Espacios Vectoriales

Álgebra II

1 Definición

Sea V un conjunto cuyos elementos se llamarán vectores en el cual se definen dos operaciones:

- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar k $\in \mathbb{R}$

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades de la Suma:

1. **Cerrada:** Si $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$
2. **Conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
3. **Asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. **Elemento Neutro:** $\exists\ \vec{0} \in V\ /\ \vec{0} + \vec{x} = \vec{x}\ \forall\ \vec{x} \in V$
5. **Vector Inverso:** $\forall\ \vec{x} \in$ V, existe un vector inverso -$\vec{x}$ / $\vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

Propiedades del producto:

1. **Cerrada:** Si $\vec{x} \in V \Rightarrow k \cdot \vec{x} \in V$
2. **Neutro:** $1 \cdot \vec{x} = \vec{x}\ \forall\ \vec{x} \in V$
3. **Asociativa:** $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{x}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{x}$
4. **Distributiva:** $k \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = k \cdot \vec{x} + k \cdot \vec{y}$
5. **Distributiva:** $(k_1 + k_2) \cdot \vec{x} = k_1 \cdot \vec{x} + k_2 \cdot \vec{x}$

2 Subespacios

Definición: Un subconjunto S no vacío de V e.v.es un subespacio de V si la suma y el producto definidas en V estructuran también a S como un espacio vectorial.

Propiedades necesarias para que S $\subseteq$ V sea subespacio

1. Si $\vec{x} \in S$ e $\vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$

2. Si $\vec{x} \in S \Rightarrow k \cdot \vec{x} \in S$

3. $\vec{0} \in S$

2.1 Definiciones

1. **Combinación Lineal:** $\vec{x}$ es una combinación lineal de los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_k$ si existen escalares $k_1, k_2, ...k_k$ tal que $\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + ...k_k\vec{x}_k$

2. **Sistema de Generadores:** Un conjunto de vectores M = $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_k\}$ es un sistema de generadores de V $\Leftrightarrow \forall\ \vec{v} \in V, \vec{v} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + ...\alpha_k\vec{x}_k$

3. **Conjunto de vectores linealmente independiente y linealmente dependiente:**

   Sea M = $\{\ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\ \}$ tal que $\vec{v}_i \in$ V $\forall$ i, y sea $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \ldots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$ (o sea una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$)

   Nos queda entonces un sistema lineal homogéneo que puede tener:

   a) Solución Única: La unica solución es la trivial, por lo que M es un conjunto **Linealmente Independiente (L.I.)**

   b) Infinitas Soluciones: M es un conjunto **Linealmente Dependiente (L.D.)**

3 Base de un Espacio Vectorial

Definición: Dado V e.v. y B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ tal que $\forall$ $\vec{v}_i \in$ V decimos que B es una base de V si y sólo si se cumple:

a) B es un conjunto L.I.

b) B es un sistema de generadores de V

Ejemplos de bases canónicas:

- **En R^n:** (1,0,0,...,0), (0,1,0,...,0), ... , (0,0,0,...,1)
- **En R^{2x2}:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **En P$_n$:** {1, x, x^2, ... , x^n }

3.1 Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición: Se llama dimensión de un espacio vectorial V a la cantidad de elementos que tiene una base.

4 Coordenadas de un vector respecto de una base

Dado B = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ una base de V (e.v.) y dado $\vec{x} \in V \Rightarrow$

Se denomina a los escalares $\lambda_1, \lambda_2, ...\lambda_n$ tal que $\vec{x} = \lambda_1\vec{e}_1 + \lambda_2\vec{e}_2 + ...\lambda_k\vec{e}_k$ como **coordenadas de** $\vec{x}$ respecto de la base B y se escribe $\vec{x}]_B$

Por lo tanto: $\vec{x}]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$

5 Proposiciones

5.1 Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas

Hipótesis: V e.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ base de V, $\vec{x} \in V$

Tesis: Existe una única n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, ...\alpha_n)$ tal que $\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ...\alpha_n\vec{e}_n$

Demostración: Supongo que existen 2 n-uplas que satisfacen la definición de coordenadas respecto de una base, es decir:

$\vec{x} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + ...\alpha_n\vec{e}_n = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + ...\beta_n\vec{e}_n$

Pasando al segundo miembro y sacando factor común $\vec{e}_i$ nos queda:

$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \vec{e}_2 + ...(\alpha_n - \beta_n) \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$

Como $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ es una base de V, es decir se trata de vectores L.I. Esto significa que si tengo una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$, sus escalares son $= 0$.

Por lo tanto, $\alpha_i = \beta_i$ $\forall$ i.

5.2 Si un espacio vectorial tiene una base de n elementos , entonces cualquier conjunto de n+1 elementos es un conjunto l.d.

Hipótesis: V e.v. B $= \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ base de V, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ conjunto de n+1 elementos

Tesis: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ es L.D.

Demostración: Para demostrar que un conjunto es L.I. debo probar que cualquier combinación lineal de sus vectores igualada a $\vec{0}$ tiene una única solución (La solución trivial). Para probar que es L.D., una combinación lineal de dichos vectores igualada a $\vec{0}$ tendrá infinitas soluciones.

Hagamos entonces:

$$\lambda_1\vec{x}_1 + \lambda_2\vec{x}_2 + \ldots + \lambda_{n+1}\vec{x}_{n+1} = \vec{0} \tag{1}$$

Comos los $\vec{x}_i$ son vectores pertenecientes a V, y B es una base de de V, entonces cada uno de ellos podrá escribirse como combinación lineal de los vectores de V:

$\vec{x}_1 = \alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{12} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \vec{e}_n$

$\vec{x}_2 = \alpha_{21} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \vec{e}_n$

$\vdots$

$\vec{x}_{n+1} = \alpha_{n+1,1} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{n+1,2} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n} \cdot \vec{e}_n$

Reemplazando en la ecuación (1) nos queda:

$\lambda_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{12} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{1n} \cdot \vec{e}_n) + \lambda_2 \cdot (\alpha_{21} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{2n} \cdot \vec{e}_n) + \ldots \lambda_{n+1} \cdot (\alpha_{n+1,1} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{n+1,2} \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{n+1,n} \cdot \vec{e}_n)$

Sacando factor $\vec{e}_i$ nos queda: $(\lambda_1 \cdot \alpha_{11} + \lambda_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1}) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda_1 \cdot \alpha_{12} + \lambda_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2}) \cdot \vec{e}_2 + \ldots + (\lambda_1 \cdot \alpha_{1n} + \lambda_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n}) \cdot \vec{e}_n$

Como tenemos una combinación lineal igualada a cero de vectores L.I. sus escalares serán todos iguales a 0

Entonces nos queda:

$\lambda_1 \cdot \alpha_{11} + \lambda_2 \cdot \alpha_{21} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1} = 0$

$\lambda_1 \cdot \alpha_{12} + \lambda_2 \cdot \alpha_{22} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2} = 0$

$\vdots$

$\lambda_1 \cdot \alpha_{1n} + \lambda_2 \cdot \alpha_{2n} + \ldots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n} = 0$

Observamos que nos quedan **n** ecuaciones.

A su vez, los α_{ij} son datos, pues son las coordenadas de los vectores dados (las cuales son únicas)

Por otro lado, los λ_i son incógnitas, y hay $\mathbf{n+1}$.

Es decir, tenemos un sistema con más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto la ecuación (1) tiene **infinitas** soluciones.

Concluimos entonces que el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ es L.D.

5.3 Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos

Hipótesis: V e.v. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_p\}$ bases de V

Tesis: Ambas bases tienen la misma cantidad de elementos. (n = p)

Demostración: Supongo $n > p$. Como tengo una base de p elementos, si tengo un conjunto con al menos un elemento mas, será L.D.

Entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ sería un conjunto L.D. Absurdo pues al ser una base debe ser un conjunto L.I.

Lo mismo ocurre al asumir $p > n$. Por lo tanto la única opción posible es $\mathbf{n = p}$

5.4 Si un conjunto de vectores pertenecientes a un e.v. es un conjunto l.d.entonces alguno de ellos es combinación lineal de los demás

Hipótesis: V e.v. A = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ conjunto L.D. de vectores pertenecientes a V

Tesis: $\exists$ j tal que $\vec{e}_j = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_{j-1} \cdot \vec{e}_{j-1} + \alpha_{j+1} \cdot \vec{e}_{j+1} + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n$

Demostración: Como A es un conjunto L.D. , dada una combinación lineal de ellos igualada a 0 , el sistema homogéneo que obtengo tendrá infinitas soluciones.

Entonces, dada $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$ existirá una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ no todos nulos que satisfagan la ecuación.

Supongamos $\alpha_1 \neq 0$ entonces podré despejar

$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{e}_n$

Por lo que ha quedado expresado uno de los vectores como combinación lineal de los demás.

5.5 Si un S.G. de un espacio vectorial V es L.D. entonces existe un subconjunto de él de n-1 elementos que es S.G. de V .

Hipótesis: V e.v. B= $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ S.G. de V, B conjunto L.D.

Tesis: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \ldots, \vec{e}_n$ S.G. de V

Demostración: Quiero probar que algo es S.G. de V, entonces tomo un $\vec{x} \in$ V. Entonces seguro $\vec{x} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \cdots + \beta_n\vec{e}_n$ (¿Por qué?). Como B es un conjunto L.D. entonces uno de los vectores será combinación lineal de los demás. Supongamos $\vec{e}_1$ o sea:

$$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_n \ .$$

Reemplazando en $\vec{x}$ nos queda:

$$\vec{x} = \beta_1 \cdot (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_n) + \beta_2\vec{e}_2 + \cdots + \beta_n\vec{e}_n.$$

Sacando factor común queda expresado

$$\vec{x} = \vec{e}_2 \cdot (-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \beta_1 + \beta_2) + \vec{e}_3 \cdot (-\frac{\alpha_3}{\alpha_1} \cdot \beta_1 + \beta_3) + \ldots + \vec{e}_n \cdot (-\frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \beta_1 + \beta_n)$$

De esta manera, $\vec{x}$ queda generado por $\{\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$, el cual tiene $n-1$ elementos.

5.6 Dado V e.v. dim(V) = n. Si tenemos n vectores L.I. pertenecientes a V, son una base de V

Hipótesis: V e.v, dim(V) = n. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ conjunto L.I.

Tesis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ Base de V

Demostración: Para que un conjunto sea base de V ,debe ser l.i. y SG de V.

Que son L.I. lo sabemos por Hip. Sólo nos falta probar que son S.G. de V

Para eso debemos probar que cualquier $\vec{x}$ perteneciente a V está generado por dichos vectores.

Sea $\vec{x} \in$ V (¿Por qué comienzo así?) y formo el conjunto A = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n, \vec{x}\}$ este conjunto es L.D. (¿Por qué?)

Entonces existe una C.L. de sus vectores igualada a cero con sus escalares no todos nulos.

Sea $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha_{n+1}\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow$ puede ser $\alpha_{n+1} = 0$ ó $\alpha_{n+1} \neq 0$

Si $\alpha_{n+1} = 0$ nos queda $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$.

Y, como los $\vec{e}_i$ son L.I. tendríamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$. Lo cual es absurdo (¿Por qué?)

Por lo tanto es $\alpha_{n+1} \neq 0$ y podemos despejar.
Nos queda $\vec{x} = -\vec{e}_1 \cdot (\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}) - \vec{e}_2 \cdot (\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}) - \ldots - \vec{e}_n \cdot (\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}})$
Por lo que queda demostrado que:
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ es una base de V.

5.7 Dado V e.v. tal que dim(V) = n. Si tenemos un conjunto de n vectores S.G. de V son una base de V

Hipótesis: V e.v, dim(V) = n. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ S.G. de V

Tesis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ Base de V

Demostración: Debemos demostrar que A = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ...\vec{e}_n\}$ es un conjunto L.I.
Supongamos que A no es un conjunto l.i. entonces un subconjunto de él continuará siendo un S.G. de V (¿Por qué?). Llamemos A_1 a dicho conjunto.
A_1 no puede ser L.I. porque si lo fuera sería una base de V de n-1 elementos. Absurdo. (¿Por qué?)
Luego A_1 debe ser l.d. Entonces un subconjunto de él continuará siendo un S.G. de V . Llamemos A_2 a dicho conjunto.
Y así podemos continuar hasta llegar a tener A_n =$\{\vec{e}_j\}$ un subconjunto de A con un solo elemento que es distinto de 0 (¿Por qué?) por lo tanto es L.I. o sea que sería una base de V. Absurdo.
Por lo tanto A debe ser L.I. y entonces es base de V

6 Definiciones

Dados S y T subespacios de V e.v. podemos definir :

- **Intersección:** $S \cap T = \{\vec{x} \in V \ / \ \vec{x} \in S$ y $\vec{x} \in T\}$
- **Unión:** $S \cup T = \{\vec{x} \in V \ / \ \vec{x} \in S$ o $\vec{x} \in T\}$
- **Suma:** $S + T = \{\vec{x} \in V \ / \ \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ con $\vec{a} \in S$ y $\vec{b} \in T\}$
- **Suma directa:** $S \oplus T = S + T$ con $S \cap T = \{\vec{0}\}$

6.1 Si S y T son subespacios de V e.v. entonces S+T es un subespacio de V.

Hipótesis: V e.v. , S y T subespacios de V

Tesis: S + T es un subespacio de V

Demostración: Es evidente que $S + T \subset V$ (¿Por qué)?

Veamos que se cumplen las 3 condiciones para que sea subespacio

a) Sea $\vec{x} \in S + T$ **e** $\vec{y} \in S + T$ entonces

$\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ con $\vec{a} \in S$, $\vec{b} \in T$

$\vec{y} = \vec{c} + \vec{d}$ con $\vec{c} \in S$, $\vec{d} \in T$

Entonces $\vec{x} + \vec{y} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = (\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{d})$

Pero $\vec{a} + \vec{c} \in S$ y $\vec{b} + \vec{d} \in T$ (¿Por qué?) $\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S + T$

b) Sea $\vec{x} \in S + T$, entonces $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ con $\vec{a} \in S$ y $\vec{b} \in T$

$\alpha\vec{x} = \alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$ (¿Por qué?)

Pero $\alpha\vec{a} \in S$ y $\alpha\vec{b} \in T \Rightarrow \alpha\vec{x} \in S + T$

c) $\vec{0}_v \in S, \vec{0}_v \in T$ y como $\vec{0}_v + \vec{0}_v = \vec{0}_v \Rightarrow \vec{0}_v \in S + T$

Entonces queda probado que S + T es subespacio de V

6.2 Teorema de la dimension de suma de subespacios

Si S y T son subespacios de V e.v. ,entonces

$\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

Hipótesis: V e.v. S y T subespacios de V

Tesis: $\dim(S + T) = \dim(S) + \dim(T) - \dim(S \cap T)$

Demostración: Sea $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r\}$ una base de $S \cap T$

Completamos a una base de S y a una base de T y nos queda:

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p\}$ base de S

$\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_d\}$ base de T

Con estos vectores formemos un conjunto que pueda ser base de S+T

Por de pronto no deberá tener vectores repetidos (¿Por qué?)

Entonces tomamos A = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_r, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_p, \vec{y}_1, \vec{y}_2, \ldots, \vec{y}_d\}$

Vamos a demostrar que A es un conjunto l.i. y S.G. de S+T

Primero veamos que son L.I.

Hacemos una C.L. igualada a $\vec{0}$, o sea:

$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r + \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots + \beta_p\vec{x}_p + \gamma_1\vec{y}_1 + \gamma_2\vec{y}_2 + \ldots + \gamma_d\vec{y}_d = \vec{0}$

Lo que es lo mismo que:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r + \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots + \beta_p\vec{x}_p = -\gamma_1\vec{y}_1 - \gamma_2\vec{y}_2 - \ldots - \gamma_d\vec{y}_d \quad (2)$$

Llamaremos $\vec{h}$ a estos vectores que son iguales. Pero $\vec{h} \in S$ y $\vec{h} \in T$ entonces $\vec{h} \in S \cap T$, o sea estará generado por la base de $S \cap T$.

Entonces nos queda:

$-\gamma_1\vec{y}_1 - \gamma_2\vec{y}_2 - \ldots - \gamma_d\vec{y}_d = \theta\vec{v}_1 + \theta\vec{v}_2 + \ldots + \theta\vec{v}_r$

Si pasamos todo para un mismo miembro:

$\theta\vec{v}_1 + \theta\vec{v}_2 + \ldots + \theta\vec{v}_r + \gamma_1\vec{y}_1 + \gamma_2\vec{y}_2 + \ldots + \gamma_d\vec{y}_d = \vec{0}$

Como se trata de una C.L. de vectores L.I. (¿Por qué?) igualada a $\vec{0}$ sus escalares serán todos $= 0$.

O sea será $\vec{h} = \vec{0}$ y $\gamma_1 = \gamma_2 = \ldots = \gamma_d = 0$

Reemplazando en (1) nos queda:

$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots, \alpha_r\vec{v}_r + \beta_1\vec{x}_1 + \beta_2\vec{x}_2 + \ldots \beta_p\vec{x}_p = \vec{0}$

Como se trata de vectores L.I. (¿Por qué?) sus escalares son $= 0$. De esta manera todos los α_i y β_i son cero, por lo que queda demostrado que A es un conjunto L.I.

Ahora veamos que A es un S.G. de S+T.

Sea $\vec{x} \in S + T$ (¿Por qué comienzo así?) $\Rightarrow \vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$ con $\vec{a} \in S$ y $\vec{b} \in T$.

Pero como tenemos las bases de S y T podemos escribir:

$\vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \ldots + \alpha_r\vec{v}_r + \beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_p\vec{x}_p + \lambda_1\vec{v}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{v}_r + \gamma\vec{x}_1 + \ldots + \gamma_d\vec{y}_d$

$\vec{x} = (\alpha_1 + \lambda_1)\vec{v}_1 + \ldots + (\alpha_r + \lambda_r)\vec{v}_r + \beta_1\vec{x}_1 + \ldots + \beta_p\vec{x}_p + \lambda_1\vec{x}_1 + \ldots + \lambda_r\vec{x}_r$

Con lo que queda comprobado que A es un S.G.