Transformaciones Lineales

Álgebra II

Definiciones:

1. Dado V y W dos espacios vectoriales, decimos que una función $f : V \to W$ es una transformación lineal u homomorfismo si:

   a) $f(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) = f(\vec{v}_1) + f(\vec{v}_2)$

   b) $f(\lambda \cdot \vec{v}) = \lambda \cdot f(\vec{v})$

2. Dada $f : V \to W$ una T.L. definimos:

   a) $N_u(f) = \{\vec{x} \in V \ / \ f(\vec{x}) = \vec{0}_w\}$

   b) $Im(f) = \{\vec{y} \in W \ / \ \exists \ \vec{x} \in V \ / \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

   c) Dado S subespacio de V,

   $f(S) = \{\vec{y} \in W \ / \ \exists \ \vec{x} \in S \ / \ f(\vec{x}) = \vec{y}\}$

   d) Dado T subespacio de W,

   $f^{-1}(T) = \{\vec{x} \in V \ / \ f(\vec{x}) \in W\}$

3) Dado V y W e.v.s. y $f : V \to W$ / f es T.L. entonces $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$

Hipótesis: V y W espacios vectoriales, $f : V \to W \ / \ f$ es T.L.

Tesis: $f(\vec{0}_v) = f(\vec{0}_w)$

Demostración:

$\vec{0}_v = 0 \cdot \vec{0}_v \Rightarrow$

$f(\vec{0}_v) = f(0 \cdot \vec{0}_v) = 0 \cdot f(\vec{0}_v)$ (¿Por qué?)

Pero $f(\vec{0}_v) \in$ W $\Rightarrow 0 \cdot f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$

4) Dado V, W e.v. y $f : V \to W$ entonces $Im(f)$ es subespacio de W

Hipótesis: V y W espacios vectoriales, $f : V \to W \ / \ f$ es T.L.

Tesis: $Im(f)$ es un subespacio de W

Demostración: Debemos probar las 3 condiciones para que sea subespacio .

a) Sean $\vec{x}$ e $\vec{y} \in Im(f)$,

Entonces existen $\vec{a}$ y $\vec{b} \in$ V / $f(\vec{a}) = \vec{x}$ y $f(\vec{b}) = \vec{y}$

Luego $f(\vec{a}+\vec{b}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$ (¿Por qué?) $= \vec{x}+\vec{y}$

Como $\vec{a}+\vec{b} \in$ V (¿Por qué?) entonces $\vec{x}+\vec{y} \in Im(f)$

b) Sea $\vec{x} \in Im(f)$, entonces $\exists\ \vec{a} \in V\ /\ f(\vec{a}) = \vec{x}$

Ahora $\alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot f(\vec{a}) = f(\alpha \cdot \vec{a})$ (¿Por qué?)

Y como $\alpha \cdot \vec{a} \in$ V (¿Por qué?) $\Rightarrow \alpha \cdot \vec{x} \in Im(f)$

c) Como $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w \Rightarrow \vec{0}_w \in$ W

5) Si $f : V \to W$ es una T.L. entonces transforma una base de V en un S.G. de $Im(f)$

Hipótesis: $f : V \to W\ /\ f$ es T.L. , $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ base de V

Tesis: $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)\}$ es S.G. de $Im(f)$

Demostración: Sea $\vec{x} \in Im(f) \Rightarrow \exists \vec{a} \in V\ /\ f(\vec{a}) = \vec{x}$

Como $\vec{a} \in V$ está generado por los elementos de una base de V, se lo puede escribir como:

$\vec{a} = \alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n$

Entonces también:

$f(\vec{a}) = f(\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{e}_n)$

Como f es T.L. entonces aplico las dos propiedades y nos queda:

$\vec{x} = f(\vec{a}) = \alpha_1 f(\vec{e}_1) + \alpha_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \alpha_n f(\vec{e}_n)$

Entonces $\vec{x}$ está generado por $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)\}$

6) Clasificación

Si $f : V \to W$ es una T.L. , entonces

- f es un monomorfismo $\Leftrightarrow$ f es inyectiva
- f es un epimorfismo $\Leftrightarrow$ f es suryectiva
- f es un isomorfismo $\Leftrightarrow$ f es biyectiva

7) f es monomorfismo $\Leftrightarrow Nu_(f) = \{\vec{0}\}$

$\Longrightarrow$

Hipótesis: V y W e.v.s. y $f : V \to W\ /\ f$ es T.L.

f es monomorfismo, o sea si $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

Tesis: $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

Demostración: $\vec{0}_v \in N_u(f)$ porque $f(\vec{0}_v) = \vec{0}_w$.

Tomemos un $\vec{x} \in N_u(f)$, entonces $f(\vec{x}) = \vec{0}_w$.

Luego, por ser monomorfismo, $\vec{x} = \vec{0}$. O sea $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

$\Longleftarrow$

Hipótesis: V y W e.v.s. y $f : V \to W$ / f es T.L. y $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

Tesis: f es monomorfismo, o sea si $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2) \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

Demostración: Sean $\vec{x}_1$ y $\vec{x}_2 \in$ V / $f(\vec{x}_1) = f(\vec{x}_2)$

Entonces $f(\vec{x}_1)$ - $f(\vec{x}_2) = \vec{0}_w$

$\Rightarrow f(\vec{x}_1 - \vec{x}_2) = \vec{0}_w$ (¿Por qué?)

$\Rightarrow \vec{x}_1 - \vec{x}_2 \in N_u(f)$, pero como $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$ resulta:

$\vec{x}_1 - \vec{x}_2 = \vec{0}_v \Rightarrow \vec{x}_1 = \vec{x}_2$

8) Si f es un monomorfismo, entonces transforma una base del dominio en una base de $Im(f)$

Hipótesis: $f : V \to W$ / f es monomorfismo (O sea es T.L. y $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$)

$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ base de V

Tesis: A= $\{f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \ldots f(\vec{e}_n)\}$ es base de $Im(f)$

Demostración: Debemos probar que A es un conjunto L.I. y S.G. de $Im(f)$

Que es S.G. de $Im(f)$ ya lo sabemos (¿Por qué?). Vamos a probar que A es un conjunto L.I.

Sea $\beta_1 f(\vec{e}_1) + \beta_2 f(\vec{e}_2) + \ldots + \beta_n f(\vec{e}_n) = \vec{0}_w \Rightarrow$

$f(\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n) = \vec{0}_w$

Entonces $\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n \in N_u(f)$. Pero $N_u(f) = \{\vec{0}_v\}$

Por lo tanto $\beta_1 \vec{e}_1 + \beta_2 \vec{e}_2 + \ldots + \beta_n \vec{e}_n = \vec{0}_v$

Y como $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n\}$ es un conjunto L.I. $\Rightarrow$

$\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_n = 0$

Luego A es un conjunto L.I. y por lo tanto base de W.