Herramientas Matemáticas

Para aprobar y regularizar la materia, en cada trabajo práctico debe tener aprobado los ejercicios marcados como ***obligatorios****. Se recomienda realizar todos los ejercicios para lograr un mayor entendimiento de los conceptos teóricos volcados en las clases, además le servirán también para la elaboración del trabajo final integrador. Se atenderán consultas de todos los ejercicios por igual.*

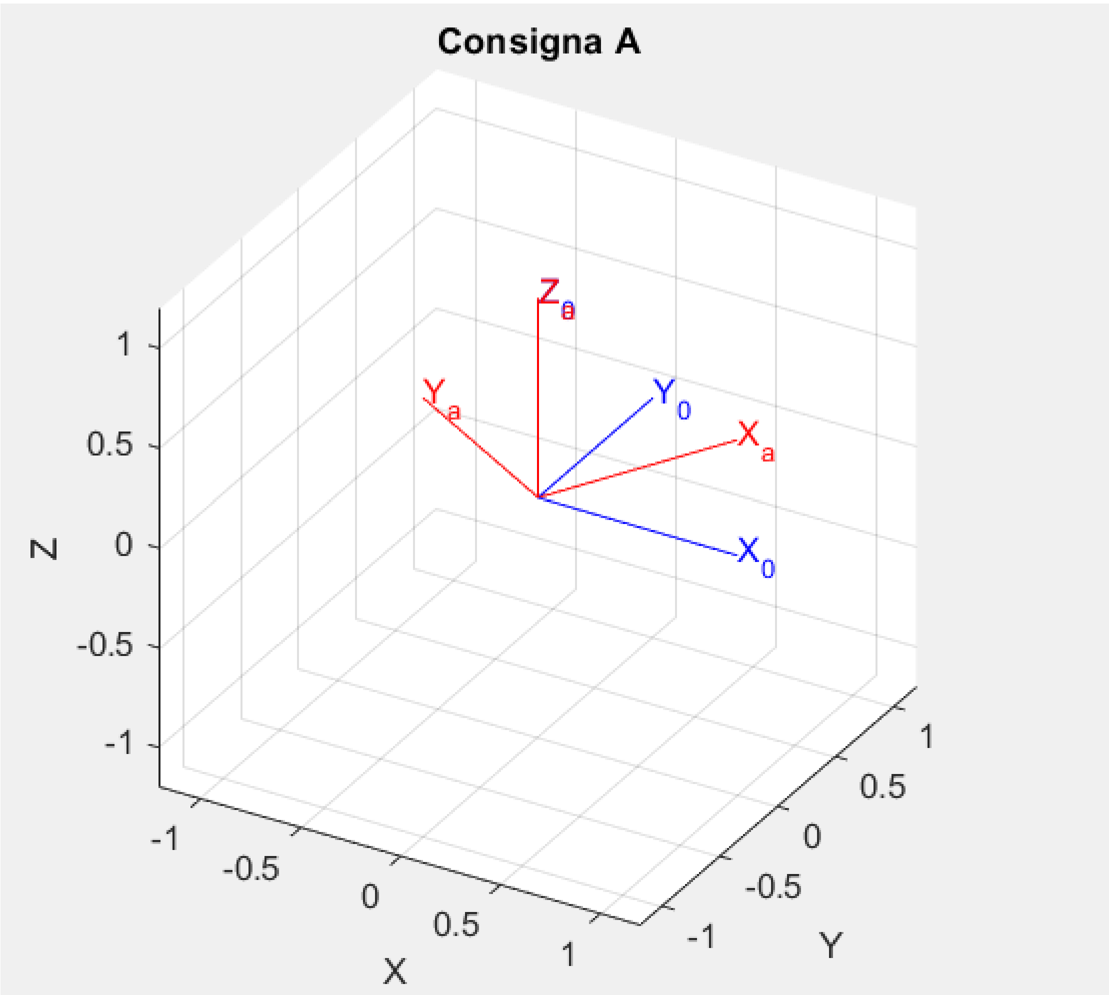
Ejercicio 1: Grafique el sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$ para cada una de las siguientes matrices de rotación:

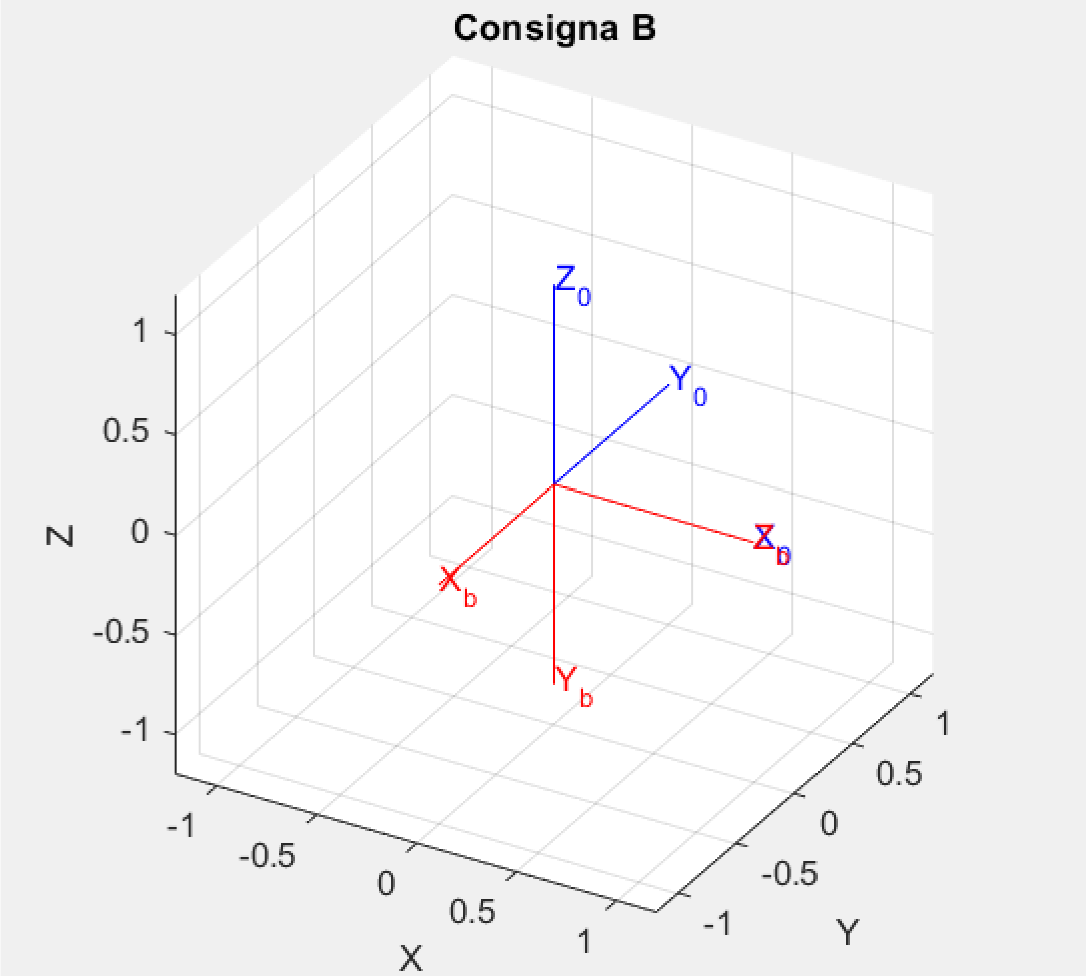
a. $^{O}Rot_{M} = \begin{bmatrix} 0{,}500 & -0{,}866 \\ 0{,}866 & 0{,}500 \end{bmatrix}$

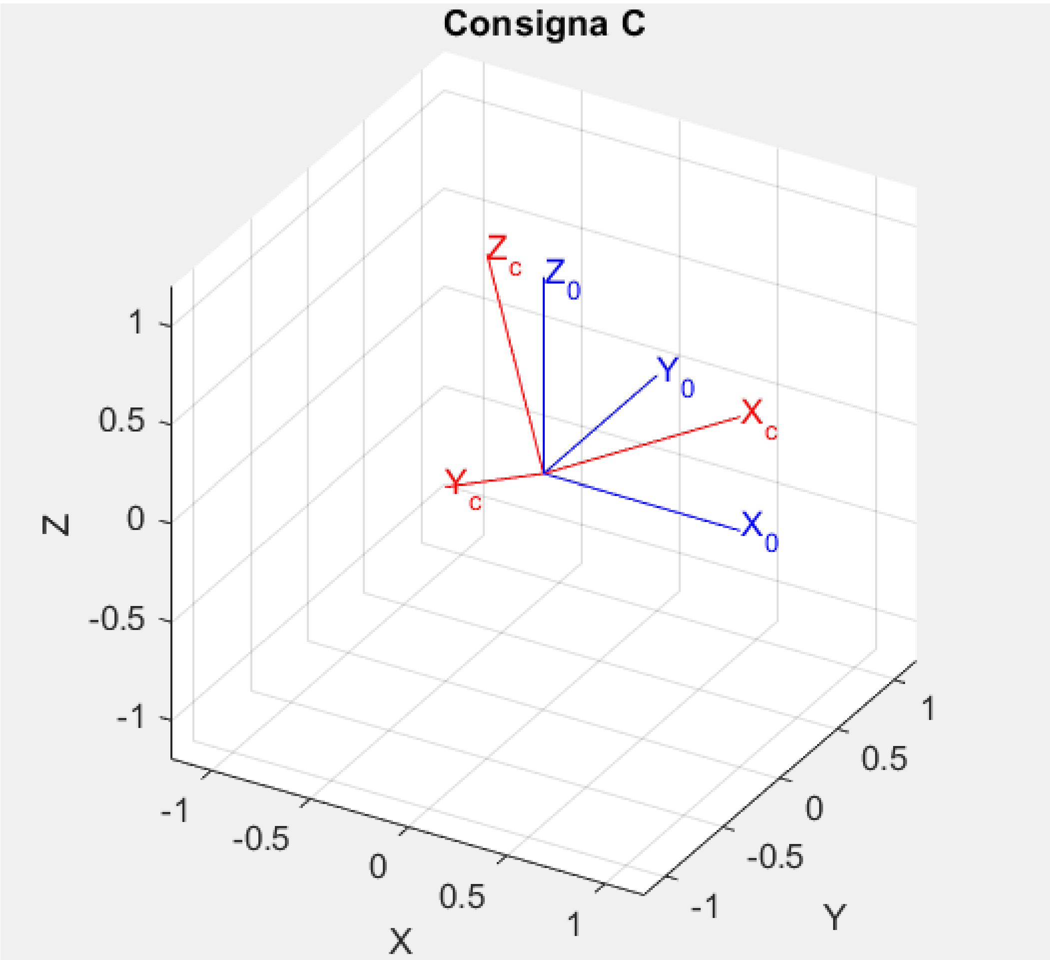
b. $^{O}Rot_{M} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

c. $^{M}Rot_{O} = \begin{bmatrix} 0{,}500 & -0{,}750 & -0{,}433 \\ 0{,}866 & 0{,}433 & 0{,}250 \\ 0 & -0{,}500 & 0{,}866 \end{bmatrix}$

Se recomienda usar el toolbox de “rtb” de Peter Corke para Matlab.




Consigna B
Z0
Y0
Xb
Zb
Yb
Z
X
Y

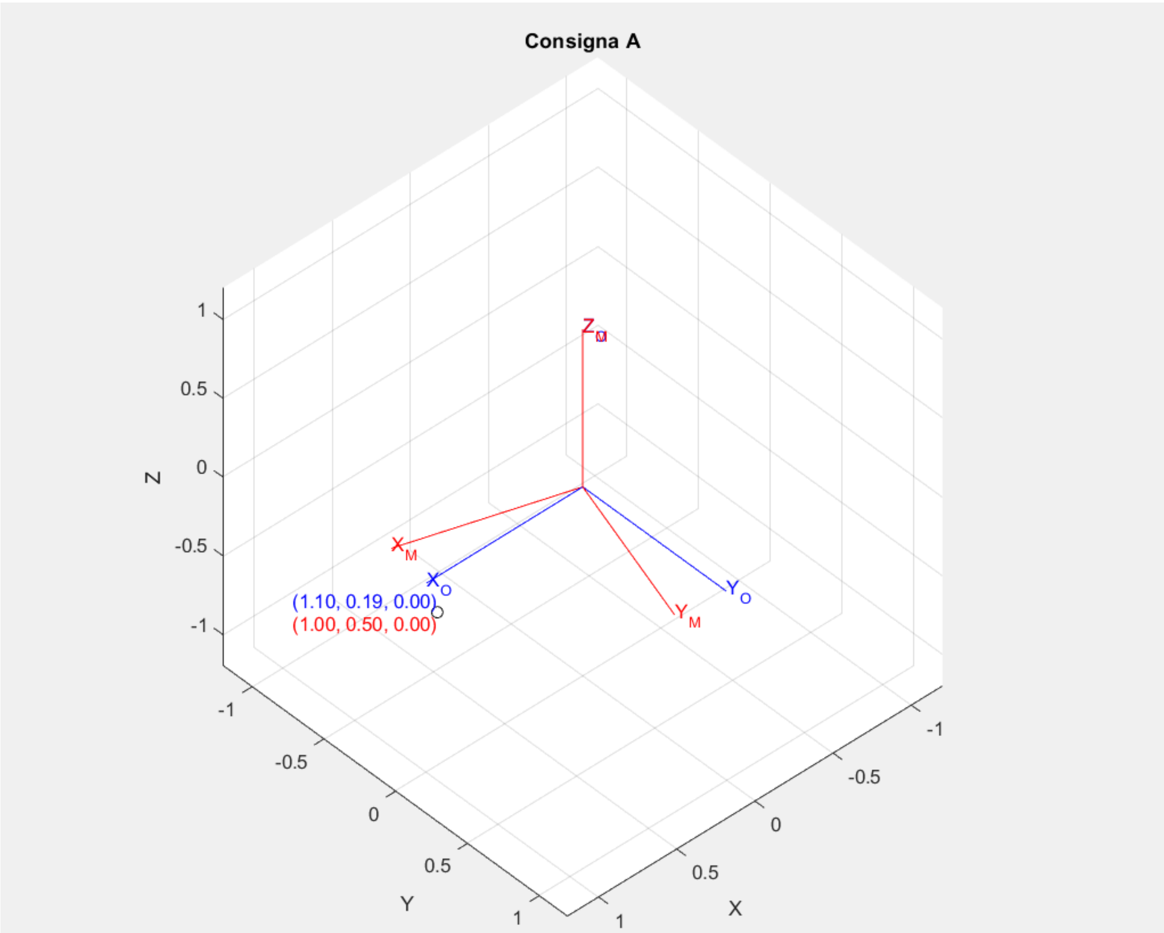

Consigna C
Zc
Z0
Y0
Xc
Yc
X0
Z
X
Y

Ejercicio 2 (***obligatorio***): Exprese cada uno de los siguientes vectores en el sistema de referencia $\{O\}$ sabiendo que sus coordenadas son respecto al sistema $\{M\}$, el cual sufrió la rotación indicada. Realice un gráfico donde se aprecie el vector y sus coordenadas en ambos sistemas.

a. ${}^{M}a = (1 \quad 0{,}5)$; $\{M\}$ rotó de $-17°$ en Z_O
${}^{O}a =$

Solución:
a = -17/180 * pi
Rot = [cos(a) -sin(a) 0
sin(a) cos(a) 0
0 0 1]
v_M = [1; 0.5; 1]
v_O = Rot * v_M

v_O = (-1.1025 0.1858 0)



b. ${}^{M}b = (0 \quad 0 \quad 1)$; $\{M\}$ rotó de 35° en X_O

${}^{O}b =$

Solución:

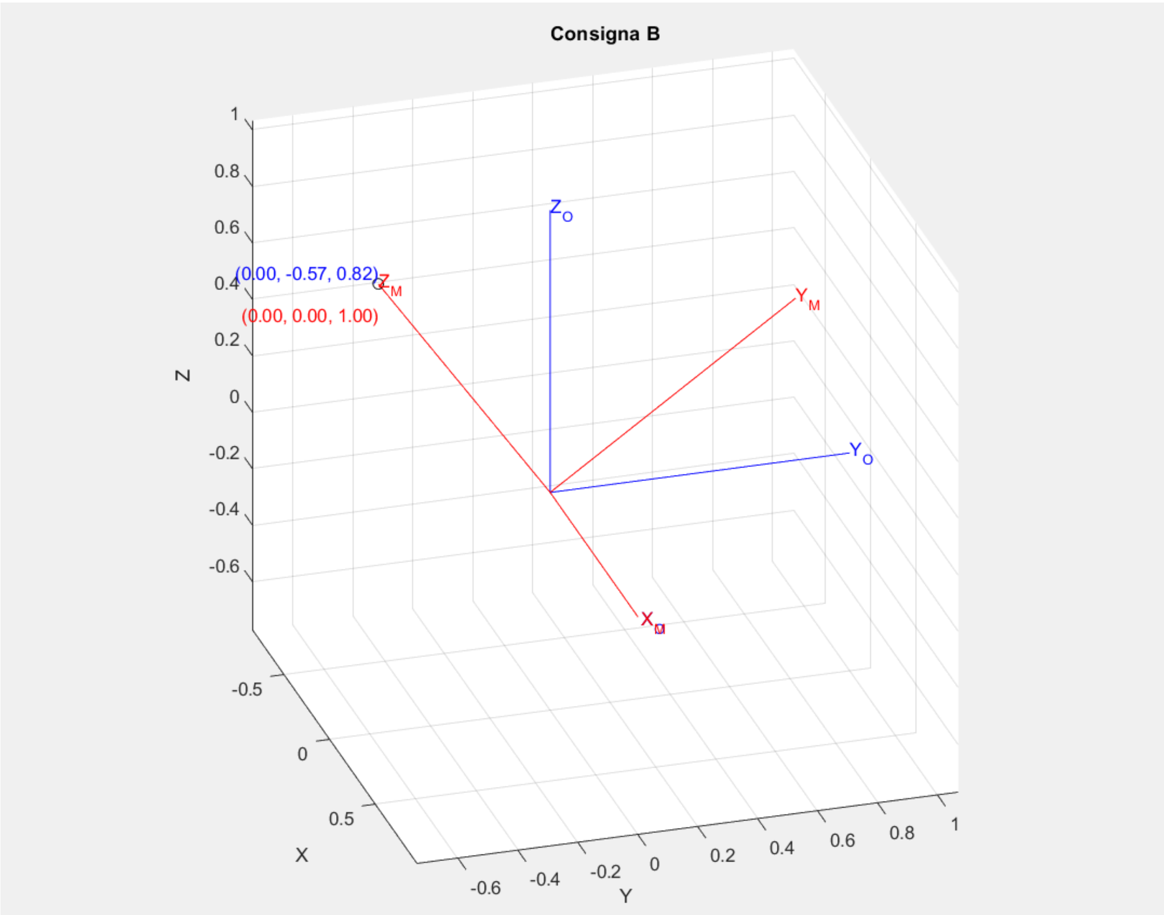
a = 35/180 * pi

Rot = [1 0 0
0 cos(a) -sin(a)
0 sin(a) cos(a)]

v_M = [0; 0; 1]

v_O = Rot * v_M

v_0 = (0 -0.5736 0.8192)

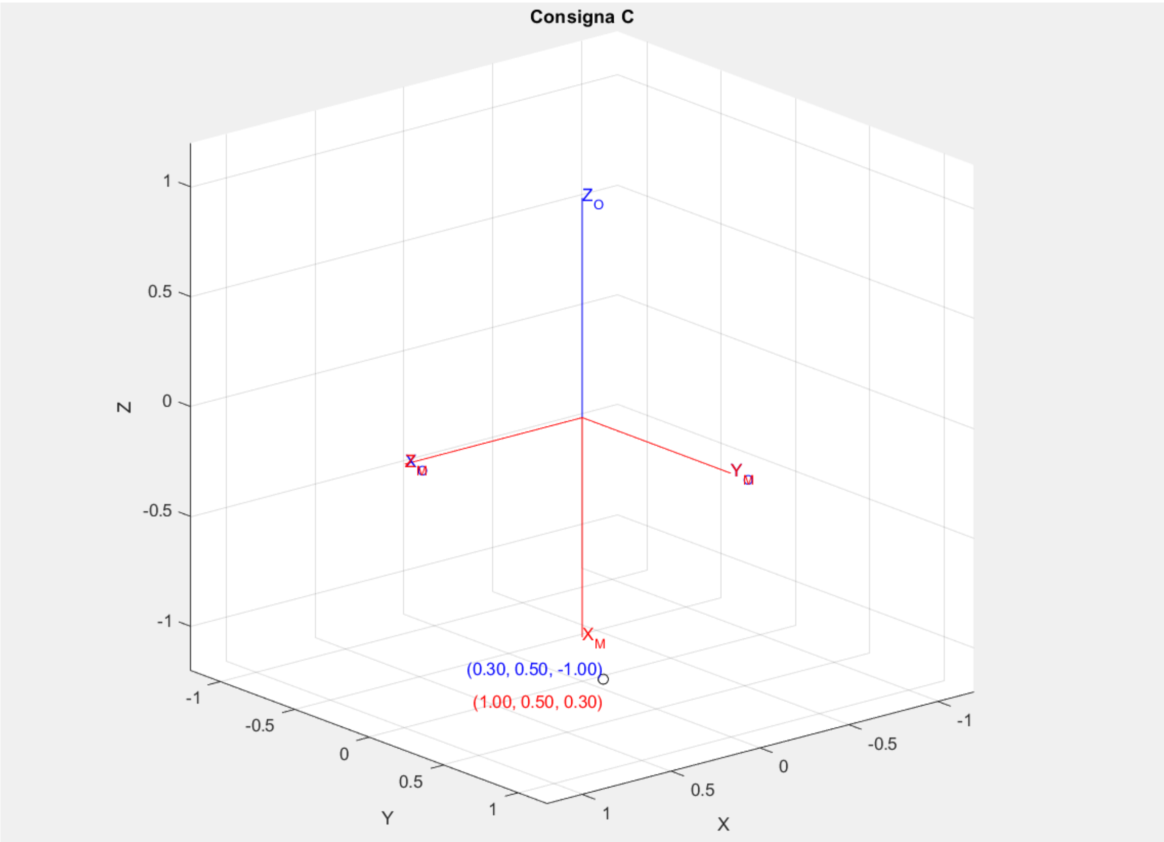


c. ${}^{M}c = (1 \quad 0{,}5 \quad 0{,}3)$; $\{M\}$ rotó de 90° en Y_O
   ${}^{O}c =$

Solución:

a = 90/180 * pi
Rot = [cos(a) 0 sin(a)
0 1 0
-sin(a) 0 cos(a)]
v_M = [1; 0.5; 0.3]
v_O = Rot * v_M

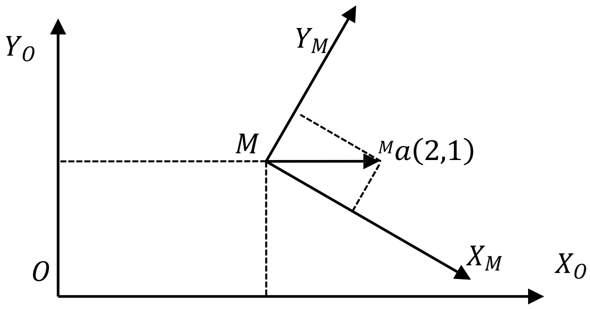
v_0 = (0.3 0.5 -1)



Ejercicio 3: Escriba en forma general las matrices de transformación homogénea que representan los siguientes casos:

a. Traslación pura en el espacio
b. Rotación en el eje X
c. Rotación en el eje Y
d. Rotación en el eje Z.

Ejercicio 4 (***obligatorio***): En la siguiente figura se observa el vector a respecto del sistema $\{M\}$. El punto M respecto de $\{O\}$ es ${}^{O}p_M = (7{,}4)$.



a. Halle, por el método que elija, el ángulo de rotación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.
b. Exprese la matriz de transformación homogénea que describe la posición y orientación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.
c. Use la transformación hallada para representar el vector a respecto del sistema $\{O\}$. Verifique gráficamente el resultado.

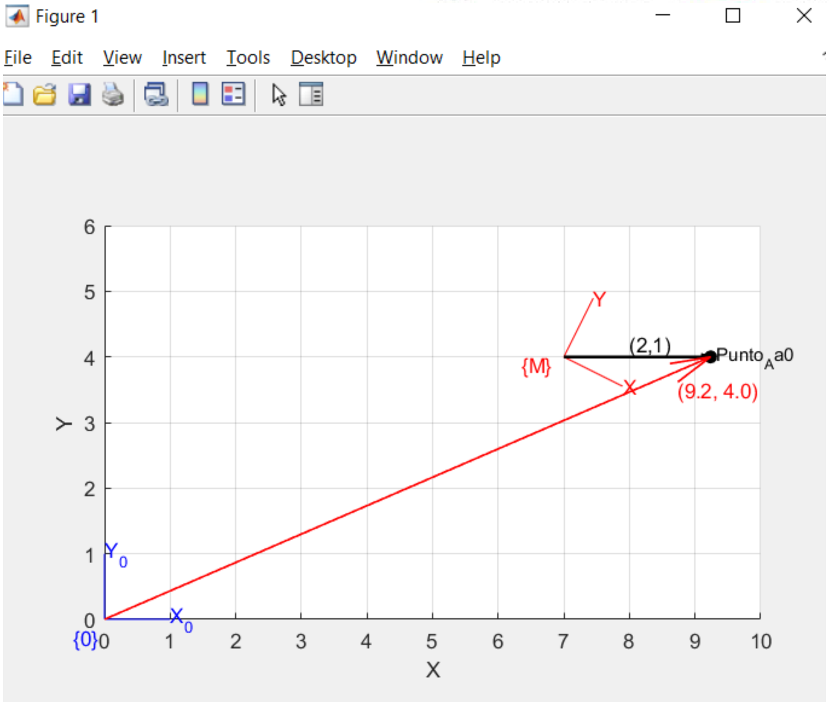
$$\begin{pmatrix} {}^{A}x \\ {}^{A}y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^{A}\boldsymbol{R}_B & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}_{1\times 2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} {}^{B}x \\ {}^{B}y \\ 1 \end{pmatrix}$$

7 + sqrt(2^2 + 1^2) = cos(theta) * 2 - sin(theta) * 1 + 7
4 = sin(theta) * 2 + cos(theta) * 1 + 4

Las coordenadas del punto Ma respecto al marco {M} son dato, y también podemos deducir las coordenadas del punto Ma respecto al marco de referencia {O} ya que el vector Ma es horizontal, y calculando su magnitud podemos deducir entonces las componentes completas del punto Ma respecto a {O}. De esta forma, la única incógnita que tenemos es el ángulo de rotación theta del marco M respecto a un marco con ejes paralelos al marco O y con origen en M.

Si a la ecuación 1 le restamos 2 veces la ecuación 2 obtenemos la siguiente ecuación la cual a partir de allí se utilizó MATLAB para calcular y graficar los vectores y matrices:

```
clc; clear; close all;

% Define la variable simbólica
syms theta
equation = -5*sin(theta) - 1 == 9.2361 - 2*4;  % Define la ecuación
solution = solve(equation, theta);  % Resuelve la ecuación

% Convierte la solución a valor numérico
numeric_solution = double(solution);
disp(numeric_solution);

% Escoge la solución correcta si fuera necesario (aquí asumimos una solución)
angulo = numeric_solution(1);
```

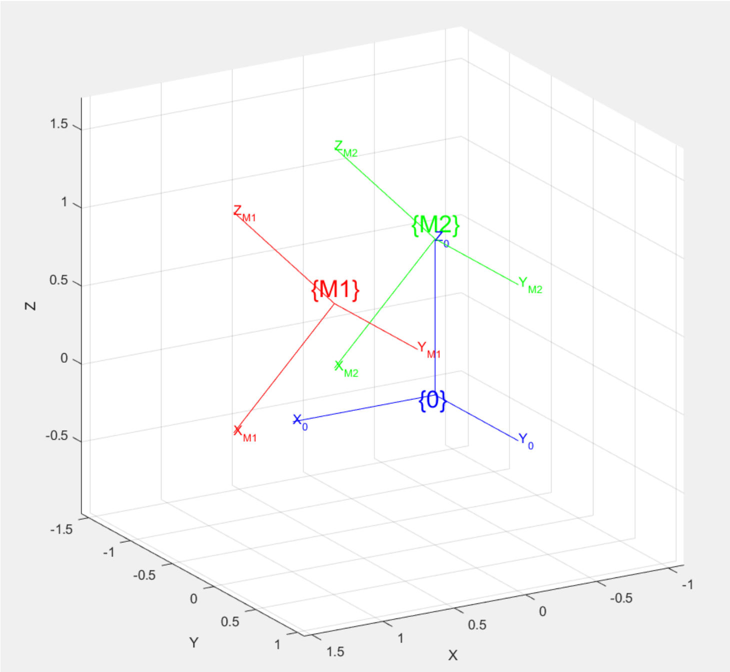


Command Window

```
El angulo es:

 theta = -26.57

La matriz de transformacion homogenea correspondiente es:
    0.8944    0.4472    7.0000
   -0.4472    0.8944    4.0000
         0         0    1.0000

El vector Ma respecto del sistema de coordenadas O es:
    9.2361
    4.0000

fx >>
```

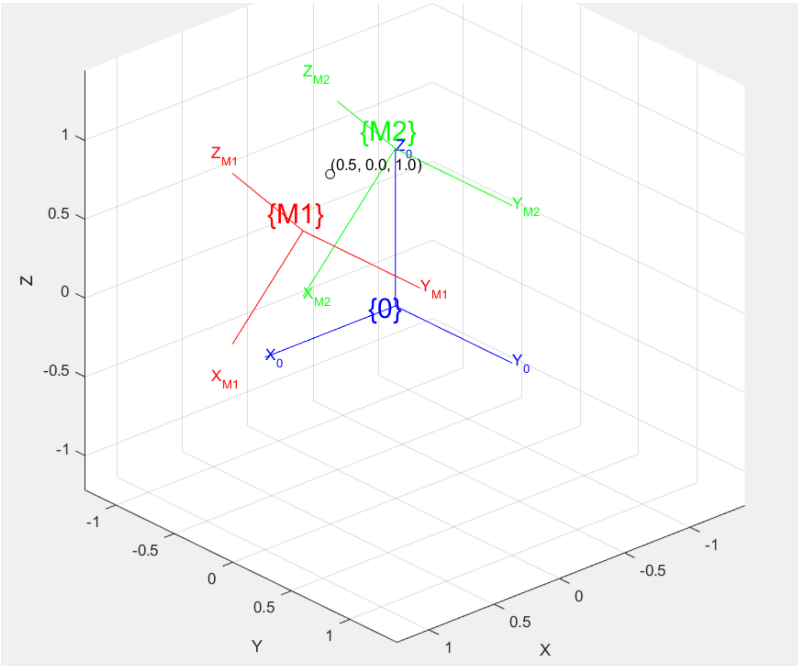
<u>Ejercicio 5</u>: Escriba la matriz de transformación homogénea que representa la posición y orientación del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$ para cada caso. Realice un gráfico donde se aprecie la diferencia.

a. El sistema $\{M\}$ giró 45° respecto del eje Y_M, luego se trasladó un vector ${}^{M}p = (0,0,1)$.
b. El sistema $\{M\}$ se trasladó un vector ${}^{M}p = (0,0,1)$, luego giró 45° respecto del eje Y_M.



Si primero rotamos y después trasladamos, obtenemos el marco M1 rojo. Si primero trasladamos y después rotamos, obtenemos el marco M2 verde.

Ejercicio 6: Exprese el vector ${}^0p = (0.5 \;\; 0 \;\; 1)$ respecto del sistema $\{M\}$ de cada caso del ejercicio anterior.




```
El vector posicion del punto Op respecto del sistema de coordenadas M1 es:
   -0.3536
         0
    0.0607

El vector posicion del punto Op respecto del sistema de coordenadas M2 es:
    0.3536
         0
    0.3536
```

Ejercicio 7: Analizar la siguiente transformación compuesta e indicar V o F. Considere que T representa la posición y orientación de un sistema de referencia $\{M\}$ respecto de otro sistema de referencia $\{O\}$.

$$T = TrotX(\alpha) * Ttras(0,2,0) * TrotY(\beta)$$

a. El sistema $\{M\}$ sufrió una rotación α respecto de X_O, luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_O, y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje. V
b. El sistema $\{M\}$ sufrió una rotación α respecto de X_M, luego una traslación de 2 unidades sobre el eje Y_M, y finalmente una rotación β respecto de este mismo eje. F
c. Un vector p expresado en $\{O\}$ puede expresarse en $\{M\}$ realizando el producto: ${}^{M}p = T.p$ F
d. Un vector p expresado en $\{M\}$ puede expresarse en $\{O\}$ realizando el producto: ${}^{O}p = T.p$ V

Ejercicio 8: En función de las siguientes matrices escritas en forma simbólica halle la expresión correcta para cada caso:

- ${}^{O}T_M$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{M\}$ respecto de $\{O\}$.
- ${}^{M}T_A$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{A\}$ respecto de $\{M\}$.
- ${}^{A}T_B$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{B\}$ respecto de $\{A\}$.
- ${}^{O}T_F$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{F\}$ respecto de $\{O\}$.
- ${}^{F}T_D$: matriz de trasformación homogénea del sistema $\{D\}$ respecto de $\{F\}$.

1. $\{B\}$ respecto de $\{O\}$: ${}^{O}T_B = {}^{O}T_M * {}^{M}T_A * {}^{A}T_B$
2. $\{F\}$ respecto de $\{B\}$: ${}^{B}T_F = ({}^{O}T_M * {}^{M}T_A * {}^{A}T_B)^{-1} * {}^{O}T_F$
3. $\{B\}$ respecto de $\{D\}$: ${}^{D}T_B = ({}^{O}T_F * {}^{F}T_D)^{-1} * ({}^{O}T_M * {}^{M}T_A * {}^{A}T_B)$