Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 4

17 de abril de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

Se define la siguiente operación entre dos conjuntos:

$$A \star B = A \setminus B \cup B \setminus A.$$

Demuestre que

$$A \star B = (A \cap B)^c \setminus (A \cup B)^c$$

Solución

$$\begin{aligned}
(A \cap B)^c \setminus (A \cup B)^c &= \{x \mid (x \in (A \cap B)^c) \wedge (x \notin (A \cup B)^c)\} \\
&= \{x \mid (x \notin (A \cap B)) \wedge (x \in (A \cup B))\} \\
&= \{x \mid \neg(x \in A \wedge x \in B) \wedge (x \in A \vee x \in B)\} \\
&= \{x \mid (x \notin A \vee x \notin B) \wedge (x \in A \vee x \in B)\} \\
&= \{x \mid ((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in A) \vee ((x \notin A \vee x \notin B) \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid (x \notin B \wedge x \in A) \vee (x \notin A \wedge x \in B)\} \\
&= \{x \mid (x \in A \setminus B) \vee (x \in B \setminus A)\} \\
&= A \setminus B \cup B \setminus A = A \star B
\end{aligned}$$

Pregunta 2

Sea $P = \{A_1, ...A_n\}$ una colección de conjuntos no vacíos, y sea A un conjunto cualquiera. Se dice que P es una partición de A si y sólo si

- $A_i \cap A_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
- $A = \cup_{i=1}^n A_i$

Sean $\{A_1, ..., A_m\}$ y $\{B_1, ..., B_n\}$ particiones de un conjunto X. Muestre que la colección de conjuntos

$$P = \{A_i \cap B_j \neq \emptyset \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

también es una partición de X.

Solución

Para demostrar que $P = (C_1, \ldots, C_k)$ es partición, debemos demostrar dos cosas:

1. $C_i \cap C_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$
   Veamos que $C_i \cap C_j$ se ve de la siguiente manera

$$\begin{aligned} C_i \cap C_j &= (A_{i'} \cap B_{j'}) \cap (A_{i''} \cap B_{j''}) \\ &= (A_{i'} \cap B_{j'} \cap A_{i''}) \cap (A_{i'} \cap B_{j'} \cap B_{j''}) \end{aligned}$$

   Y ahora notamos que nos interesan los casos donde $C_i \neq C_j$, es decir el caso en que al menos $A_{i'} \neq A_{i''}$ o $B_{j'} \neq B_{j''}$ (si no, serian iguales).
   Asumimos sin perdida de generalidad que $A_{i'} \neq A_{i''}$, entonces

$$\begin{aligned} (A_{i'} \cap B_{j'} \cap A_{i''}) \cap (A_{i'} \cap B_{j'} \cap B_{i''}) &= \emptyset \cap (A_{i'} \cap B_{j'} \cap B_{i''}) \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

2. $X = \cup_{i=1}^{k} C_i$
   Partamos mostrando la inclusión hacia la izquierda:

   - $X \supseteq \cup_{i=1}^{k} C_i$
     Sea $x \in \cup_{i=1}^{k} C_i$, entonces existe al menos un C_i tal que $x \in C_i$. Sea $C_i = A_{i'} \cap B_{i''}$, entonces $x \in A_{i'}$ y $x \in B_{i''}$. Ahora como $A_{i'}$ y $B_{i''}$ son partes de particiones de X, tenemos que $A_{i'} \subseteq X$ y $B_{i''} \subseteq X$, por lo tanto $A_{i'} \cap B_{i''} \subseteq X$ y finalmente $x \in X$.
   - $X \subseteq \cup_{i=1}^{k} C_i$
     Tomamos $x \in X$ y veamos que como $\{A_1, \ldots, A_m\}$ y $\{B_1, \ldots, B_n\}$ son particiones entonces existe un $A_i \in \{A_1, \ldots, A_m\}$ tal que $x \in A_i$ y de igual modo existe un $B_j \in \{B_1, \ldots, B_n\}$ tal que $x \in B_j$. De esta manera $x \in A_i \cap B_j \neq \emptyset$. Finalmente como $A_i \cap B_j \neq \emptyset$, entonces $A_i \cap B_j \in \cup_{i=1}^{k} C_i$ y se concluye que $x \in \cup_{i=1}^{k} C_i$.

Pregunta 3

Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito. Decimos que un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una *anti-cadena* si para todo $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \neq B$ se cumple que $A \nsubseteq B$ y $B \nsubseteq A$.

1. De una cota superior de la cantidad de anti-cadenas puede uno formar para $S = \{1, 2, 3, ..., n\}$. Explique su respuesta.
2. Un conjunto $\mathcal{C} = \{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ se dice que es un *sistema separador* de S si para todo $i \neq j$ en S, existen $A \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{C}$ tal que $i \in A$, $i \notin B$, $j \notin A$ y $j \in B$ (en otras palabras, $i \in A \setminus B$ y $j \in B \setminus A$). El conjunto dual $\mathcal{C}^* = \{B_1, \ldots, B_n\}$ de $\mathcal{C}$ se define como $B_i = \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid i \in A_k\}$ para todo $i \leq n$. Demuestre que un conjunto $\mathcal{C}$ es un sistema separador si, y solo si, $|\mathcal{C}^*| = n$ y $\mathcal{C}^*$ es una anti-cadena.

Solución

Nos piden demostrar que $\mathcal{C}$ es un sistema separador si, y solo si, $|\mathcal{C}^*| = n$ y $\mathcal{C}^*$ es una anti-cadena. Partimos suponiendo que $\mathcal{C}$ es un sistema separador y demostramos:

- $|\mathcal{C}^*| = n$.
  Por construcción tenemos que $\mathcal{C}^* = \{B_1, \ldots B_n\}$, entonces para demostrar que $|\mathcal{C}^*| = n$ basta demostrar que los B_i para $i \in [1, n]$ son todos distintos entre si. Por contradicción supongamos que existen $i \neq j$

tal que $B_i = B_j$, entonces tenemos que $B_i = \{k \mid i \in A_k\} = \{k \mid j \in A_k\} = B_j$. Esto quiere decir que para todo A_k tal que $i \in A_k$, también $j \in A_k$. Esto es una contradicción con la premisa que C es separador.

- $\mathcal{C}^*$ es una anti-cadena
  Tenemos que demostrar que para cada $B_i, B_j \in \mathcal{C}^*$ con $i \neq j$ se cumple que $B_i \nsubseteq B_j$ y $B_j \nsubseteq B_i$. Por contradicción y sin perdida de generalidad supongamos que $B_i \subseteq B_j$. Esto implica que para todo i se tiene que los A_k tal que $i \in A_k$ contienen también a j. Entonces al tomar i, j no existen $A_m, A_n \in \mathcal{C}$ tal que $i \in A_m \setminus A_n$ y $j \in A_n \setminus A_m$ lo cual contradice que $\mathcal{C}$ es sistema separador.

Ahora asumimos que $|\mathcal{C}^*| = n$ y $\mathcal{C}^*$ es una anti-cadena y demostramos que $\mathcal{C}$ es un sistema separador. Para esto, debemos demostrar que para todo par de números $i, j \in S$ con $i \neq j$ existen A_m y A_n tal que $i \in A_m \setminus A_n$ y $j \in A_n \setminus A_m$. Como $|\mathcal{C}^*| = n$ y $\mathcal{C}^*$ es una anti-cadena, entonces los conjuntos B_i y B_j correspondientes a los números i, j no son subconjunto el uno del otro. Esto quiere decir en particular que existe un $k' \in B_i \setminus B_j$ y existe un $k'' \in B_j \setminus B_i$. Esto quiere decir que $i \in A_{k'}$ pero $j \notin A_{k'}$ y además $j \in A_{k''}$ pero $i \notin A_{k''}$. Dado que esto se cumple para cualquier $i, j \in S$, se concluye que $\mathcal{C}$ es sistema separador.