Matias Davila
Métodos Numéricos

Ejercicio 1

En el gimnasio Poincaré, a final de cada mes un 5% de los socios se da de baja, pero por suerte, se consigue captar 5 socios nuevos mensualmente.

(a) Sistema dinámico discreto asociado

Para modelar la evolución del número de socios en el gimnasio, podemos utilizar un sistema dinámico discreto. Definimos N_t como el número de socios en el mes t. Entonces, el número de socios en el mes siguiente, N_{t+1}, se puede expresar como:

$N_{t+1} = N_t - 0.05N_t + 5$

Simplificando, obtenemos:

$N_{t+1} = 0.95N_t + 5$

(b) Linealidad del sistema y solución general

El sistema descrito es lineal, ya que tiene la forma $N_{t+1} = {}_aN_t + b$, donde a = 0.95 y b = 5. La solución general de un sistema lineal de esta forma es:

$N_t = C \cdot (0.95)^t + b/(1-a)$

Donde C es una constante determinada por la condición inicial. En este caso:

$N_t = C \cdot (0.95)^t + 100$

(c) Puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio, resolvemos la ecuación $N_t = N_{t+1}$:

$N_* = 0.95N_* + 5$

Reorganizando, obtenemos:

$0.05N_* = 5$

$N_* = 100$

El punto de equilibrio es $N_* = 100$. Este punto es un equilibrio estable, ya que para $0 < a < 10$, el sistema tiende al equilibrio a largo plazo.

(d) Puntos periódicos

Para verificar si existen puntos periódicos, necesitamos analizar si existen N_t tales que $N_{t+2}=N_t$. Esto requiere un análisis más detallado, pero dado que el sistema es lineal y tiene un único punto de equilibrio estable, no esperamos encontrar puntos periódicos distintos del equilibrio.

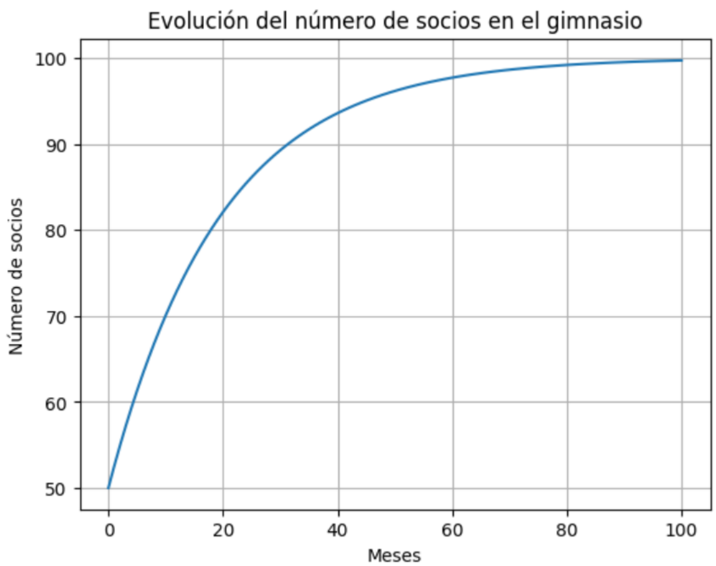
(e) Ingresos a largo plazo

Si cada socio paga una cuota mensual de 25 euros, podemos calcular los ingresos a largo plazo multiplicando el punto de equilibrio por la cuota mensual:

Ingresos=100·25=2500 euros

Matias Davila
Métodos Numéricos

A largo plazo, los ingresos del gimnasio tenderán a 2500 euros mensuales.



Análisis

1. **Crecimiento Inicial:** El número de socios aumenta rápidamente en los primeros meses.
2. **Desaceleración del Crecimiento:** El crecimiento se desacelera a medida que el sistema se aproxima al punto de equilibrio.
3. **Punto de Equilibrio:** El número de socios se estabiliza en 100, confirmando el cálculo teórico.

Conclusión

El gráfico muestra que el número de socios en el gimnasio se estabiliza en 100 a largo plazo. Esto indica que el sistema alcanza un equilibrio estable, asegurando una membresía constante y unos ingresos mensuales predecibles de 2500 euros.

Matias Davila
Métodos Numéricos

Ejercicio 2

Una fábrica produce un producto cuya cantidad de producción Q_n (en miles de unidades) en el mes N depende de la cantidad producida el mes anterior de la siguiente forma:

$$Q_n = D \sin (Q_{n-1}/C)$$

donde D= 12 es la demanda máxima mensual estimada y C=5 es la capacidad de producción de la fábrica.

(a) Encontrar numéricamente los puntos de equilibrio

Para encontrar los puntos de equilibrio numéricamente en el intervalo $[0,5\pi]$ con un error inferior a 10^{-5}, podemos utilizar el método de la bisección o el método de Newton-Raphson.

(b) Clasificación de los equilibrios

Una vez encontrados los puntos de equilibrio, podemos clasificarlos evaluando la derivada de la función en esos puntos.

(c) Existencia de órbitas periódicas de periodo 2

Para verificar la existencia de órbitas periódicas de periodo 2, podemos usar el criterio proporcionado:

Si $\gamma = \{x_1,x_2\}$ es una órbita periódica de periodo dos, entonces:

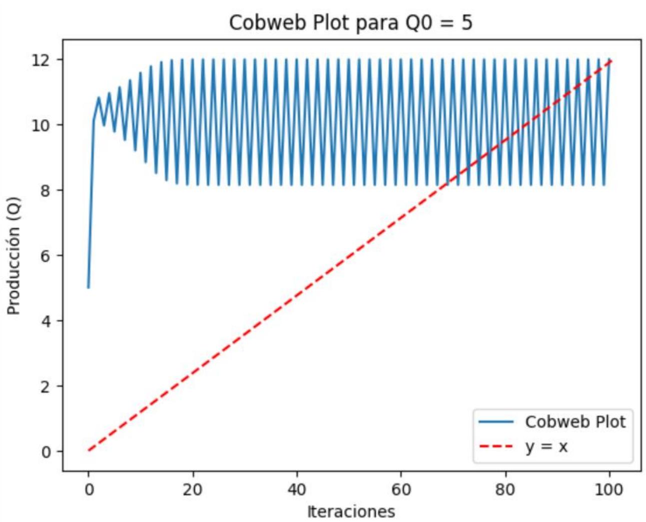
- Si $|f'(x_1)f'(x_2)| < 1$, la órbita es atractora.
- Si $|f'(x_1)f'(x_2)| > 1$, la órbita es repulsora.

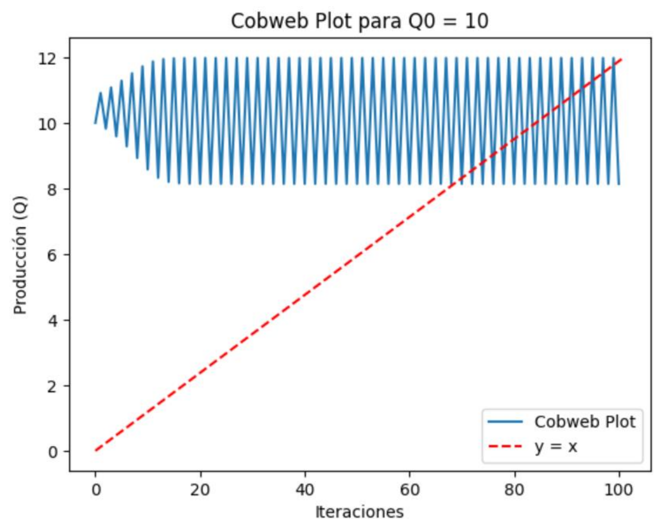
(d) Análisis de la producción a largo plazo

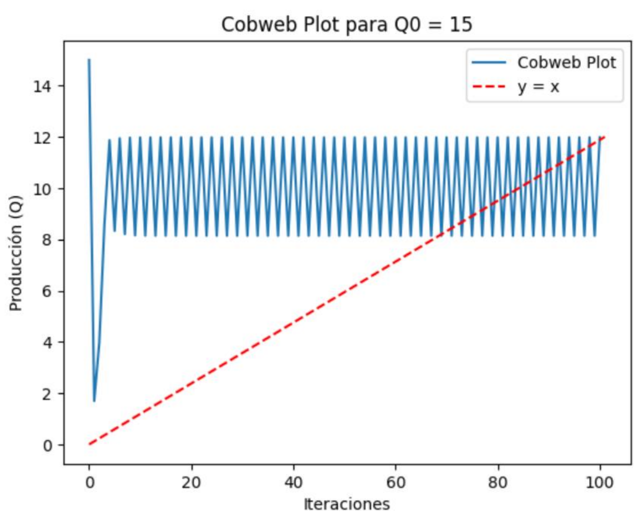
Analizaremos la cantidad a producir a largo plazo utilizando los resultados de los apartados anteriores y, si es necesario, utilizando cobweb plots.

```
Puntos de equilibrio y su clasificación:
Punto de equilibrio: 0.00000, Clasificación: Repulsora
Punto de equilibrio: -0.00000, Clasificación: Repulsora

Órbita periódica en: 10.43564, Clasificación: Repulsora
```







Los cobweb plots para $Q_0 = 5$, $Q_0 = 10$ y $Q_0 = 15$ muestran que la producción en la fábrica no se estabiliza en un valor fijo, sino que oscila entre aproximadamente 8 y 12 unidades. Esto indica:

1. **Comportamiento Oscilatorio:** La producción presenta fluctuaciones periódicas, lo que sugiere la ausencia de un punto de equilibrio estable.
2. **Consistencia:** Independientemente del valor inicial, la producción siempre oscila dentro de un rango similar, mostrando la robustez del sistema frente a diferentes condiciones iniciales.
3. **Gestión de Producción:** Estas oscilaciones deben tenerse en cuenta para la planificación y gestión eficiente de los recursos y la satisfacción de la demanda.

En resumen, la fábrica debe estar preparada para manejar fluctuaciones en la producción, adoptando estrategias flexibles y una planificación anticipada.

Ejercicio 3

El sistema dinámico discreto dado es:

$$x_n=\mu x_{n-1} - ½\, x^2{}_{n-1}$$

(a) Encontrar y clasificar los equilibrios del sistema en función del parámetro μ\muμ.

Para encontrar los puntos de equilibrio, resolvemos la ecuación $x_n = x_{n-1}$:

$$X = \mu x - ½\, x^2$$

Simplificando, obtenemos:

$$0 = x(\mu - ½\, x)$$

Esto da dos soluciones:

$$X = 0, \;\; X = 2\mu$$

Para clasificar estos equilibrios, analizamos la derivada de la función:

$$f(x) = \mu x - ½\, x^2$$

Evaluamos la derivada en los puntos de equilibrio:

- Para $X = 0$:

$f'(0) = \mu$

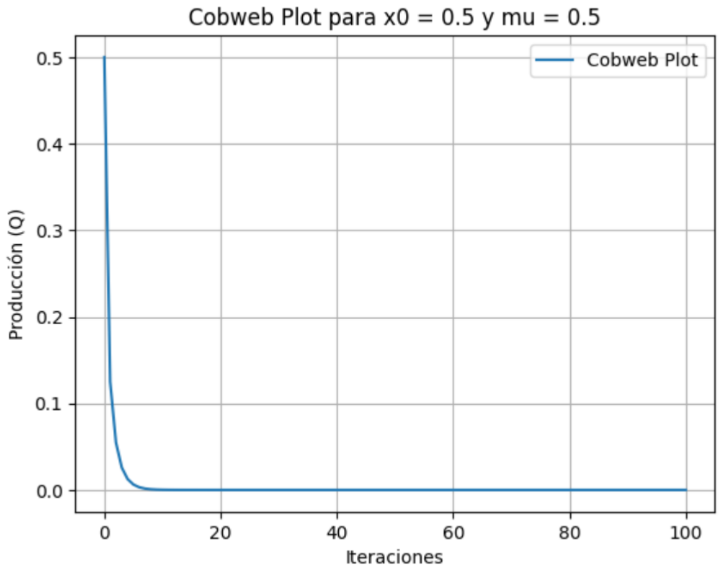
- Para $x=2\mu$:

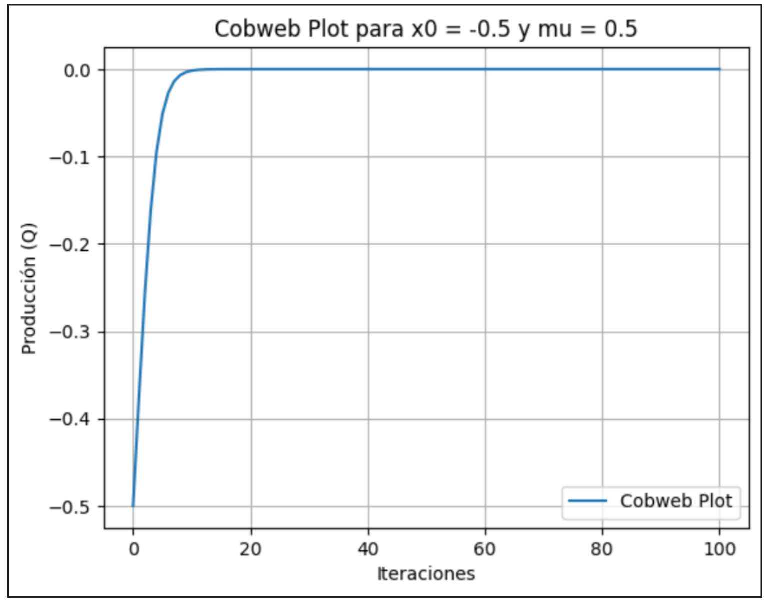
$f'(2\mu) = \mu-2\mu = -\mu$

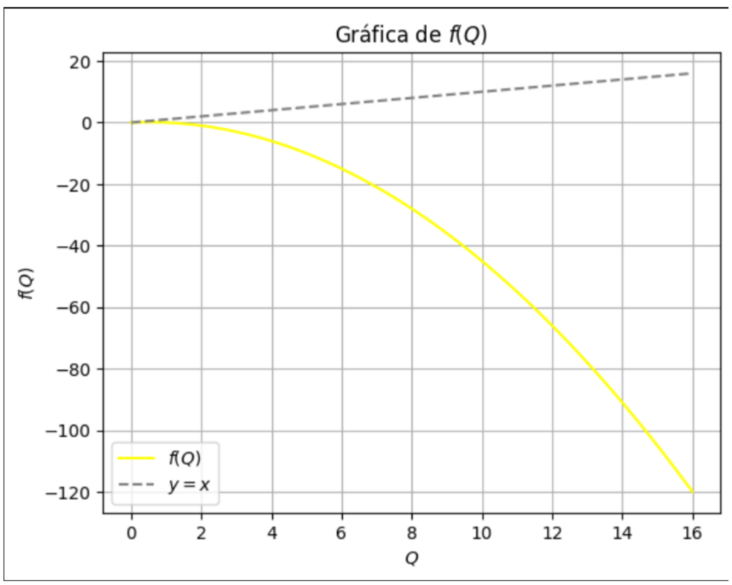
Clasificación de los equilibrios:

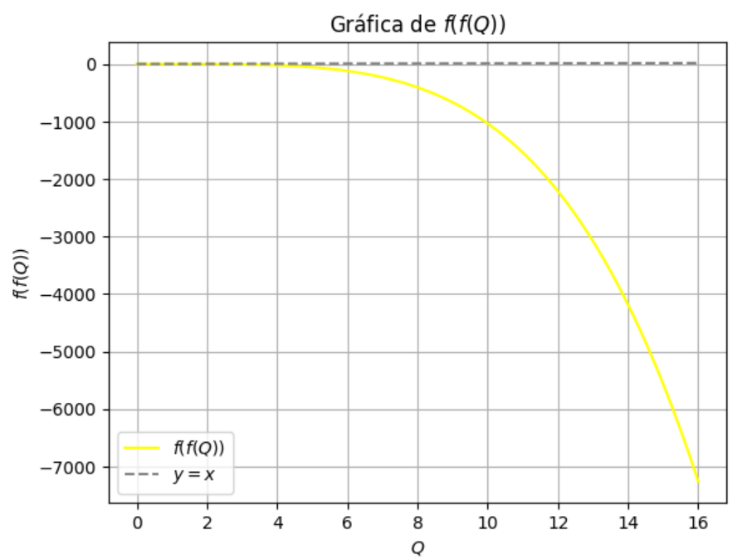
- $X = 0$: Estable si $|\mu| < 1$, inestable si $|\mu| > 1$.
- $X = 2\mu$: Estable si $|-\mu| < 1$, es decir, si $|\mu| < 1$.

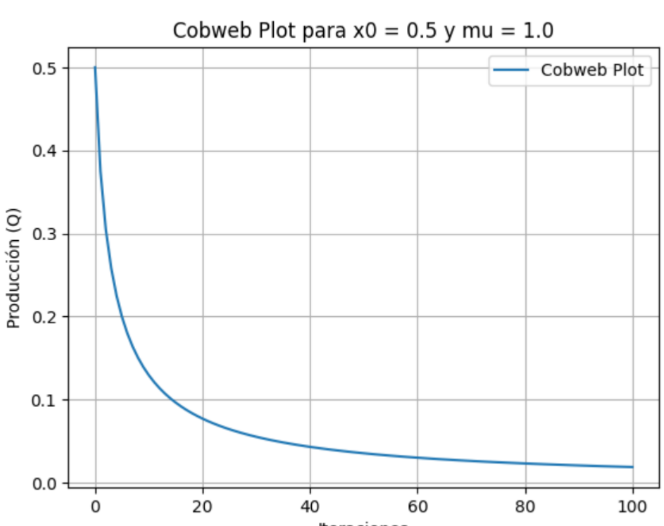
```
Para mu = 0.5:
Punto de equilibrio: 0, Clasificación: Estable
Punto de equilibrio: 1.0, Clasificación: Estable
```












```
Para mu = 1.0:

Punto de equilibrio: 0, Clasificación:
Inestable
Punto de equilibrio: 2.0,
Clasificación: Inestable
```