NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

N^{o} LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 5 – Respuesta Pregunta 1

Parte 1

Para una relación $R \subseteq A \times A$ con A cualquier conjunto no vacío, se define la *anti-clausura transitiva* de R como una relación $R^{\downarrow t}$ tal que:

1. $R^{\downarrow t} \subseteq R$
2. $R^{\downarrow t}$ es transitiva
3. $\forall R' \subseteq R. \quad R'$ es transitiva $\implies R' \subseteq R^{\downarrow t}$

Dada esta definición, se tiene que **NO** es verdad que $R^{\downarrow t}$ siempre existe. Esto se puede demostrar con un contraejemplo.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$, entonces $A \times A = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$

Sea $R = \{(1,2),(2,3)\}$. Podemos notar que se cumple que $R \subseteq A \times A$.

Dado que se tiene que cumplir que $R^{\downarrow t} \subseteq R$ (la condición **1**), tenemos que existen 4 candidatos posibles para $R^{\downarrow t}$:

- $R'^1 = R$
- $R'^2 = \{(1,2)\}$
- $R'^3 = \{(2,3)\}$
- $R'^4 = \emptyset$

Tenemos que $R'^1 = R$ no puede ser $R^{\downarrow t} \subseteq R$, dado que no se cumpliría la condición **2**, es decir, que tiene que ser transitiva. Esto porque en R'^1 se cumple que $(1,2) \in R'^1$ y $(2,3) \in R'^1$, pero $(1,3) \notin R'^1$.

Para R'^2, R'^3, y R'^4, se tiene que sí se cumple condición **2**, sin embargo, no se cumple la condición **3** para ninguna de estas. Para R'^2, tenemos que R'^3 es transitiva, pero $R'^3 \not\subseteq R'^2$. Análogamente, para R'^3, tenemos que R'^2 es transitiva, pero $R'^2 \not\subseteq R'^3$. Finalmente, para R'^4 tenemos que $R'^3 \not\subseteq R'^4$ y $R'^2 \not\subseteq R'^4$.

Por lo tanto, no existe una *anti-clausura transitiva* $R^{\downarrow t}$ para la relación $R = \{(1,2),(2,3)\}$, y **NO** es verdad que $R^{\downarrow t}$ siempre existe. $\square$

Parte 2

Para una relación $R \subseteq A \times A$ con A cualquier conjunto no vacío, se define la *anti-clausura simética* de R como una relación $R^{\downarrow s}$ tal que:

1. $R^{\downarrow s} \subseteq R$
2. $R^{\downarrow s}$ es simétrica
3. $\forall R' \subseteq R. \quad R'$ es simétrica $\implies R' \subseteq R^{\downarrow s}$

Sea R una relación cualquiera tal que $R \subseteq A \times A$, con A un conjunto no vacío, se tiene que se pueden dar dos casos:

1. R es simétrica
2. R no es simétrica

Para el primer caso, se tiene que su *anti-clausura simétrica* será $R^{\downarrow s} = R$, dado que esta relación $R^{\downarrow s}$ cumpliría las 3 condiciones listadas anteriormente.

Para el segundo, supongamos que existe un R_s tal que $R_s \subseteq R$ y R_s es simétrica. Para que R_s sea también *anti-clausura simétrica* de R, se tiene que cumplir que $\forall R' \subseteq R. \quad R'$ es simétrica $\implies R' \subseteq R_s$. Analizando esta última condición, tenemos que se pueden dar 2 casos:

1. Que esta condición se cumpla en todo caso, y por lo tanto, R_s sea *anti-clausura simétrica.*
2. Que esta condición no se cumpla, es decir, que existan relaciones $R' \subseteq R$ tal que R' sea simétrica, pero $R' \not\subseteq R_s$.

Para el primer punto, se cumple que R_s es *anti-clausura simétrica.*
Para el segundo, se pueden dar las siguientes posibilidades:

1. Que existan R' tal que $R' \not\subseteq R_s$, y al mismo tiempo $R_s \subseteq R'$
2. Que existan R' tal que $R' \not\subseteq R_s$, y al mismo tiempo $R_s \not\subseteq R'$

En el primer caso, se tiene que R' es una nueva candidata para ser *anti-clausura simétrica.*
En el segundo caso, se tiene que ninguna de las dos relaciones puede ser *anti-clausura simétrica.* Puesto que R' y R_s son simétricas, y se cumple que $R' \subseteq R$ y $R_s \subseteq R$, entonces $R' \cup R_s$ es simétrica y $R' \cup R_s \subseteq R$. Por lo tanto, esta nueva relación $R' \cup R_s$ cumple las primeras dos condiciones, y es candidata para ser *anti-clausura simétrica* de R.

Se puede repetir el análisis con los nuevos posibles candidatos encontrados, y se volverá a obtener uno de los casos listados (nunca se descarta la posibilidad de existencia de una *anti-clausura simétrica*).
Por lo tanto, siempre existe una *anti-clausura simétrica* $R^{\downarrow s}$, para toda relación $R \subseteq A \times A$. $\square$