Producto Interno

Álgebra II

1 Definiciones

1.1 Producto Interno

Definición: Un producto interno o escalar sobre un espacio vectorial real V es una función p: VxV $\rightarrow \mathbb{R}$ que cumple con las siguientes propiedades:

1. $(\vec{x} \cdot \vec{y}) = (\vec{y} \cdot \vec{x})$
2. $((\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{z}) + (\vec{y} \cdot \vec{z})$
3. $(\lambda \cdot \vec{x} \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$
4. I) $(\vec{x} \cdot \vec{x}) \geq 0$

   II) $(\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0 \leftrightarrow \vec{x} = 0$

1.2 Espacio Euclideo

Si V es un e.v. en el que se ha definido un producto interno, recibe el nombre de espacio euclídeo.

1.3 Definiciones en un espacio euclideo

- Norma de un vector: $\parallel \vec{x} \parallel^2 = (\vec{x} \cdot \vec{x})$

  a) Con cualquier producto interno, el único vector de norma cero es el $\vec{0}$ (¿Por qué?)

  b) $\parallel \vec{x} \parallel = \parallel -\vec{x} \parallel$ (¿Por qué?)

  c) $\parallel \alpha \cdot \vec{x} \parallel = \mid \alpha \mid \cdot \parallel \vec{x} \parallel$ (¿Por qué?)

- Distancia entre dos vectores:

  $dist(\vec{x}, \vec{y}) = \parallel \vec{x} - \vec{y} \parallel$

- Ángulo entre dos vectores:

  $\cos\phi = \dfrac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{\parallel \vec{x} \parallel \cdot \parallel \vec{y} \parallel}$

- Ortogonalidad entre vectores:

  Dos vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ son ortogonales $\leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0$

- Conjunto Ortogonal de Vectores:

  Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es un conjunto ortogonal $\leftrightarrow \vec{e}_i \neq \vec{0}\ \forall i$ y $(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j) = 0\ \forall i \neq j$

- Conjunto Ortonormal de Vectores:

  Un conjunto $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\}$ es ortonormal $\leftrightarrow$ es ortogonal y la norma de sus vectores es 1.

2 Proposiciones

2.1 Teorema de Pitágoras

Cualquiera sean vectores $\vec{x}$ e $\vec{y}$ vectores pertenecientes a $V e.e.$ tal que $\vec{x} \perp \vec{y}$ se cumple:

$$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$$

Hipótesis: V e.e. $\vec{x}, \vec{y} \in V\ \vec{x} \perp \vec{y}$

Tésis: $\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = \| \vec{x} \|^2 + \| \vec{y} \|^2$

Demostración:

$\| \vec{x} + \vec{y} \|^2 = (\vec{x} + \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \vec{y}) \rightarrow$ Expreso la norma como producto

$= (\vec{x} \cdot \vec{x}) + (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{y} \cdot \vec{x}) + (\vec{y} \cdot \vec{y}) \rightarrow$ Distribuyo por propiedad 2

$= \| \vec{x} \|^2 + 0 + 0 + \| \vec{y} \|^2$ (¿Por qué?)

O sea hemos llegado a la tesis

2.2 Desigualdad de Schwarz

Cualquiera sea $\vec{x}$ e $\vec{y} \in$ V e.e. se cumple:

$| (\vec{x} \cdot \vec{y}) | \leq \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

Esta demostración es necesaria para que esté bien definido el ángulo entre dos vectores (¿Por qué?)

Hipótesis: V e.e. $\vec{x}$ e $\vec{y} \in V$

Tésis: $| (\vec{x} \cdot \vec{y}) | \leq \| \vec{x} \| \cdot \| \vec{y} \|$

Demostración:

Para realizar esta demostración, definimos: $\vec{z} = \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$

Entonces podemos afirmar $((\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}) \cdot (\vec{x} + \alpha \cdot \vec{y})) \geq 0$

Aplicando propiedades de producto interno (¿Cuáles?) nos queda:

$\| \vec{x} \|^2 + 2\ \alpha \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}) + \alpha^2 \cdot \| \vec{y} \|^2 \geq 0$

Esta expresión representa geométricamente una parábola una parábola de variable α, la cual es siempre ≥ 0. Entonces tiene 1 o ninguna raíz lo que significa que al aplicar la fórmula para hallar raíces en una parábola:

$(\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}) \qquad \triangle = b^2 - 4ac \leq 0$ En nuestro caso resulta:

$(2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 - 4 \cdot \parallel \vec{y} \parallel^2 \parallel \vec{x} \parallel^2 \leq 0$

$(2 \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y}))^2 \leq 4 \cdot \parallel \vec{y} \parallel^2 \parallel \vec{x} \parallel^2$

$\mid (\vec{x} \cdot \vec{y}) \mid \leq \parallel \vec{x} \parallel \parallel \vec{y} \parallel$ (¿Por qué?)

2.3 Todo conjunto ortogonal es L.I.

Hipótesis: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ Conjunto Ortogonal

Tésis: $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n\}$ Conjunto L.I.

Demostración:

Sea $\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \dots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0}$

Debemos probar que $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

Sabemos que $(\vec{a}_i \cdot \vec{a}_j) = 0 \ \forall i \neq j$

Multiplicando ambos miembros por $\vec{a}_1$ y aplicando propiedad distributiva en el primer miembro nos queda: $\alpha_1 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1) + \alpha_2 \cdot (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2) + \cdots + \alpha_n (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_n) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{0})$

$\alpha_1 \cdot \parallel \vec{a}_1 \parallel^2 = 0$ y como $\parallel \vec{a}_1 \parallel^2 \neq 0$ resulta $\alpha_1 = 0$

De la misma manera, multiplicando por los demás vectores nos queda $\alpha_2 = \alpha_3 = \cdots = \alpha_n = 0$

Que es lo que queríamos demostrar.

2.4 Proceso de Grand Smith

En todo espacio euclídeo V existe una base ortonormal.

Hipótesis: V e.e. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}$ base de V

Tésis: $\exists \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ base ortonormal de V

Demostración: Lo vamos a demostrar para $n = 3$

Sea $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$; $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 + \alpha \cdot \vec{u}_1$, $\vec{u}_2 \in V$ (¿Por qué?)

Queremos determinar α para que $(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = 0 \rightarrow$

$(\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2) + \alpha \cdot \parallel \vec{u}_1 \parallel^2 = 0$

Despejando $\alpha = -\frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2)}{\parallel \vec{u}_1 \parallel^2} \qquad$ donde seguro $\parallel \vec{u}_1 \parallel^2 \neq 0$ (¿Por qué?)

Podemos reemplazar y obtener ahora $\vec{u}_2$

$$\vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \vec{u}_1 \cdot \frac{(\vec{u}_1 \cdot \vec{e}_2)}{\| \vec{u}_1 \|^2}$$

Ahora armamos

$$\vec{u}_3 = \vec{e}_3 + \theta \cdot \vec{u}_1 + \mu \cdot \vec{u}_2 \tag{1}$$

Queremos obtener θ y μ de manera tal que $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_1$ y $\vec{u}_3 \perp \vec{u}_2$ Multiplicamos (1) por $\vec{u}_1$ y nos queda:

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_1) + \mu \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2)$

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_1) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot \| \vec{u}_1 \|^2 + 0$ (¿Por qué?)

Igualando a cero para que sean ortogonales:

$(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1) + \theta \cdot \| \vec{u}_1 \|^2 = 0$

$$\rightarrow \theta = -\frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1)}{\| \vec{u}_1 \|^2}$$

Ahora multiplicamos (1) por $\vec{u}_2$ y nos queda:

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + \theta \cdot (\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2) + \mu \cdot (\vec{u}_2 \cdot \vec{u}_2)$

$(\vec{u}_3 \cdot \vec{u}_2) = (\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + 0 + \theta \cdot \| \vec{u}_2 \|^2$

Igualando a cero para que sean ortogonales:

$(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2) + \mu \cdot \| \vec{u}_2 \|^2 = 0$

$$\rightarrow \mu = -\frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2)}{\| \vec{u}_2 \|^2}$$

Podemos reemplazar y obtener ahora $\vec{u}_3$:

$$\vec{u}_3 = \vec{e}_3 - \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_1)}{\| \vec{u}_1 \|^2} \cdot \vec{u}_1 - \frac{(\vec{e}_3 \cdot \vec{u}_2)}{\| \vec{u}_2 \|^2} \cdot \vec{u}_2$$

Por lo tanto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ forman una base ortogonal de V. (¿Por qué seguro es base de V?)

Como queremos una base ortonormal dividimos a cada vector por su norma y nos queda:

$$\vec{w}_1 = \frac{\vec{u}_1}{\| \vec{u}_1 \|} \qquad \vec{w}_2 = \frac{\vec{u}_2}{\| \vec{u}_2 \|} \qquad \vec{w}_3 = \frac{\vec{u}_3}{\| \vec{u}_3 \|}$$

$\Rightarrow \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \vec{w}_3\}$ es una base ortonormal de V.

3 Nuevas Definiciones

3.1 Subespacios Ortogonales

Dado S y T subespacios de V e.e. decimos que S es ortogonal a T (lo escribimos $S \perp T$)

si y sólo si $\vec{x} \perp \vec{y} \; \forall \; \vec{x} \in S \; , \forall \; \vec{y} \in T$

3.2 Complemento Ortogonal de un subespacio

Dado S subespacio de V e.e. llamaremos

$S^{\perp} = \{\vec{x} \in V / \vec{x} \perp \vec{s} \; \forall \; \vec{s} \in V\}$

3.3 Proposición:

Dado S subespacio de V e.e. entonces

$S \oplus S^{\perp} =$ V

Debemos probar:

a) $S \oplus S^{\perp} \subset V$. Esto es evidente (¿Por qué?)

b) $V \subset S \oplus S^{\perp}$

Sea B = $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k\}$ una base ortogonal de S. Extendemos B a una base ortogonal de V, y nos queda:

B' = $\{\vec{s}_1, \vec{s}_2, \ldots, \vec{s}_k, \vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\}$ base ortogonal de V.

Vamos a probar que $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\}$ es una base ortogonal de $S^{\perp}$

Que es un conjunto L.I. es obvio (¿Por qué?)

Veamos entonces que es un S.G. de $S^{\perp}$:

Sea $\vec{x} \in S^{\perp} \Rightarrow \vec{x} \in V \Rightarrow$

$$\vec{x} = \alpha_1 \vec{s}_1 + \alpha_2 \vec{s}_2 + \ldots + \alpha_k \vec{s}_k + \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_r \vec{a}_r \quad (2)$$

Sabemos que $(\vec{x} \cdot \vec{s}_i) = 0 \; \forall i$ con $1 \leq i \leq k$ (¿Por qué?)

Entonces multiplicamos ambos miembros de (1) por $\vec{s}_1$ y nos queda:

$0 = \alpha_1 (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_1) + \ldots + \alpha_k (\vec{s}_1 \cdot \vec{s}_k) + \beta_1 (\vec{s}_1 \cdot \vec{a}_1) + \ldots + \beta_r (\vec{s}_1 \cdot \vec{a}_r)$

$0 = \alpha_1 \cdot (1) + \ldots + \alpha_k \cdot (0) + \beta_1 \cdot (0) + \ldots + \beta_r \cdot (0)$

$\Rightarrow$ nos queda $\alpha_1 = 0$

De la misma manera demostraremos que $\alpha_i = 0 \; \forall i$ con $1 \leq i \leq k$

Por lo tanto $\vec{x} = \beta_1 \vec{a}_1 + \beta_2 \vec{a}_2 + \ldots + \beta_r \vec{a}_r$

$\Rightarrow \{\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_r\}$ es S.G. de $S^{\perp}$

Ahora sea $\vec{w} \in V \Rightarrow$

$\vec{w} = (\theta_1\vec{s}_1 + \theta_2\vec{s}_2 + \ldots + \theta\vec{s}_k) + (\pi_1\vec{a}_1 + \pi_2\vec{a}_2 + \ldots + \pi_r\vec{a}_r)$

$\vec{w} = \vec{c} + \vec{d}$ con $\vec{c} \in S$ y $\vec{d} \in S^{\perp}$

$\Rightarrow \vec{w} \in S \oplus S^{\perp}$ o sea $\subset S \oplus S^{\perp}$ Nos falta probar que $S \cap S^{\perp} = \{\vec{0}\}$

Como S y $S^{\perp}$ son subespacios de V y la intersección de subespacios es un subespacio entonces $\vec{0} \in S \cap S^{\perp}$.

Sea $\vec{x} \in S \cap S^{\perp} \Rightarrow \vec{x} \in S$ y $\vec{x} \in S^{\perp}$

$\Rightarrow (\vec{x} \cdot \vec{x}) = 0 \Rightarrow$ por la propiedad 4) de P.I., $\vec{x} = 0$

Corolario: De esta proposición se deduce que:

Dim V = dim $(S \oplus S^{\perp})$ = dim S + dim $S^{\perp}$

4 Proyección ortogonal de un vector respecto a un subespacio

Dado $\vec{x} \in V$ e.e. y S $\subseteq$ V, puedo escribir

$\vec{x} = \vec{u} + \vec{v}$ con $\vec{u} \in S$, $\vec{v} \in S^{\perp}$ (¿Por qué?)

Llamamos $\vec{u} = proy_S(\vec{x})$ y $\vec{v} = proy_{S^{\perp}}(\vec{x})$

4.1 Teorema de la mejor aproximación

Si S es un subespacio de V e.e , y $\vec{x} \in V$ entonces $proy_S(\vec{x})$ es la mejor aproximación para $\vec{x}$ en S, o sea

$\| \vec{v} - \vec{x} \| \geq \| proy_S(\vec{x}) - \vec{x} \| \ \forall \ \vec{v} \in S$

Hipótesis: V e.e. S subespacio de V, $\vec{x} \in V$ (elemento cualquiera de V)

Tésis: $\| \vec{v} - \vec{x} \| \geq \| proy_S(\vec{x}) - \vec{x} \| \ \forall \ \vec{v} \in S$

Demostración: Vamos a trabajar con las normas al cuadrado (¿Por qué podemos hacerlo?)

Sea $\vec{v} \in S \Rightarrow$

$\| \vec{v} - \vec{x} \|^2 = \| \vec{v} - proy_S(\vec{x}) + proy_S(\vec{x}) - \vec{x} \|^2$

$\| \vec{v} - \vec{x} \|^2 = \| \vec{v} - proy_S(\vec{x}) \|^2 + \| proy_S(\vec{x}) - \vec{x} \|^2$ (¿Por qué?)

Y por lo tanto:

$\| \vec{v} - proy_S(\vec{x}) \|^2 + \| proy_S(\vec{x}) - \vec{x} \|^2 \geq \| proy_S(\vec{x}) - \vec{x} \|^2$ (¿Por qué?)

4.2 Método de cuadrados mínimos para resolver sistemas lineales incompatibles

Hemos probado en un ejercicio de la práctica que un sistema lineal de la forma $A\cdot\vec{X}=\vec{B}$ es compatible $\leftrightarrow \vec{B}\in col(A)$ siendo $col(A) = <\vec{C}_1,\vec{C}_2,\ldots,\vec{C}_n>$ donde $\vec{C}_i$ son las columnas de la matriz A.

Por lo tanto si $A\cdot\vec{X}=\vec{B}$ es un sistema incompatible, es seguro que $\vec{B}\notin col(A)$. Luego, la única manera de convertirlo en compatible consiste en buscar un vector perteneciente a $col(A)$, cometiendo el menor error posible.

¿Cuál será este vector? Según lo demostrado anteriormente, este vector debe ser $proy_{col(A)}(\vec{B})$ (¿Por qué?)

Osea cuando un sistema lineal $A\cdot\vec{X}=\vec{B}$ es incompatible, la mejor solución aproximada que podemos encontrar es buscando la solución de:

$A\cdot\vec{X}=proy_{col(A)}(\vec{B})$

4.2.1 Fórmula para resolver un sistema lineal incompatible

Para llegar a la fórmula debemos probar:

a) $(col(A))^{\perp}=\{\vec{X}\in\mathbb{R}^n \ / \ A^T\cdot\vec{X}=0\}$

Dado $col(A) = <\vec{C}_1,\vec{C}_2,\ldots,\vec{C}_n> \rightarrow$

$\vec{X}\in(col(A))^{\perp}\leftrightarrow(\vec{X}\cdot\vec{C}_i)=0\ \forall\ 1\le i\le n$, pero:

$$A=\begin{pmatrix}\uparrow & \uparrow & \ldots & \uparrow\\ \vec{C}_1 & \vec{C}_2 & \ldots & \vec{C}_n\\ \downarrow & \downarrow & \ldots & \downarrow\end{pmatrix} \qquad \leftrightarrow \qquad A^T=\begin{pmatrix}\leftarrow & \vec{C}_1 & \rightarrow\\ \leftarrow & \vec{C}_2 & \rightarrow\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ \leftarrow & \vec{C}_n & \rightarrow\end{pmatrix}$$

b) Demostrar que si $\vec{X}_0$ es solución por el método de cuadrados mínimos del sistema $A\cdot\vec{X}=\vec{B}$, entonces $(A\cdot\vec{X}_0-\vec{B})\in(col(A))^{\perp}$

Si $\vec{X}_0$ es solución del sistema incompatbile $A\cdot\vec{X}=\vec{B}\rightarrow$

$$A\cdot\vec{X}_0=proy_{col(A)}(\vec{B}) \tag{3}$$

Restando en (3) $\vec{B}$ a ambos miembros nos queda:

$A\cdot\vec{X}_0-\vec{B}=proy_{col(A)}(\vec{B})-\vec{B}=proy_{col(A)^{\perp}}(\vec{B})$ (¿Por qué?)

Por lo tanto, $A\cdot\vec{X}_0-\vec{B}\in(col(A))^{\perp}$

c) Demostrar que $A^T(A \cdot \vec{X}_0) = A^T \cdot \vec{B}$

Si $A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B} \in (col(A))^\perp$

$\rightarrow A^T(A \cdot \vec{X}_0 - \vec{B}) = 0$

$\rightarrow A^T(A \cdot \vec{X}_0) = A^T \cdot \vec{B}$ (¿Por qué?)