Transformaciones Lineales

Álgebra II

Definiciones:

1) Dado V y W dos espacios vectoriales, decimos que una función $f : V \rightarrow W$ es una transformación lineal u homomorfismo si:

a) $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

b) $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$

2) Dada $f : V \rightarrow W$ una T.L. definimos:

a) $N_u(f) = \{\vec{x} \in V \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}_w\}$

b) $Im(f) = \{\vec{y} \in W \ / \ \exists \ \vec{x} \in V \ / \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

c) Dado S subespacio de V,

$f(S) = \{\vec{y} \in W \ / \ \exists \ \vec{x} \in S \ / \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

d) Dado T subespacio de W,

$f^{-1}(T) = \{\vec{x} \in V \ / \ f(\vec{x}) \in W\}$

3) Dado V y W e.v.s. y $f : V \rightarrow W$ / f es T.L. entonces $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$

Hipótesis: V y W espacios vectoriales, $f : V \rightarrow W \ / \ f$ es T.L.

Tesis: $f(\vec{0}_v) = f(\vec{0}_w)$

Demostración:

$\vec{0}_v = 0 \cdot \vec{0}_v \Rightarrow$

$f(\vec{0}_v) = f(0 \cdot \vec{0}_v) = 0 \cdot f(\vec{0}_v)$ (¿Por qué?)

Pero $f(\vec{0}_v) \in$ W $\Rightarrow 0 \cdot f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$

4) Dado V, W e.v. y $f : V \rightarrow W$ entonces $Im(f)$ es subespacio de W

Hipótesis: V y W espacios vectoriales, $f : V \rightarrow W \ / \ f$ es T.L.

Tesis: $Im(f)$ es un subespacio de W

Demostración: Debemos probar las 3 condiciones para que sea subespacio .

a) Sean $\vec{x}$ e $\vec{y} \in Im(f)$,

Entonces existen $\vec{a}$ y $\vec{b} \in$ V / $f(\vec{a}) = \vec{x}$ y $f(\vec{b}) = \vec{y}$

Luego $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ (¿Por qué?) $= \vec{x}+\vec{y}$

Como $\vec{a}+\vec{b} \in$ V (¿Por qué?) entonces $\vec{x}+\vec{y} \in Im(f)$

b) Sea $\vec{x} \in Im(f)$, entonces $\exists\ \vec{a} \in V\ /\ f(\vec{a}) = \vec{x}$

Ahora $\alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f(\vec{a}) = f(\alpha \cdot \vec{a})$ (¿Por qué?)

Y como $\alpha \cdot \vec{a} \in$ V (¿Por qué?) $\Rightarrow \alpha \cdot \vec{x} \in Im(f)$

c) Como $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w \Rightarrow \vec{0}_w \in$ W

5) Si $f : V \to W$ es una T.L. entonces transforma una base de V en un S.G. de $Im(f)$

Hipótesis: $f : V \to W\ /\ f$ es T.L. , $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ base de V

Tesis: $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)\}$ es S.G. de $Im(f)$

Demostración: Sea $\vec{x} \in Im(f) \Rightarrow \exists\ \vec{a} \in V\ /\ f(\vec{a}) = \vec{x}$

Como $\vec{a} \in V$ está generado por los elementos de una base de V, se lo puede escribir como:

$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$

Entonces también:

$f(\vec{a}) = f(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n)$

Como f es T.L. entonces aplico las dos propiedades y nos queda:

$\vec{x} = f(\vec{a}) = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n)$

Entonces $\vec{x}$ está generado por $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)\}$

6) Clasificación

Si $f : V \to W$ es una T.L. , entonces

- f es un monomorfismo $\Leftrightarrow f$ es inyectiva
- f es un epimorfismo $\Leftrightarrow f$ es suryectiva
- f es un isomorfismo $\Leftrightarrow f$ es biyectiva

7) f es monomorfismo $\Leftrightarrow N_u(f) = \{\vec{0}\}$

$\Longrightarrow$

Hipótesis: V y W e.v.s. y $f : V \to W\ /\ f$ es T.L.

f es monomorfismo, o sea si $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

Tesis: $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

Demostración: $\vec{0}_v \in N_u(f)$ porque $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$.

Tomemos un $\vec{x} \in N_u(f)$, entonces $f(\vec{x}) = \vec{0}_w$.

Luego, por ser monomorfismo, $\vec{x} = \vec{0}$. O sea $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

$\Longleftarrow$

Hipótesis: V y W e.v.s. y $f : V \rightarrow W$ / f es T.L. y $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

Tesis: f es monomorfismo, o sea si $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

Demostración: Sean $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2 \in$ V / $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$

Entonces $f(\vec{x}_1)$ - $f(\vec{x}_2) = \vec{0}_w$

$\Rightarrow f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}_w$ (¿Por qué?)

$\Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in N_u(f)$, pero como $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$ resulta:

$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}_v \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

8) Si f es un monomorfismo, entonces transforma una base del dominio en una base de $Im(f)$

Hipótesis: $f : V \rightarrow W$ / f es monomorfismo (O sea es T.L. y $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$)

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ base de V

Tesis: A= $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)\}$ es base de $Im(f)$

Demostración: Debemos probar que A es un conjunto L.I. y S.G. de $Im(f)$

Que es S.G. de $Im(f)$ ya lo sabemos (¿Por qué?). Vamos a probar que A es un conjunto L.I.

Sea $\beta_1 f(\vec{e}_1) + \beta_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \beta_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_w \Rightarrow$

$f(\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n) = \vec{0}_w$

Entonces $\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n \in N_u(f)$. Pero $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

Por lo tanto $\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n = \vec{0}_v$

Y como $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ es un conjunto L.I. $\Rightarrow$

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$

Luego A es un conjunto L.I. y por lo tanto base de W.

9) Teorema de la dimensión de las Transformaciones Lineales

Si $f : V \rightarrow W$ es una T.L. entonces $dim(N_u(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)$

Hipótesis: $f : V \rightarrow W$ es una T.L.

Tesis: $dim(N_u(f)) + dim(Im(f)) = dim(V)$

Demostración: Sea B = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r\}$ una base de $N_u(f)$

Extendemos B a una base de V, o sea:

B' = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_r, \vec{f}_1, \vec{f}_2, \ldots, \vec{f}_p\}$ base de V

Consideremos el conjunto C igual a los transformados de los elementos de B':

C = $\{\vec{0}, \vec{0}, \ldots, \vec{0}, f(\vec{f}_1), f(\vec{f}_2), \ldots, f(\vec{f}_p)\}$

C es un S.G. de la imagen (¿Por qué?)

Tomamos C' = $\{f(\vec{f_1}), f(\vec{f_2}), \ldots, f(\vec{f_p})\}$. C' sigue siendo un S.G. de $Im(f)$ porque el $\vec{0}$ no genera nada.

Probemos ahora que C' es un conjunto L.I.

Sea $\alpha_1 f(\vec{f_1}) + \alpha_2 f(\vec{f_2}) + \ldots + \alpha_p f(\vec{f_p}) = \vec{0}$, entonces:

$f(\alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2} + \ldots + \alpha_p \vec{f_p}) = \vec{0}$

O sea $\alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2} + \ldots + \alpha_p \vec{f_p} \in N_u(f)$, entonces lo puedo escribir como C.L. de la base de $N_u(f)$:

$\alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2} + \ldots + \alpha_p \vec{f_p} = \beta_1 \vec{e_1} + \beta_2 \vec{e_2} + \ldots + \beta_r \vec{e_r}$

Si paso restando me queda:

$\alpha_1 \vec{f_1} + \alpha_2 \vec{f_2} + \ldots + \alpha_p \vec{f_p} - \beta_1 \vec{e_1} - \beta_2 \vec{e_2} - \ldots + \beta_r \vec{e_r} = \vec{0}$

Pero esto es una C.L. igualada a $\vec{0}$ de vectores L.I. (¿Por qué?)

Por lo tanto $\alpha_i = 0$ y $\beta_i = 0$. $\Rightarrow$ C' es L.I.

O sea C' es una base de $Im(f)$.

$\Rightarrow dim(V) = r + p$, $dim(N_u(f))$ = r, $dim(Im(f))$ = p.

Con lo que queda demostrada la tesis.

10) Teorema fundamental de las transformaciones lineales

Sean V y W e.v.s., B = $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ base de V y $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_p}\}$ elementos cualesquiera de W, entonces **existe** una **única** T.L. $f : V \to W \ / \ f(\vec{v_i}) = \vec{w_i}$ para todo i.

a) Existencia:

Hipótesis: V y W e.v.s., B = $\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$ base de V y $\{\vec{w_1}, \vec{w_2}, \ldots, \vec{w_p}\}$ elementos de W

Tesis: existe T.L. $f : V \to W \ / \ f(\vec{v_i}) = \vec{w_i}$ para todo i.

Demostración: Vamos a definir una función $f : V \to W$. O sea para cada $\vec{x} \in V$ debemos hacerle corresponder un único elemento de W.

Sea $\vec{x} \in V$, entonces existen $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p)$ únicos tal que: $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e_1} + \alpha_2 \vec{e_2} + \ldots + \alpha_p \vec{e_p}$ (¿Por qué?)

Defino $f(\vec{x}) = \alpha_1 \vec{w_1} + \alpha_2 \vec{w_2} + \ldots + \alpha_p \vec{w_p}$ (¿Está bien definida?)

Debemos ahora probar que está función así definida es una T.L.

i) $f(\vec{x} + \vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ para todo $\vec{x}$ e $\vec{y} \in$ V

Sea $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = \delta_1 \vec{e_1} + \delta_2 \vec{e_2} + \ldots + \delta_p \vec{e_p}$

Entonces $f(\vec{x}) = \delta_1 \vec{w_1} + \delta_2 \vec{w_2} + \ldots + \delta_p \vec{w_p}$ (¿Por qué?)

Sea $\vec{y} \in V \Rightarrow \vec{y} = \mu_1 \vec{e_1} + \mu_2 \vec{e_2} + \ldots + \mu_p \vec{e_p}$

Entonces $f(\vec{y}) = \mu_1 \vec{w_1} + \mu_2 \vec{w_2} + \ldots + \mu_p \vec{w_p}$

Por lo tanto $\vec{x} + \vec{y} = \delta_1 \vec{e_1} + \delta_2 \vec{e_2} + \ldots + \delta_p \vec{e_p} + \mu_1 \vec{e_1} + \mu_2 \vec{e_2} + \ldots + \mu_p \vec{e_p} =$

$= (\delta_1 + \mu_1)\vec{e_1} + (\delta_2 + \mu_2)\vec{e_2} + \ldots + (\delta_p + \mu_p)\vec{e_p}$

Escribimos entonces $f(\vec{x}+\vec{y})$ y $f(\vec{x}) + f(\vec{y})$

$f(\vec{x}+\vec{y}) = (\delta_1+\mu_1)\vec{w}_1 + (\delta_2+\mu_2)\vec{w}_2 + \ldots + (\delta_p+\mu_p)\vec{w}_p$

$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = \delta_1\vec{w}_1 + \delta_2\vec{w}_2 + \ldots + \delta_p\vec{w}_p + \mu_1\vec{w}_1 + \mu_2\vec{w}_2 + \ldots + \mu_p\vec{w}_p$

$f(\vec{x}) + f(\vec{y}) = (\delta_1+\mu_1)\vec{w}_1 + (\delta_2+\mu_2)\vec{w}_2 + \ldots + (\delta_p+\mu_p)\vec{w}_p$

Como $f(\vec{x}+\vec{y}) = f(\vec{x}) + f(\vec{y})$ queda demostrado.

ii) Sea $\vec{h} \in V \Rightarrow \vec{h} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_p\vec{e}_p$

$\alpha\vec{h} = \alpha(\beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \ldots + \beta_p\vec{e}_p) = (\alpha\beta_1)\vec{e}_1 + (\alpha\beta_2)\vec{e}_2 + \ldots + (\alpha\beta_p)\vec{e}_p$

Luego $f(\alpha\vec{h}) = (\alpha\beta_1)\vec{w}_1 + (\alpha\beta_2)\vec{w}_2 + \ldots + (\alpha\beta_p)\vec{w}_p$

Pero $f(\vec{h}) = \beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \ldots + \beta_p\vec{w}_p$

Y también $\alpha \cdot f(\vec{h}) = \alpha \cdot (\beta_1\vec{w}_1 + \beta_2\vec{w}_2 + \ldots + \beta_p\vec{w}_p) \Rightarrow$

$\alpha \cdot f(\vec{h}) = (\alpha\beta_1)\vec{w}_1 + (\alpha\beta_2)\vec{w}_2 + \ldots + (\alpha\beta_p)\vec{w}_p$

Como $f(\alpha\vec{h}) = \alpha \cdot f(\vec{h})$ queda demostrado.

Por lo tanto hemos demostrado **i)** y **ii)** y hemos probado que f así definida es una T.L.

Falta probar que esta f cumple con la condición que $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ para todo i.

Pero $\vec{e}_1 = 1 \cdot \vec{e}_1 + 0 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_p$

$\Rightarrow f(\vec{e}_1) = \vec{w}_1$

$\vec{e}_2 = 0 \cdot \vec{e}_1 + 1 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + 0 \cdot \vec{e}_p$

$\Rightarrow f(\vec{e}_2) = \vec{w}_2$

De la misma manera se demuestra que $f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$

b) Unicidad:

Supongamos que existen 2 T.L. f y $g : V \to W \ / \ f(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$ y $g(\vec{e}_i) = \vec{w}_i$

Queremos demostrar que $f = g$.

O sea $f(\vec{x}) = g(\vec{x})$ para todo $\vec{x} \in V$

Sea $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = \theta_1\vec{e}_1 + \theta_2\vec{e}_2 + \ldots + \theta_p\vec{e}_p$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\theta_1\vec{e}_1 + \theta_2\vec{e}_2 + \ldots + \theta_p\vec{e}_p)$.

$\Rightarrow f(\vec{x}) = \theta_1 f(\vec{e}_1) + \theta_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \theta_p f(\vec{e}_p)$. (¿Por qué?)

$\Rightarrow f(\vec{x}) = \theta_1\vec{w}_1 + \theta_2\vec{w}_2 + \ldots + \theta_p\vec{w}_p$.

De manera similar planteamos $g(\vec{x})$

$\Rightarrow g(\vec{x}) = g(\theta_1\vec{e}_1 + \theta_2\vec{e}_2 + \ldots + \theta_p\vec{e}_p)$.

$\Rightarrow g(\vec{x}) = \theta_1 g(\vec{e}_1) + \theta_2 g(\vec{e}_2) + \ldots + \theta_p g(\vec{e}_p)$.

$\Rightarrow g(\vec{x}) = \theta_1\vec{w}_1 + \theta_2\vec{w}_2 + \ldots + \theta_p\vec{w}_p$.

Entonces $f = g$, por lo que la transformación lineal debe ser única.