3 Parte 3

3.1 Respuesta 1

Sean Π y Π' programas tal que $\Pi \subseteq \Pi'$, y sea M modelo de Π. Tenemos que para cada regla $r_i \in \Pi$ de la forma $Head_i \leftarrow Body_i$, donde $Body_i$ no contiene ninguna negación, y $|Head_i| = 1$, si $Body_i \subseteq M$, entonces $Head_i \cap M \neq \emptyset$. Dado que $|Head_i| = 1$, también se cumple que $Head_i \subseteq M$. También, sea M' modelo de Π'. Para cada regla $r_j \in \Pi'$ de la forma $Head_j \leftarrow Body_j$, si $Body_j \subseteq M'$, entonces $Head_j \subseteq M'$.

Queremos demostrar que $M \subseteq M'$. Es decir, para cada átomo x, si $x \in M$, entonces $x \in M'$.

Para cada regla $r_i \in \Pi$, se cumple que $Head_i \subseteq M$ sí, y solo sí, $Head_i$ es la cabeza de alguna regla r_i tal que $Body_i \subseteq M$. Para aquellas reglas en las cuales se cumple que $|Body_i| = 0$, siempre se cumple que $Head_i \subseteq M$.

Tenemos que por definición de Π', si la regla r pertenece a Π, entonces también pertenece a Π'. Entonces, para alguna regla $r_i \in \Pi$ de la forma $Head_i \leftarrow Body_i$, si $Body_i \subseteq M$, entonces $Body_i \subseteq M'$, y por lo tanto $Head_i \subseteq M$ y $Head_i \subseteq M'$. De esta manera, se cumple el principio de monotonía para programas de lógica sin negación con $|Head_i| = 1$ para toda r_i, y $M \subseteq M'$. $\square$

3.2 Respuesta 2

Queremos demostrar que todo programa que tiene reglas de la forma $Head \leftarrow Body$, sin negación, y con $|Head| \leq 1$, tiene a lo más un modelo. Por inducción, supongamos que un programa Π con reglas de la forma $Head \leftarrow Body$, sin negación, y con $|Head| \leq 1$, y una cantidad de reglas igual a n, tiene a lo más un modelo.

Caso base: Para un programa que tiene 0 reglas, se tiene que no hay ninguna regla de la forma $Head$ (con $|Body| = 0$), por lo que inicialmente no se puede añadir ningún átomo al modelo M del programa. Por lo tanto un programa con $n = 0$ reglas tiene un único modelo, el modelo vacío $M = \emptyset$, y se cumple que tiene a lo más un modelo. Para un programa que solamente una regla r de la forma $Head \leftarrow Body$ (es decir, $n = 1$), se pueden dar los siguientes casos:

1. $|Head| = 1$, y $|Body| = 0$: En este caso, la regla constituye a declarar que un átomo es verdadero. Dado que r es la única regla, $Head$ sería el único modelo del programa.

2. $|Head| = 0$, y $|Body| > 0$: En este caso, $Head$ está vacío, por lo que esta regla excluye átomos del modelo en los cuales se cumple la condición de $Body$. Dado que es la única regla, no se puede cumplir $Body$, por lo que el modelo es vacío.

3. $|Head| = 1$, y $|Body| > 0$: En este caso, $Head$ es parte del modelo $Body$. Dado que es la única regla del programa, no se puede cumplir $Body$, por lo que el modelo es vacío.

Notar que el caso $|Body| = 0$, y $|Head| = 0$, no constituye una regla válida. De esta manera, los casos anteriores cubren todas las posibilidades, y siempre se cumple que un programa con $n = 1$ reglas tiene un modelo.

Por hipótesis inductiva, sabemos que se cumple que un programa con $n = k$ reglas las cuales cumplen las condiciones establecidas tiene a lo más un modelo.

Debemos demostrar que esto se cumple para programa con $n = k+1$ reglas. Sea Π' un programa con $n = k+1$ reglas. Π' corresponde a la unión de un programa Π con $n = k$ reglas, y un programa

$\{r\}$ con una regla ($n = 1$). Es decir $\Pi' = \Pi \cup \{r\}$. Sabemos que tanto Π como $\{r\}$ tienen a lo más un modelo. Para Π, se pueden dar dos casos.

1. Que Π no tenga modelo: En este caso, se deduce que entre las reglas de Π existe una contradicción. Si añade la regla r a Π, esta contradicción no se eliminaría, por lo que Π' tampoco tendría modelo.

2. Que Π tenga un modelo M: En este caso, añadir r no aumentaría la cantidad de modelos. En el caso de que r genere una contradicción, Π' no tendría ningún modelo. Para el caso en que no genere una contradicción, si no se cumple $Body_r$ de r, entonces el modelo de Π se mantendría en M. Por otro lado, si se cumple $Body_r$, entonces el nuevo modelo de Π' crecería a $M \cup Head_r$, y según la definición de modelo habría que iterar sobre las reglas de Π para determinar si alguna otra regla se cumple. Aquí, solo cambiaría el tamaño del modelo de Π', pero no aumentaría su cantidad de modelos.

Dado que en ninguno de los casos anteriores la cantidad de modelos resulta ser mayor a 1, se cumple que un programa con $n = k + 1$ reglas tiene a lo más un modelo.

De esta manera, demostramos por inducción que todos los programas que cumplen las condiciones del enunciado siempre tienen a lo más un modelo. $\square$

3.3 Respuesta 3