

# Matriz Diagonalizable

## Autovectores

### Álgebra II

## 1 Diagonalización de Matriz de T.L.

Dado  $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$  siempre existe una  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ .

En otras palabras,  $f$  es una T.L. y  $\|f\|_{CC} = A$

### 1.1 Definición

Decimos que  $A$  es una matriz diagonalizable si y sólo si, al definir  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$  existe una base  $B$  tal que  $\|f\|_{BB}$  es una matriz diagonal, o sea existe una matriz  $P = \|id\|_{BC} / \|f\|_B = P^{-1} \cdot A \cdot P$  (*¿Por qué?*)

### 1.2 Proposición

$A$  es diagonalizable  $\Leftrightarrow$  existe una base  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  base de  $\mathbb{R}^n$  y escalares  $\lambda_i$  tal que  $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$   
 $\Rightarrow$ ) **Hipótesis:**  $A$  es diagonalizable, o sea si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$  existe una base  $B$  tal que  $\|f\|_{BB}$  es una matriz diagonal

**Tesis:** Existen escalares  $\lambda_i$  tal que  $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

**Demostración:** Como  $\|f\|_{BB}$  es diagonal  $\Rightarrow \|f\|_{BB} = M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Para interpretar esta matriz, recordamos la definición de matriz de T.L. dada una base:

$$f(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = a_{11} \cdot \vec{v}_1$$

$$f(\vec{v}_2) = 0 \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = a_{22} \cdot \vec{v}_2$$

$\vdots$

$$f(\vec{v}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{v}_n = a_{nn} \cdot \vec{v}_n$$

Con lo que queda demostrada la tesis. Veamos ahora la otra implicación.

$\Leftrightarrow$ ) **Hipótesis:**  $\exists$  base  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  base de  $\mathbb{R}^n$  y escalares  $\lambda_i$  tal que  $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

**Tesis:**  $A$  es diagonalizable

**Demostración:** Debemos probar que si  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$  entonces  $\|f\|_B$  es diagonal.

Para esto, armemos  $\|f\|_B$  :

$$f(\vec{v}_1) = A \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \text{la 1ra columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}_2) = A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow \text{la 2da columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\vdots$

$$f(\vec{v}_n) = A \cdot \vec{v}_n = \lambda_n \cdot \vec{v}_n \Rightarrow \text{la n columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, podemos escribir la matriz de transformación lineal:

$$\|f\|_B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ que es una matriz diagonal.}$$

## 2 Autovalores y Autovectores

Dada una matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  llamaremos autovalor de  $A$  a un número  $\lambda \in \mathbb{R}$  si existe un vector  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$  al que llamaremos autovector de  $A$  asociado al autovalor  $\lambda$  tal que  $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

### 2.1 Propositiones

#### 2.1.1 C.L. de vectores asociados

Si  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$  son autovectores de una matriz  $A$  asociados a un autovalor  $\lambda$ , entonces cualquier combinación lineal de ellos será autovector de  $A$  asociado a  $\lambda$ .

**Demostración:** Sabiendo que  $A \cdot \vec{v}_i = \lambda \cdot \vec{v}_i$

$A \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) \rightarrow$  Planteo C.L. de los vectores

$\alpha_1 A \vec{v}_1 + \alpha_2 A \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n A \vec{v}_n \rightarrow$  Distribuyo  $A$

$\alpha_1 \lambda \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \lambda \vec{v}_n \rightarrow$  Uso hipótesis

$\lambda \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) \rightarrow$  Factor Común  $\lambda$

Por lo tanto  $A \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n) = \lambda \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots + \alpha_n \vec{v}_n)$

#### 2.1.2 Relación entre autovalor y determinante

$\lambda$  es un autovalor asociado a  $\vec{v}$ , autovector de una matriz  $A \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

**Hipótesis:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\lambda$  y  $\vec{v}$  autovalor y autovector de  $A$  tal que  $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$  siendo  $\vec{v} \neq \vec{0}$  (¿Por qué?)

**Tesis:**  $|A - \lambda I| = 0$

**Demostración:** En  $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$  con  $\vec{v} \neq \vec{0}$ ,  $\vec{v}$  es solución del sistema homogéneo  $(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$  (¿Por qué?).

Luego este es un sistema compatible indeterminado: por lo tanto el determinante de su matriz es  $= 0$ .

Es decir,  $|A - \lambda I| = 0$

La otra implicación queda a cargo de ustedes, pues es muy parecida a ésta

#### 2.1.3 Concepto Geométrico

$f$ : Dada  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  o  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  podemos decir que  $\vec{x}$  es autovector de  $f$  si al transformarse conserva la misma dirección.

Ejemplos:

a)  $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x, -y)$

b)  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$

Luego halla los autovalores y autovectores de  $A$  y verifica lo que dice el enunciado anterior.

## 2.2 Propiedades de los Autovectores

1)  $S = \{ \vec{x} / \vec{x} = \vec{0} \text{ o } \vec{x} \text{ es un autovector asociado al autovalor } \lambda \}$  es un subespacio. (Queda como ejercicio)

2) Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son L.I.

**Hipótesis:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$  autovectores de  $A$ .  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  sus autovalores asociados tales que  $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$

**Tesis:**  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$  es un conjunto L.I.

**Demostración:** La demostración habría que hacerla usando el principio de inducción completa. Nosotros vamos a probar que vale para  $n=2$  y luego usando que vale para  $n=2$  demostraremos que vale para  $n=3$  y así sucesivamente se puede demostrar para cualquier valor de  $n$ .

a) Probaremos para  $n = 2$ , es decir que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  es un conjunto L.I.

Sea:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

Multiplicamos ambos miembros por  $A$  y nos queda:  $\alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2 = \vec{0}$

Pero  $A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$  y  $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 \rightarrow$  nos queda:

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

Las incógnitas son entonces  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$ , las cuales debemos despejar de (1) y (2).

- Multiplico (1) por  $\lambda_1$ :  $\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \vec{x}_2 = \vec{0}$
- Le resto la ecuación (2):  $\alpha_2 \lambda_1 \vec{x}_2 - \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0}$

Nos queda entonces  $\alpha_2 \vec{x}_2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0}$

Pero  $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$  y  $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$  (¿Por qué?). Por lo tanto  $\alpha_2 = 0$

Reemplazando en (1) nos queda  $\alpha_2 = 0$ . Hemos probado que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  es un conjunto L.I.

b) Veamos ahora para  $n = 3$  o sea tenemos  $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$  autovectores de  $A$  y  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  diferentes entre sí. Queremos mostrar que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$  es un conjunto L.I.

Sea:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \quad (3)$$

Multiplicando por  $A$  y reemplazando por los autovectores nos queda:

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \lambda_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \quad (4)$$

Hacemos  $\lambda_1 \cdot (3) - (4)$  y nos queda:

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_1 - \lambda_3)\vec{x}_3 = \vec{0}$$

Como  $\vec{x}_2$  y  $\vec{x}_3$  son 2 autovectores asociados a autovalores diferentes son L.I. Luego si tengo una combinación lineal de ellos igualada a  $\vec{0}$  sus escalares son igual a 0.

$$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2) = 0 ; \alpha_3(\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0 \text{ (¿Por qué?)}$$

Reemplazando en (3) nos queda:  $\alpha_1 = 0$

Entonces hemos probado que  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$  es un conjunto L.I.

## 2.3 Consecuencias

1.  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz diagonalizable  $\Leftrightarrow$ 
  - a) Existe  $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  base de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores
  - b) Tiene  $n$  autovectores L.I.
2. Si  $A$  tiene  $n$  autovalores diferentes  $\rightarrow A$  es diagonalizable (No vale el recíproco)
3. Si  $A$  tiene algun autovalor múltiple ( $\lambda_0$ ) pero la  $\dim(S)_{\lambda_0} = \text{multiplicidad}_{\lambda_0} \rightarrow A$  es diagonalizable (No vale el recíproco)

## 3 Diagonalización de matrices simétricas

1. Las matrices simétricas son siempre diagonalizables (*sin demostración*)
2. Los autovectores de matrices simétricas correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales

**Hipótesis:**  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matriz simétrica,  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$  autovectores de  $A$  asociados a  $\lambda_1, \lambda_2$  donde  $\lambda_1 \neq \lambda_2$

**Tesis:**  $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$  es decir  $(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$

**Demostración:** Consideramos el producto interno canónico en el que se cumple que  $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$

Hacemos

$$(\vec{x}_1)^T A \cdot \vec{x}_2 = (\vec{x}_1)^T \lambda_2 \vec{x}_2 = \lambda_2 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$$

$$(\vec{x}_1)^T A \cdot \vec{x}_2 = (\vec{x}_1)^T A^T \vec{x}_2 = (A \cdot \vec{x}_1)^T \vec{x}_2 = \lambda_1 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$$

Podemos igualar ambas igualdades finales dado que parten de la misma expresión:

$$\lambda_2 \cdot (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2), \text{ luego pasamos restando y factor común:}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0 \text{ y como } \lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$$

3.  $A$  es una matriz simétrica  $\leftrightarrow$  tiene una base ortogonal de autovectores

$\Rightarrow$ ) **Hipótesis:**  $A$  es simétrica

**Tesis:**  $\exists$  una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores

**Demostración:** Siendo  $A$  simétrica consideraremos 2 casos posibles:

- a) Tiene  $n$  autovalores distintos, los autovectores asociados serían ortogonales (probado anteriormente) y dividiendo cada uno por su norma tendremos una base ortonormal de autovectores
- b) Hay algún autovalor múltiple ( $\lambda_0$ ), como sabemos que es diagonalizable, la  $\text{Dim}(S)_{\lambda_0} = \text{multiplicidad de } \lambda_0 \rightarrow$  dentro de ese subespacio podré encontrar una base ortonormal y junto con los otros formarán una base ortonormal de  $\mathbb{R}^n$  formada por autovectores

$\Leftarrow$ ) **Hipótesis:**  $A$  tiene una base ortonormal de autovectores

**Tesis:**  $A$  es simétrica

**Demostración:** Como  $A$  tiene una base ortogonal de autovectores  $\rightarrow$

$\exists D$  diagonal tal que  $A = P \cdot D \cdot P^T$

Por lo tanto  $A^T = (P \cdot D \cdot P^T)^T = (P^T)^T \cdot D^T \cdot P^T = P \cdot D \cdot P^T = A$

Queda demostrado que  $A$  es simétrica