

Espacios Vectoriales

Álgebra II

1 Definición

Sea V un conjunto cuyos elementos se llamarán vectores en el cual se definen dos operaciones:

- Suma de vectores
- Producto de un vector por un escalar $k \in \mathbb{R}$

Estas operaciones cumplen las siguientes propiedades:

Propiedades de la Suma:

1. **Cerrada:** Si $\vec{u}, \vec{v} \in V \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in V$
2. **Conmutativa:** $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$ para todo $\vec{u}, \vec{v} \in V$
3. **Asociativa:** $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
4. **Elemento Neutro:** $\exists \vec{0} \in V / \vec{0} + \vec{x} = \vec{x} \forall \vec{x} \in V$
5. **Vector Inverso:** $\forall \vec{x} \in V$, existe un vector inverso $-\vec{x} / \vec{x} + (-\vec{x}) = \vec{0}$

Propiedades del producto:

1. **Cerrada:** Si $\vec{x} \in V \Rightarrow k \cdot \vec{x} \in V$
2. **Neutro:** $1 \cdot \vec{x} = \vec{x} \forall \vec{x} \in V$
3. **Asociativa:** $k_1 \cdot (k_2 \cdot \vec{x}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \vec{x}$
4. **Distributiva:** $k \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = k \cdot \vec{x} + k \cdot \vec{y}$
5. **Distributiva:** $(k_1 + k_2) \cdot \vec{x} = k_1 \cdot \vec{x} + k_2 \cdot \vec{x}$

2 Subespacios

Definición: Un subconjunto S no vacío de V e.v. es un subespacio de V si la suma y el producto definidas en V estructuran también a S como un espacio vectorial.

Propiedades necesarias para que $S \subseteq V$ sea subespacio

1. Si $\vec{x} \in S$ e $\vec{y} \in S \Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in S$
2. Si $\vec{x} \in S \Rightarrow k \cdot \vec{x} \in S$
3. $\vec{0} \in S$

2.1 Definiciones

1. **Combinación Lineal:** \vec{x} es una combinación lineal de los vectores $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k$ si existen escalares k_1, k_2, \dots, k_k tal que $\vec{x} = k_1\vec{x}_1 + k_2\vec{x}_2 + \dots + k_k\vec{x}_k$
2. **Sistema de Generadores:** Un conjunto de vectores $M = \{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$ es un sistema de generadores de $V \Leftrightarrow \forall \vec{v} \in V, \vec{v} = \alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k$
3. **Conjunto de vectores linealmente independiente y linealmente dependiente:**

Sea $M = \{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k \}$ tal que $\vec{v}_i \in V \forall i$, y sea $\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \dots + \alpha_k\vec{x}_k = \vec{0}$ (o sea una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$)

Nos queda entonces un sistema lineal homogéneo que puede tener:

- a) Solución Única: La única solución es la trivial, por lo que M es un conjunto **Linealmente Independiente (L.I.)**
- b) Infinitas Soluciones: M es un conjunto **Linealmente Dependiente (L.D.)**

3 Base de un Espacio Vectorial

Definición: Dado V e.v. y $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ tal que $\forall \vec{v}_i \in V$ decimos que B es una base de V si y sólo si se cumple:

- a) B es un conjunto L.I.
- b) B es un sistema de generadores de V

Ejemplos de bases canónicas:

- **En \mathbf{R}^n :** $(1,0,0,\dots,0), (0,1,0,\dots,0), \dots, (0,0,0,\dots,1)$
- **En $\mathbf{R}^{2 \times 2}$:** $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- **En \mathbf{P}_n :** $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$

3.1 Dimensión de un Espacio Vectorial

Definición: Se llama dimensión de un espacio vectorial V a la cantidad de elementos que tiene una base.

4 Coordenadas de un vector respecto de una base

Dado $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ una base de V (e.v.) y dado $\vec{x} \in V \Rightarrow$

Se denomina a los escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tal que $\vec{x} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \dots + \lambda_k \vec{e}_k$ como **coordenadas de \vec{x}** respecto de la base B y se escribe $\vec{x}]_B$

Por lo tanto: $\vec{x}]_B = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$

5 Proposiciones

5.1 Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas

Hipótesis: V e.v. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ base de V , $\vec{x} \in V$

Tesis: Existe una única n -upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ tal que $\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$

Demostración: Supongo que existen 2 n -uplas que satisfacen la definición de coordenadas respecto de una base, es decir:

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \dots + \beta_n \vec{e}_n$$

Pasando al segundo miembro y sacando factor común \vec{e}_i nos queda:

$$(\alpha_1 - \beta_1) \cdot \vec{e}_1 + (\alpha_2 - \beta_2) \cdot \vec{e}_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n) \cdot \vec{e}_n = \vec{0}$$

Como $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V , es decir se trata de vectores L.I. Esto significa que si tengo una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$, sus escalares son $= 0$.

Por lo tanto, $\alpha_i = \beta_i \forall i$.

5.2 Si un espacio vectorial tiene una base de n elementos, entonces cualquier conjunto de $n+1$ elementos es un conjunto l.d.

Hipótesis: V e.v. $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ base de V , $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ conjunto de $n+1$ elementos

Tesis: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ es L.D.

Demostración: Para demostrar que un conjunto es L.I. debo probar que cualquier combinación lineal de sus vectores igualada a $\vec{0}$ tiene una única solución (La solución trivial). Para probar que es L.D., una combinación lineal de dichos vectores igualada a $\vec{0}$ tendrá infinitas soluciones.

Hagamos entonces:

$$\lambda_1 \vec{x}_1 + \lambda_2 \vec{x}_2 + \dots + \lambda_{n+1} \vec{x}_{n+1} = \vec{0} \quad (1)$$

Como los \vec{x}_i son vectores pertenecientes a V , y B es una base de V , entonces cada uno de ellos podrá escribirse como combinación lineal de los vectores de B :

$$\vec{x}_1 = \alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{12} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot \vec{e}_n$$

$$\vec{x}_2 = \alpha_{21} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot \vec{e}_n$$

\vdots

$$\vec{x}_{n+1} = \alpha_{n+1,1} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{n+1,2} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{n+1,n} \cdot \vec{e}_n$$

Reemplazando en la ecuación (1) nos queda:

$$\lambda_1 \cdot (\alpha_{11} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{12} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{1n} \cdot \vec{e}_n) + \lambda_2 \cdot (\alpha_{21} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{22} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{2n} \cdot \vec{e}_n) + \dots + \lambda_{n+1} \cdot (\alpha_{n+1,1} \cdot \vec{e}_1 + \alpha_{n+1,2} \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{n+1,n} \cdot \vec{e}_n)$$

Sacando factor \vec{e}_i nos queda: $(\lambda_1 \cdot \alpha_{11} + \lambda_2 \cdot \alpha_{21} + \dots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1}) \cdot \vec{e}_1 + (\lambda_1 \cdot \alpha_{12} + \lambda_2 \cdot \alpha_{22} + \dots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2}) \cdot \vec{e}_2 + \dots + (\lambda_1 \cdot \alpha_{1n} + \lambda_2 \cdot \alpha_{2n} + \dots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n}) \cdot \vec{e}_n$

Como tenemos una combinación lineal igualada a cero de vectores L.I. sus escalares serán todos iguales a 0

Entonces nos queda:

$$\lambda_1 \cdot \alpha_{11} + \lambda_2 \cdot \alpha_{21} + \dots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,1} = 0$$

$$\lambda_1 \cdot \alpha_{12} + \lambda_2 \cdot \alpha_{22} + \dots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,2} = 0$$

\vdots

$$\lambda_1 \cdot \alpha_{1n} + \lambda_2 \cdot \alpha_{2n} + \dots + \lambda_{n+1} \cdot \alpha_{n+1,n} = 0$$

Observamos que nos quedan **n** ecuaciones.

A su vez, los α_{ij} son datos, pues son las coordenadas de los vectores dados (las cuales son únicas)

Por otro lado, los λ_i son incógnitas, y hay **n + 1**.

Es decir, tenemos un sistema con más incógnitas que ecuaciones y por lo tanto la ecuación (1) tiene **infinitas** soluciones.

Concluimos entonces que el conjunto $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n, \vec{x}_{n+1}\}$ es L.D.

5.3 Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos

Hipótesis: V e.v. $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ y $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_p\}$ bases de V

Tesis: Ambas bases tienen la misma cantidad de elementos. ($n = p$)

Demostración: Supongo $n > p$. Como tengo una base de p elementos, si tengo un conjunto con al menos un elemento mas, será L.D.

Entonces $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ sería un conjunto L.D. Absurdo pues al ser una base debe ser un conjunto L.I.

Lo mismo ocurre al asumir $p > n$. Por lo tanto la única opción posible es **n = p**

5.4 Si un conjunto de vectores pertenecientes a un e.v. es un conjunto l.d. entonces alguno de ellos es combinación lineal de los demás

Hipótesis: V e.v. $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ conjunto L.D. de vectores pertenecientes a V

Tesis: $\exists j$ tal que $\vec{e}_j = \alpha_1 \cdot \vec{e}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{e}_2 + \dots + \alpha_{j-1} \cdot \vec{e}_{j-1} + \alpha_{j+1} \cdot \vec{e}_{j+1} + \dots + \alpha_n \vec{e}_n$

Demostración: Como A es un conjunto L.D. , dada una combinación lineal de ellos igualada a 0 , el sistema homogéneo que obtengo tendrá infinitas soluciones.

Entonces, dada $\alpha_1 \vec{e}_1 + \alpha_2 \vec{e}_2 + \dots + \alpha_n \vec{e}_n = \vec{0}$ existirá una n-upla $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ no todos nulos que

satisfagan la ecuación.

Supongamos $\alpha_1 \neq 0$ entonces podré despejar

$$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1}\vec{e}_n$$

Por lo que ha quedado expresado uno de los vectores como combinación lineal de los demás.

5.5 Si un S.G. de un espacio vectorial V es L.D. entonces existe un subconjunto de él de n-1 elementos que es S.G. de V .

Hipótesis: V e.v. B = $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ S.G. de V, B conjunto L.D.

Tesis: $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_{j-1}, \vec{e}_{j+1}, \dots, \vec{e}_n$ S.G. de V

Demostración: Quiero probar que algo es S.G. de V, entonces tomo un $\vec{x} \in V$. Entonces seguro $\vec{x} = \beta_1\vec{e}_1 + \beta_2\vec{e}_2 + \dots + \beta_n\vec{e}_n$ (¿Por qué?). Como B es un conjunto L.D. entonces uno de los vectores será combinación lineal de los demás. Supongamos \vec{e}_1 o sea:

$$\vec{e}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_n .$$

Reemplazando en \vec{x} nos queda:

$$\vec{x} = \beta_1 \cdot \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_2 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_1} \cdot \vec{e}_n\right) + \beta_2\vec{e}_2 + \dots + \beta_n\vec{e}_n.$$

Sacando factor común queda expresado

$$\vec{x} = \vec{e}_2 \cdot \left(-\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \vec{e}_3 \cdot \left(-\frac{\alpha_3}{\alpha_1}\right) + \dots + \vec{e}_n \cdot \left(-\frac{\alpha_n}{\alpha_1}\right)$$

De esta manera, \vec{e}_2 queda generado por $\{\vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$, el cual tiene $n - 1$ elementos.

5.6 Dado V e.v. $\dim(V) = n$. Si tenemos n vectores L.I. pertenecientes a V, son una base de V

Hipótesis: V e.v, $\dim(V) = n$. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ conjunto L.I.

Tesis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ Base de V

Demostración: Para que un conjunto sea base de V, debe ser l.i. y SG de V.

Que son L.I. lo sabemos por Hip. Sólo nos falta probar que son S.G. de V

Para eso debemos probar que cualquier \vec{x} perteneciente a V está generado por dichos vectores.

Sea $\vec{x} \in V$ (¿Por qué comienzo así?) y formo el conjunto $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n, \vec{x}\}$ este conjunto es L.D. (¿Por qué?)

Entonces existe una C.L. de sus vectores igualada a cero con sus escalares no todos nulos.

Sea $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n + \alpha_{n+1}\vec{x} = \vec{0}$; puede ser $\alpha_{n+1} = 0$ o $\alpha_{n+1} \neq 0$

Si $\alpha_{n+1} = 0$ nos queda $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \dots + \alpha_n\vec{e}_n = \vec{0}$.

Y, como los \vec{e}_i son L.I. tendríamos $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Lo cual es absurdo (¿Por qué?) Por lo

tanto es $\alpha_{n+1} \neq 0$ y podemos despejar.

Nos queda $\vec{x} = -\vec{e}_1 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\right) - \vec{e}_2 \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_{n+1}}\right) - \dots - \vec{e}_n \cdot \left(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\right)$

Por lo que queda demostrado que:

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es una base de V .

5.7 Dado V e.v. tal que $\dim(V) = n$. Si tenemos un conjunto de n vectores S.G. de V son una base de V

Hipótesis: V e.v, $\dim(V) = n$. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ S.G. de V

Tesis: $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ Base de V

Demostración: Debemos demostrar que $A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto L.I.

Supongamos que A no es un conjunto l.i. entonces un subconjunto de él continuará siendo un S.G. de V (¿Por qué?). Llamemos A_1 a dicho conjunto.

A_1 no puede ser L.I. porque si lo fuera sería una base de V de $n-1$ elementos. Absurdo. (¿Por qué?)

Luego A_1 debe ser l.d. Entonces un subconjunto de él continuará siendo un S.G. de V . Llamemos A_2 a dicho conjunto.

Y así podemos continuar hasta llegar a tener $A_n = \{\vec{e}_j\}$ un subconjunto de A con un solo elemento que es distinto de 0 (¿Por qué?) por lo tanto es L.I. o sea que sería una base de V . Absurdo.

Por lo tanto A debe ser L.I. y entonces es base de V

6 Definiciones

Dados S y T subespacios de V e.v. podemos definir :

- **Intersección:** $S \cap T = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \in S \text{ y } \vec{x} \in T\}$
- **Unión:** $S \cup T = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \in S \text{ o } \vec{x} \in T\}$
- **Suma:** $S + T = \{\vec{x} \in V / \vec{x} = \vec{a} + \vec{b} \text{ con } \vec{a} \in S \text{ y } \vec{b} \in T\}$
- **Suma directa:** $S \oplus T = S + T$ con $S \cap T = \{\vec{0}\}$

6.1 Si S y T son subespacios de V e.v. entonces $S+T$ es un subespacio de V .

Hipótesis: V e.v. , S y T subespacios de V

Tesis: $S + T$ es un subespacio de V

Demostración: Es evidente que $S + T \subset V$ (¿Por qué?)

Veamos que se cumplen las 3 condiciones para que sea subespacio

a) Sea $\vec{x} \in S + T$ e $\vec{y} \in S + T$ entonces