

Matriz de Transformación Lineal

Álgebra II

1 Matriz de una Transformación Lineal dada una base de dominio y una base del codominio

Dada $f : V \rightarrow W$ una T.L.

$B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V

$B' = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_p\}$ una base de W

\Rightarrow existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$ / para todo $\vec{x} \in V$, $f(\vec{x})]_{B'} = A \cdot \vec{x}]_B$

Sea $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = \alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n)$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$ (¿Por qué?)

Pero,

$$f(\vec{v}_1) = \beta_{11} \vec{w}_1 + \dots + \beta_{1p} \vec{w}_p$$

$$f(\vec{v}_2) = \beta_{21} \vec{w}_1 + \dots + \beta_{2p} \vec{w}_p$$

\vdots

$$f(\vec{v}_n) = \beta_{n1} \vec{w}_1 + \dots + \beta_{np} \vec{w}_p$$

Reemplazando en $f(\vec{x}) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$ nos queda:

$$f(\vec{x}) = \alpha_1 (\beta_{11} \vec{w}_1 + \dots + \beta_{1p} \vec{w}_p) + \alpha_2 (\beta_{21} \vec{w}_1 + \dots + \beta_{2p} \vec{w}_p) + \dots + \alpha_n (\beta_{n1} \vec{w}_1 + \dots + \beta_{np} \vec{w}_p)$$

Aplicando propiedad distributiva y sacando factor común nos queda:

$$f(\vec{x}) = (\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \dots + \alpha_n \beta_{n1}) \vec{w}_1 + \dots + (\alpha_1 \beta_{1p} + \alpha_2 \beta_{2p} + \dots + \alpha_n \beta_{np}) \vec{w}_p.$$

$$f(\vec{x})]_{B'} = (\alpha_1 \beta_{11} + \alpha_2 \beta_{21} + \dots + \alpha_n \beta_{n1}, \alpha_1 \beta_{12} + \alpha_2 \beta_{22} + \dots + \alpha_n \beta_{n2}, \dots, \alpha_1 \beta_{1p} + \alpha_2 \beta_{2p} + \dots + \alpha_n \beta_{np})$$

Esto se puede escribir matricialmente:

$$f(\vec{x})]_{B'} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = A \Rightarrow f(\vec{x})]_{B'} = A \cdot \vec{x}]_B$$

Es importante mirar bien como está formada A . ¿Cuáles son sus columnas?

2 Matriz de la composición de 2 T.L.

Si $f_1 : U \rightarrow V$ y $f_2 : V \rightarrow W$ son 2 T.L. y si B, B' y B'' son bases de U, V y W respectivamente, entonces:

$$\|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$$

Hipótesis:

$f_1 : U \rightarrow V$ y $f_2 : V \rightarrow W$ son 2 T.L.

B, B' y B'' son bases de U, V y W respectivamente

$\|f_2\|_{B'B''}$ y $\|f_1\|_{BB'}$ matrices de las T.L. respecto de las bases dadas.

Tesis:

$$\|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$$

Demostración:

Dado $\vec{x} \in U$ queremos encontrar una matriz A / $f_2 \circ f_1(\vec{x})]_B'' = A \cdot \vec{x}]_B'$

Sabemos que $\|f_1\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B = f_1(\vec{x})]_{B'}$.

Como son las coordenadas de un vector de V en la base B' puedo hacer el siguiente producto:

$$\|f_2\|_{B'B''} \cdot f_1(\vec{x})]_{B'} = f_2(f_1(\vec{x}))]_{B''} \text{ o sea}$$

$$f_2 \circ f_1(\vec{x})]_{B''} = f_2(f_1(\vec{x}))]_{B''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B$$

$$\Rightarrow \|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$$

3 Definiciones

3.1 Transformación Lineal Identidad:

Sea V e.v. definimos $id : V \rightarrow V$ / $id(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V$

3.2 Definición de transformación inversa

Dada $f : V \rightarrow W$ / f es un isomorfismo,

Diremos que existe una transformación lineal que llamamos f^{-1} / $f^{-1} : W \rightarrow V$ y se cumple que:

$$f^{-1} \circ f(\vec{x}) = id(\vec{x}), \forall \vec{x} \in V$$

$$f \circ f^{-1}(\vec{y}) = id(\vec{y}), \forall \vec{y} \in W$$

3.3 Propiedad de matriz de transformación inversa

Hipótesis:

$f : V \rightarrow W$ isomorfismo

B base de V, B' base de W

Tesis: $\|f^{-1}\|_{B'B} = (\|f\|_{BB'})^{-1}$

Demostración: Una matriz A es la inversa de otra matriz B \leftrightarrow

$A \cdot B = I$ (Matriz Identidad)

O sea debemos demostrar que

$$\|f^{-1}\|_{B'B} \cdot \|f\|_{BB'} = \text{Id}$$

Pero aplicando lo que sabemos de matriz de una composición de T.L. podemos decir:

$$\|f^{-1}\|_{B'B} \cdot \|f\|_{BB'} = \|f^{-1} \circ f\|_B = \|Id\|_B = I \text{ (¿Por qué?)}$$

O sea que $\|f^{-1}\|_{B'B} = (\|f\|_{BB'})^{-1}$

3.4 Matriz cambio de base

Sea V e.v. , B y B' bases de V.

Podemos formar $\|Id\|_{BB'}$ (¿Cómo lo hacemos?)

Ahora dado $\vec{x} \in V$ resulta:

$$\|Id\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B = \vec{x}]_{B'}$$

Entonces será $\|Id\|_{BB'} = \text{Matriz cambio de base}$

3.5 Cambio de base para las matrices de las T.L.

Sea $f : V \rightarrow W$, B_1, B'_1 bases de V.

B_2, B'_2 bases de W, $\|f\|_{B_1B_2}$

Queremos calcular $\|f\|_{B'_1B'_2} \Rightarrow$

Queremos encontrar una matriz A tal que dado $\vec{x}]_{B'_1}$ sea $f(\vec{x})]_{B'_2} = A \cdot \vec{x}]_{B'_1}$

Como el dato que tenemos es $\|f\|_{B_1B_2}$, no nos sirve $\vec{x}]_{B'_1}$, pero sabemos que:

$$\vec{x}]_{B_1} = \|Id\|_{B'_1B_1} \cdot \vec{x}]_{B'_1}$$

Entonces será:

$$\|f\|_{B_1B_2} \cdot \|Id\|_{B'_1B_1} \cdot \vec{x}]_{B'_1} = \|f\|_{B'_1B_2}$$

Pero no queremos este resultado que son coordenadas en B_2 , sino que queremos coordenadas en B'_2

entonces lo que hacemos es:

$$f(\vec{x})]_{B'_2} = \|Id\|_{B_2B'_2} \cdot \|f\|_{B_1B_2} \cdot \|Id\|_{B'_1B_1} \cdot \vec{x}]_{B'_1}$$

Por lo tanto:

$$\|f\|_{B'_1B'_2} = \|Id\|_{B_2B'_2} \cdot \|f\|_{B_1B_2} \cdot \|Id\|_{B'_1B_1}$$