

# Demostraciones para el Parcial

## Álgebra II

### 1 Espacios Vectoriales

- Las coordenadas de un vector respecto de una base son únicas
- Si un espacio vectorial tiene una base de  $n$  elementos cualquier conjunto con  $n + 1$  es L.D.
- Todas las bases de un mismo espacio vectorial tienen la misma cantidad de elementos
- Si un conjunto de vectores es L.D. entonces alguno es Combinación lineal de los otros
- Si  $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$  es un S.G. de un espacio vectorial  $V$  y es un conjunto L.D. entonces existe un subconjunto de él de  $n - 1$  elementos que es S.G. de  $V$
- Dado  $V$  e.v. tal que  $\dim(V) = n$ , si tenemos  $n$  vectores L.I.  $\in V \Rightarrow$  son una base de  $V$
- Dado  $V$  e.v  $\dim(V) = n$ , si tenemos un conjunto de  $n$  vectores S.G. de  $V \Rightarrow$  son una base de  $V$
- Si  $S$  y  $T$  son subespacios de  $V$  e.v.  $\Rightarrow S + T$  es un subespacio de  $V$

### 2 Transformaciones Lineales

- Dado  $V$  y  $W$  e.v.s y  $f: V \rightarrow W$  /  $f$  es T.L.  $\Rightarrow f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$
- Dado  $V$  y  $W$  e.v.s y  $f: V \rightarrow W$  /  $f$  es T.L.  $\Rightarrow \text{Im}(f)$  es un subespacio de  $W$
- Dado  $V$  y  $W$  e.v.s y  $f: V \rightarrow W$  /  $f$  es T.L.  $\Rightarrow f$  es monomorfismo  $\Leftrightarrow \text{Nu}(f) = \{\vec{0}\}$
- Si  $f: V \rightarrow W$  es T.L. y  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$  base de  $V \Rightarrow \{f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_n)\}$  es S.G. de  $\text{Im}(f)$
- Si  $f: V \rightarrow W$  es T.L. y  $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$  base de  $V$  y  $f$  es monomorfismo  $\Rightarrow \{f(\vec{x}_1), f(\vec{x}_2), \dots, f(\vec{x}_n)\}$  es una base de  $\text{Im}(f)$

### 3 Producto Interno

- Todo conjunto ortogonal de vectores es un conjunto linealmente independiente.
- En todo espacio euclídeo  $V$  existe una base ortonormal. (proceso de Gram-Schmidt)

### 4 Matriz Diagonalizable y Autovectores

- $A$  es diagonalizable  $\leftrightarrow$  existe una base de autovectores
- Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son L.I. (Para  $n = 2$ )
- Los autovectores de matrices simétricas correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales
- Si  $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$  son autovectores de  $A \Rightarrow$  cualquier combinación lineal también lo es