Matias Davila
Modelado y Optimización

Introducción

Breve descripción del objetivo del informe

El presente informe tiene como objetivo abordar la modelización y optimización de diversos problemas mediante el uso de técnicas matemáticas y computacionales. En particular, se busca formular problemas de optimización, evaluar la veracidad de ciertas afirmaciones relacionadas con la optimización y resolver cuestiones específicas utilizando métodos adecuados. La intención es demostrar la aplicación práctica de conceptos teóricos en la resolución de problemas reales y complejos.

Contexto del trabajo realizado

En el contexto del curso de Modelado y Optimización, se nos ha planteado una serie de problemas que requieren ser modelados y, en algunos casos, resueltos para comprender mejor los principios de la optimización y su relevancia en distintos ámbitos. Este trabajo se enfoca en la formulación de problemas de optimización, la evaluación crítica de afirmaciones teóricas y la resolución de problemas específicos mediante métodos analíticos y computacionales.

El análisis y la solución de estos problemas se realizarán utilizando Python, lo cual permitirá no solo obtener resultados precisos sino también generar visualizaciones gráficas que faciliten la interpretación y comprensión de los mismos. La estructura del informe está diseñada para presentar de manera clara y concisa cada uno de los problemas, su modelización, las soluciones obtenidas y las justificaciones pertinentes, todo ello siguiendo un enfoque riguroso y metódico.

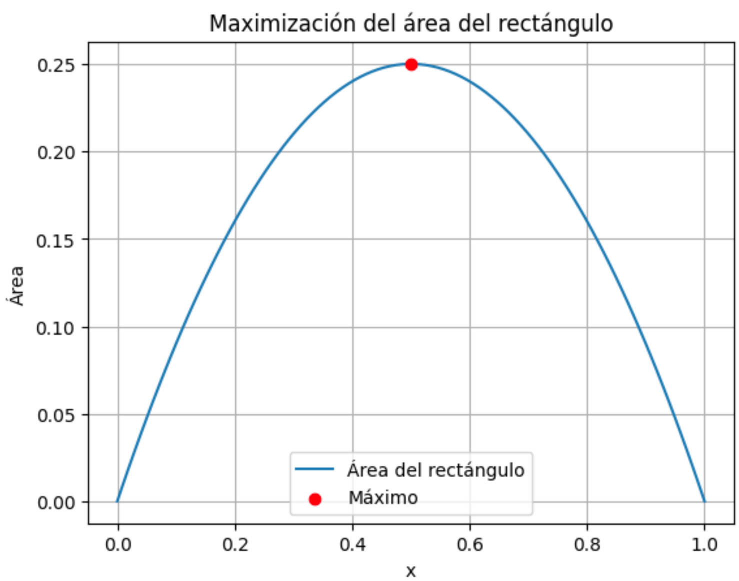
Matias Davila
Modelado y Optimización

Calcular las dimensiones del rectángulo de perímetro 2 que tiene área máxima

Procedimiento

1. **Definir la función objetivo**: La función objetivo es el área del rectángulo $A = x \cdot y$.
2. **Establecer la restricción**: La restricción es que el perímetro del rectángulo debe ser 2, es decir, $2x + 2y = 2$.
3. **Reformular la restricción**: Simplificando la restricción, obtenemos $x + y = 1$.
4. **Resolver el problema**: Utilizaremos Python para modelar este problema y encontrar las dimensiones x e y que maximicen el área.

Código Python: Ejercicio1_actividad1.py



El gráfico muestra un punto óptimo cuando x es 0.5. En ese punto, el área del rectángulo es la mayor posible. Es como encontrar la mejor solución que te da más beneficios con menos esfuerzo.

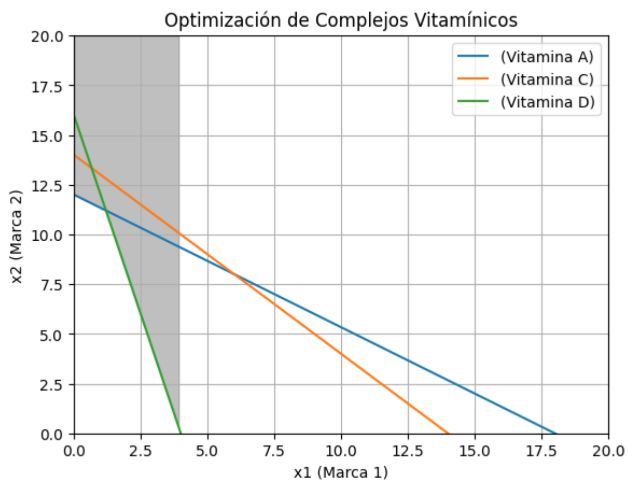
Matias Davila
Modelado y Optimización

Calcular la combinación de complejos vitamínicos de coste más bajo

Formulación Matemática

- **Función objetivo**: Minimizar el coste total $C = 5x_1 + 8x_2$
- **Restricciones**:
  - $2x_1 + 3x2 \geq 36$ (Unidades de vitamina A)
  - $2x_1 + 2x_2 \geq 28$ (Unidades de vitamina C)
  - $8x_1 + 2x_2 \geq 32$ (Unidades de vitamina D)
  - $x_1, x_2 \geq 0$ (No puede haber cantidad negativa de complejos vitamínicos)

Código Python: Actividad1_ejercicio2.py



Análisis del Gráfico

El gráfico muestra las restricciones de vitaminas y la región factible (sombreada en gris) donde se cumplen todas las restricciones. En un modelo de optimización, el punto que representa la solución óptima debe estar dentro de esta región factible. Este punto sería donde todas las restricciones se satisfacen con el menor coste posible, asegurando que las necesidades diarias de vitaminas se cumplan.

Explicación del Gráfico

- **Región Factible**: El área sombreada en gris muestra las combinaciones de complejos vitamínicos que cumplen con todas las restricciones de vitaminas.
- **Punto Óptimo**: En un modelo resuelto, el punto óptimo debería estar dentro de esta región, indicando la combinación de complejos vitamínicos que minimiza el coste total mientras satisface todas las necesidades de vitaminas.

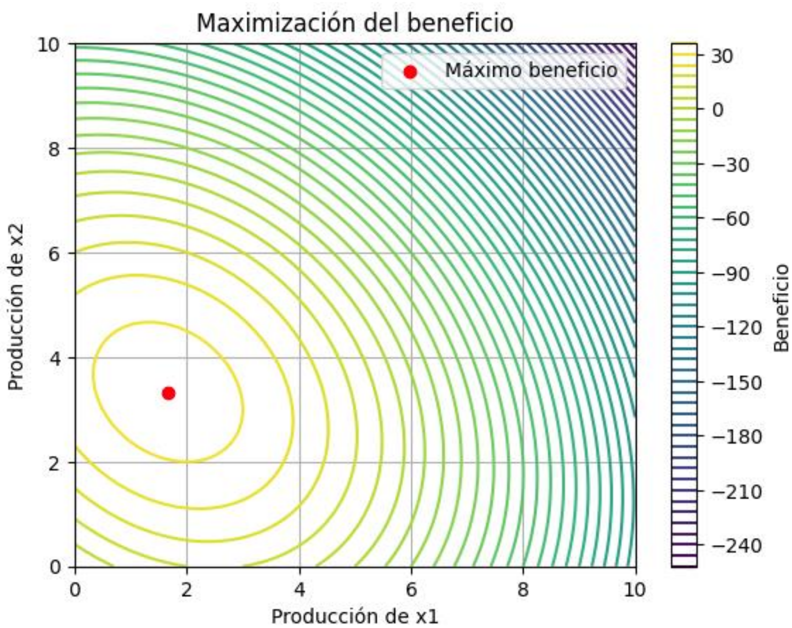
Matias Davila
Modelado y Optimización

Calcular la producción de la empresa que maximiza el beneficio\

Formulación Matemática

- Función objetivo: Maximizar el beneficio $B = p_1x_1 + p_2x_2 - (2x^2{}_1 + x_1x_2 + 2x^2{}_2)$
- Sin restricciones adicionales

Código Python para Modelar y Resolver: Actividad1_ejercicio3.py




```
Producción óptima: x1 = 1.666666645303115, x2 = 3.3333333104871707
Beneficio máximo: 33.333333333333333 euros
```

Interpretación del Modelo y Análisis del Gráfico

El modelo busca maximizar el beneficio de la empresa calculando las cantidades óptimas de producción de los dos bienes. La gráfica muestra las curvas de nivel del beneficio en función de las cantidades producidas de x_1 y x_2. El punto rojo indica la producción óptima donde el beneficio es máximo.

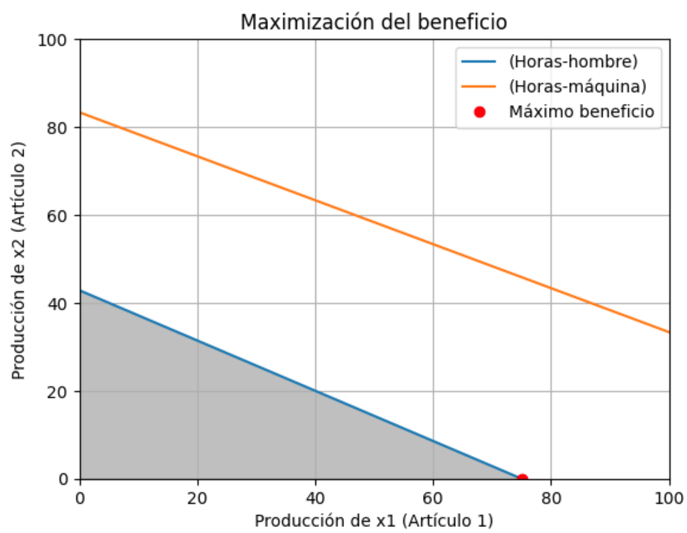
Matias Davila
Modelado y Optimización

Calcular las cantidades a producir para maximizar el beneficio

Formulación Matemática

- **Función objetivo:** Maximizar el beneficio B = $10x_1 + 15x_2$
- **Restricciones:**
  - 4x1 + 7x2 ≤ 300 (Horas-hombre)
  - 3x1 + 6x2 ≤ 500 (Horas-máquina)
  - x1, x2 ≥ 0

Código Python: Activida1_ejercicio4.py




```
Producción óptima: x1 = 75.0, x2 = 0.0
Beneficio máximo: 750.0 euros
```

Interpretación del Modelo y Análisis del Gráfico

El gráfico muestra las restricciones de horas-hombre y horas-máquina y la región factible (sombreada en gris) donde se cumplen todas las restricciones. El punto rojo indica la producción óptima de los dos artículos donde el beneficio es máximo.

Este enfoque asegura que todas las combinaciones de producción factibles se consideren para encontrar la mejor manera de maximizar el beneficio con los recursos limitados.

Evaluación de Afirmaciones

5: Todo máximo local es global.

Justificación: Esta afirmación es falsa. Un máximo local es un punto donde la función alcanza su valor máximo. Sin embargo, esto no garantiza que sea el valor máximo en todo el dominio de la función.

6: Todo mínimo global es local.

Justificación: Esta afirmación es verdadera. Un mínimo global es el punto donde la función alcanza su valor mínimo en todo el dominio. Este punto también es un mínimo local.

7: Sabemos que el conjunto factible F de una función continua es convexo, que la función es convexa en todo F y que la función tiene mínimos locales. Entonces podemos afirmar que el valor que toma la función en todos sus mínimos locales es el mismo.

Justificación: Esta afirmación es verdadera. En un conjunto convexo F, si la función es convexa en todo F, entonces cualquier mínimo local es también un mínimo global. Dado que todos los mínimos globales de una función convexa en un conjunto convexo deben tener el mismo valor, podemos afirmar que el valor de la función en todos sus mínimos locales es el mismo.

8: Sabemos que el conjunto factible de una función continua es convexo y que la función es convexa en todo F. Entonces podemos afirmar que la función tiene un máximo global.

Justificación: Esta afirmación es falsa. La convexidad de una función asegura que todos los mínimos locales son globales, pero no dice nada sobre los máximos. Una función convexa en un conjunto convexo puede no tener un máximo global. Por ejemplo, la función $f(x)=x^2$ es convexa en todo R, pero no tiene un máximo global.

9: No existen funciones que sean cóncavas y convexas a la vez.

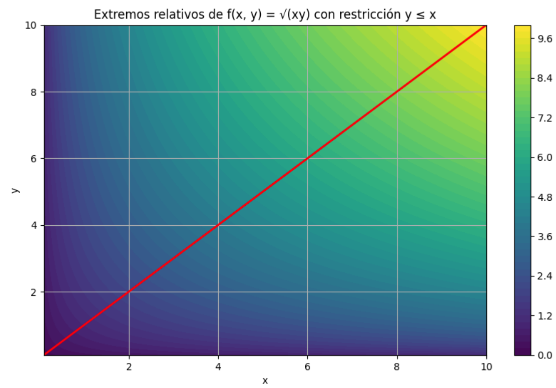
Justificación: Esta afirmación es falsa. Una función puede ser simultáneamente convexa y cóncava si y solo si es lineal. Esto se debe a que una función lineal cumple con las definiciones de ambas propiedades.

Matias Davila
Modelado y Optimización

Calcular los extremos relativos

(a) R = {(x,y) ∈ R^2 : y−x ≤ 0}

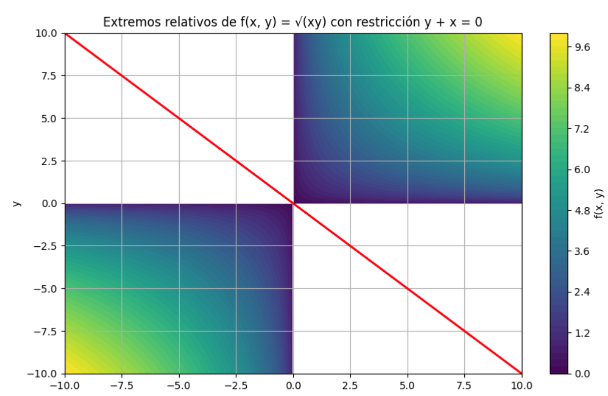
Para este caso, la restricción implica que y ≤ x. Vamos a representar gráficamente el conjunto factible del problema.



Restricción y ≤ x: La línea roja representa la restricción y ≤ $xy^{-1/2}$. El área por debajo de esta línea es el conjunto factible.

Extremos Relativos: Dentro de la región factible, se puede observar cómo la función alcanza sus valores máximos y mínimos. El punto donde la función alcanza su valor máximo dentro de la región factible es un extremo relativo.

(b) R = {(x,y) ∈ R^2: y + x = 0}



Restricción y + x = 0: La línea roja representa la restricción, donde (y) y (x) son opuestos.

Conjunto Factible: Las combinaciones de (x) y (y) que cumplen la restricción se encuentran sobre la línea roja.

Matias Davila
Modelado y Optimización

Justificar si el siguiente problema de optimización satisface o no las hipótesis del Teorema de Weierstrass

Problema: Optimizar f(x,y) = 2x − y sujeto a xy = 2.

El Teorema de Weierstrass garantiza la existencia de un máximo y un mínimo global si la función es continua y el conjunto factible es compacto. En este caso, el conjunto factible xy=2xy = 2xy=2 no es compacto, ya que se extiende indefinidamente en el plano. Por lo tanto, no se satisfacen las hipótesis del Teorema de Weierstrass.

Justificar si el siguiente problema de optimización satisface o no las hipótesis del Teorema Local-Global de optimización

Problema: Optimizar f(x,y) = 2x − y sujeto a xy = 2.

El Teorema Local-Global establece que, bajo ciertas condiciones, un mínimo local es también un mínimo global. Sin embargo, este teorema típicamente requiere que el conjunto factible sea compacto y la función sea continua. Como se mencionó anteriormente, xy = 2 no es un conjunto compacto. Por lo tanto, las hipótesis del Teorema Local-Global no se satisfacen en este caso.