Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 7

31 de mayo de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Relaciones de equivalencia

Pregunta 1

Para un conjunto A no vacío, sea $R \subseteq A \times A$ y $T \subseteq A \times A$ dos relaciones de equivalencia.

1. Demuestre que $(R \cup T)^t$ es una relación de equivalencia, donde $(\cdot)^t$ es la clausura transitiva $R \cup T$.
2. Demuestre que $(R \cup T)^t$ es la menor relación de equivalencia que contiene a R y T, esto es, para toda relación de equivalencia S tal que $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$ se tiene que $(R \cup T)^t \subseteq S$.

Solución:

1. Para demostrar que $(R \cup T)^t$ es relación de equivalencia debemos demostrar que es refleja, simétrica y transitiva. Recordemos que, por definición, $(R \cup T)^t = \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$
   - **Refleja**: Como R y T son relaciones de equivalencia, entonces R y T son reflejas, esto significa que $(a, a) \in R$ y y $(a, a) \in T$ para todo a, de modo que $(a, a) \in (R \cup T)$ y como $(R \cup T) \subseteq (R \cup T)^t$ se concluye que $(a, a) \in (R \cup T)^t$
   - **Simétrica**: Tomamos $(a, b) \in (R \cup T)^t$ y queremos demostrar que $(b, a) \in (R \cup T)^t$. Como $(a, b) \in (R \cup T)^t = \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$, entonces en particular existe un k tal que $(a, b) \in (R \cup T)^k$, entonces, por definición de $(R \cup T)^k$ tenemos que existen $a_1, \dots a_{k-1}$ tal que

     $$(a, a_1) \in R \cup T,\ (a_1, a_2) \in R \cup T \dots\ (a_{k-1}, b) \in R \cup T$$

     Cada par puede estar en R o en T, es decir, $(a, a_1) \in A_1$, $(a_1, a_2) \in A_2$, ... , $(a_{k-1}, b) \in A_k$ con $A_i \in \{R, T\}$ para $i = 1, \dots, k$. Ahora, como $A_i \in \{R, T\}$, entonces A_i es simétrico (pues R y T son relaciones de equivalencia), se tiene que $(a_1, a) \in A_1$, $(a_2, a_1) \in A_2$, ... , $(a_{k-1}, b) \in A_k$. De esto se desprende que $(a_1, a) \in R \cup T$, $(a_2, a_1) \in R \cup T$, ... , $(a_{k-1}, b) \in R \cup T$. De aquí se desprende que $(a, b) \in (R \cup T)^k$ y como $(R \cup T)^k \subseteq (R \cup T)^t$, entonces $(b, a) \in (R \cup T)^t$
   - **Transitiva**: La demostración de transitividad es la vista en clases para la clausura transitiva.
2. Tomamos una relación de equivalencia S tal que $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$ y tomemos $(a, b) \in (R \cup T)^t$. Como $(a, b) \in (R \cup T)^t = \cup_{i=1}^{\infty}(R \cup T)^i$, entonces debe existir $k \in \mathbb{N}$ tal que $(a, b) \in (R \cup T)^k$. Por el mismo argumento del inciso anterior tenemos que existen $a_1, \dots a_{k-1}$ tal que

   $$(a, a_1) \in R \cup T,\ (a_1, a_2) \in R \cup T \dots\ (a_{k-1}, b) \in R \cup T$$

   Por otra parte, como $R \subseteq S$ y $T \subseteq S$, entonces $(R \cup T) \subseteq S$, de modo que $(a, a_1) \in S$, $(a_1, a_2) \in S \dots$, $(a_{k-1}, b) \in S$. Como S es una relación de equivalencia, entonces S es transitiva, de modo que $(a, b) \in S$ lo que concluye la demostración.

Pregunta 2

Sea R una relación refleja y simétrica, definida sobre un conjunto E. Considere la relación S_R definida sobre E como

$(x, y) \in S_R$ si y solo si existe un $n \in \mathbb{N}$ y una secuencia $\{x_i\}_{i=0}^{n}$ de elementos en E, con $x = x_0$, $y = x_n$, y $(x_i, x_{i+1}) \in R$ para $0 \leq i \leq n-1$.

Demuestre que S_R es una relación de equivalencia.

Solución:

Para esto debemos probar tres cosas: reflexividad, simetría y transitividad.

- **Refleja**: Dado que la relación R es refleja, basta con tomar $n = 1$ y encontramos una secuencia que va desde x a x para todo $x \in E$. Luego, $(x, x) \in S_R$.
- **Simétrica**: Sabemos que si $(x_0, x_n) \in S_R$ entonces hay una secuencia tal que $(x_0, x_1) \in R \wedge (x_1, x_2) \in R \wedge ... \wedge (x_{n-1}, x_n) \in R$. Ya que R es simétrica entonces podemos 'dar vuelta' cada uno de estos pares y de esta manera formar la nueva secuencia $(x_n, x_{n-1}) \in R \wedge (x_{n-1}, x_{n-2}) \in R \wedge ... \wedge (x_1, x_0) \in R$, por lo que hemos encontrado una secuencia desde x_n a x_0, lo que implica $(x_n, x_0) \in S_R$.
- **Transitiva**: Tomemos dos elementos $(x, y), (y, z) \in S_R$. Dado que ambos elementos pertenecen a la relación, entonces existen dos secuencias finitas, tal que la primera va desde x a y, y la segunda desde y a z. Basta con unir ambas secuencias y tendríamos una secuencia desde x a z. De esto se concluye que $(x, z) \in S_R$.

Funciones

Pregunta 3

Sean $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ y $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ dos funciones definidas sobre los números naturales.

1. Para $c \in$ se define la función constante h_c tal que $h_c(n) = c$ para todo $n \in$. Decimos que f es *ortogonal* a g si $f \circ g = h_0$. Demuestre que f es una función sobreyectiva si, y sólo si, f es ortogonal solo a la función h_0.
2. Suponga que para todo $a, b \in \mathbb{N}$, se cumple que $f(a + b) = f(a) + f(b)$. Demuestre f es una función inyectiva si, y sólo si, $f(1) \neq 0$.

Solución:

1. Veamos cada una de las direcciones:
   ($\rightarrow$) Asumimos que f es sobreyectiva y queremos demostrar que solo es ortogonal a h_0. Para esto veamos dos cosas:

   a) f es ortogonal a h_0.
   Esto es directo de la definicion de ortogonalidad, en particular $f \circ h_0 = h_0$ para toda función f.

   b) $f \circ g = h_0 \implies g = h_0$.
   Por contradicción, supongamos que $g \neq h_0$ y $f \circ g = h_0$. Como $g \neq h_0$, entonces existe al menos un $a \in \mathbb{N}$ tal que $g(a) \neq 0$. Pero como $f \circ g = h_0$, entonces para todo $x \in \mathbb{N}$, se tiene que $(f \circ g)(x) = h_0(x) = 0$. De esto se concluye que no puede ser que exista x tal que $f(x) = a$ (si esto sucediera, entonces $(f \circ g)(x) = g(f(x)) = g(a) \neq 0$.) lo que viola la sobreyectividad de f.

   ($\leftarrow$) Tomamos ahora una función f tal que solo es ortogonal a h_0 y queremos demostrar que es sobreyectiva. Suponemos por contradicción que f no es sobreyectiva, entonces existe un $b \in \mathbb{N}$ tal que para todo $x \in \mathbb{N}$, $f(x) \neq b$. Ahora tomemos una función $g' : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida como

   $$g'(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq b \\ c & \text{si } x = b \end{cases}$$

   Es fácil ver entonces que, como $f(x) \neq b$, entonces $(f \circ g)(x) = g(f(x)) = 0$ para todo x, pero $g' \neq h_0$ lo que contradice que f es solo ortogonal a h_0, de modo que f debe ser sobreyectiva.

2. Veamos cada una de las direcciones:
   ($\rightarrow$) Suponemos que f es inyectiva y por contradicción suponemos que $f(1) = 0$. Entonces, como $f(a + b) = f(a) + f(b)$ tomamos $a = 1$ y $b = 0$ y tenemos $f(1 + 0) = f(1) + f(0) = f(0)$, entonces $f(1) = f(0)$, lo que contradice que f es inyectiva.

   ($\leftarrow$) Ahora suponemos que $f(1) \neq 0$. Tomamos dos números naturales n y m tales que $n \neq m$. Como $f(a + b) = f(a) + f(b)$, entonces $f(n) = f(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{\text{n veces}}) = \underbrace{f(1) + \ldots f(1)}_{\text{n veces}} = n \cdot f(1)$.

   De manera analoga, tenemos que $f(m) = m \cdot f(1)$. Como $f(1) \neq 0$, entonces

   $$\frac{f(n)}{f(1)} = n \;\text{ y }\; \frac{f(m)}{f(1)} = m$$

   y como $n \neq m$, entonces $\frac{f(n)}{f(1)} \neq \frac{f(m)}{f(1)}$ y en particular, $f(n) \neq f(m)$ de lo que se concluye que f es inyectiva.

Pregunta 4

Sea E un conjunto y $f : E \to P(E)$ una función. Definimos el conjunto $A \subseteq E$ como

$$A \ = \ \{a \in E \mid a \notin f(a)\}.$$

Demuestre que A no tiene preimagen bajo f.

Solución:

Supongamos por contradicción que existe un elemento $b \in E$ tal que $f(b) = A$. Nos preguntamos si acaso b está o no en A. Para esto tenemos dos escenarios posibles:

- Caso 1: $b \in A$

  Como $b \in A$, y $A \in f(b)$ entonces $b \in f(b)$. Ya que b no cumple con la definición de los elementos de A, entonces $b \notin A$. Esto es una contradicción, ya que supusimos que $b \in A$.

- Caso 2: $b \notin A$

  Como $b \notin A$ y $A = f(b)$, entonces podemos afirmar que $b \notin f(b)$. Ya que b cumple con la definición de los elementos del conjunto A, entonces $b \in A$. Esto también es una contradicción.

Como en todos los casos posibles llegamos a una contradicción, entonces el supuesto que hicimos al comienzo de la demostración no puede ser verdad. Concluimos que A no puede tener preimagen bajo f.