0.1 TD Complexité

Introduction

- Qu'est-ce qu'un système complexe ?
  - ○ Ensemble de composants en interaction
  - ○ Exemples : cerveau, colonie de fourmi, société, ...
- Caractéristiques des systèmes complexes
  - ○ Auto-organisation des composants / stimuli extérieurs
  - ○ Comportement observé dépendant de l'échelle
    - ➛ le "tout" ne se réduit pas à la somme de ses composants
    - ➛ émergence de comportements "intelligents"
  - ○ Comportement global non prévisible de façon analytique
    - ➛ dynamique des interactions non linéaires (rétroaction)
    - ➛ comportement "chaotique" (effet papillon, krach boursier)

☞ Plus d'infos sur http://www.calresco.org

- Estimation des ressources nécessaires à l'exécution
  - ○ Complexité en temps = estimation du nombre d'instructions
  - ○ Complexité en espace = estimation de l'espace mémoire
    - ➛ comparer 2 algorithmes étant donné la taille n des données en entrées
- Ordre de grandeur O

$$O(f(n)) \rightarrow \exists c, n_0 | \forall n > n_0, \textit{nbr. instructions carac.} < c.f(n)$$

  - ○ $O(log(n))$: logarithmique
  - ○ $O(n)$: linéaire
  - ○ $O(n^k)$: polynomial
  - ○ $O(kn)$: exponentiel

0.2 Exemples de complexité d'algos

- Rechercher un élément dans un tableau de n éléments
  - Algorithme de recherche séquentielle :$O(n)$
  - Algorithme de recherche dichotomique / tableau trié : $O(log(n))$
- Trier un tableau de n éléments
  - Algorithme de tri par sélection : $O(n^2)$
  - Algorithme de tri par insertion :
    - ➛ dans le meilleur des cas (tableau déjà trié) : $O(n)$
    - ➛ dans le pire des cas (tableau trié à l'envers) : $O(n^2)$
  - Algorithme de tri rapide (quicksort) :
    - ➛ dans le meilleur des cas (pivot = médiane) : $O(n.log(n))$
    - ➛ dans le pire des cas (pivot = élt. max ou min) : $O(n^2)$
  - Algorithme de tri par tas : $O(n.log(n))$
  - Algorithme de tri fusion : $O(n.log(n))$
- Maximiser une fonction linéaire sous des contraintes linéaires
  - Algorithme du simplexe : $O(2^n)$ dans le pire des cas...
    - ➛ faiblement polynomial en pratique !
  - Algorithme du point intérieur : polynomial
- Chercher un circuit hamiltonien dans un graphe
  - Algorithme énumérant toutes les permutations des sommets : $O(n!)$

0.3 Calcul de complexité

0.3.1 Calculs : quelques règles simples

- Appels séquentiels :

```
f(...) :
  g1(...)
  g2(...)
  ...
  gk(...)
```

➛ $cout(f(...)) = \sum cout(g_i)$

- Appels conditionnels :

```
f(...) :
  if cond1 :
    g1(...)
  elif cond2 :
    g2(...)
  ...
    gk(...)
```

➛ $cout(f(...)) = max(cout(g_i))$ (on néglige l'évaluation de $cond_j$)

- Itérations :

```
f(.., n) :
   for i in range(n) :
      g(...)
```

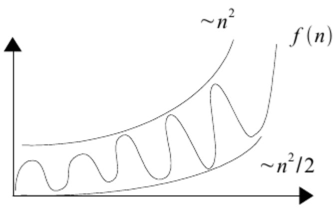
➛ $cout(f(...)) = n.cout(g)$

☞ Si l'appel de g dépend de i de la forme $g(..., i)$:
alors on préfère sommer les complexités :
➛ $cout(f(..., n)) = \sum_i^n cout(g(..., i))$

- Rappel de la complexité en O en lien avec Ω:
  $T(n)$ est $O(f(n))$ noté $T(n) = O(f(n))$ et $T(n) = \Omega(g(n))$ si :
  $\exists N, \alpha, \beta | \forall n > N, \alpha.f(n) \leq T(n) \leq \beta.g(n)$

- On évitera les écriture inutiles telles que $x^2 = O(x^3)$.
  ➛ Il n'est pas toujours utile d'estimer le coût tel que $T(n) = n^2$ en $T(n) = O(n^3)$.

- La définition donnée ci-dessus permet d'encadrer la complexité comme dans :



0.3.2 Exemples de calculs

Un exemple : Tri Fusion
Par l'algorithme récursif de Tri-Fusion, nous avons l'équation de récurrence :
$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + n$$
Admettons que cette complexité est $T(n) = O(n.log(n))$
➛ Peut-on prouver (par la déf. de $O(.)$ comme pour Tri Fusion ci-dessus) : $T(n) \leq c.n.log(n)$ pour une cst. $c > 0$?

Preuve :
∘ Hypothèse de récurrence : $T(m) = O(m.log(m)) \ \forall m < n$
en particulier, pour $m = \frac{n}{2}$, on a : $T(\frac{n}{2}) = O(\frac{n}{2} log(\frac{n}{2}))$
∘ On substitue dans l'expression de $T(n)$:

$$\begin{aligned} T(n) &= 2T(\tfrac{n}{2}) + n \\ &\leq 2c.\tfrac{n}{2} log(\tfrac{n}{2}) + n \qquad \text{par hypothèse} \\ &= c.n.log\tfrac{n}{2} + n \\ &= c.n.log(n) - c.n.log(2) + n \\ &= c.n.log(n) - c.n + n \\ &\leq c.n.log(n) \ \ \forall c \geq 1 \qquad \text{poser p.ex. c=1} \qquad \text{CQFD.} \end{aligned}$$

0.4 L'importance de cas de base

Remarques :
Le "cas de base" (ou "base" tout court) est le cas non-récursif, se dit également la "condition d'arrêt".

☞ Dans le raisonnement par récurrence, ne pas oublier le cas de base !
∘ Non seulement dans l'algorithme,
mais aussi dans la complexité.
➛ on doit vérifier que le/s cas de base satisfait/ont la relation trouvée.

Exemple : dans Tri-Fusion avec la récurrence $T(n) = 2T(n/2) + n$:
proposons $T(1) = 1$
➛ Est-ce correct ?

Non. On a un problème :
Car avec $T(n) \leq c.n.log(n) \rightarrow T(1) \leq c.1.log(1) = 0$
$\rightarrow$ Impossible de trouver $c > 0$!

Rappel :
∘ On veut prouver $T(n) \leq c.n.log(n)\ \forall n \geq n_0$... et on peut choisir le n_0 qu'on veut !

☞ *Notre point est : que proposer pour n_0 tq. $\forall n > n_0 \ldots$*

➛ $n_0 = 2?$ puisque $n_0 = 1$ ne convient pas !

∘ Vérifions :
par l'algoritme et par l'équation de récurrence, on a $T(2) = 2.T(1) + 2$
➛ $T(2) = 2.T(1) + 2 \rightarrow T(2) = 2 + 2 = 4$
➛ Il reste donc à trouver une constante c t.q. $T(2) = 4 \leq 2c$
➛ $c = 2$ convient : $\forall n \geq 2, T(n) \leq 2.n.log(n) = O(n.log(n))$ (ça nous limite à $n = 2$!)

☞ **Mieux** : si on pose $T(1) = 0 \rightarrow T(2) = 2.T(1) + 2 = 2$ ... $c = 2$ convient toujours
☞ Le cas de base intervient grandement dans le calcul de $T(n)$,
Donc, c'est important.

0.5 Exercices

Peut-on prouver (par la déf. de $O(.)$ en trouvant les constantes) les complexités suivantes ?
• $2n^3 + 1 = O(n^3)$
• $3n^3 + 4n^2 + n + 50$

• (Piège) : calculer la complexité de la fonction suivante (pour n très grand):

```
def f(n):
  l=0
  for i in range(0,n+1) :
    for j in range(i,n+1)
      l = l+1
```

0.6 Calculs : quelques équivalences

Règles de ré-écriture :

∘ $f(n) = O(f(n))$

∘ $g = O(f(n)), f = O(h(n)) \implies g = O(h(n))$

∘ $c.O(g(n)) = O(c.g(n)) = O(g(n))$

∘ $f(n).O(g(n)) = O(f(n).g(n))$

∘ $O(f(n)) + O(g(n)) = O(f(n) + g(n))$ pour la commodité des écritures !

• Un exemple d'utilisation :

sachant $f(n) = 5.n^2 + 6.log(n) + 7$

et $g(n) = \sqrt{n} + log(n)$,

calculer $O(f(n).g(n))$.

∘ Par $f(n) = 5.n^2 + 6.log(n) + 7$, on peut écrire $f(n) = O(n^2)$
et de $g(n) = \sqrt{n} + log(n)$, on peut écrire $g(n) = O(n^{0.5})$
Et donc :

$$O(f(n).g(n)) = O(n^2.n^{0.5})$$

☞ Pas d'exercice pour cette partie !

0.7 Exercices complexité

Estimer (sans calcul) l'expression des complexité $O(.)$ des récurrences suivantes :

• $n^2 + 100n - 7$

• $5n^4 + 2n^2 + 100$

• $5n + 8n^2 + 100n^3$

• $nlog_3 n + nlog_2 n$

• $2n^3 + 0.01n^2 - 5$

• $n^2 + n - log_2(2^{n^2})$

• $5 + 0.001n^3 + 0.025n$

• $500n + 100n^{3/2} + 50nlog_{10} n$

• $0.3n + 5n^{1.5} + 2.5n^{1.75}$

• $100n + 0.01n^2$

• $100n^2 + 0.01n$

• $logn + log(log(n))$

• $n^3 - n^2$ (le rôle du terme négatif)

0.7.1 Comparaison symbolique de complexité

Pour la comparaison (symbolique) de complexités, on dispose de quelques autres outils.

• Outils "limites" :

$$\lim_{+\infty} \frac{x^{\beta>0}}{e^{x}} \to 0 \quad \lim_{+\infty} \frac{\log x^{\alpha>0}}{x^{\beta>0}} \to 0 \quad x^{y} = e^{y \cdot \ln x} \quad \log x = \frac{\ln x}{\ln 10} \quad \ln_2 = \frac{\ln x}{\ln 2} = \frac{\log x}{\log 2}$$

• Par exemple, ces outils nous servirons à trier l'ensemble de classes de complexité de la forme $O(n^{\alpha}.log^{\beta}n)$.

Ici, on peut rapidement obtenir $O(n^{0.5}) < O(n) < O(n^2)$
Et en insérant les éléments logarithmiques, on aura :

$$O(n^{0.5}) < \underbrace{\qquad}_{O(n^{0.5} \cdot \log n) < O(n^{0.5} \cdot \log^{1.5} n)} < O(n) < \underbrace{\qquad}_{O(n \cdot \log n) < O(n \cdot \log^{1.5} n)} < O(n^{1.5}) < \underbrace{\qquad}_{O(n^{1.5} \cdot \log n) < O(n^{1.5} \cdot \log^{1.5} n)} < O(n^2)$$

Rappel des propriété des limites :

∘ $lim_{\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \to 0$: $g(n)$ est d'ordre <u>inférieur</u> à $f(n)$ et
$O(f(n) + g(n)) = O(f(n))$ (on note $O(g(n) < O(f(n)$)

∘ $lim_{\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \to \infty$: $g(n)$ est d'ordre <u>supérieur</u> à $f(n)$ et
$O(f(n) + g(n)) = O(g(n))$

∘ $lim_{\infty} \frac{g(n)}{f(n)} \to c > 0$: $g(n)$ est du même ordre que $f(n)$ et
$g(n) = \Theta(f(n))$ (et inversement)

0.8 Exercices sur les limites

• En utilisant les propriété des limites et en particulier :
Si $lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$, alors $f = o(g)$ et f est d'ordre inférieur à g.

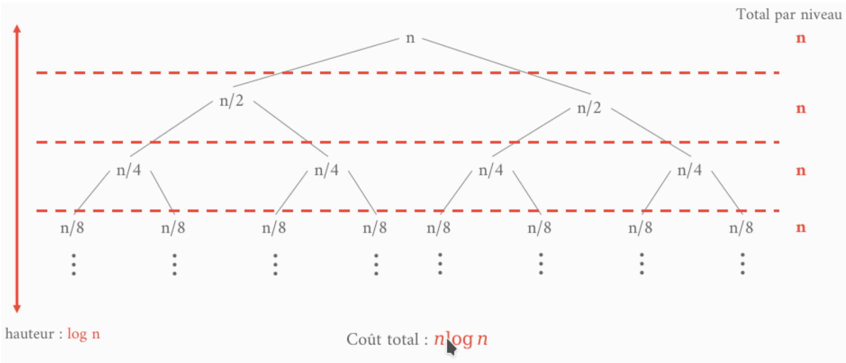
Montrez les complexités little-oh suivantes :
∘ $\sqrt{n} = o(n)$
∘ $n = o(n.log(log(n)))$
∘ $n.log(log(n)) = o(n.log(n))$
∘ $n.log(n) = o(n^2)$
∘ $n^2 = o(n^3)$

0.8.1 Calculs : équation de récurrence

0.8.2 Calcul par arbre de récursivité

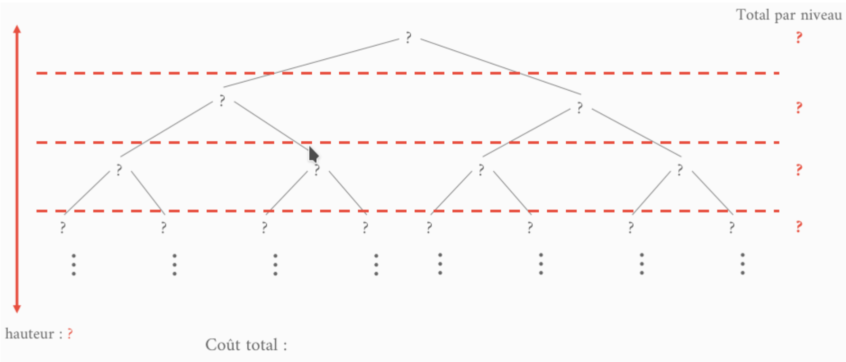
Une méthode d'estimation de la complexité : **arbre de récursion**

- Exemple : Tri fusion : $T(n) = 2T(n/2) + n$



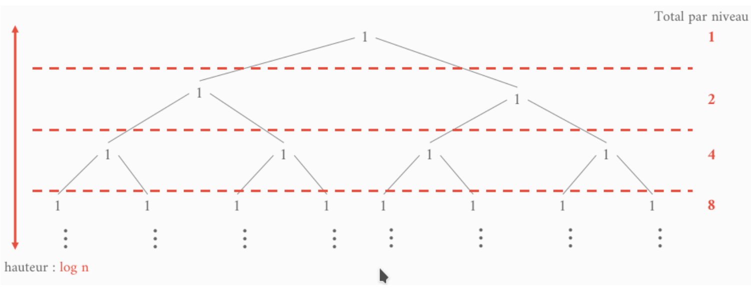
- Exercice : recherche récursive du maximum dans le <u>tableau non trié</u> :

  $T(n) = 2T(n/2) + 1$



- Solution : recherche récursive du maximum dans le <u>tableau non trié</u> :

  $T(n) = 2T(n/2) + 1$



Coût total : $T(n) = 1 + 2 + 4 \ldots + 2^{log_2(n)}$

➛ Sachant que $\sum_{0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$, et que $2^{log_2(n)} \simeq n$, on aura :

$T(n) = \sum_{0}^{log_2(n)} 2^k = 2^{log_2(n)+1} - 1 = 2n - 1$ et donc $T(n) = O(n)$

0.8.3 Calcul par substitution

- On prend l'exemple du Tri Fusion : $T(n) = 2T(n/2) + n$
  - ○ Par la technique de substitution, on a :

$T(n) = 2T(n/2) + n$
$= 2(2T(n/4) + n/2) + n$
$= 4T(n/4) + n + n$
$= 8T(n/8) + n + n + n$
$= \ldots$
$= n.T(n/n) + n + ... + n$
$= n + n + ... + n$ $\leftarrow log(n) + 1$ fois
$= n.(log(n) + 1) = n.log(n) + n \leq 2nlog(n) = O(nlog(n))$

0.9 Exercices : vérification de complexité

0.9.1 Vérifiez des complexités

- Montrez (sans calcul) les complexités suivantes :
  - ○ La recherche dichotomique d'un élément dans un tableau <u>ordonné</u> de taille n est $O(log(n))$.
    - ➛ Dans les deux versions <u>itérative</u> et récursive
    - ➛ récursive .
  - ○ La recherche d'un élément dans une liste de taille n est $O(n)$).
  - ○ La recherche du minimum / maximum dans une liste de taille n est $O(n)$).
  - ○ La fusion de deux listes <u>triées</u> (de taille n et m) est $O(n + m)$

0.10 Exercice : induction

- Prouver par induction la complexité de la recherche séquentielle est $O(n)$:
  - ➛ Cas de base : $T(1) = 1$
  - ➛ Cas de récurrence : $T(n) = T(n - 1) + 1$
- Prouver par induction la complexité de merge-sort décrite ci-dessous est $O(n.log(n))$:
  - ➛ Cas de base : $T(2) = 2$
  - ➛ Cas de récurrence : $T(n) = 2T(n/2) + n$

0.11 Résolution équation de récurrence

0.11.1 Exos équation de récurrence homogènes

∘ Montrez que la complexité de Fib(n) est entre $\Omega((\frac{3}{2})^n)$ et $O((\frac{5}{3})^n)$.
∘ Calculer la complexité de Hanoi(n) par son équation de récurrence homogène.
∘ Soit la récurrence :

$t_n = 7t_{n/2}$ pour $n > 1$, n est une puissance de 2
$t_1 = 1$

Montrer que la complexité de ce problème est $t_n = O(7^{logn})$
N.B. : on sait $7^{logn} = n^{log(7)} \approx n^{2.81}$

0.11.2 Exos équation de récurrence non homogènes

☞ Choisir 3 exercices parmi ci-dessous.

Trouver une solution générale pour les équation non homogènes suivantes :

- $a_n = 2a_{n-1} + 3(2^n),\ a_0 = 1$
- $T(n) = 2T(n/4) + n$
- $T(n) = 4T(n/4) + n$
- $T(n) = 5T(n/4) + n$
- $T(n) = 16T(n/4) + n$
- $T(n) = 16T(n/4) + n^2$
- $T(n) = 3T(2n/3) + 1$ (algorithme Stooge-sort)
- $T(n) = T(n/2^d) + d^2n^{1/d}$ (récursion sur une mesh d-dimensionnelle)
- $T(n) = T(n/2) + log(n)$ (Parallèle merge-sort)

0.12 Complexité et le Master Theorm

Rappel du "Master Therorm" : on suppose donnée la relation de récurrence de la forme :

$T(n) = a\ T\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$ avec $a >= 1, b > 1$.
où f est une fonction à valeurs entières positives.

Le "master theorem" s'énonce comme suit :

1- Si $f(n) = O\left(n^c\right)$ avec $c < \log_b a$
alors $T(n) = \Theta\left(n^{\log_b a}\right)$.

2- Si $f(n) = \Theta\left(n^c \log^k n\right)$ avec $c = \log_b a$ et une constante $k \geq 0$

alors $T(n) = \Theta\left(n^c \log^{k+1} n\right)$.

3- Si $f(n) = \Omega\left(n^c\right)$ avec $c > \log_b a$

et s'il existe une constante $k < 1$ telle que, pour n assez grand, on a : $af\left(\frac{n}{b}\right) \leq kf(n)$

(cette condition est appelée parfois la "condition de régularité"),

alors on a : $T(n) = \Theta\left(f(n)\right)$.

Dit autrement (pour simplifier) et exprimer la complexité uniquement par le big-O :
Supposons la relation de récurrence suivante :

$T(n) = a\ T\left(\frac{n}{b}\right) + O(n^d)$

Le "master theorem" permet d'obtenir une expression de la complexité de $T(n)$ comme suit :

∘ 1- Si $d < \log_b a$ alors $T(n) = O(n^{\log_b a})$.

➛ Si (1) ne s'applique pas directement, on suppose $D(n) = n^d f(n)$ avec $d \geq 0$ et f est une fonction non décroissante (intuitivement f est une petite fonction comme $log(n)$)

∘ 2- Si $d = \log_b a$ alors $T(n) = O(n^d \log(n))$.

∘ 3- Si $d > \log_b a$ alors $T(n) = O(n^d)$.

Exemples :

• Exemple 1 : $T(n) = 9T(n/3) + n$

Ici, $a = 9, b = 3$ d'où $n^{log_b(a)} = n^{log_3 9} = n^2$

De plus, $f(n) = n = O(n^{log_3(9)-\epsilon})$ avec $\epsilon = 1$

➛ on peut appliquer le cas 1 du MT : $T(n) = \theta(n^2)$

• Exemple 2 : $T(n) = T(2n/3) + 1$

Ici, $a = 1, b = 3/2$ d'où $n^{log_b(a)} = n^{log_{3/2}(1)} = n^0 = 1$

De plus, $f(n) = 1 = \theta(n^{log_b(a)})$

➛ on peut appliquer le cas 2 du MT : $T(n) = \theta(log(n))$

• Exemple 3 : $T(n) = 3T(n/4) + nlog(n)$

Ici, $a = 3, b = 4$ d'où $n^{log_b(a)} = n^{log_4(3)} = O(n^{0.793})$

De plus, $f(n) = n.log(n) = \Omega(n) = \Omega(n^{log_b(a)+\epsilon})$ avec $\epsilon \sim 0,2$

➛ vérifions la condition de régularité :

pour n suffisamment grand, $af(n/b) = 3(n/4)log(n/4) \leq 3/4nlog(n) = cf(n)$ avec $c = 3/4$

➛ on peut appliquer le cas 3 du MT : $T(n) = \theta(nlog(n))$

0.13 Exercices Master Theorem

• Appliquez le Master Theorem aux récurrences suivantes :

(a) $T(n) = 8T(n/2) + 1000n^2$

(b) $T(n) = 2T(n/2) + 10n$

(c) $T(n) = 8T(n/2) + n^2$

• Vérifier les complexités suivantes :

∘ $T(n) = 8T(n/2) + n^2 \leftrightarrow T(n) = \theta(n^3)$

∘ $T(n) = 2T(n/2) + n^2 \leftrightarrow T(n) = \theta(n\ 2)$

∘ $T(n) = 4T(n/2) + n^2 \leftrightarrow T(n) = \theta(n^2 log(n))$

∘ Quels changement si la partie "driver" (non homogène) est de la forme $n^2 log(n)$?

• Appliquez le Master Theorem aux récurrences suivantes :

∘ $T(n) = 8T(n/2) + n^3$

∘ $T(n) = 2T(n/2) + n^2$

∘ $T(n) = 9T(n/3) + n$

○ $T(n) = 2T(n-2) + n^3$

• Expliquez pourquoi on ne peut pas appliquer le Master Theorem aux récurrences suivantes :

(a) $T(n) = 2^n T(n/2) + n$
(b) $T(n) = 1/2T(n/2) + n$
(c) $T(n) = 64T(n/8) - n^2 log(n)$
(d) $T(n) = T(n/2) + n(2 - cos(n))$
(e) $T(n) = 2T(n/2) + n/log(n)$

• En effectuant le changement de variable $m = log(n)$, résolvez la récurrence $T(n) = 2T(\lfloor\sqrt{n}\rfloor) + log(n)$

0.14 Exercice : Algo + calcul de complexité

0.14.1 Maxliste

• Ecrire une fonction *maxliste* qui reçoit une liste en paramètre, et qui renvoie le plus grand élément de cette liste en utilisant la technique **Diviser pour régner**.

0.14.2 Doublons

• Ecrire un algorithme de recherche de doublon dans une <u>liste non triée</u> de taille n puis calculer sa complexité.
➛ La même chose pour une liste triée.
☞ N.B. : on peut envisager ou non des structures de données qui aideront à résoudre ces problèmes.

0.14.3 Permutations

• Ecrire un algorithme qui produit toutes les permutations d'une liste.
➛ P. Ex. , les permutations de L=[1,2,5] seront :
[[1, 2, 5], [1, 5, 2], [2, 1, 5], [2, 5, 1], [5, 1, 2], [5, 2, 1]]
Calculer sa complexité de votre algorithme.

☞ Vérifiez vos calculs en utilisant la séquence suivante :

```
# Vérification
import itertools
lst=[1,2,5]
print(list(itertools.permutations(lst)))
```

0.14.4 Fibonacci

• La suite de Fibonacci est définie par :

$F(0) = 1, F(1) = 1$ et $\forall n \geq 2, F(n) = F(n-1) + F(n-2)$

◦ (I) Ecrire une fonction récursive *fibonacci* basée sur cette définition.
Ajoutez-y la mesure du temps à l'aide de $time.time()$.

◦ (II) Donnez le temps pour calculer Fib(2), Fib(4), Fib(8) et Fib(16).

◦ (III) Donnez la complexité de cet algorithme.
➛ Correspond-t-elle aux temps mesurés ci-dessus (empiriquement)?

◦ On constate que cette définition récursive est très inefficace (à cause des re-calculs).
Une technique appelée "mémoisation" (aka. tabing) permet de mémoriser les résultats intermédiaire pour éviter de les refaire.

(IV) Ecrire une version de Fibonacci qui met cette technique en place.
➛ Indication : utilisez un dico dont les éléments seront de la forme n : F(n) permettant de mémoriser les couples n et $F(n)$)

(V) Quelle est la nouvelle complexité ?

0.14.5 Anagrammes

• Soient deux chaînes de caractères (2 phrases) données dans deux tableaux T1 et T2 de taille N1 et N2 (on vérifiera si les 2 tailles sont identiques).

◦ Vérifier si on a une anagramme (mots différents utilisant les mêmes lettres).

Solution à développer (+ algorithmes)?:

◦ Traitement commune?à toutes les solutions proposées :

➛ Supprimer les espaces dans chaque phrase : O(N) avec N=max (N1,N2).

➛ Si les deux tableaux restants n'ont pas la même taille N alors échec

➛ Transformer tous les caractères de T1 et de T2 en minuscule (ou en majuscule) (complexité $O(N)$)

• Complexité de la partie commune?: $4.O(N) = O(N)$

0.14.6 Égalité de 2 tableaux

• Soit deux tableaux T1 et T2 d'entiers de taille N dont les éléments sont
cas 1 : uniques
➛ $O(N.log(N))$ si tri+comparaison, $O(N^2)$ si pas trié
cas 2 : non uniques → Idem
➛ Vérifier que les deux tableaux contiennent les mêmes éléments.
➛ Une version pour le cas des éléments uniques est en annexes.

0.14.7 Palindrome

• Étudier la complexité de l'algorithme palindrome dans ses différentes versions.
➛ Itératif, récursif, à l'aide de l'inversion, ...

0.14.8 Accepteur simple

• Une machine de Turing reçoit des chaines MOT de 0 et de 1 en entrée.
Elle renvoyer True si MOT vérifie $L = \{0^k 1^k | k \geq 0\}$, False sinon.
◦ Écrire un algorithme de complexité $O(n^2)$ qui réalise cette tache
◦ Proposer un algorithme de complexité $O(nlog(n)))$ qui réalise la même tache

0.14.9 Pesage

• On veut peser des quantités de farine de 1 à 40 Kg.
Quel serait le plus petit nombre de poids qui peuvent être utilisés sur une balance pour gérer l'une de ces quantités ?
➛ La première idée serait d'utiliser des poids de 1, 2, 4, 8, 16 et 32 kg.
C'est un nombre minimal si nous nous limitons à mettre des poids d'un côté et la farine de l'autre.

(I) Ecrire la fonction **pesage1()** qui permet de montrer cela.

• Mais il est possible de mettre des poids sur les deux plateaux de la balance (gauche et droit).
➛ Dans ce cas, nous n'aurons besoin que de quatre poids: 1, 3, 9, 27 kg.
(II) Ecrire la fonction **pesage2(kg)** qui calcule la répartition des poids sur les plateaux permettant de peser n'importe quel poids de 1 à 40. Voir Remarques page suivante.
➛ Donner la complexité de votre algorithme.

• Dans les deux algorithme ci-dessus, comme pour Fabonacci, nous recalculons beaucoup.
(III) Mettre en place le principe de "mémoisation" dans votre solution et comparer les temps.
Remarques :
• En fait, tout entier entre -40 et 40 peut être décomposé (ré-écrit) comme une combinaison linéaire de 1, 3, 9, 27 avec des scalaires pris dans l'ensemble {-1, 0, 1 }.

Par exemple (les valeurs entre parenthèses sont celles prises dans {-1, 0, 1 }):

7 = (1) * 1 + (-1) * 3 + (1) * 9 + (0) * 27

Ou

35 = (-1) * 1 + (0) * 3 + (1) * 9 + (1) * 27

• Pour **pesage2()**, par convention, $(-1) * p$ place le poids p en plateau gauche, $(+1) * p$ place le poids p en plateau droit et $(0) * p$ veut dire : le poids p n'est pas utilisé.

☞ Il est évident que pour les valeurs négatives ([-40 .. -1]), le négation vient d'inverser les plateaux : si vous savez donner la solution pour 1..40Kg, en inversant les plateaux ()$gauche \leftrightarrow droit$), vous obtiendrez la solution pour -40 .. -1 !

0.14.10 K premiers

• Proposer un algorithme qui permet de donner les k premiers dans une liste de scores de taille n.

☞ Plusieurs approches sont possibles :

◦ On trouve le maximum, on le retire de la liste et on recommence : $O(k.n)$

◦ On trie les scores et on retient les k plus grands : $O(n.log(n))$ $(+k$)

0.14.11 Variant 1

• <u>Variant 1</u> : Proposer un algorithme pour résoudre le problème de **la médiane des médianes** : il s'agit de trouver le kième élément le plus grand au sein d'une liste non triée.

➛ On a vu (en cours) une solution en cours en s'inspirant de l'algorithme "quick select" de *Hoar* avec une complexité ($O(n)$).

Indications : Ici, on veut suivre un autre principe qui se déroule en 3 étapes :

◦ On divise la liste en groupes de cinq éléments. Ensuite, pour chaque groupe de cinq, la médiane est calculée (effectuée en temps constant, même en utilisant un algorithme de tri).

◦ L'algorithme est alors appelé récursivement sur cette sous-liste de $n/5$ éléments pour trouver la vraie médiane de ces éléments.
On peut alors garantir que l'élément obtenu se place entre le 30e et le 70e centile.

◦ Enfin, la médiane des médianes est choisie pour être le pivot. Selon la position de l'élément recherché, l'algorithme recommence avec les éléments au-dessus du pivot ou en dessous, qui représentent au plus 70% de la taille initiale de l'espace de recherche.

0.14.12 Variant 2

• Variant 2 : trouvez le kième élément dans un tableau où ce kième élément est supérieur à k éléments du tableau.

Autrement dit, le 0-ème plus grand est le plus petit élément, le 3ème plus grand est supérieur à trois éléments (aurait l'indice 3 si le vecteur est trié) et ainsi de suite.

On suppose qu'il n'y ait pas d'éléments en double dans le tableau..

Votre solution utilisera une fonction de partition tiré p. ex. de *Quicksort*.

Cette fonction appelée *partition* s'exécute en $O(n)$ pour un tableau de n éléments.

Pour un tableau de n éléments, l'appel $FindKth(a, 0, n-1, k)$ renvoie le kième élément du tableau.

☞ Cet élément sera à l'indice de k si le tableau était trié.

Discuter de la complexité de votre solution.

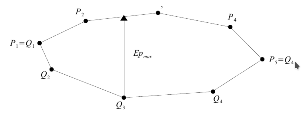
0.14.13 Épaisseur

• Un robot muni d'une pince manipule des objets.

➛ Pour simplifier, on se place dans une dimension 2.

Chaque objet est représenté par un convexe bidimensionnel comme la figure ci-contre :

On étudie donc l'épaisseur verticale (et vu du dessus) d'un objet.



Chaque objet est donné par un polygone convexe représenté par deux liste de points (sommets) : les points "supérieurs" (de taille n) et "inférieurs" (m).

Pour simplifier, on suppose que ces 2 listes ont pour même point de départ : le sommet le plus à gauche. De même pour le sommet de fin le plus à droite.

Un point est composé de ses coordonnées x, y; un segment est composé de deux points consécutifs.

L'épaisseur maximale est forcément la perpendiculaire depuis un sommet sur une bordure sur un segment de la bordure opposée.

P. Ex. : depuis un sommet $P[i]$ du côté supérieur sur un segment du côté inférieur ($Q[j], Q[j+1]$).

Une fonction de calcul de la distance entre un sommet et un segment doit être fournie (*calcDist(point, segment)*).

- Donner un algorithme qui calcule une paire $point \times segment$ donnant l'épaisseur maximale d'un objet où le point est sur la bordure opposée de celle du segment. Calculer sa complexité.

On évitera les cas symétriques (si vous en rencontrez !)

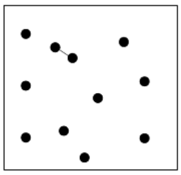
☞ Il existe des solutions de complexités diverses.

0.14.14 Deux plus proches points

• Un problème de géométrie classique visant à trouver la paire de points la plus proche (closest pair) dans un plan.

Soit n points $((x_i, y_i))$ dans un plan.

➛ Trouver la paire de points les plus proches parmi ces points.



0.15 Complexité des opérations Python sur les listes

Operation	Average Case	Amortized Worst Case
Copy	O(n)	O(n)
Append[1]	O(1)	O(1)
Pop last	O(1)	O(1)
Pop intermediate[2]	O(n)	O(n)
Insert	O(n)	O(n)
Get Item	O(1)	O(1)
Set Item	O(1)	O(1)
Delete Item	O(n)	O(n)
Iteration	O(n)	O(n)
Get Slice	O(k)	O(k)
Del Slice	O(n)	O(n)
Set Slice	O(k+n)	O(k+n)
Extend[1]	O(k)	O(k)
Sort	O(n log n)	O(n log n)
Multiply	O(nk)	O(nk)
x in s	O(n)	
min(s), max(s)	O(n)	
Get Length	O(1)	O(1)