

# Métodos de demostración

Clase 06

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

# ¿qué es una demostración?

## Definición

Una demostración es un **argumento válido** para establecer la verdad de una **afirmación matemática**.

¿qué es una **afirmación matemática**?

# Afirmaciones matemáticas

## Ejemplos

1. Todo número natural cumple que si es par, entonces su sucesor es impar.

$$\forall x. x \text{ es par} \rightarrow \text{el sucesor de } x \text{ es impar}$$

2. Todo número natural cumple que es par si, y solo si, el número al cuadrado es par.

$$\forall x. x \text{ es par} \leftrightarrow x^2 \text{ es par}$$

afirmación matemática  $\approx$  proposición en lógica de predicados

# Tipos de afirmaciones matemáticas

- Teorema.
- Proposición.
- Definición.
- Axioma.
- Lema.
- Corolario.
- Conjetura.
- Problema abierto.

# ¿qué es una demostración?

## Definición

Una demostración es un **argumento válido** para establecer la verdad de una **afirmación matemática**.

### ¿qué es un **argumento válido**?

Un **argumento válido** es una secuencia de argumentos que puede estar compuesta por:

- axiomas.
- hipótesis o supuestos (si existe).
- afirmaciones previamente demostradas.

Cada argumento en la secuencia de argumentos esta conectado con el anterior por una **regla de inferencia** (consecuencia lógica).

El **último paso** de la secuencia establece la verdad de la afirmación.

# ¿qué NO es una demostración?

- Una secuencia de símbolos.
- Una secuencia disconexa de argumentos.

## IMPORTANTE

La secuencia de argumentos debe ser lo más **clara**, **precisa** y **completa** posible de tal manera de **convencer** al lector u oyente sin dejarle ninguna duda sobre la correctitud de la demostración.

¿cómo encontramos una secuencia de argumentos para demostrar un teorema?

1. Experiencia.
2. Intuición.
3. Creatividad.
4. Perseverancia.
5. **Métodos de demostración.**

# Outline

Directa

Contrapositivo

Contradicción

Por análisis de casos

Doble implicación

Contra-ejemplo

Existencial

Inducción



# Outline

**Directa**

Contrapositivo

Contradicción

Por análisis de casos

Doble implicación

Contra-ejemplo

Existencial

Inducción

# Demostración directa

Supongan que queremos demostrar una afirmación como:

$$\forall x. P(x) \rightarrow Q(x)$$

## Método directo

Suponemos que  $P(n)$  es verdadero para un  $n$  **cualquiera** (genérico) y demostramos que  $Q(n)$  también es verdadero.

¿qué sucede cuando  $P(n)$  es **falso**?

# Ejemplo de una demostración directa

## Definición

- Un entero  $n$  en  $\mathbb{Z}$  se dice **par** si existe  $k$  en  $\mathbb{Z}$  tal que  $n = 2k$ .
- Un entero  $n$  en  $\mathbb{Z}$  se dice **impar** si existe  $k$  en  $\mathbb{Z}$  tal que  $n = 2k + 1$ .

## Teorema

Para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , si  $n$  es impar, entonces  $n^2$  es impar.

## Demostración

Suponemos que  $n$  es impar.

Por definición, existe un  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $n = 2k + 1$ .

$$\begin{aligned}n^2 &= (2k + 1)^2 && \text{(definición de } n\text{)} \\&= 4k^2 + 4k + 1 && \text{(multiplicación } (2k + 1)(2k + 1) \text{)} \\&= 2 \cdot (2k^2 + 2k) + 1 && \text{(factorización por 2)}\end{aligned}$$

Si definimos  $k'$  como  $k' = 2k^2 + 2k$ , entonces se tiene que  $n^2 = 2k' + 1$ .

Por definición de un número impar, concluimos que  $n^2$  es impar. □

# Outline

Directa

**Contrapositivo**

Contradicción

Por análisis de casos

Doble implicación

Contra-ejemplo

Existencial

Inducción

# Demostración por contrapositivo

Supongan que queremos demostrar:

$$\forall x. P(x) \rightarrow Q(x) \equiv \forall x. \neg Q(x) \rightarrow \neg P(x)$$

## Método por contrapositivo

Suponemos que  $Q(n)$  es **falso** para un  $n$  cualquiera (genérico) y demostramos que  $P(n)$  también es **falso**.

# Ejemplo de demostración por contrapositivo

## Teorema

Suponga  $a$  y  $b$  son positivos. Si  $n = ab$ , entonces  $a \leq \sqrt{n}$  o  $b \leq \sqrt{n}$ .

¿es posible hacer una demostración directa?

## Demostración (por contrapositivo)

**PD:** Si  $a > \sqrt{n}$  y  $b > \sqrt{n}$ , entonces  $n \neq ab$ .

Suponga que  $a > \sqrt{n}$  y  $b > \sqrt{n}$  con  $n$  positivo.

$$\begin{aligned} n &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \\ &< a \cdot \sqrt{n} && (\text{por } a > \sqrt{n}) \\ &< a \cdot b && (\text{por } b > \sqrt{n}) \end{aligned}$$

Entonces,  $n < a \cdot b$  y, por lo tanto,  $n \neq ab$ .



# Outline

Directa

Contrapositivo

**Contradicción**

Por análisis de casos

Doble implicación

Contra-ejemplo

Existencial

Inducción

# Demostración por contradicción

Supongan que queremos demostrar una afirmación  $R$ , pero demostramos:

$$(\neg R) \rightarrow (S \wedge \neg S)$$

donde  $S$  es una afirmación cualquiera.

¿qué implica esto?

## Metodó por contradicción

Suponemos que  $\neg R$  es verdadero y inferimos una **contradicción**.

Si esto sucede, entonces  $R$  debe ser **verdadero**.



# Demostración por contradicción (versión alternativa)

Supongan que queremos demostrar:

$$R := \forall x. P(x) \rightarrow Q(x)$$

Metodó por contradicción

$$\neg R := \exists x. P(x) \wedge \neg Q(x)$$

Suponemos que existe un  $n$  tal que  $P(n)$  es **verdadero** y  $Q(n)$  es **falso** y inferimos una **contradicción**.

*“Reductio ad absurdum, which Euclid loved so much, is one of a mathematician’s finest weapons. It is a far finer gambit than any chess play: a chess player may offer the sacrifice of a pawn or even a piece, but a mathematician offers the game.”*

A mathematician’s apology (G. H. Hardy).

# Ejemplo de una demostración por contradicción

## Definiciones

- Un número  $r$  en  $\mathbb{R}$  se dice **racional** si existen enteros  $p$  y  $q$  tal que:

$$r = \frac{p}{q}$$

con  $q \neq 0$  y  $p, q$  no tienen divisores en común exceptuando el 1.

- Un número  $r \in \mathbb{R}$  se dice **irracional** si no es racional.

## Teorema

$\sqrt{2}$  es un número irracional.

# Ejemplo de una demostración por contradicción

## Demostración ( $\sqrt{2}$ es un número irracional)

Suponga que  $\sqrt{2}$  es racional.

Entonces, existen  $p$  y  $q$  en  $\mathbb{Z}$ , sin divisores en común, tal que  $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ .

$$\begin{aligned}\sqrt{2} &= \frac{p}{q} \\ 2 \cdot q^2 &= p^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $p^2$  es par y, entonces,  **$p$  es par** (¿por qué?).

Como  $p$  es par, entonces  $p = 2k$  para algún  $k$  en  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{aligned}2 \cdot q^2 &= p^2 \\ 2 \cdot q^2 &= (2k)^2 \\ q^2 &= 2 \cdot k^2\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $q^2$  es par y, entonces,  **$q$  es par**.

Contradicción! (¿por qué?)



# Outline

Directa

Contrapositivo

Contradicción

**Por análisis de casos**

Doble implicación

Contra-ejemplo

Existencial

Inducción

# Demostración por análisis de casos

Supongan que queremos demostrar:

$$\forall x \in D. P(x)$$

Metodó de análisis de casos

**Dividimos** el dominio de posibilidades  $D$  a una cantidad **finita de casos**  $D_1, D_2, \dots, D_k$  tal que:

$$D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_k$$

Por último, demostramos para todo subdominio  $D_i$  se cumple:

$$\forall x \in D_i. P(x)$$

con  $i$  desde 1 hasta  $k$ .

# Ejemplo de una demostración por casos

## Teorema

Para todo entero  $n$  se cumple que  $n^2 \geq n$ .

## Demostración

1. Si  $n = 0$ , entonces  $0^2 = 0$ . Por lo tanto,  $0^2 \geq 0$ .

2. Si  $n \geq 1$ , entonces:

$$\begin{array}{rcl} n & \geq & 1 \\ n^2 & \geq & n \quad (\text{multiplicando ambos lados por } n > 0) \end{array}$$

3. Si  $n \leq -1$ , como  $n^2 \geq 0$  entonces se tiene que  $n^2 \geq n$ .



# ¿cuál es la ventaja de demostrar por casos?

## Recomendación

*“Cuando todos los métodos anteriores han fallado y no se sabe por donde empezar, una 'estrategia' es empezar demostrando casos simples para así **ganar intuición** en la demostración general. ”*

# Outline

Directa

Contrapositivo

Contradicción

Por análisis de casos

**Doble implicación**

Contra-ejemplo

Existencial

Inducción



# Demostración de **doble implicación**

Supongan que queremos demostrar una afirmación como:

$$\forall x. P(x) \leftrightarrow Q(x)$$

Demostración para doble-implicación

Debemos demostrar dos afirmaciones (**ambas direcciones**):

$$\forall x. P(x) \rightarrow Q(x) \quad \wedge \quad \forall x. P(x) \leftarrow Q(x)$$

# Ejemplo de una demostración de **doble-implicación**

## Teorema

Para todo número natural  $n$ ,  
se tiene que  $n$  es impar si, y solo si,  $n^2$  es impar.

## Demostración

( $\Rightarrow$ ) Si  $n$  es impar, entonces  $n^2$  es impar.



( $\Leftarrow$ ) Si  $n^2$  es impar, entonces  $n$  es impar.

**PD:** Si  $n$  es par, entonces  $n^2$  es par.

...

Ejercicio: termine la demostración.

# Outline

Directa

Contrapositivo

Contradicción

Por análisis de casos

Doble implicación

**Contra-ejemplo**

Existencial

Inducción

# Demostración por **contra-ejemplo**

Supongan que deseamos demostrar que la siguiente afirmación es falsa:

$$\forall x. P(x)$$

Demostración por contra-ejemplo

Encontrar un elemento  $n$  (**cualquiera**) tal que  $P(n)$  es **falso**.

# Ejemplo de una demostración por **contra-ejemplo**

## Teorema

Es falso que todo número mayor a 1 es la suma de dos cuadrados perfectos.

## Demostración

Probamos con los primeros números mayor a 1:

$$2 = 1^2 + 1^2$$

$$3 \neq 1^2 + 1^2$$

$$\neq 2^2 + 1^2$$

Por lo tanto, 3 no es la suma de dos cuadrados perfectos.



# ¿cómo buscar/encontrar el contra-ejemplo?

## Recomendaciones

1. Probar primero los ejemplos más “**pequeños**”.
2. Seguir con los ejemplos más “**comunes**”.
3. Intentar con muchos ejemplos.

# Outline

Directa

Contrapositivo

Contradicción

Por análisis de casos

Doble implicación

Contra-ejemplo

**Existencial**

Inducción

# Demostración **existencial**

Supongan que queremos demostrar:

$$\exists x. P(x)$$

## Demostración de existencia

Debemos demostrar que **existe** un elemento  $n$  tal que  $P(n)$  es **verdadero**.

Notese que NO es estrictamente necesario mostrar  $n$  explícitamente.



# Ejemplo de una demostración **existencial**

## Teorema

Existen dos números irracionales  $a$  y  $b$  tal que  $a^b$  es racional.

## Demostración

Como  $\sqrt{2}$  es irracional considere  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ .

1. Si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  es **racional**, entonces  $a = \sqrt{2}$  y  $b = \sqrt{2}$  es suficiente.
2. Si  $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  es **irracional**, entonces considere  $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$  y  $b = \sqrt{2}$ .

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}} &= \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \sqrt{2}^2 \\ &= 2\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $a^b$  es racional.



# Outline

Directa

Contrapositivo

Contradicción

Por análisis de casos

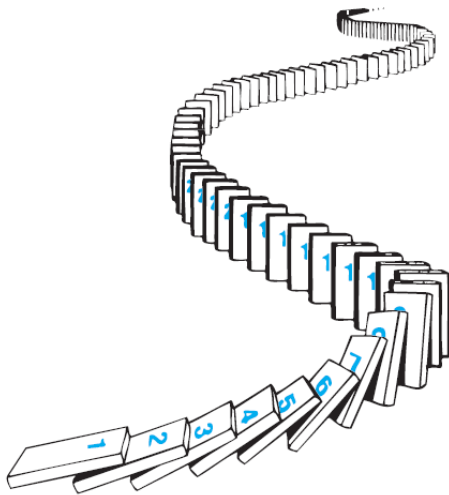
Doble implicación

Contra-ejemplo

Existencial

**Inducción**

# Demostración por inducción



# Demostración por inducción

Suponga que deseamos demostrar una afirmación  $\forall x. P(x)$  sobre  $\mathbb{N}$ .

## Principio de inducción

Para una afirmación  $P(x)$  sobre los naturales, si  $P(x)$  cumple que:

1.  $P(0)$  es verdadero,
2. si  $P(n)$  es verdadero, entonces  $P(n+1)$  es verdadero,

entonces para todo  $n$  en los naturales se tiene que  $P(n)$  es verdadero.

## Notación

- $P(0)$  se llama el **caso base**.
- En el paso 2.
  - $P(n)$  se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$  se llama la **tesis de inducción** o paso inductivo.

# Ejemplo de demostración por inducción

## Teorema

La suma de los primeros  $n$  números naturales es igual a  $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ .

## Demostración

Demostramos que se cumple para  $n = 0$ :

$$\text{Caso base } (n = 0): \quad 0 = \frac{0 \cdot (0 + 1)}{2} = 0$$

# Ejemplo de demostración por inducción

## Demostración (continuación)

Suponemos que se cumple para un  $n$  cualquiera y demostramos para  $n + 1$ :

**Hipótesis:**  $0 + 1 + \dots + n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$

**Inducción:**  $0 + 1 + \dots + n + (n + 1) = \underbrace{0 + 1 + \dots + n}_{\text{caso } n} + (n + 1)$

$$= \frac{n \cdot (n + 1)}{2} + (n + 1)$$
$$= \frac{(n + 1) \cdot ((n + 1) + 1)}{2}$$



# ¿cuál método de demostración ocupar?

No existe un método infalible para demostrar!

## Recomendaciones

1. Probar con distintos métodos.
2. Ganar intuición intentando con casos o ejemplos mas sencillos.
3. Revisar demostraciones similares.
4. Sean creativos.