NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

N^{o} LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 2

Parte 1

Sean $R_1, S_1, R_2, S_2 \in \mathcal{R}$ tal que:

1. $(R_1, S_1) \in \preceq_1$, es decir, $R_1 \circ S_1 = S_1$
2. $(R_2, S_2) \in \preceq_1$, es decir, $R_2 \circ S_2 = S_2$
3. $S_1 = R_2$

Si $\preceq_1$ es transitiva, entonces se debe cumplir que $(R_1, S_2) \in \preceq_1$

Supongamos que $(R_1, S_2) \notin \preceq_1$, es decir, $R_1 \circ S_2 \neq S_2$

$$\begin{aligned}
&R_1 \circ S_2 \neq S_2 && \\
&R_1 \circ S_2 \neq R_2 \circ S_2 && \text{Por } \mathbf{2.} \\
&R_1 \circ S_2 \neq S_1 \circ S_2 && \text{Por } \mathbf{3.} \\
&R_1 \circ S_2 \neq (R_1 \circ S_1) \circ S_2 && \text{Por } \mathbf{1.}
\end{aligned}$$

Para el siguiente paso, debemos demostrar que la composición es asociativa. Sean A, B, C conjuntos de relaciones. Si la operación de composición es asociativa, entonces se debe cumplir que:
$(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$, lo que equivale a:
$(A \circ B) \circ C \subseteq A \circ (B \circ C) \land A \circ (B \circ C) \subseteq (A \circ B) \circ C$

Para demostrar que se cumple $(A \circ B) \circ C \subseteq A \circ (B \circ C)$:

$$\begin{aligned}
&(x, y) \in (A \circ B) \circ C \\
&\implies \exists z.(x, z) \in (A \circ B) \land (z, y) \in C \\
&\implies \exists z.[\exists k.(x, k) \in A \land (k, z) \in B] \land (z, y) \in C \\
&\implies \exists k.(x, k) \in A \land [\exists z.(k, z) \in B \land (z, y) \in C] \\
&\implies \exists k.(x, k) \in A \land (k, y) \in (C \circ B) \\
&\implies (x, y) \in A \circ (B \circ C)
\end{aligned}$$

$\square$

Ahora, para demostrar que se cumple $A \circ (B \circ C) \subseteq (A \circ B) \circ C$:

$$
\begin{aligned}
&(x, y) \in A \circ (B \circ C) \\
&\implies \exists z.(x, z) \in A \wedge (z, y) \in (B \circ C) \\
&\implies \exists z.(x, z) \in A \wedge [\exists k.(z, k) \in B \wedge (k, y) \in C] \\
&\implies \exists k.[\exists z.(x, z) \in A \wedge (z, k) \in B] \wedge (k, y) \in C \\
&\implies \exists k.(x, k) \in (A \circ B) \wedge (k, y) \in C \\
&\implies (x, y) \in (A \circ B) \circ C
\end{aligned}
$$

$\square$

Por lo tanto, se puede concluir que $(A \circ B) \circ C = A \circ (B \circ C)$ y que la composición es asociativa. $\square$

Continuando con la demostración:

$R_1 \circ S_2 \neq R_1 \circ (S_1 \circ S_2)$	Por asociatividad de la composición
$R_1 \circ S_2 \neq R_1 \circ (R_2 \circ S_2)$	Por **3.**
$R_1 \circ S_2 \neq R_1 \circ S_2$	Por **2.**

Se llega a una contradicción, por lo que el único caso posible es que $R_1 \circ S_2 = S_2$, es decir, $(R_1, S_2) \in \preceq_1$. Por lo tanto, se concluye que $\preceq_1$ es transitiva. $\square$

Parte 2

Tenemos que la relación $\preceq_2$ **NO** es transitiva. Esto se puede probar mediante un contraejemplo.

Sea $A = \{1, 2, 3\}$.

Tenemos que $A \times A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$

Por lo tanto, según la definición del enunciado, $\mathcal{R}$ corresponde a todos los conjuntos de relaciones binarias que se pueden dar sobre A

Sean $R_1 = \{(1, 3), (2, 2)\}$ y $S_1 = \{(1, 2), (3, 2)\}$. Tenemos que ambos efectivamente pertenecen a $\mathcal{R}$, dado que son subconjuntos de $A \times A$.

Tenemos que $R_1 \circ S_1 = \{(1, 2)\} \subseteq S_1 \implies (R_1, S_1) \in \preceq_2$

Sean $R_2 = \{(1, 2), (3, 2)\}$ y $S_2 = \{(1, 3), (2, 3), (3, 3)\}$. Nuevamente tenemos que ambos efectivamente pertenecen a $\mathcal{R}$, dado que son subconjuntos de $A \times A$.

Tenemos que $R_2 \circ S_2 = \{(1, 3), (3, 3)\} \subseteq S_2 \implies (R_2, S_2) \in \preceq_2$

Si $\preceq_2$ es transitiva, entonces se debe cumplir que $(R_1, S_2) \in \preceq_2$.

Tenemos que $R_1 \circ S_2 = \{(1, 3), (2, 3)\}$, el cual **no** es subconjunto de S_2, debido a que $(2, 3) \notin S_2$. Por lo tanto, $(R_1, S_2) \notin \preceq_2$ y se concluye que $\preceq_2$ **no** es transitiva. $\square$