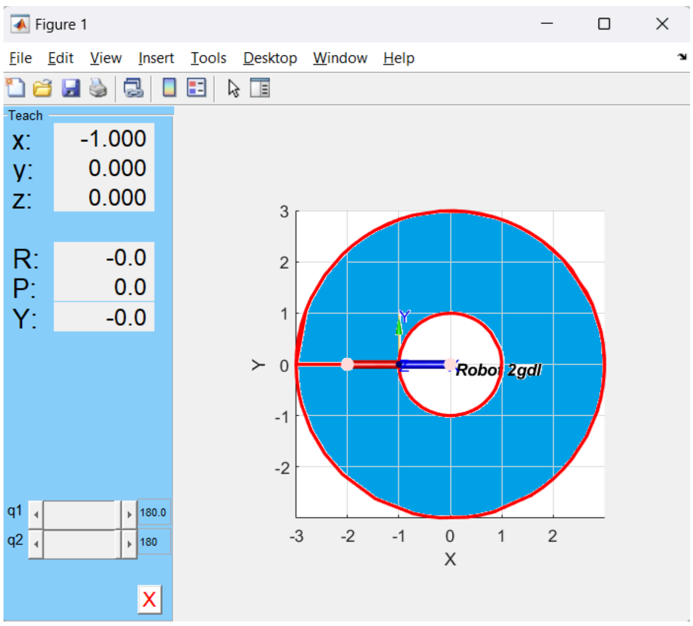
No se están teniendo en cuenta soluciones correspondientes a ángulos múltiplos de 180° y -180°, sólo 2 soluciones teniendo en cuenta que los límites del robot son +/- 180° y que por lo tanto puede barrer todo el plano una única vez.

Si se elige un punto cuya distancia al origen es igual a la suma de los dos brazos, como por ejemplo el punto de coordenadas (2.1213 , 2.1213):



Si se elige un punto de coordenadas tal que esté fuera del alcance del robot:

Se tendrán números complejos conjugados para las soluciones ya que no existe ninguna combinación de ángulos tal que el efector final del robot alcance la posición deseada.

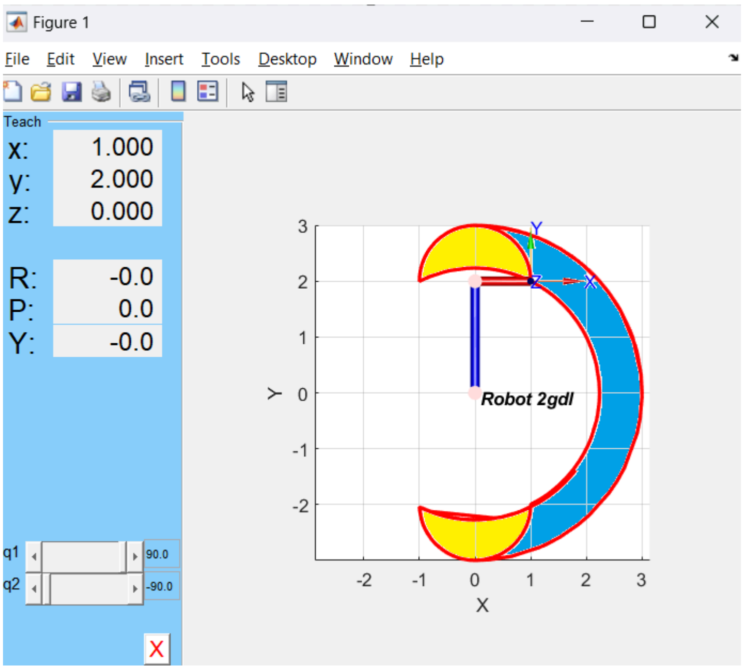


El espacio de trabajo del robot está limitado por dos circunferencias de radios a1 y a2 respectivamente, esto considerando límites articulares de -180° a 180°

3. Indique la cantidad de soluciones posibles que tendría cada conjunto de ecuaciones anterior, si los límites articulares fueran los siguientes:
   a. $\pm 90°$
   b. $\pm 180°$
   c. $\pm 225°$
   d. $\pm\infty$

   Ejemplo: para el caso **a.**, con articulaciones limitadas a $\pm 90°$, la ecuación 1 tendrá solo una solución por cada vector de entrada x, y, γ válido (hay puntos no alcanzables que no tendrán ninguna solución), mientras que la ecuación 2 tendrá dos soluciones para varios puntos x, y del primer y cuarto cuadrante, por la paridad "codo arriba y codo abajo", pero cuando el punto de entrada se acerque al segundo o tercer cuadrante, e implique que una de las soluciones "codo arriba y codo abajo" ponga a $q1$ fuera de sus límites, en tal caso puede haber solo una solución, que será única. Por lo tanto:
   a. $\pm 90°$:
      a. Ecuación 1: solo una solución para cada x, y, γ
      b. Ecuación 2: dos soluciones en general, pero solo una cuando x, y se acerca al 2º y 3º cuadrante.

Para el caso a), lo que se explica anteriormente se ilustra en la siguiente imagen para los límites -90° y 90°

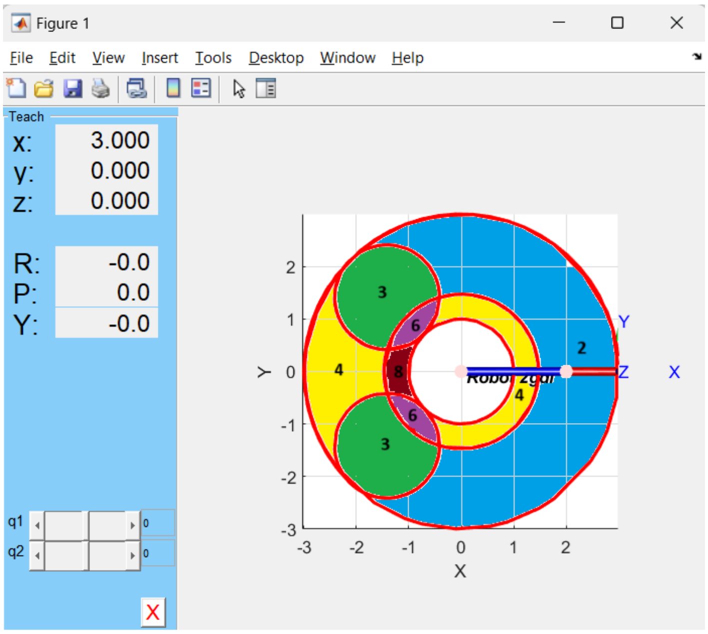


Para los puntos que se encuentran dentro de las áreas sombreadas de amarillo sólo existe 1 solución posible de combinaciones q1 y q2 que satisfagan sus coordenadas. Para los puntos situados en el área azul, existen 2 posibles soluciones de combinaciones q1 y q2 para satisfacer sus coordenadas.

b. $\pm 180°$:

Como se mostró en una imágen para el ejercicio 1.2, con límites $\pm 180°$ para ambas articulaciones, se tienen 2 soluciones para todos los puntos que se encuentran encerrados entre dos circunferencias de radio a1 y a2.

c. $\pm 225°$:

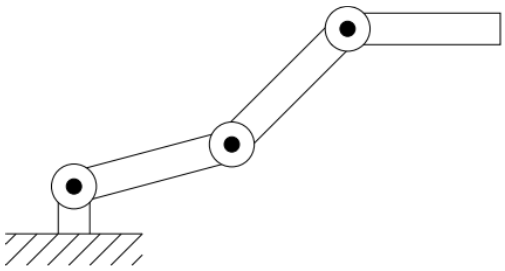


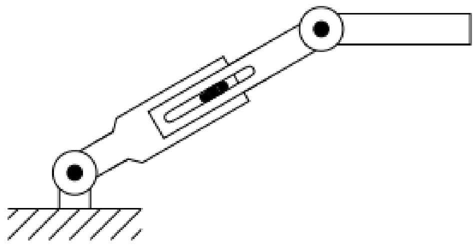
En este esquema se ilustran la cantidad de soluciones de todos los puntos del espacio de trabajo del robot. Los puntos que se sitúen en el área coloreada con marrón darán hasta 8 posibles combinaciones de las coordenadas articulares para satisfacer esas coordenadas.

d. $\pm\infty$:

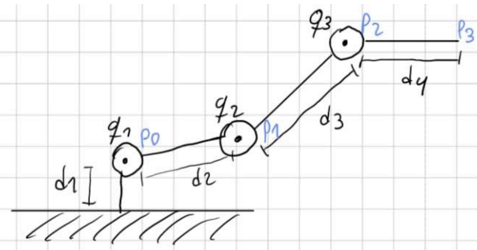
Con la ecuación 2 y con estos límites articulares tendremos infinitas soluciones para los puntos que se encuentren dentro del espacio de trabajo.

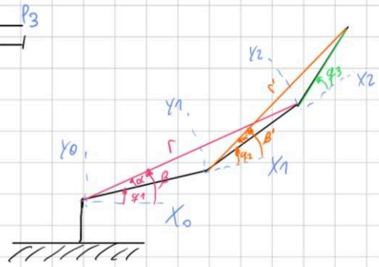
Ejercicio 2: analice los 3 robots que se muestran a continuación y plantee el problema de cinemática inversa de la forma $\bar{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{f}(\ldots)$ de una forma que implique infinitas soluciones, y de otra que implique un número finito de soluciones. Considere límites de $\pm 180°$ para articulaciones rotacionales y $\pm\infty$ para las prismáticas.

1. 

2. 

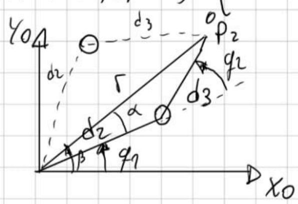
1)





-Infinitas soluciones:

$$(q_1, q_2, q_3) = f({}^0x_2, {}^0y_2)$$



$$r = \sqrt{{}^0x_2^{\,2} + {}^0y_2^{\,2}}$$

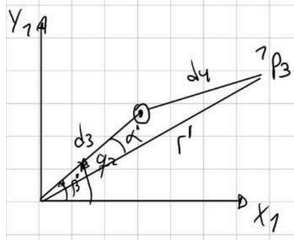
$$\beta = \operatorname{atan2}({}^0y_2, {}^0x_2)$$

$$q_1 = \beta \pm \alpha$$

$$d_3^2 = r^2 + d_2^2 - 2 \cdot r \cdot d_2 \cdot \cos(\alpha)$$

$$2 \cdot r \cdot d_2 \cdot \cos\alpha = r^2 + d_2^2 - d_3^2$$

$$\alpha = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2 \cdot r \cdot d_2}\left(r^2 + d_2^2 - d_3^2\right)\right]$$



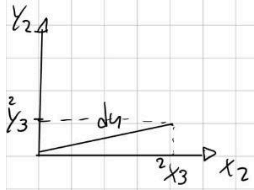
$$r' = \sqrt{{}^1X_3^{\,2} + {}^1Y_3^{\,2}}$$

$$\beta' = \operatorname{atan2}\left({}^1Y_3^{\,2}, {}^1X_3^{\,2}\right)$$

$$q_2 = \beta' \pm \alpha'$$

$$d_4^2 = r'^2 + d_3^2 - 2 \cdot r' \cdot d_3 \cdot \cos(\alpha')$$

$$\alpha' = \cos^{-1}\left[\frac{1}{2 \cdot r' \cdot d_3} \cdot \left(r'^2 + d_3^2 - d_4^2\right)\right]$$



$$q_3 = \operatorname{atan2}\left({}^2Y_3, {}^2X_3\right)$$

- Finitas Soluciones:

$$(q_1, q_2, q_3) = f\left({}^0X_2, {}^0Y_2, \theta\right) \quad ; \quad \theta = q_1 + q_2 + q_3$$

$$\begin{cases} X = d_2 \cdot \cos(q_1) + d_3 \cdot \cos(q_1 + q_2) + d_4 \cdot \cos(q_1 + q_2 + q_3) \\ Y = d_2 \operatorname{sen}(q_1) + d_3 \cdot \operatorname{sen}(q_1 + q_2) + d_4 \cdot \operatorname{sen}(q_1 + q_2 + q_3) \\ \theta = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \beta \pm \alpha \\ q_2 = \beta' \pm \alpha' \\ q_3 = \operatorname{atan2}\left({}^2Y_3, {}^2X_3\right) \\ \theta = q_1 + q_2 + q_3 \end{cases} \rightarrow$$

${}^2Y_3$ y ${}^2X_3$ están definidos, por ello, obtengo q_3.
Teniendo θ y q_3 definidos:

$$\theta = q_1 + q_2 + q_3$$
$$q_1 + q_2 = \theta - q_3$$

Otro desarrollo:

Suponiendo que la última barra está alineado con θ, simplificando las ecuaciones:

$$\begin{cases} X' = X - d_4 \cdot \cos(\theta) = d_2 \cdot \cos(q_1) + d_3 \cdot \cos(q_1 + q_2) \\ Y' = Y - d_4 \cdot \operatorname{sen}(\theta) = d_2 \cdot \operatorname{sen}(q_1) + d_3 \cdot \operatorname{sen}(q_1 + q_2) \end{cases}$$

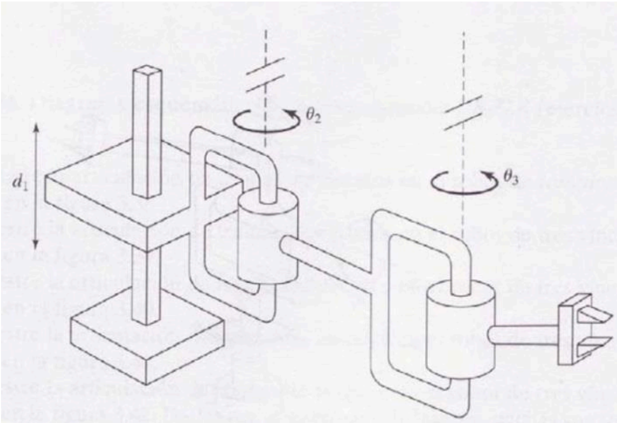
Donde x' e y' son las posiciones efectivas de las primeras dos articulaciones.

$$D = \frac{x'^2 + y'^2 - d_2^2 - d_3^2}{2 \cdot d_2 \cdot d_3}$$

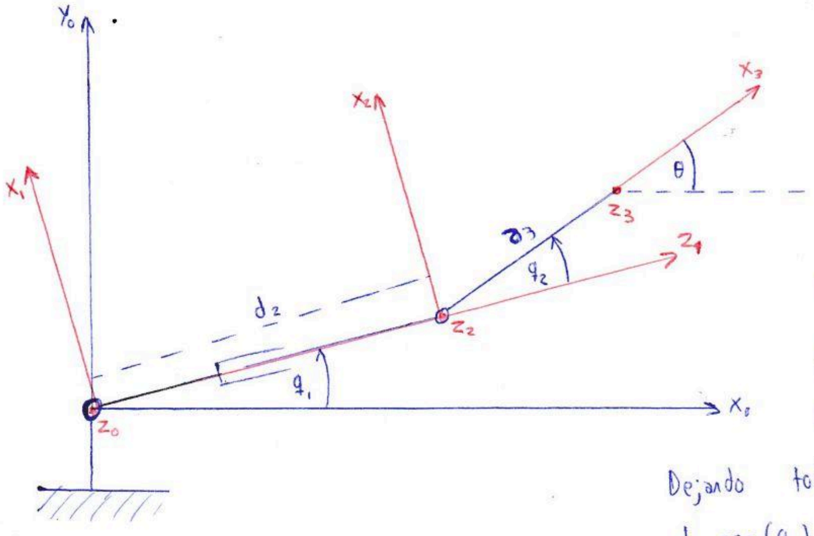
$$q_2 = \operatorname{atan2}\left(\pm\sqrt{1 - D^2}, D\right)$$

$$q_1 = \operatorname{atan2}(y', x') - \operatorname{atan2}\left(d_3 \cdot \operatorname{sen}(q_2), d_2 + d_3 \cdot \cos(q_2)\right)$$

$$q_3 = \theta - q_1 - q_2$$

3. 

Ejercicio 3 (***obligatorio***): halle un conjunto de ecuaciones cerradas que resuelvan el problema cinemático inverso del robot 2.2 por el método geométrico. Seleccione una formulación con cantidad finita de soluciones. Establezca la cantidad de soluciones y analice si es necesario contemplar límites finitos en la segunda articulación.



$\bar{q} = f(x, y, \theta)$

$$\begin{cases} d_2 \cos(q_1) + a_3 \cos(q_1+q_3) = {}^0X_3 & (1 \\ d_2 \operatorname{sen}(q_1) + a_3 \operatorname{sen}(q_1+q_3) = {}^0Y_3 & (2 \\ q_1 + q_3 = \theta \quad (3) \rightarrow \boxed{q_3 = \theta - q_1} \end{cases}$$

Reemplazando ③ en ① y ②

$$d_2 \cos(q_1) + a_3 \cos(\theta) = {}^0X_3$$
$$d_2 \operatorname{sen}(q_1) + a_3 \operatorname{sen}(\theta) = {}^0Y_3$$

Dejando todos los miembros conocidos a un lado

$$d_2 \cos(q_1) = {}^0X_3 - a_3 \cos(\theta) \quad (4)$$
$$d_2 \operatorname{sen}(q_1) = {}^0Y_3 - a_3 \operatorname{sen}(\theta) \quad (5)$$

Dividiendo miembro a miembro ⑤ y ④

$$\frac{d_2 \operatorname{sen}(q_1)}{d_2 \cos(q_1)} = \frac{{}^0Y_3 - a_3 \operatorname{sen}(\theta)}{{}^0X_3 - a_3 \cos(\theta)}$$

$$\boxed{q_1 = \operatorname{atan2}\left({}^0Y_3 - a_3 \operatorname{sen}(\theta), {}^0X_3 - a_3 \cos(\theta)\right)}$$

Elevando miembro a miembro y sumando ④ y ⑤

$$\boxed{d_2 = \pm\sqrt{\left({}^0X_3 - a_3 \cos(\theta)\right)^2 + \left({}^0Y_3 - a_3 \operatorname{sen}(\theta)\right)^2}}$$

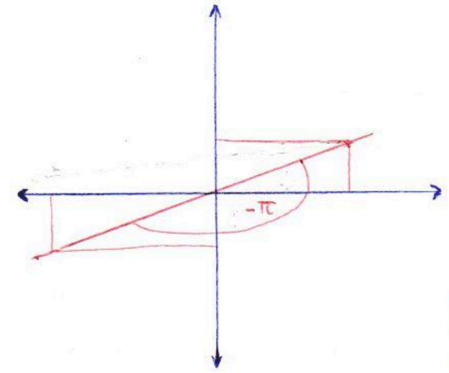
* estos podrían ser reales o simplemente deberse a que elevamos ambos miembros de la ecuación al cuadrado, lo cual matemát no es una equivalencia, y por ende puede agregar s físicamente erróneas

Cantidad de soluciones

Debido al procedimiento matemático se puede ver que tendrá 2 soluciones, generadas de haber elevado *d_2 para despejar. También se puede ver si despejamos e igualamos d_2 de ④ y (

$$\frac{{}^0X_3 - a_3 \cos(\theta)}{\cos(q_1)} = \frac{{}^0Y_3 - a_3 \operatorname{sen}(\theta)}{\operatorname{sen}(q_1)} \quad (6)$$

Si analizamos



$$\operatorname{sen}(\alpha) = -\operatorname{sen}(\alpha - \pi)$$
$$\cos(\alpha) = -\cos(\alpha - \pi)$$

Se corrobora que existen dos valores de q_1 (α) y $(\alpha - \pi$ que cumplen con la igualdad en ⑥

Estas dos soluciones si son físicamente consistentes, por l que podemos decir que hay 2 soluciones para cualquier pun del espacio (debido a que d_2 no tiene límites, va de $-\infty$ a ∞)

Ejercicio 4: trabaje con el robot 2.3 y halle un conjunto de ecuaciones que resuelvan la cinemática inversa por el método algebraico. Se recomienda usar un software que permita el trabajo simbólico.

Ejercicio 5 (***obligatorio***): Implemente las ecuaciones de cinemática inversa del robot 2.1 en un script de Matlab aislado. La implementación debe resolver el problema entregando todos los posibles vectores de solución en el espacio articular, considerando límites articulares de $\pm 180°$.

Considere que el ejercicio será aprobado cuando se puedan obtener resultados correctos al variar los parámetros de entrada.

MATLAB EN ARCHIVO ADJUNTO

Ejercicio 6: aplicación de método numérico. Trabaje con el LBR iiwa 7 R800 (KUKA). Explore la función "SerialLink/ikine" del toolbox de Peter Corke y experimente con los parámetros de la misma (vector semilla, iteraciones, tolerancia, etc.) para hallar al menos 3 soluciones de CI para la siguiente posición y orientación del extremo final:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0.23 \\ 0 & 1 & 0 & 0.70 \\ 0 & 0 & 1 & 0.60 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$