Matriz de Transformación Lineal

Álgebra II

1 Matriz de una Transformación Lineal dada una base de dominio y una base del codominio

Dada $f : V \to W$ una T.L.

B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ una base de V

B' = $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_p\}$ una base de W

$\Rightarrow$ existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{pxn}$ / para todo $\vec{x} \in V$, $f(\vec{x})]_{B'} = A \cdot \vec{x}]_B$

Sea $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \dots + \alpha_n\vec{v}_n)$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$ (¿Por qué?)

Pero,

$f(\vec{v}_1) = \beta_{11}\vec{w}_1 + \dots + \beta_{1p}\vec{w}_p$

$f(\vec{v}_2) = \beta_{21}\vec{w}_1 + \dots + \beta_{2p}\vec{w}_p$

$\vdots$

$f(\vec{v}_n) = \beta_{n1}\vec{w}_1 + \dots + \beta_{np}\vec{w}_p$

Reemplazando en $f(\vec{x}) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \dots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$ nos queda:

$f(\vec{x}) = \alpha_1(\beta_{11}\vec{w}_1 + \dots + \beta_{1p}\vec{w}_p) + \alpha_2(\beta_{21}\vec{w}_1 + \dots + \beta_{2p}\vec{w}_p) + \dots + \alpha_n(\beta_{n1}\vec{w}_1 + \dots + \beta_{np}\vec{w}_p)$

Aplicando propiedad distributiva y sacando factor común nos queda:

$f(\vec{x}) = (\alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{21} + \dots + \alpha_n\beta_{n1})\vec{w}_1 + \dots + (\alpha_1\beta_{1p} + \alpha_2\beta_{2p} + \dots + \alpha_n\beta_{np})\vec{w}_p$.

$f(\vec{x})]_{B'} = (\alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{21} + \dots + \alpha_n\beta_{n1} \,,\, \alpha_1\beta_{12} + \alpha_2\beta_{22} + \dots + \alpha_n\beta_{n2} \,,\, \dots, \alpha_1\beta_{1p} + \alpha_2\beta_{2p} + \dots + \alpha_n\beta_{np})$

Esto se puede escribir matricialmente:

$$f(\vec{x})]_{B'} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \dots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \dots & \beta_{n2} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \dots & \beta_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \text{A} \Rightarrow f(\vec{x})]_{B'} = A \cdot \vec{x}]_B$$

Es importante mirar bien como está formada A. ¿Cuáles son sus columnas?

2 Matriz de la composición de 2 T.L.

Si $f_1 : U \to V$ y $f_2 : V \to W$ son 2 T.L. y si B, B' y B" son bases de U, V y W respectivamente, entonces:

$\|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$

Hipótesis:

$f_1 : U \to V$ y $f_2 : V \to W$ son 2 T.L.

B, B' y B" son bases de U, V y W respectivamente

$\|f_2\|_{B'B''}$ y $\|f_1\|_{BB'}$ matrices de las T.L. respecto de las bases dadas.

Tesis:

$\|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$

Demostración:

Dado $\vec{x} \in U$ queremos encontrar una matriz A / $f_2 \circ f_1(\vec{x})]''_B = A \cdot \vec{x}]'_B$

Sabemos que $\|f_1\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B = f_1(\vec{x})]_{B'}$.

Como son las coordenadas de un vector de V en la base B' puedo hacer el siguiente producto:

$\|f_2\|_{B'B''} \cdot f_1(\vec{x})]_{B'} = f_2(\ f_1(\vec{x})\ )]_{B'}$ o sea

$f_2 \circ f_1(\vec{x})]_{B''} = f_2(\ f_1(\vec{x})\ )]_{B'} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B$

$\Rightarrow \|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$

3 Definiciones

3.1 Transformación Lineal Identidad:

Sea V e.v. definimos $id : V \to V$ / $id(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall \vec{x} \in V$

3.2 Definición de transformación inversa

Dada $f : V \to W$ / f es un isomorfismo,

Diremos que existe una transformación lineal que llamamos f^{-1} / $f^{-1} : W \to V$ y se cumple que:

$f^{-1} \circ f(\vec{x}) = id(\vec{x})$, $\forall \vec{x} \in V$

$f \circ f^{-1}(\vec{y}) = id(\vec{y})$, $\forall \vec{y} \in W$