Representación de números

Clase 21

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Representación de números

Teorema

Sea $b > 1$. Si $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, entonces se puede escribir de forma única como:

$$n \ = \ a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + \ldots + a_1 b + a_0 \ = \ \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$$

- $k \geq 1$,
- $a_0, \ldots, a_{k-1}$ menor que b $\quad (a_i < b) \quad$ y
- $a_{k-1} \neq 0$.

¿cuál es la representación de 123?

con $b = 10$: $\quad 123 \ = \ 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0$

con $b = 2$: $\quad 123 \ = \ 1 \cdot 2^6 + 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$

con $b = 8$: $\quad 123 \ = \ 1 \cdot 8^2 + 7 \cdot 8^1 + 3 \cdot 8^0$

Representación de números

Demostración: por inducción fuerte

$$P(n) \;:=\; n = \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$$

1. $P(1): \quad 1 = 1 \cdot b^0$ ✓

2. Suponemos que $P(n')$ se cumple para todo $n' < n$ y dem. $P(n)$:
   - Existe un único par $m, r \in \mathbb{Z}$ con $0 \leq r < b$ tal que: $n = m \cdot b + r$.
   - Como $m < n$ (¿por qué?), entonces por hipótesis de inducción:
   $$m = \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i \quad k \geq 1,\; a_i < b \text{ y } a_{k-1} \neq 0.$$
   - Reemplazando m tenemos que:
   $$n = \left(\sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i\right) \cdot b + r = \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^{i+1} + r$$
   - Definiendo $a'_0 = r$ y $a'_{i+1} = a_i$ para $0 \leq i \leq k$, tenemos que:
   $$n = a'_k b^k + a'_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a'_1 b + a'_0$$
   con $k+1 \geq 1$, $a'_i < b$ y $a'_k \neq 0$. $\square$

Representación de números

Teorema

Sea $b > 1$. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces se puede escribir de forma única como:

$$n = a_{k-1}b^{k-1} + a_{k-2}b^{k-2} + \ldots + a_1 b + a_0 = \sum_{i=0}^{k-1} a_i b^i$$

- $k \geq 1$,
- $a_0, \ldots, a_{k-1}$ menor que b $\quad (a_i < b)$ $\quad$ y
- $a_{k-1} \neq 0$.

Desde ahora, decimos que la representación de ***n* en base *b*** es la secuencia:

$$(n)_b = a_{k-1} \ldots a_1 a_0$$

Ejemplo

$(123)_{10} = 123 \qquad (123)_2 = 1111011 \qquad (123)_8 = 173$

¿cómo encontramos la representación de n en base b?

Para $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $b > 1$, deseamos encontrar los coeficientes $a_i < b$ tal que:

$$n = a_{k-1} b^{k-1} + \ldots + a_1 b + a_0$$

Sabemos que $n = q \cdot b + r$ para algún único par $q, r \in \mathbb{N}$ con $r < b$.

¿qué es q y r en la representación de n en base b?

Proposición

Para un $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ y $b > 1$, si $(n)_b = a_{k-1} \ldots a_1 a_0$ y $n = q \cdot b + r$, entonces:

$$\begin{aligned} r &= a_0 \\ (q)_b &= a_{k-1} \ldots a_1 \end{aligned}$$

Demostración: ejercicio.

¿cómo encontramos la representación de n en base b?

Ejemplo

Para escribir 39 en base 2:

$$\begin{aligned} 39 &= 19 \cdot 2 + \mathbf{1} \\ 19 &= 9 \cdot 2 + \mathbf{1} \\ 9 &= 4 \cdot 2 + \mathbf{1} \\ 4 &= 2 \cdot 2 + \mathbf{0} \\ 2 &= 1 \cdot 2 + \mathbf{0} \\ 1 &= 0 \cdot 2 + \mathbf{1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(39)_2 = 100111$.

Para escribir 39 en base 5:

$$\begin{aligned} 39 &= 7 \cdot 5 + \mathbf{4} \\ 7 &= 1 \cdot 5 + \mathbf{2} \\ 1 &= 0 \cdot 5 + \mathbf{1} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(39)_5 = 124$.

Algoritmo para conversión de base

Algoritmo

input : Número $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, base $b \geq 2$

output: Una secuencia $(n)_b = a_{k-1} \dots a_1 a_0$

Function `ConversiónBase` *(n, b)*

- $q := n$
- $k := 0$
- **while** $q \neq 0$ **do**
  - $a_k := q$ **mod** b
  - $q := q$ **div** b
  - $k := k + 1$
- **return** $a_{k-1} \dots a_1 a_0$

¿cuál es el tiempo del algoritmo en términos de n?

¿cuál es el tamaño de $(n)_b$ con respecto a n?

Suponga que $|(n)_b| = k$.

- Como n tiene k dígitos en base b, entonces:

$$b^{k-1} \quad \leq \quad n \quad \leq \quad b^k - 1$$

- Despejando k, tenemos que:

$$\log_b(n+1) \quad \leq \quad k \quad \leq \quad \log_b(n) + 1$$

- Como k es un valor entero:

$$\lceil \log_b(n+1) \rceil \quad \leq \quad k \quad \leq \quad \lfloor \log_b(n) + 1 \rfloor$$

Teorema

Para todo $n \in \mathbb{N}$ y $b \geq 2$, se cumple que $|(n)_b| = \lceil \log_b(n+1) \rceil$.

Por lo tanto, $|(n)_b| \in \mathcal{O}(\log(n))$.

Representación y división de números

¿cómo sabemos que un número es divisible por 3?

$$\begin{aligned}
n \ \mathbf{mod}\ 3 &= \big(a_k \cdot 10^k + \ldots + a_1 \cdot 10 + a_0\big)\ \mathbf{mod}\ 3 \\
&= \big((a_k \cdot 10^k)\ \mathbf{mod}\ 3 + \ldots + (a_1 \cdot 10)\ \mathbf{mod}\ 3 + a_0\ \mathbf{mod}\ 3\big)\ \mathbf{mod}\ 3 \\
&= \big((a_k \cdot 1)\ \mathbf{mod}\ 3 + \ldots + (a_1 \cdot 1)\ \mathbf{mod}\ 3 + a_0\ \mathbf{mod}\ 3\big)\ \mathbf{mod}\ 3 \\
&= \big(a_k + \ldots + a_1 + a_0\big)\ \mathbf{mod}\ 3
\end{aligned}$$

Demuestre reglas para 4, 9, ...