

Matriz Diagonalizable

Autovectores

Álgebra II

1 Diagonalización de Matriz de T.L.

Dado $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$ siempre existe una $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

En otras palabras, f es una T.L. y $\|f\|_{CC} = A$

1.1 Definición

Decimos que A es una matriz diagonalizable si y sólo si, al definir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal, o sea existe una matriz $P = \|id\|_{BC} / \|f\|_B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (¿Por qué?)

1.2 Proposición

A es diagonalizable \leftrightarrow existe una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de \mathbb{R}^n y escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

\Rightarrow **Hipótesis:** A es diagonalizable, o sea si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal

Tesis: Existen escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

Demostración: Como $\|f\|_{BB}$ es diagonal $\Rightarrow \|f\|_{BB} = M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Para interpretar esta matriz, recordamos la definición de matriz de T.L. dada una base:

$$f(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = a_{11} \cdot \vec{v}_1$$

$$f(\vec{v}_2) = 0 \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = a_{22} \cdot \vec{v}_2$$

\vdots

$$f(\vec{v}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{v}_n = a_{nn} \cdot \vec{v}_n$$

Con lo que queda demostrada la tesis. Veamos ahora la otra implicación.

\Leftarrow) **Hipótesis:** \exists base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de R^n y escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

Tesis: A es diagonalizable

Demostración: Debemos probar que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ entonces $\|f\|_{BB}$ es diagonal.

Para esto, armemos $\|f\|_{BB}$:

$$f(\vec{v}_1) = A \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \text{la 1ra columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}_2) = A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow \text{la 2da columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vdots

$$f(\vec{v}_n) = A \cdot \vec{v}_n = \lambda_n \cdot \vec{v}_n \Rightarrow \text{la n columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto, } \|f\|_B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ que es una matriz diagonal.}$$

2 Autovalores y Autovectores

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ llamaremos autovalor de A a un número $\lambda \in \mathbb{R}$ si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$ al que llamaremos autovector de A asociado al autovalor λ tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

2.1 Proposiciones

2.1.1 C.L. vectores asociados

Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ son autovectores de una matriz A asociados a un autovalor λ , entonces cualquier combinación lineal de ellos será autovector de A asociado a λ .

Demostración: Sabiendo que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda \cdot \vec{v}_i$

$A \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n) \rightarrow$ Planteo C.L. de los vectores

$\alpha_1 A \vec{v}_1 + \alpha_2 A \vec{v}_2 + \dots \alpha_n A \vec{v}_n \rightarrow$ Distribuyo A

$\alpha_1 \lambda \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \lambda \vec{v}_n \rightarrow$ Uso hipótesis

$\lambda \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n) \rightarrow$ Factor Común λ

Por lo tanto $A \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n) = \lambda \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n)$

2.1.2 Relación entre autovalor y determinante

λ es un autovalor asociado a \vec{v} , autovector de una matriz $A \Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

Hipótesis: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, λ y \vec{v} autovalor y autovector de A tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ siendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ (¿Por qué?)

Tesis: $|A - \lambda I| = 0$

Demostración: En $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, \vec{v} es solución del sistema homogéneo $(A - \lambda I) \cdot \vec{x} = \vec{0}$ (¿Por qué?).

Luego este es un sistema compatible indeterminado: por lo tanto el determinante de su matriz es $= 0$. Es decir, $|A - \lambda I| = 0$

La otra implicación queda a cargo de ustedes, pues es muy parecida a ésta

2.1.3 Concepto Geométrico

f : Dada $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podemos decir que \vec{x} es autovector de f si al transformarse conserva la misma dirección.

Ejemplos:

a) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 / f(x, y) = (x, -y)$

b) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 / f(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$

Luego halla los autovalores y autovectores de A y verifica lo que dice el enunciado anterior.

2.2 Propiedades de los Autovectores

1) $S = \{ \vec{x} / \vec{x} = \vec{0} \text{ o } \vec{x} \text{ es un autovector asociado al autovalor } \lambda \}$ es un subespacio. (Queda como ejercicio)

2) Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son L.I.

Hipótesis: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ autovectores de A . $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sus autovalores asociados tales que $\lambda_i \neq \lambda_j \forall i \neq j$

Tesis: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n\}$ es un conjunto L.I.

Demostración: La demostración habría que hacerla usando el principio de inducción completa. Nosotros vamos a probar que vale para $n=2$ y luego usando que vale para $n=2$ demostraremos que vale para $n=3$ y así sucesivamente se puede demostrar para cualquier valor de n .

a) Probaremos para $n = 2$, es decir que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un conjunto L.I.

Sea:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 = \vec{0} \quad (1)$$

Multiplicamos ambos miembros por A y nos queda: $\alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2 = \vec{0}$

Pero $A\vec{x}_1 = \lambda_1 \vec{x}_1$ y $A\vec{x}_2 = \lambda_2 \vec{x}_2 \rightarrow$ nos queda:

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0} \quad (2)$$

Las incógnitas son entonces α_1 y α_2 , las cuales debemos despejar de (1) y (2).

- Multiplico (1) por λ_1 : $\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \vec{x}_2 = \vec{0}$
- Le resto la ecuación (2): $\alpha_2 \lambda_1 \vec{x}_2 - \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 = \vec{0}$

Nos queda entonces $\alpha_2 \vec{x}_2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0}$

Pero $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$ y $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq 0$ (¿Por qué?). Por lo tanto $\alpha_2 = 0$

Reemplazando en (1) nos queda $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$. Hemos probado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un conjunto L.I.

b) Veamos ahora para $n = 3$ o sea tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ autovectores de A y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferentes entre sí.

Queremos mostrar que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ es un conjunto L.I.

Sea:

$$\alpha_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \quad (3)$$

Multiplicando por A y reemplazando por los autovectores nos queda:

$$\alpha_1 \lambda_1 \vec{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \vec{x}_2 + \alpha_3 \lambda_3 \vec{x}_3 = \vec{0} \quad (4)$$

Hacemos $\lambda_1 \cdot (3) - (4)$ y nos queda $\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) \vec{x}_2 + \alpha_3 (\lambda_1 - \lambda_3) \vec{x}_3 = \vec{0}$

Como \vec{x}_2 y \vec{x}_3 son 2 autovectores asociados a autovalores diferentes son L.I. Luego si tengo una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$ sus escalares son igual a 0.

$\alpha_2 (\lambda_1 - \lambda_2) = 0$; $\alpha_3 (\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (¿Por qué?)

Reemplazando en (3) nos queda $\alpha_1 \vec{x}_1 = \vec{0}$

Entonces hemos probado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ es un conjunto L.I.

2.3 Consecuencias

1. $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es una matriz diagonalizable \Leftrightarrow
 - a) Existe $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de \mathbb{R}^n formada por autovectores
 - b) Tiene n autovectores L.I.
2. Si A tiene n autovalores diferentes $\rightarrow A$ es diagonalizable (No vale el recíproco)
3. Si A tiene algún autovalor múltiple (λ_0) pero la $\dim(S)_{\lambda_0} = \text{multiplicidad}_{\lambda_0} \rightarrow A$ es diagonalizable (No vale el recíproco)

3 Diagonalización de matrices simétricas

1. Las matrices simétricas son siempre diagonalizables (*sin demostración*)
2. Los autovectores de matrices simétricas correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales

Hipótesis: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ matriz simétrica, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ autovectores de A asociados a λ_1, λ_2 donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Tesis: $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$ es decir $(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$

Demostración: Consideramos el producto interno canónico en el que se cumple que $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x}^T \cdot \vec{y}$
Hacemos

$$(\vec{x}_1)^T A \cdot \vec{x}_2 = (\vec{x}_1)^T \lambda_2 \vec{x}_2 = \lambda_2 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$$

$$(\vec{x}_1)^T A \cdot \vec{x}_2 = (\vec{x}_1)^T A^T \vec{x}_2 = (A \cdot \vec{x}_1)^T \vec{x}_2 = \lambda_1 (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$$

Podemos igualar ambas igualdades finales dado que parten de la misma expresión:

$$\lambda_2 \cdot (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2), \text{ luego pasamos restando y factor común:}$$

$$(\lambda_2 - \lambda_1)(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0 \text{ y como } \lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$$

3. A es una matriz simétrica \Leftrightarrow tiene una base ortogonal de autovectores

\rightarrow **Hipótesis:** A es simétrica

Tesis: \exists una base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por autovectores

Demostración: Siendo A simétrica consideraremos 2 casos posibles:

- a) Tiene n autovalores distintos, los autovectores asociados serían ortogonales (probado anteriormente) y dividiendo cada uno por su norma tendremos una base ortonormal de autovectores
- b) Hay algún autovalor múltiple (λ_0), como sabemos que es diagonalizable, la $\dim(S)_{\lambda_0} = \text{multiplicidad de } \lambda_0 \rightarrow$ dentro de ese subespacio podré encontrar una base ortonormal y junto con los otros formarán una base ortonormal de \mathbb{R}^n formada por autovectores

\leftarrow **Hipótesis:** A tiene una base ortonormal de autovectores

Tesis: A es simétrica

Demostración: Como A tiene una base ortogonal de autovectores \rightarrow

$$\exists D \text{ diagonal tal que } A = P \cdot D \cdot P^T$$

$$\text{Por lo tanto } A^T = (P \cdot D \cdot P^T)^T = (P^T)^T \cdot D^T \cdot P^T = P \cdot D \cdot P^T = A$$

Queda demostrado que A es simétrica