Espacios Vectoriales

Álgebra II

1 Definición

Sea V un conjunto cuyos elementos se llamarán vectores en el cual se definen dos operaciones :

- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar k $\in \mathbb{R}$

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades de la Suma:

1. **Cerrada:** Si $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$
2. **Conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
3. **Asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. **Elemento Neutro:** $\exists\ \vec{0} \in V\ /\ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}\ \forall\ \vec{x} \in V$
5. **Vector Inverso:** $\forall\ \vec{x} \in$ V, existe un vector inverso -$\vec{x}$ / $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

Propiedades del producto:

1. **Cerrada:** Si $\vec{x} \in V \Rightarrow k \cdot \vec{x} \in V$
2. **Neutro:** $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}\ \forall\ \vec{x} \in V$
3. **Asociativa:** $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{x}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{x}$
4. **Distributiva:** $k \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = k \cdot \vec{x} + k \cdot \vec{y}$
5. **Distributiva:** $(k_1 + k_2) \cdot \vec{x} = k_1 \cdot \vec{x} + k_2 \cdot \vec{x}$

2 Subespacios

Definición: Un subconjunto S no vacío de V e.v.es un subespacio de V si la suma y el producto definidas en V estructuran también a S como un espacio vectorial

Propiedades necesarias para que S $\subseteq$ V sea subespacio

1. Si $\vec{x} \in S$ e $\vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$
2. Si $\vec{x} \in S \Rightarrow k \cdot \vec{x} \in S$
3. $\vec{0} \in S$

2.1 Definiciones

1. **Combinación Lineal:** $\vec{x}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_k$ si existen escalares $k_1, k_2, ...k_k$ tal que $\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + ...k_k\vec{x}_k$
2. **Sistema de Generadores:** Un conjunto de vectores M = $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_k\}$ es un sistema de generadores de V $\Leftrightarrow \forall\ \vec{v} \in V, \vec{v} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ...\alpha_k\vec{x}_k$
3. **Conjunto de vectores linealmente independiente y linealmente dependiente:**
   Sea M = $\{\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_k\ \}$ tal que $\vec{v}_i \in$ V $\forall$ i, y sea $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ...\alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$ (o sea una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$)
   Nos queda entonces un sistema lineal homogéneo que puede tener:

   a) Solución Única: La unica solución es la trivial, por lo que M es un conjunto **Linealmente Independiente (L.I.)**
   b) Infinitas Soluciones: M es un conjunto **Linealmente Dependiente (L.D.)**

3 Base de un Espacio Vectorial

Definición: Dado V e.v. y B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ tal que $\forall$ $\vec{v}_i \in$ V decimos que B es una base de V si y sólo si se cumple:

a) B es un conjunto L.I.

b) B es un sistema de generadores de V

Ejemplos de bases canónicas:

- **En $\mathbf{R}^n$:** (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0),... (0,0,0...,1)
- **En $\mathbf{R}^{2x2}$:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **En $\mathbf{P}_n$:** {1, x, x^2,... x^n }

3.1 Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición: Se llama dimensión de un espacio vectorial V a la cantidad de elementos que tiene una base.

4 Coordenadas de un vector respecto de una base

Dado B = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ una base de V (e.v.) y dado $\vec{x} \in V$

$\Rightarrow$ Se denomina a los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ tal que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ...\lambda_k\vec{e}_k$ como **coordenadas de** $\vec{x}$ respecto de la base B y se escribe $\vec{x}]_B$

Por lo tanto: $\vec{x}]_B = (\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n)$

5 Proposiciones

5.1 Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas

Hipótesis: V e.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ base de V, $\vec{x} \in V$

Tesis: Existe una única n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ tal que $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ...\alpha_n\vec{e}_n$

Demostración: Supongo que existen 2 n-uplas que satisfacen la definición de coordenadas respecto de una base, es decir:

$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ...\alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + ...\beta_n\vec{e}_n$

Pasando al segundo miembro y sacando factor común $\vec{e}_i$ nos queda:

$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \vec{e}_2 + ...(\alpha_n - \beta_n) \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$

Como $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ es una base de V, es decir se trata de vectores L.I. Esto significa que si tengo una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$, sus escalares son $= 0$.

Por lo tanto, $\alpha_i = \beta_i$ $\forall$ i.

5.2 Si un espacio vectorial tiene una base de n elementos , entonces cualquier conjunto de n+1 elementos es un conjunto l.d.

Hipótesis: V e.v. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ base de V, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ conjunto de n+1 elementos

Tesis: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ es L.D.

Demostración: Para demostrar si un conjunto es l.i. debo probar que cualquier combinación lineal de sus vectores igualada a $\vec{0}$ tiene una única solución (La solución trivial). Para probar que es L.D., una combinación lineal de dichos vectores igualada a $\vec{0}$ tendrá infinitas soluciones.

Hagamos entonces:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1} = \vec{0} \tag{1}$$

Comos los $\vec{x}_i$ son vectores pertenecientes a V, y B es una base de de V, entonces cada uno de ellos podrá escribirse como combinación lineal de los vectores de V:

$\vec{x}_1 = \alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{12} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \vec{e}_n$

$\vec{x}_2 = \alpha_{21} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \vec{e}_n$

$\vdots$

$\vec{x}_{n+1} = \alpha_{n+1,1} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{n+1,2} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n} \cdot \vec{e}_n$

Reemplazando en la ecuación (1) nos queda:

$\lambda_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{12} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \vec{e}_n) + \lambda_2 \cdot (\alpha_{21} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \vec{e}_n) + \ldots \lambda_{n+1} \cdot (\alpha_{n+1,1} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{n+1,2} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n} \cdot \vec{e}_n)$

Sacando factor $\vec{e}_i$ nos queda: $(\lambda_1 \cdot \alpha_{11} + \lambda_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1}) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda_1 \cdot \alpha_{12} + \lambda_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2}) \cdot \vec{e}_2 + \ldots + (\lambda_1 \cdot \alpha_{1n} + \lambda_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n}) \cdot \vec{e}_n$

(Continúa → Demostración 5.2)

Como tenemos una combinación lineal igualada a cero de vectores L.I. sus escalares serán todos iguales a 0

Entonces nos queda:

$\lambda_1 \cdot \alpha_{11} + \lambda_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1} = 0$

$\lambda_1 \cdot \alpha_{12} + \lambda_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2} = 0$

$\vdots$

$\lambda_1 \cdot \alpha_{1n} + \lambda_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n} = 0$

Observamos que nos quedan **n** ecuaciones.

A su vez, los α_{ij} son datos, pues son las coordenadas de los vectores dados (las cuales son únicas)

Por otro lado, los λ_i son incógnitas, y hay **n+1**.

Es decir, tenemos un sistema con más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto la ecuación (1) tiene **infinitas** soluciones.

Concluimos entonces que el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ es L.D.

5.3 Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos

Hipótesis: V e.v. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ bases de V

Tesis: Ambas bases tienen la misma cantidad de elementos. (n = p)

Demostración: Supongo $n > p$. Como tengo una base de p elementos, si tengo un conjunto con al menos un elemento mas, será L.D.

Entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ sería un conjunto L.D. Absurdo pues al ser una base debe ser un conjunto L.I.

Lo mismo ocurre al asumir $p > n$. Por lo tanto la única opción posible es $\mathbf{n = p}$

5.4 Si un conjunto de vectores pertenecientes a un e.v. es un conjunto l.d.entonces alguno de ellos es combinación lineal de los demás

Hipótesis: V e.v. A $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ conjunto L.D. de vectores pertenecientes a V

Tesis: $\exists$ j tal que $\vec{e}_j = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot \vec{e}_{j-1} + \alpha_{j+1} \cdot \vec{e}_{j+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$

Demostración: Como A es un conjunto L.D. , dada una combinación lineal de ellos igualada a 0 , el sistema homogéneo que obtengo tendrá infinitas soluciones.

Entonces, dada $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$ existirá una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ no todos nulos que satisfagan la ecuación.

Supongamos $\alpha_1 \neq 0$ entonces podré despejar

$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{e}_n$

Por lo que ha quedado expresado uno de los vectores como combinación lineal de los demás.

5.5 Si un S.G. de un espacio vectorial V es L.D. entonces existe un subconjunto de él de n-1 elementos que es S.G. de V .

Hipótesis: V e.v. B= $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ S.G. de V, B conjunto L.D.

Tesis: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_n$ S.G. de V

Demostración: Quiero probar que algo es S.G. de V, entonces tomo un $\vec{x} \in$ V. Entonces seguro $\vec{x} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \cdots + \beta_n\vec{e}_n$ (¿Por qué?). Como B es un conjunto L.D. entonces uno de los vectores será combinación lineal de los demás. Supongamos $\vec{e}_1$ o sea:
$\vec{e}_1 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_n$. Reemplazando en $\vec{x}$ nos queda:
$\vec{x} = \beta_1 \cdot (-\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \cdots - \dfrac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_n) + \beta_2\vec{e}_2 + \cdots + \beta_n\vec{e}_n$