# Producto Interno

Álgebra II

## 1 Definiciones

### 1.1 Producto Interno

**Definición:** Un producto interno o escalar sobre un espacio vectorial real V es una función p: $VxV \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{y} \cdot \vec{x})$
2. $((\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) + (\vec{y} \cdot \vec{z})$
3. $(\lambda \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
4. I) $(\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0)$
   II) $(\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$

### 1.2 Espacio Euclideo

Si V es un e.v. en el que se ha definido un producto interno recibe el nombre de espacio euclídeo.

### 1.3 Definiciones en un espacio euclideo

- Norma de un vector: $\| \vec{x} \|^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x})$
  a) Con cualquier producto interno, el único vector de norma cero es el $\vec{0}$ (¿Por qué?)
  b) $\| \vec{x} \| = \| -\vec{x} \|$ (¿Por qué?)
  c) $\| \alpha \cdot \vec{x} \| = | \alpha | \cdot \| \vec{x} \|$ (¿Por qué?)

- Distancia entre dos vectores:
  $dist(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$

- Ángulo entre dos vectores:
  $\cos \phi = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|}$

- Ortogonalidad entre vectores:
  Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales $\leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

- Conjunto Ortogonal de Vectores:

  Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto ortogonal $\leftrightarrow$ $\vec{e}_i \neq \vec{0}$ $\forall i$ y $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$ $\forall i \neq j$

- Conjunto Ortonormal de Vectores:

  Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es ortonormal $\leftrightarrow$ es ortogonal y la norma de sus vectores es 1.

# 2 Proposiciones

## 2.1 Teorema de Pitágoras

Cualquiera sean vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores pertenecientes a $V e.e.$ tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$ se cumple:

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$$

**Hipótesis:** V e.e. $\vec{x}, \vec{y} \in V$ $\vec{x} \perp \vec{y}$

**Tésis:** $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$

**Demostración:**

$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \rightarrow$ Expreso la norma como producto

$= (\vec{x} \cdot \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{x}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) \rightarrow$ Distribuyo por propiedad 2

$= \| \vec{x} \|^2 + 0 + 0 + \| \vec{y} \|^2$ (¿Por qué?)

O sea hemos llegado a la tesis

## 2.2 Desigualdad de Schwarz

Cualquiera sea $\vec{x}$ e $\vec{y} \in$ V e.e. se cumple:

$| (\vec{x} \cdot \vec{y}) | \leq \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

Esta demostración es necesaria para que esté bien definido el ángulo entre dos vectores (¿Por qué?)

**Hipótesis:** V e.e. $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$

**Tésis:** $| (\vec{x} \cdot \vec{y}) | \leq \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

**Demostración:**

Para realizar esta demostración, definimos: $\vec{z} = \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

Entonces podemos afirmar $((\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y})) \geq 0$

Aplicando propiedades de producto interno (¿Cuales?) nos queda:

$\| \vec{x} \|^2 + 2\ \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \alpha^2 \cdot \| \vec{y} \|^2 \geq 0$