Matriz Diagonalizable

Autovectores

Álgebra II

1 Diagonalización de Matriz de T.L.

Dado A $\in \mathbb{R}^{nxn} \Rightarrow$ siempre existe una f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$.

En otras palabras, f es una T.L. y $\|f\|_{CC}$ = A

1.1 Definición

Decimos que A es una matriz diagonalizable si y sólo si, al definir f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal, o sea existe una matriz P = $\|id\|_{BC}$ / $\|f\|_B$ = $\mathrm{P}^{-1} \cdot A \cdot P$ *(¿Por qué?)*

1.2 Proposición

A es diagonalizable $\leftrightarrow$ existe una base B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ base de $\mathbb{R}^n$ y escalares λ_i tal que A$\cdot\vec{v}_i = \lambda_i \cdot \vec{v}_i$

$\Rightarrow$) **Hipótesis:** A es diagonalizable, o sea si f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$ existe una base B tal que $\|f\|_{BB}$ es una matriz diagonal

Tesis: Existen escalares λ_i tal que A$\cdot\vec{v}_i$=λ_i

Demostración: Como $\|f\|_{BB}$ es diagonal $\Rightarrow \|f\|_{BB} = M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$

Para interpretar esta matriz, recordamos la definición de matriz de T.L. dada una base:

$f(\vec{v}_1) = a_{11} \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots 0 \cdot \vec{v}_n = a_{11} \cdot \vec{v}_1$

$f(\vec{v}_2) = 0 \cdot \vec{v}_1 + a_{22} \cdot \vec{v}_2 + \dots 0 \cdot \vec{v}_n = a_{22} \cdot \vec{v}_2$

$\vdots$

$f(\vec{v}_n) = 0 \cdot \vec{v}_1 + 0 \cdot \vec{v}_2 + \dots a_{nn} \cdot \vec{v}_n = a_{nn} \cdot \vec{v}_n$

Con lo que queda demostrada la tesis. Veamos ahora la otra implicación.

$\Leftarrow$) **Hipótesis:** $\exists$ base B = $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ base de R^n y escalares λ_i tal que A$\cdot\vec{v}_i$=λ_i

Tesis: A es diagonalizable

Demostración: Debemos probar que si f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ / $f(\vec{x})$ = A $\cdot\vec{x}$ entonces $\|f\|_{BB}$ es diagonal.

Para esto, armemos $\|f\|_{BB}$:

$f(\vec{v}_1)$ = A$\cdot\vec{v}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 \Rightarrow$ la 1ra columna de $\|f\|_B$ será $\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$f(\vec{v}_2)$ = A$\cdot\vec{v}_2 = \lambda_2 \cdot \vec{v}_2 \Rightarrow$ la 2da columna de $\|f\|_B$ será $\begin{pmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$

$\vdots$

$f(\vec{v}_n)$ = A$\cdot\vec{v}_n = \lambda_n \cdot \vec{v}_n \Rightarrow$ la n columna de $\|f\|_B$ será $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$

Por lo tanto, $\|f\|_B = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ que es una matriz diagonal.

2 Autovalores y Autovectores

Dada una matriz A $\in \mathbb{R}^{nxn}$ llamaremos autovalor de A a un número $\lambda \in \mathbb{R}$ si existe un vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{v} \neq \vec{0}$ al que llamaremos autovector de A asociado al autovalor λ tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$

2.1 Proposiciones

2.1.1 C.L. vectores asociados

Si $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots \vec{v}_n$ son autovectores de una matriz A asociados a un autovalor λ, entonces cualquier combinación lineal de ellos será autovector de A asociado a λ.

Demostración: Sabiendo que A$\cdot\vec{v}_i = \lambda \cdot \vec{v}_i$

A$\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots \alpha_n\vec{v}_n) \rightarrow$ Planteo C.L. de los vectores

$\alpha_1 A\vec{v}_1 + \alpha_2 A\vec{v}_2 + \ldots \alpha_n A\vec{v}_n \rightarrow$ Distribuyo A

$\alpha_1\lambda\vec{v}_1 + \alpha_2\lambda\vec{v}_2 + \ldots \alpha_n\lambda\vec{v}_n \rightarrow$ Uso hipótesis

$\lambda \cdot (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots \alpha_n\vec{v}_n) \rightarrow$ Factor Común λ

Por lo tanto A$\cdot(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots \alpha_n\vec{v}_n) = \lambda \cdot (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots \alpha_n\vec{v}_n)$

2.1.2 Relación entre autovalor y determinante

λ es un autovalor asociado a $\vec{v}$, autovector de una matriz A $\Leftrightarrow$ |A - λI|= 0

Hipótesis: A $\in \mathbb{R}^{nxn}$, λ y $\vec{v}$ autovalor y autovector de A tal que $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ siendo $\vec{v} \neq \vec{0}$ (¿Por qué?)

Tesis: |A - λI|= 0

Demostración: En $A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}$ con $\vec{v} \neq \vec{0}$, $\vec{v}$ es solución del sistema homogéneo (A - λI)$\cdot\vec{x} = \vec{0}$ (¿Por qué?). Luego este es un sistema compatible indeterminado: por lo tanto el determinante de su matriz es = 0. Es decir, |A - λI|= 0

La otra implicación queda a cargo de ustedes , pues es muy parecida a ésta

2.1.3 Concepto Geométrico

f: Dada $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ podemos decir que $\vec{x}$ es autovector de f si al transformarse conserva la misma dirección.

Ejemplos:

a) f: $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ / $f(x,y) = (x, -y)$

b)f: $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / $f(x,y,z) = (x+y, x-y, 0)$

Luego halla los autovalores y autovectores de A y verifica lo que dice el enunciado anterior.

2.2 Propiedades de los Autovectores

1) S $= \{\vec{x} \; / \; \vec{x} = \vec{0}$ o $\vec{x}$ es un autovector asociado al autovalor λ $\}$ es un subespacio. (Queda como ejercicio)

2) Los autovectores correspondientes a autovalores distintos son L.I.

Hipótesis: A $\in \mathbb{R}^{nxn}$, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_n\}$ autovectores de A . $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ sus autovalores asociados tales que $\lambda_i \neq \lambda_j \; \forall \; i \neq j$

Tesis: $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, ...\vec{x}_n\}$ es un conjunto L.I.

Demostración: La demostración habría que hacerla usando el principio de inducción completa. Nosotros vamos a probar que vale para n=2 y luego usando que vale para n=2 demostraremos que vale para n=3 y así sucesivamente se puede demostrar para cualquier valor de n.

a) Probaremos para $n = 2$, es decir que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un conjunto L.I.

Sea:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 = \vec{0} \tag{1}$$

Multiplicamos ambos miembros por A y nos queda: $\alpha_1 A\vec{x}_1 + \alpha_2 A\vec{x}_2 = \vec{0}$

Pero $A\vec{x}_1 = \lambda_1\vec{x}_1$ y $A\vec{x}_2 = \lambda_2\vec{x}_2 \rightarrow$ nos queda:

$$\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0} \tag{2}$$

Las incógnitas son entonces α_1 y α_2, las cuales debemos despejar de (1) y (2).

- Multiplico (1) por λ_1: $\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_1\vec{x}_2 = \vec{0}$
- Le resto la ecuación (2): $\alpha_2\lambda_1\vec{x}_2 - \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 = \vec{0}$

Nos queda entonces $\alpha_2\vec{x}_2 \cdot (\lambda_1 - \lambda_2) = \vec{0}$

Pero $\vec{x}_2 \neq \vec{0}$ y $(\lambda_1 - \lambda_2) \neq \vec{0}$ (¿Por qué?). Por lo tanto $\alpha_2 = 0$

Reemplazando en (1) nos queda $\alpha_2 = 0$. Hemos probado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ es un conjunto L.I.

b) Veamos ahora para $n = 3$ o sea tenemos $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ autovectores de A y $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ diferentes entre sí. Queremos mostrar que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ es un conjunto L.I.

Sea:

$$\alpha_1\vec{x}_1 + \alpha_2\vec{x}_2 + \alpha_3\vec{x}_3 = \vec{0} \tag{3}$$

Multiplicando por A y reemplazando por los autovectores nos queda:

$$\alpha_1\lambda_1\vec{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\vec{x}_2 + \alpha_3\lambda_3\vec{x}_3 = \vec{0} \tag{4}$$

Hacemos λ_1·(3)-(4) y nos queda $\alpha_2(\lambda_1 - \lambda_2)\vec{x}_2 + \alpha_3(\lambda_1 - \lambda_3)\vec{x}_3 = \vec{0}$

Como $\vec{x}_2$ y $\vec{x}_3$ son 2 autovectores asociados a autovalores diferentes son L.I. Luego si tengo una combinación lineal de ellos igualada a $\vec{0}$ sos escalares son igual a 0.

$\alpha_2(\lambda_1 - \lambda 2) = 0$; $\alpha_3(\lambda_1 - \lambda_3) = 0 \rightarrow \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ (¿Por qué?)

Reemplazando en (3) nos queda $\alpha_1 = 0$

Entonces hemos probado que $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3\}$ es un conjunto L.I.

2.3 Consecuencias

1. A $\in \mathbb{R}^{\mathrm{nxn}}$ es una matriz diagonalizable $\Leftrightarrow$

   a) Existe B $= \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, ...\vec{v}_n\}$ base de $\in \mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ formada por autovectores

   b) Tiene n autovectores L.I.

2. Si A tiene n autovalores diferentes $\rightarrow$ A es diagonalizable (No vale el recíproco)

3. Si A tiene algun autovalor múltiple (λ_0) pero la $\dim(S)_{\lambda_0} = multiplicidad_{\lambda_0}$ $\rightarrow$ A es diagonalizable (No vale el recíproco)

3 Diagonalización de matrices simétricas

1. Las matrices simétricas son siempre diagonalizables *(sin demostración)*

2. Los autovectores de matrices simétricas correspondientes a autovalores diferentes son ortogonales

   Hipótesis: A $\in \mathbb{R}^{nxn}$ matriz simétrica, $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2\}$ autovectores de A asociados a λ_1, λ_2 donde $\lambda_1 \neq \lambda_2$

   Tesis: $\vec{x}_1 \perp \vec{x}_2$ es decir $(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$

   Demostración: Consideramos el producto interno canónico en el que se cumple que $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = \vec{x}^{\mathsf{T}} \cdot \vec{y}$

   Hacemos

   $(\vec{x}_1)^{\mathsf{T}} A \cdot \vec{x}_2 = (\vec{x}_1)^{\mathsf{T}} \lambda_2 \vec{x}_2 = \lambda_2(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$

   $(\vec{x}_1)^{\mathsf{T}} A \cdot \vec{x}_2 = (\vec{x}_1)^{\mathsf{T}} A^{\mathsf{T}} \vec{x}_2 = (A \cdot \vec{x}_1)^{\mathsf{T}} \vec{x}_2 = \lambda_1(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$

   Podemos igualar ambas igualdades finales dado que parten de la misma expresión:

   $\lambda_2 \cdot (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = \lambda_1 \cdot (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2)$, luego pasamos restando y factor común:

   $(\lambda_2 - \lambda_1)(\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$ y como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \rightarrow (\vec{x}_1 \cdot \vec{x}_2) = 0$

3. A es una matriz simétrica $\leftrightarrow$ tiene una base ortogonal de autovectores

   $\rightarrow$)**Hipótesis:** A es simétrica

   Tesis: $\exists$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores

   Demostración: Siendo A simétrica consideraremos 2 casos posibles:

   a) Tiene n autovalores distintos, los autovectores asociados serían ortogonales (probado anteriormente) y dividiendo cada uno por su norma tendremos una base ortonormal de autovectores

   b) Hay algún autovalor múltiple (λ_0), como sabemos que es diagonalizable, la $\mathrm{Dim}(S)_{\lambda_0} =$ multiplicidad de $\lambda_0 \rightarrow$ dentro de ese subespacio podré encontrar una base ortonormal y junto con los otros formarán una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ formada por autovectores

   $\leftarrow$)**Hipótesis:** A tiene una base ortonormal de autovectores

   Tesis: A es simétrica

   Demostración: Como A tiene una base ortogonal de autovectores $\rightarrow$

   $\exists$ D diagonal tal que $A = P \cdot D \cdot P^{\mathsf{T}}$

   Por lo tanto $A^{\mathsf{T}} = (P \cdot D \cdot P^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} = (P^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}} \cdot D^{\mathsf{T}} \cdot P^{\mathsf{T}} = P \cdot D \cdot P^{\mathsf{T}} = A$

   Queda demostrado que A es simétrica