

Producto Interno

Álgebra II

1 Definiciones

1.1 Producto Interno

Definición: Un producto interno o escalar sobre un espacio vectorial real V es una función $p: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{y} \cdot \vec{x})$
2. $((\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) + (\vec{y} \cdot \vec{z})$
3. $(\lambda \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
4. I) $(\vec{x} \cdot \vec{x}) \geq 0$
II) $(\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$

1.2 Espacio Euclideo

Si V es un e.v. en el que se ha definido un producto interno, recibe el nombre de espacio euclídeo.

1.3 Definiciones en un espacio euclideo

- Norma de un vector: $\|\vec{x}\|^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x})$
 - a) Con cualquier producto interno, el único vector de norma cero es el $\vec{0}$ (¿Por qué?)
 - b) $\|\vec{x}\| = \|\vec{-x}\|$ (¿Por qué?)
 - c) $\|\alpha \cdot \vec{x}\| = |\alpha| \cdot \|\vec{x}\|$ (¿Por qué?)
- Distancia entre dos vectores:
$$dist(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$$
- Ángulo entre dos vectores:
$$\cos \phi = \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}$$

- Ortogonalidad entre vectores:

Dos vectores \vec{x} e \vec{y} son ortogonales $\leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

- Conjunto Ortogonal de Vectores:

Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto ortogonal $\leftrightarrow \vec{e}_i \neq \vec{0} \forall i$ y $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0 \forall i \neq j$

- Conjunto Ortonormal de Vectores:

Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es ortonormal \leftrightarrow es ortogonal y la norma de sus vectores es 1.

2 Proposiciones

2.1 Teorema de Pitágoras

Cualquiera sean vectores \vec{x} e \vec{y} vectores pertenecientes a V e.e. tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$ se cumple:

$$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$$

Hipótesis: V e.e. $\vec{x}, \vec{y} \in V$ $\vec{x} \perp \vec{y}$

Tesis: $\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$

Demostración:

$\|\vec{x} + \vec{y}\|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \rightarrow$ Expreso la norma como producto
 $= (\vec{x} \cdot \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{x}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) \rightarrow$ Distribuyo por propiedad 2
 $= \|\vec{x}\|^2 + 0 + 0 + \|\vec{y}\|^2$ (¿Por qué?)

O sea hemos llegado a la tesis

2.2 Desigualdad de Schwarz

Cualquiera sea \vec{x} e $\vec{y} \in V$ e.e. se cumple:

$$|(\vec{x} \cdot \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

Esta demostración es necesaria para que esté bien definido el ángulo entre dos vectores (¿Por qué?)

Hipótesis: V e.e. \vec{x} e $\vec{y} \in V$

Tesis: $|(\vec{x} \cdot \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$

Demostración:

Para realizar esta demostración, definimos: $\vec{z} = \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

Entonces podemos afirmar $((\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y})) \geq 0$

Aplicando propiedades de producto interno (¿Cuáles?) nos queda:

$$\|\vec{x}\|^2 + 2\alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \alpha^2 \cdot \|\vec{y}\|^2 \geq 0$$

Esta expresión representa geométricamente una parábola una parábola de variable α , la cual es siempre ≥ 0 . Entonces tiene 1 o ninguna raíz lo que significa que al aplicar la fórmula para hallar raíces en una parábola:

$$\left(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) \quad \Delta = b^2 - 4ac \leq 0 \text{ En nuestro caso resulta:}$$

$$(2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 - 4 \cdot \|\vec{y}\|^2 \|\vec{x}\|^2 \leq 0$$

$$(2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 \leq 4 \cdot \|\vec{y}\|^2 \|\vec{x}\|^2$$

$$|\vec{x} \cdot \vec{y}| \leq \|\vec{x}\| \|\vec{y}\| \text{ (¿Por qué?)}$$

2.3 Todo conjunto ortogonal es L.I.

Hipótesis: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ Conjunto Ortogonal

Tesis: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ Conjunto L.I.

Demostración:

$$\text{Sea } \alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$$

Debemos probar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$

Sabemos que $(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Multiplicando ambos miembros por \vec{a}_1 y aplicando propiedad distributiva en el primer miembro nos queda: $\alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1) + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \dots + \alpha_n (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{0})$

$\alpha_1 \cdot \|\vec{a}_1\|^2 = 0$ y como $\|\vec{a}_1\|^2 \neq 0$ resulta $\alpha_1 = 0$

De la misma manera, multiplicando por los demás vectores nos queda $\alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$

Que es lo que queríamos demostrar.

2.4 Proceso de Gram Smith

En todo espacio euclídeo V existe una base ortonormal.

Hipótesis: V e.e. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ base de V

Tesis: $\exists \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ base ortonormal de V

Demostración: Lo vamos a demostrar para $n = 3$

Sea $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + \alpha \cdot \vec{u}_1$, $\vec{u}_2 \in V$ (¿Por qué?)

Queremos determinar α para que $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = 0 \rightarrow$

$$(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2) + \alpha \cdot \|\vec{u}_1\|^2 = 0$$

$$\text{Despejando } \alpha = -\frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2)}{\|\vec{u}_1\|^2} \quad \text{donde seguro } \|\vec{u}_1\|^2 \neq 0 \text{ (¿Por qué?)}$$

Podemos reemplazar y obtener ahora \vec{u}_2

$$\vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \vec{u}_1 \cdot \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2)}{\|\vec{u}_1\|^2}$$

Ahora armamos

$$\vec{u}_3 = \vec{e}_3 + \theta \cdot \vec{u}_1 + \mu \cdot \vec{u}_2 \quad (1)$$

Queremos obtener θ y μ de manera tal que $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$ y $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_2$ Multiplicamos (1) por \vec{u}_1 y nos queda:

$$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + \mu \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$$

$$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot \|\vec{u}_1\|^2 + 0 \text{ (¿Por qué?)}$$

Igualando a cero para que sean ortogonales:

$$(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot \|\vec{u}_1\|^2 = 0$$

$$\rightarrow \theta = -\frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1)}{\|\vec{u}_1\|^2}$$

Ahora multiplicamos (1) por \vec{u}_2 y nos queda:

$$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + \theta \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + \mu \cdot (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2)$$

$$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + 0 + \theta \cdot \|\vec{u}_2\|^2$$

Igualando a cero para que sean ortogonales:

$$(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + \mu \cdot \|\vec{u}_2\|^2 = 0$$

$$\rightarrow \mu = -\frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_2\|^2}$$

Podemos reemplazar y obtener ahora \vec{u}_3 :

$$\vec{u}_3 = \vec{e}_3 - \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1)}{\|\vec{u}_1\|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2)}{\|\vec{u}_2\|^2} \cdot \vec{u}_2$$

Por lo tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman una base ortogonal de V. (¿Por qué seguro es base de V?)

Como queremos una base ortonormal dividimos a cada vector por su norma y nos queda:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|} \quad \vec{w}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|} \quad \vec{w}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\|\vec{u}_3\|}$$

$\Rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es una base ortonormal de V.

3 Nuevas Definiciones

3.1 Subespacios Ortogonales

Dado S y T subespacios de V e.e. decimos que S es ortogonal a T (lo escribimos $S \perp T$)

si y sólo si $\vec{x} \perp \vec{y} \forall \vec{x} \in S, \forall \vec{y} \in T$

3.2 Complemento Ortogonal de un subespacio

Dado S subespacio de V e.e. llamaremos

$$S^\perp = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \perp \vec{s} \forall \vec{s} \in S\}$$

3.3 Proposición:

Dado S subespacio de V e.e. entonces

$$S \oplus S^\perp = V$$

Debemos probar:

a) $S \oplus S^\perp \subset V$. Esto es evidente (¿Por qué?)

b) $V \subset S \oplus S^\perp$

Sea $B = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k\}$ una base ortogonal de S . Extendemos B a una base ortogonal de V , y nos queda:

$B' = \{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \dots, \vec{s}_k, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r\}$ base ortogonal de V .

Vamos a probar que $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r\}$ es una base ortogonal de S^\perp

Que es un conjunto L.I. es obvio (¿Por qué?)

Veamos entonces que es un S.G. de S^\perp :

Sea $\vec{x} \in S^\perp \Rightarrow \vec{x} \in V \Rightarrow$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \dots + \alpha_k \vec{s}_k + \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_r \vec{a}_r \quad (2)$$

Sabemos que $(\vec{x} \cdot \vec{s}_i) = 0 \forall i$ con $1 \leq i \leq k$ (¿Por qué?)

Entonces multiplicamos ambos miembros de (1) por \vec{s}_1 y nos queda:

$$0 = \alpha_1 (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1) + \dots + \alpha_k (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_k) + \beta_1 (\vec{s}_1 \cdot \vec{a}_1) + \dots + \beta_r (\vec{s}_1 \cdot \vec{a}_r)$$

$$0 = \alpha_1 \cdot \|\vec{s}_1\|^2 + \dots + \alpha_k \cdot (0) + \beta_1 \cdot (0) + \dots + \beta_r \cdot (0)$$

\Rightarrow nos queda $\alpha_1 = 0$

De la misma manera demostraremos que $\alpha_i = 0 \forall i$ con $1 \leq i \leq k$

Por lo tanto $\vec{x} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \dots + \beta_r \vec{a}_r$

$\Rightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_r\}$ es S.G. de S^\perp

Ahora sea $\vec{w} \in V \Rightarrow$

$$\vec{w} = (\theta_1 \vec{s}_1 + \theta_2 \vec{s}_2 + \dots + \theta_k \vec{s}_k) + (\pi_1 \vec{a}_1 + \pi_2 \vec{a}_2 + \dots + \pi_r \vec{a}_r)$$

$$\vec{w} = \vec{c} + \vec{d} \text{ con } \vec{c} \in S \text{ y } \vec{d} \in S^\perp$$

$$\Rightarrow \vec{w} \in S \oplus S^\perp \text{ o sea } \subset S \oplus S^\perp \text{ Nos falta probar que } S \cap S^\perp = \{\vec{0}\}$$

Como S y S^\perp son subespacios de V y la intersección de subespacios es un subespacio entonces $\vec{0} \in S \cap S^\perp$.

$$\text{Sea } \vec{x} \in S \cap S^\perp \Rightarrow \vec{x} \in S \text{ y } \vec{x} \in S^\perp$$

$$\Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0 \Rightarrow \text{por la propiedad 4) de P.I., } \vec{x} = \vec{0}$$

Corolario: De esta proposición se deduce que:

$$\dim V = \dim (S \oplus S^\perp) = \dim S + \dim S^\perp$$

4 Proyección ortogonal de un vector respecto a un subespacio

Dado $\vec{x} \in V$ e.e. y $S \subseteq V$, puedo escribir

$$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v} \text{ con } \vec{u} \in S, \vec{v} \in S^\perp \text{ (¿Por qué?)}$$

$$\text{Llamamos } \vec{u} = \text{proy}_S(\vec{x}) \text{ y } \vec{v} = \text{proy}_{S^\perp}(\vec{x})$$

4.1 Teorema de la mejor aproximación

Si S es un subespacio de V e.e. , y $\vec{x} \in V$ entonces $\text{proy}_S(\vec{x})$ es la mejor aproximación para \vec{x} en S , o sea

$$\|\vec{v} - \vec{x}\| \geq \|\text{proy}_S(\vec{x}) - \vec{x}\| \quad \forall \vec{v} \in S$$

Hipótesis: V e.e. S subespacio de V , $\vec{x} \in V$ (elemento cualquiera de V)

Tesis: $\|\vec{v} - \vec{x}\| \geq \|\text{proy}_S(\vec{x}) - \vec{x}\| \quad \forall \vec{v} \in S$

Demostración: Vamos a trabajar con las normas al cuadrado (¿Por qué podemos hacerlo?)

Sea $\vec{v} \in S \Rightarrow$

$$\|\vec{v} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{v} - \text{proy}_S(\vec{x}) + \text{proy}_S(\vec{x}) - \vec{x}\|^2$$

$$\|\vec{v} - \vec{x}\|^2 = \|\vec{v} - \text{proy}_S(\vec{x})\|^2 + \|\text{proy}_S(\vec{x}) - \vec{x}\|^2 \text{ (¿Por qué?)}$$

Y por lo tanto:

$$\|\vec{v} - \text{proy}_S(\vec{x})\|^2 + \|\text{proy}_S(\vec{x}) - \vec{x}\|^2 \geq \|\text{proy}_S(\vec{x}) - \vec{x}\|^2 \text{ (¿Por qué?)}$$

4.2 Método de cuadrados mínimos para resolver sistemas lineales incompatibles

Hemos probado en un ejercicio de la práctica que un sistema lineal de la forma $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$ es compatible $\Leftrightarrow \vec{B} \in \text{col}(A)$ siendo $\text{col}(A) = \langle \vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_n \rangle$ donde \vec{C}_i son las columnas de la matriz A .

Por lo tanto si $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$ es un sistema incompatible, es seguro que $\vec{B} \notin \text{col}(A)$. Luego, la única manera de convertirlo en compatible consiste en buscar un vector perteneciente a $\text{col}(A)$, cometiendo el menor error posible.

¿Cuál será este vector? Según lo demostrado anteriormente, este vector debe ser $\text{proy}_{\text{col}(A)}(\vec{B})$ (¿Por qué?)

Osea cuando un sistema lineal $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$ es incompatible, la mejor solución aproximada que podemos encontrar es buscando la solución de:

$$A \cdot \vec{X} = \text{proy}_{\text{col}(A)}(\vec{B})$$

4.2.1 Fórmula para resolver un sistema lineal incompatible

Para llegar a la fórmula debemos probar:

$$\mathbf{a)} \quad (\text{col}(A))^\perp = \{ \vec{X} \in \mathbb{R}^n / A^T \cdot \vec{X} = 0 \}$$

$$\text{Dado } \text{col}(A) = \langle \vec{C}_1, \vec{C}_2, \dots, \vec{C}_n \rangle \rightarrow$$

$$\vec{X} \in (\text{col}(A))^\perp \Leftrightarrow (\vec{X} \cdot \vec{C}_i) = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n, \text{ pero:}$$

$$A = \begin{pmatrix} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \dots & \vec{C}_n \\ \downarrow & \downarrow & \dots & \downarrow \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} \leftarrow & \vec{C}_1 & \rightarrow \\ \leftarrow & \vec{C}_2 & \rightarrow \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \leftarrow & \vec{C}_n & \rightarrow \end{pmatrix}$$

b) Demostrar que si \vec{X}_0 es solución por el método de cuadrados mínimos del sistema $A \cdot \vec{X} = \vec{B}$, entonces $(A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B}) \in (\text{col}(A))^\perp$

Si \vec{X}_0 es solución del sistema incompatible $A \cdot \vec{X} = \vec{B} \rightarrow$

$$A \cdot \vec{X}_0 = \text{proy}_{\text{col}(A)}(\vec{B}) \tag{3}$$

Restando en (3) \vec{B} a ambos miembros nos queda:

$$A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B} = \text{proy}_{\text{col}(A)}(\vec{B}) - \vec{B} = \text{proy}_{\text{col}(A)^\perp}(\vec{B}) \quad (\text{¿Por qué?})$$

Por lo tanto, $A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B} \in (\text{col}(A))^\perp$

c) Demostrar que $A^T(A \cdot \vec{X}_0) = A^T \cdot \vec{B}$

Si $A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B} \in (\text{col}(A))^\perp$

$$\rightarrow A^T(A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B}) = 0$$

$$\rightarrow A^T(A \cdot \vec{X}_0) = A^T \cdot \vec{B} \text{ (¿Por qué?)}$$