Producto Interno

Álgebra II

1 Definiciones

1.1 Producto Interno

Definición: Un producto interno o escalar sobre un espacio vectorial real V es una función p: $VxV \to \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{y} \cdot \vec{x})$
2. $((\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) + (\vec{y} \cdot \vec{z})$
3. $(\lambda \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
4. I) $(\vec{x} \cdot \vec{x} \geq 0)$
   II) $(\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$

1.2 Espacio Euclideo

Si V es un e.v. en el que se ha definido un producto interno recibe el nombre de espacio euclídeo.

1.3 Definiciones en un espacio euclideo

- Norma de un vector: $\| \vec{x} \|^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x})$
  a) Con cualquier producto interno, el único vector de norma cero es el $\vec{0}$ (¿Por qué?)
  b) $\| \vec{x} \| = \| -\vec{x} \|$ (¿Por qué?)
  c) $\| \alpha \cdot \vec{x} \| = | \alpha | \cdot \| \vec{x} \|$ (¿Por qué?)
- Distancia entre dos vectores:
  $dist(\vec{x}, \vec{y}) = \| \vec{x} - \vec{y} \|$
- Ángulo entre dos vectores:
  $\cos\phi = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|}$
- Ortogonalidad entre vectores:
  Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales $\leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

- Conjunto Ortogonal de Vectores:

  Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto ortogonal $\leftrightarrow$ $\vec{e}_i \neq \vec{0}$ $\forall i$ y $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0$ $\forall i \neq j$

- Conjunto Ortonormal de Vectores:

  Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es ortonormal $\leftrightarrow$ es ortogonal y la norma de sus vectores es 1.

2 Proposiciones

2.1 Teorema de Pitágoras

Cualquiera sean vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores pertenecientes a $V e.e.$ tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$ se cumple:

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$$

Hipótesis: V e.e. $\vec{x}, \vec{y} \in V$ $\vec{x} \perp \vec{y}$

Tésis: $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$

Demostración:

$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \rightarrow$ Expreso la norma como producto

$= (\vec{x} \cdot \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{x}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) \rightarrow$ Distribuyo por propiedad 2

$= \| \vec{x} \|^2 + 0 + 0 + \| \vec{y} \|^2$ (¿Por qué?)

O sea hemos llegado a la tesis

2.2 Desigualdad de Schwarz

Cualquiera sea $\vec{x}$ e $\vec{y} \in$ V e.e. se cumple:

$| (\vec{x} \cdot \vec{y}) | \leq \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

Esta demostración es necesaria para que esté bien definido el ángulo entre dos vectores (¿Por qué?)

Hipótesis: V e.e. $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$

Tésis: $| (\vec{x} \cdot \vec{y}) | \leq \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

Demostración:

Para realizar esta demostración, definimos: $\vec{z} = \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

Entonces podemos afirmar $((\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y})) \geq 0$

Aplicando propiedades de producto interno (¿Cuales?) nos queda:

$\| \vec{x} \|^2 + 2\ \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \alpha^2 \cdot \| \vec{y} \|^2 \geq 0$

Esta expresión representa geométricamente una parábola una parábola de variable α, la cual

es siempre ≥ 0. Entonces tiene 1 o ninguna raíz lo que significa que al aplicar la fórmula para aplicar raíces en una parábola:

$(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \qquad \triangle = b^2 - 4ac \leq 0$

En nuestro caso resulta:

$(2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 - 4 \cdot \parallel \vec{y} \parallel^2 \parallel \vec{x} \parallel^2 \leq 0$

$(2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 \leq 4 \cdot \parallel \vec{y} \parallel^2 \parallel \vec{x} \parallel^2$

$\mid (\vec{x} \cdot \vec{y}) \mid \leq \parallel \vec{x} \parallel \parallel \vec{y} \parallel$ (¿Por qué?)

2.3 Todo conjunto ortogonal es L.I.

Hipótesis: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ Conjunto Ortogonal

Tésis: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ Conjunto L.I.

Demostración:

Sea $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$

Debemos probar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Sabemos que $(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) = 0 \ \forall i \neq j$

Multiplicando ambos miembros por $\vec{a}_1$ y aplicando propiedad distributiva en el primer miembro nos queda:

$\alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1) + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \cdots + \alpha_n(\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{0})$

$\alpha_1 \cdot \parallel \vec{a}_1 \parallel^2 = 0$ y como $\parallel \vec{a}_1 \parallel^2 \neq 0$ resulta $\alpha_1 = 0$

De la misma manera, multiplicando por los demás vectores nos queda $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

Que es lo que queríamos demostrar.

2.4 Proceso de Grand Smith

En todo espacio euclídeo V existe una base ortonormal.

Hipótesis: V e.e. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ base de V

Tésis: $\exists\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ base ortonormal de V

Demostración: Lo vamos a demostrar para $n = 3$

Sea $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + \alpha \cdot \vec{u}_1$, $\vec{u}_2 \in V$ (¿Por qué?)

Queremos determinar α para que $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = 0 \rightarrow$

$(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2) + \alpha \cdot \parallel \vec{u}_1 \parallel^2 = 0$

Despejando $\alpha = -\dfrac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2)}{\parallel \vec{u}_1 \parallel^2}$ donde seguro $\parallel \vec{u}_1 \parallel^2 \neq 0$ (¿Por qué?)

Podemos reemplazar y obtener ahora $\vec{u}_2$

$$\vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \vec{u}_1 \cdot \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2)}{\parallel \vec{u}_1 \parallel^2}$$

Ahora armamos

$$\vec{u}_3 = \vec{e}_3 + \theta \cdot \vec{u}_1 + \mu \cdot \vec{u}_2 \tag{1}$$

Queremos obtener θ y μ de manera tal que $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$ y $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_2$

Multiplicamos (1) por $\vec{u}_1$ y nos queda:

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + \mu \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot \parallel \vec{u}_1 \parallel^2 + 0$ (¿Por qué?)

Igualando a cero para que sean ortogonales:

$(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot \parallel \vec{u}_1 \parallel^2 = 0$

$$\rightarrow \theta = -\frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1)}{\parallel \vec{u}_1 \parallel^2}$$

Ahora multiplicamos (1) por $\vec{u}_2$ y nos queda:

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + \theta \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + \mu \cdot (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2)$

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + 0 + \theta \cdot \parallel \vec{u}_2 \parallel^2$

Igualando a cero para que sean ortogonales:

$(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + \mu \cdot \parallel \vec{u}_2 \parallel^2 = 0$

$$\rightarrow \mu = -\frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2)}{\parallel \vec{u}_2 \parallel^2}$$

Podemos reemplazar y obtener ahora $\vec{u}_3$:

$$\vec{u}_3 = \vec{e}_3 - \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1)}{\parallel \vec{u}_1 \parallel^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2)}{\parallel \vec{u}_2 \parallel^2} \cdot \vec{u}_2$$

Por lo tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman una base ortogonal de V. (¿Por qué seguro es base de V?)

Como queremos una base ortonormal dividimos a cada vector por su norma y nos queda:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\parallel \vec{u}_1 \parallel}$$

$$\vec{w}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\parallel \vec{u}_2 \parallel}$$

$$\vec{w}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\parallel \vec{u}_3 \parallel}$$

$\Rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es una base ortonormal de V.

3 Nuevas Definiciones

3.1 Subespacios Ortogonales

Dado S y T subespacios de V e.e. decimos que S es ortogonal a T (lo escribimos $S \perp T$) si y sólo si $\vec{x} \perp \vec{y} \; \forall \; \vec{x} \in S \; , \forall \; \vec{y} \in T$

3.2 Complemento Ortogonal de un subespacio

Dado S subespacio de V e.e. llamaremos
$S^{\perp} = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \perp \vec{s} \; \forall \; \vec{s} \in V\}$