Matriz de Transformación Lineal

Álgebra II

1 Matriz de una Transformación Lineal dada una base del dominio y una base del codominio

Dada $f : V \to W$ una T.L.

B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$ una base de V

B' = $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \ldots, \vec{w}_p\}$ una base de W

$\Rightarrow$ existe una matriz $A \in \mathbb{R}^{pxn}$ / para todo $\vec{x} \in V$, $f(\vec{x})]_{B'} = A \cdot \vec{x}]_B$

Sea $\vec{x} \in V \Rightarrow \vec{x} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = f(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n)$

$\Rightarrow f(\vec{x}) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$ (¿Por qué?)

Pero,

$f(\vec{v}_1) = \beta_{11}\vec{w}_1 + \ldots + \beta_{1p}\vec{w}_p$

$f(\vec{v}_2) = \beta_{21}\vec{w}_1 + \ldots + \beta_{2p}\vec{w}_p$

$\vdots$

$f(\vec{v}_n) = \beta_{n1}\vec{w}_1 + \ldots + \beta_{np}\vec{w}_p$

Reemplazando en $f(\vec{x}) = \alpha_1 f(\vec{v}_1) + \alpha_2 f(\vec{v}_2) + \ldots + \alpha_n f(\vec{v}_n)$ nos queda:

$f(\vec{x}) = \alpha_1(\beta_{11}\vec{w}_1 + \ldots + \beta_{1p}\vec{w}_p) + \alpha_2(\beta_{21}\vec{w}_1 + \ldots + \beta_{2p}\vec{w}_p) + \ldots + \alpha_n(\beta_{n1}\vec{w}_1 + \ldots + \beta_{np}\vec{w}_p)$

Aplicando propiedad distributiva y sacando factor común nos queda:

$f(\vec{x}) = (\alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{21} + \ldots + \alpha_n\beta_{n1})\vec{w}_1 + \ldots + (\alpha_1\beta_{1p} + \alpha_2\beta_{2p} + \ldots + \alpha_n\beta_{np})\vec{w}_p$.

$f(\vec{x})]_{B'} = (\alpha_1\beta_{11} + \alpha_2\beta_{21} + \ldots + \alpha_n\beta_{n1}\ ,\ \alpha_1\beta_{12} + \alpha_2\beta_{22} + \ldots + \alpha_n\beta_{n2}\ ,\ \ldots, \alpha_1\beta_{1p} + \alpha_2\beta_{2p} + \ldots + \alpha_n\beta_{np})$

Esto se puede escribir matricialmente:

$$f(\vec{x})]_{B'} = \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{21} & \ldots & \beta_{n1} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \ldots & \beta_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ \beta_{1p} & \beta_{2p} & \ldots & \beta_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \text{A} \Rightarrow f(\vec{x})]_{B'} = A \cdot \vec{x}]_B$$

Es importante mirar bien como está formada A. ¿Cuáles son sus columnas?

2 Matriz de la composición de 2 T.L.

Si $f_1 : U \to V$ y $f_2 : V \to W$ son 2 T.L. y si B, B' y B" son bases de U, V y W respectivamente, entonces:

$\|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$

Hipótesis:

$f_1 : U \to V$ y $f_2 : V \to W$ son 2 T.L.

B, B' y B" son bases de U, V y W respectivamente

$\|f_2\|_{B'B''}$ y $\|f_1\|_{BB'}$ matrices de las T.L. respecto de las bases dadas.

Tesis:

$\|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$

Demostración:

Dado $\vec{x} \in U$ queremos encontrar una matriz A / $f_2 \circ f_1(\vec{x})]_{B''} = A \cdot \vec{x}]_{B'}$

Sabemos que $\|f_1\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B = f_1(\vec{x})]_{B'}$.

Como son las coordenadas de un vector de V en la base B' puedo hacer el siguiente producto:

$\|f_2\|_{B'B''} \cdot f_1(\vec{x})]_{B'} = f_2(\ f_1(\vec{x})\ )]_{B'}$ o sea

$f_2 \circ f_1(\vec{x})]_{B''} = f_2(\ f_1(\vec{x})\ )]_{B'} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B$

$\Rightarrow \|f_2 \circ f_1\|_{BB''} = \|f_2\|_{B'B''} \cdot \|f_1\|_{BB'}$

3 Definiciones

3.1 Transformación Lineal Identidad:

Sea V e.v. definimos $id : V \to V$ / $id(\vec{x}) = \vec{x}$, $\forall\ \vec{x} \in V$

3.2 Definición de transformación inversa

Dada $f : V \to W$ / f es un isomorfismo,

Diremos que existe una transformación lineal que llamamos f^{-1} / $f^{-1} : W \to V$ y se cumple que:

$f^{-1} \circ f(\vec{x}) = id(\vec{x})$, $\forall\ \vec{x} \in V$

$f \circ f^{-1}(\vec{y}) = id(\vec{y})$, $\forall\ \vec{y} \in W$

3.3 Propiedad de matriz de transformación inversa

Hipótesis:

$f : V \to W$ isomorfismo

B base de V, B' base de W

Tesis: $\|f^{-1}\|_{B'B} = (\|f\|_{BB'})^{-1}$

Demostración: Una matriz A es la inversa de otra matriz B $\leftrightarrow$

$A \cdot B = I$ (Matriz Identidad)

O sea debemos demostrar que

$\|f^{-1}\|_{B'B} \cdot \|f\|_{BB'} =$ Id

Pero aplicando lo que sabemos de matriz de una composición de T.L. podemos decir:

$\|f^{-1}\|_{B'B} \cdot \|f\|_{BB'} = \|f^{-1} \circ f\|_B = \|Id\|_B = I$ (¿Por qué?)

O sea que $\|f^{-1}\|_{B'B} = (\|f\|_{BB'})^{-1}$

3.4 Matriz cambio de base

Sea V e.v. , B y B' bases de V.

Podemos formar $\|Id\|_{BB'}$ (¿Cómo lo hacemos?)

Ahora dado $\vec{x} \in V$ resulta:

$\|Id\|_{BB'} \cdot \vec{x}]_B = \vec{x}]_{B'}$

Entonces será $\|Id\|_{BB'} =$ **Matriz cambio de base**

3.5 Cambio de base para las matrices de las T.L.

Sea $f : V \to W$, B_1, B_1' bases de V.

B_2, B_2' bases de W, $\|f\|_{B_1B_2}$

Queremos calcular $\|f\|_{B_1'B_2'} \Rightarrow$

Queremos encontrar una matriz A tal que dado $\vec{x}]_{B_1'}$ sea $f(\vec{x})]_{B_2'} =$ A $\cdot\, \vec{x}]_{B_1'}$

Como el dato que tenemos es $\|f\|_{B_1B_2}$, no nos sirve $\vec{x}]_{B_1'}$, pero sabemos que:

$\vec{x}]_{B_1} = \|Id\|_{B_1'B_1} \cdot \vec{x}]_{B_1'}$

Entonces será:

$\|f\|_{B_1B_2} \cdot \|Id\|_{B_1'B_1} \cdot \vec{x}]_{B_1'} = \|f\|_{B_1'B_2}$

Pero no queremos este resultado que son coordenadas en B_2 , sino que queremos coordenadas en B_2' entonces lo que hacemos es:

$f(\vec{x})]_{B_2'} = \|Id\|_{B_2B_2'} \cdot \|f\|_{B_1B_2} \cdot \|Id\|_{B_1'B_1} \cdot \vec{x}]_{B_1'}$

Por lo tanto:

$\|f\|_{B_1'B_2'} = \|Id\|_{B_2B_2'} \cdot \|f\|_{B_1B_2} \cdot \|Id\|_{B_1'B_1}$