

Matriz Diagonalizable

Autovectores

Álgebra II

1 Diagonalización de Matriz de T.L.

Dado $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \Rightarrow$ siempre existe una $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$.

En otras palabras, f es una T.L. y $\|f\|_{CC} = A$

1.1 Definición

Decimos que A es una matriz diagonalizable si y sólo si, al definir $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal, o sea existe una matriz $P = \|id\|_{BC} / \|f\|_B = P^{-1} \cdot A \cdot P$ (¿Por qué?)

1.2 Proposición

A es diagonalizable \leftrightarrow existe una base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de \mathbb{R}^n y escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

\Rightarrow **Hipótesis:** A es diagonalizable, o sea si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal

Tesis: Existen escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

Demostración: Como $\|f\|_{BB}$ es diagonal $\Rightarrow \|f\|_{BB} = M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Para interpretar esta matriz, recordamos la definición de matriz de T.L. dada una base:

$$f(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = a_{11} \cdot \vec{v}_1$$

$$f(\vec{v}_2) = 0 \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = a_{22} \cdot \vec{v}_2$$

\vdots

$$f(\vec{v}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots + a_{nn} \cdot \vec{v}_n = a_{nn} \cdot \vec{v}_n$$

Con lo que queda demostrada la tesis. Veamos ahora la otra implicación.

\Leftarrow) **Hipótesis:** \exists base $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ base de R^n y escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

Tesis: A es diagonalizable

Demostración: Debemos probar que si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ entonces $\|f\|_{BB}$ es diagonal.

Para esto, armemos $\|f\|_{BB}$:

$$f(\vec{v}_1) = A \cdot \vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow \text{la 1ra columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$f(\vec{v}_2) = A \cdot \vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow \text{la 2da columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

\vdots

$$f(\vec{v}_n) = A \cdot \vec{v}_n = \lambda_n \cdot \vec{v}_n \Rightarrow \text{la n columna de } \|f\|_B \text{ será } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Por lo tanto, } \|f\|_B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ que es una matriz diagonal.}$$

2 Autovalores

Dada una matriz $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ llamaremos autovalor de A a un número $\lambda \in \mathbb{R}$ si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$ al que llamaremos autovector de A asociado al autovalor λ tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

2.1 Proposiciones

2.1.1 C.L. vectores asociados

Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ son autovectores de una matriz A asociados a un autovalor λ , entonces cualquier combinación lineal de ellos será autovector de A asociado a λ .

Demostración: Sabiendo que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda \cdot \vec{v}_i$

$A \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n) \rightarrow$ Planteo C.L. de los vectores

$\alpha_1 A \vec{v}_1 + \alpha_2 A \vec{v}_2 + \dots \alpha_n A \vec{v}_n \rightarrow$ Distribuyo A

$\alpha_1 \lambda \vec{v}_1 + \alpha_2 \lambda \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \lambda \vec{v}_n \rightarrow$ Uso hipótesis

$\lambda \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n) \rightarrow$ Factor Común λ

Por lo tanto $A \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n) = \lambda \cdot (\alpha_1 \vec{v}_1 + \alpha_2 \vec{v}_2 + \dots \alpha_n \vec{v}_n)$

2.1.2 Relación entre autovalor y determinante

λ es un autovalor asociado a \vec{v} , autovector de una matriz A $\Leftrightarrow |A - \lambda I| = 0$

Hipótesis: A es diagonalizable, o sea si $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n / f(\vec{x}) = A \cdot \vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal

Tesis: Existen escalares λ_i tal que $A \cdot \vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i$

Demostración: