Matriz Diagonalizable

Autovectores

Álgebra II

1 Diagonalización de Matriz de T.L.

Dado A $\in \mathbb{R}^{nxn} \Rightarrow$ siempre existe una f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$.

En otras palabras, f es una T.L. y $\|f\|_{CC}$ = A

1.1 Definición

Decimos que A es una matriz diagonalizable si y sólo si, al definir f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal, o sea existe una matriz P = $\|id\|_{BC}$ / $\|f\|_B$ = P$^{-1} \cdot A \cdot P$ *(¿Por qué?)*

1.2 Proposición

A es diagonalizable $\leftrightarrow$ existe una base B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ y escalares λ_i tal que A$\cdot\vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

$\Rightarrow$) **Hipótesis:** A es diagonalizable, o sea si f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal

Tesis: Existen escalares λ_i tal que A$\cdot\vec{v}_i$=λ_i

Demostración: Como $\|f\|_{BB}$ es diagonal $\Rightarrow \|f\|_{BB} = M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Para interpretar esta matriz, recordamos la definición de matriz de T.L. dada una base:

$f(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots 0 \cdot \vec{v}_n = a_{11} \cdot \vec{v}_1$

$f(\vec{v}_2) = 0 \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2 + \dots 0 \cdot \vec{v}_n = a_{22} \cdot \vec{v}_2$

$\vdots$

$f(\vec{v}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots a_{nn} \cdot \vec{v}_n = a_{nn} \cdot \vec{v}_n$

Con lo que queda demostrada la tesis. Veamos ahora la otra implicación.

$\Leftarrow$) **Hipótesis:** $\exists$ base B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ base de R^n y escalares λ_i tal que A$\cdot\vec{v}_i$=λ_i

Tesis: A es diagonalizable

Demostración: Debemos probar que si f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$ entonces $\|f\|_{BB}$ es diagonal.

Para esto, armemos $\|f\|_{BB}$:

$f(\vec{v}_1)$ = A$\cdot\vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow$ la 1ra columna de $\|f\|_B$ será $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\vec{v}_2)$ = A$\cdot\vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow$ la 2da columna de $\|f\|_B$ será $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$f(\vec{v}_n)$ = A$\cdot\vec{v}_n = \lambda_n \cdot \vec{v}_n \Rightarrow$ la n columna de $\|f\|_B$ será $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $\|f\|_B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ que es una matriz diagonal.

2 Autovalores y Autovectores

Dada una matriz A $\in \mathbb{R}^{nxn}$ llamaremos autovalor de A a un número $\lambda \in \mathbb{R}$ si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$ al que llamaremos autovector de A asociado al autovalor λ tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

2.1 Proposiciones

2.1.1 C.L. vectores asociados

Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots \vec{v}_n$ son autovectores de una matriz A asociados a un autovalor λ, entonces cualquier combinación lineal de ellos será autovector de A asociado a λ.

Demostración: Sabiendo que A$\cdot\vec{v}_i = \lambda \cdot \vec{v}_i$

A$\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots \alpha_n\vec{v}_n)$ $\rightarrow$ Planteo C.L. de los vectores

$\alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 + \dots \alpha_n A\vec{v}_n$ $\rightarrow$ Distribuyo A

$\alpha_1\lambda\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda\vec{v}_2 + \dots \alpha_n\lambda\vec{v}_n$ $\rightarrow$ Uso hipótesis

$\lambda \cdot (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots \alpha_n\vec{v}_n)$ $\rightarrow$ Factor Común λ

Por lo tanto A$\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots \alpha_n\vec{v}_n) = \lambda \cdot (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots \alpha_n\vec{v}_n)$

2.1.2 Relación entre autovalor y determinante

λ es un autovalor asociado a $\vec{v}$, autovector de una matriz A $\Leftrightarrow$ |A - λI|= 0

Hipótesis: A $\in \mathbb{R}^{nxn}$, λ y $\vec{v}$ autovalor y autovector de A tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ siendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ (¿Por qué?)

Tesis: |A - λI|= 0

Demostración: En $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v}$ es solución del sistema homogéneo (A - λI)$\cdot\vec{x} = \vec{0}$ (¿Por qué?). Luego este es un sistema compatible indeterminado: por lo tanto el determinante de su matriz es = 0. Es decir, |A - λI|= 0

La otra implicación queda a cargo de ustedes , pues es muy parecida a ésta

2.1.3 Concepto Geométrico

f: Dada $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podemos decir que $\vec{x}$ es autovector de f si al transformarse conserva la misma dirección.

Ejemplos:

a) f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $f(x, y) = (x, -y)$

b)f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / $f(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$

Luego halla los autovalores y autovectores de A y verifica lo que dice el enunciado anterior.

2.2 Propiedades de los Autovectores