Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas 1'2020

GUIA 2
Lógica de predicados

1. Demuestre la siguiente equivalencia lógica:

$$(\exists x.\, \alpha(x)) \wedge (\exists x.\, \beta(x)) \;\equiv\; \exists y. \exists z.\, (\alpha(y) \wedge \beta(z))$$

   donde y, z no son variables libres en $\alpha(x)$ o $\beta(x)$. En otras palabras, y, z son variables nuevas no mencionadas en $\alpha(x)$ o en $\beta(x)$.

2. Indique si las siguientes afirmaciones son ciertas. Justifique su respuesta.

   (a) $\{\forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow R(y,x),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\} \;\models\; \forall x\, R(x,x)$

   (b) $\{\forall x \exists y\, R(x,y),\ \forall x \forall y\, R(x,y) \rightarrow R(y,x),\ \forall x \forall y \forall z\, (R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z)\} \;\models\; \forall x\, R(x,x)$

3. Considere el símbolo de predicado $\leq$ y las interpretaciones $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}$ tal que:

   - $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(dom) = \mathbb{R}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(\leq)$ es el orden sobre $\mathbb{R}$.
   - $\mathcal{I}_{\mathbb{R}}(dom) = \mathbb{N}$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}}(\leq)$ es el orden sobre $\mathbb{N}$.

   a) Escriba dos formulas α y β que cumplan las siguientes propiedades:
   - $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \models \alpha$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \not\models \alpha$.
   - $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \not\models \beta$ y $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \models \beta$.

   b) Decimos que una formula α en lógica de predicados es *existencial* si es de la forma:

$$\exists x_1. \cdots \exists x_n. \beta(x_1, \ldots, x_n)$$

   donde $\beta(x_1, \ldots, x_n)$ es una formula sin cuantificadores (solo usa el símbolo de predicado $\leq$ y conectivos lógicos). Por ejemplo, la siguientes es una formula existencial:

$$\exists x. \exists y. \exists z. (x \leq y) \rightarrow (x \leq z \wedge \neg(z \leq y))$$

   Demuestre que para todo formula existencial α se cumple que $\mathcal{I}_{\mathbb{R}} \models \alpha$ si, y solo si, $\mathcal{I}_{\mathbb{N}} \models \alpha$.

4. Sea $\leq$ y $=$ símbolos de predicado binario y P un símbolo de predicado unario. Considere la interpretación $\mathcal{I}_{\text{primos}}$ definida como:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{\text{primos}}(\text{dom}) &:= \quad \mathbb{N} \\
\mathcal{I}_{\text{primos}}(=) &:= \quad n = m \quad \text{si, y solo si,} \quad n \text{ es igual a } m. \\
\mathcal{I}_{\text{primos}}(\leq) &:= \quad n \leq m \quad \text{si, y solo si,} \quad n \text{ es menor o igual que } m. \\
\mathcal{I}_{\text{primos}}(P) &:= \quad P(n) \quad \text{si, y solo si,} \quad \text{n es un número primo.}
\end{aligned}$$

   Recuerde que un número se dice primo si es mayor a 1 y no es divisible por ningún número exceptuando el número 1 y él mismo.

a) Para la siguiente fórmula de predicados:

$$\alpha \ := \ \forall x.\, P(x) \to \big(\exists y.\, x \leq y \land \neg(x = y) \land P(y)\big)$$

diga si es verdadera o falsa en la interpretación $\mathcal{I}_{\text{primos}}$ explicando su significado.

b) Escriba la siguiente fórmula en lógica de predicados sobre $\mathcal{I}_{\text{primos}}$.

> "Para todo par de números primos distintos de 2 y 3,
> existe un número entre ellos que no es primo."

5. Sea $a, b, c, \ldots, z$ las letras del alfabeto y considere el *conjunto de todas las palabras* de una o mas letras. Por ejemplo, 'perro', 'matematicas', 'tematica', 'a', 'mat' y 'tam' son palabras en el dominio de todas las palabras (note que las palabras no tienen porque tener un significado). Dado dos palabras u y v, considere el predicado $x \preceq y$ con los siguientes dominios:

   - El dominio de las "*palabras y prefijos*" donde $u \preceq v$ es verdadero si u es un prefijo de v (asuma que toda palabra es prefijo de si misma). Por ejemplo, 'mat' $\preceq$ 'matematicas' es verdadero y 'tematica' $\preceq$ 'matematicas' es falso.
   - El dominio de las "*palabras y subpalabras*" donde $u \preceq v$ es verdadero si u es una subpalabra de v (asuma que toda palabra es subpalabra de si misma). Por ejemplo, 'tematica' $\preceq$ 'matematicas' es verdadero y 'tam' $\preceq$ 'matematicas' es falso.

   Dado estos dominios, responda las siguientes preguntas sobre el predicado $x \preceq y$.

   a) Para la formula en lógica de predicados:

   $$\alpha := \forall x. \forall y.\, \neg(y \preceq x) \lor \big(\forall z.\, z \preceq x \lor \neg(z \preceq y)\big)$$

   explique el significado de α y evalúe si α es verdadera o falsa sobre cada uno de los dominios.

   b) Encuentre una formula β tal que β sea verdadera sobre el dominio de las "palabras y prefijos" pero sea falsa sobre el dominio de las "palabras y subpalabras". Explique su respuesta.

6. Una *palabra infinita* w sobre el alfabeto $\{a, b, c\}$ es una secuencia de la forma: $w = x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots$ donde $x_i \in \{a, b, c\}$ para todo $i \geq 0$. Por ejemplo, la siguiente es una palabra infinita:

   $$u = aabaccabaacccaabaacaacbaaacaacaa\ldots$$

   Considere los símbolos de predicados $\leq$, $A(\cdot)$, $B(\cdot)$ y $C(\cdot)$ con A, B, y C símbolos unarios. Toda palabra infinita $w = x_0 x_1 x_2 x_3 \ldots$ es posible representarla como una interpretación $\mathcal{I}_w$ con dominio $\mathbb{N}$ tal que:

   $$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}_w(dom) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_w(\leq) & := & \text{orden sobre los naturales.} \\ \mathcal{I}_w(A) & := & A(i) = 1 \ \text{ si, y solo si, } \ x_i = a. \\ \mathcal{I}_w(B) & := & B(i) = 1 \ \text{ si, y solo si, } \ x_i = b. \\ \mathcal{I}_w(C) & := & C(i) = 1 \ \text{ si, y solo si, } \ x_i = c. \end{array}$$

   En otras palabras, la interpretación $\mathcal{I}(w)$ usa los naturales y su orden para codificar las posiciones de la palabra infinita w, y los predicados A, B y C para codificar las posiciones w que tiene la letra a, b y c, respectivamente. Por ejemplo, la interpretación $\mathcal{I}_u$ para la palabra infinita u del ejemplo cumple que $A(0), A(1), B(2), A(3), C(4), C(5), \ldots$ son verdaderos y todos los otros casos son falsos.

   Sea w una palabra infinita cualquiera y $\mathcal{I}_w$ la interpretación que representa w. Para cada propiedad X de más abajo usted debe escribir una formula α_X en lógica de predicados tal que la palabra infinita w cumple la propiedad X si, y solo si, $\mathcal{I}_w \models \alpha_X$.

a) La palabra infinita contiene una cantidad infinita de letras a.

b) Las tres primeras letras de la palabra infinita son a, b y c (en ese orden).

c) La palabra infinita contiene la subpalabra finita de la forma $abb \dots bc$, esto es, una letra a seguido de una secuencia finita de una o más letras b y terminada en una c.

d) En cada posición par, la palabra infinita tiene una letra a y, en cada posición impar, la palabra infinita tiene una letra b.

7. Sea $=$ un símbolo de predicado binario y sea Eq el conjunto de todas las interpretaciones $\mathcal{I}$ tal que $x = y$ es verdadero en la interpretación $\mathcal{I}$ si, y solo si, x e y son el mismo elemento. En otras palabras, Eq tiene todas las interpretaciones que "interpretan" el predicado $=$ como la igualdad de elementos.

   a) Escriba una formula α en lógica de predicados usando el símbolo $=$ tal que para toda interpretación $\mathcal{I} \in \text{Eq}$ se cumple que $\mathcal{I} \models \alpha$ si, y solo si, el dominio $\mathcal{I}(dom)$ tiene dos o más elementos.

   b) Para $k \geq 1$, escriba una formula α_k en lógica de predicados usando el símbolo $=$ tal que para todo $\mathcal{I} \in \text{Eq}$ se cumple que $\mathcal{I} \models \alpha_k$ si, y solo si, el dominio $\mathcal{I}(dom)$ tiene k o más elementos.

   c) Muestre un conjunto de formulas Σ (el conjunto puede ser infinito) tal que para todo $\mathcal{I} \in \text{Eq}$ se cumple que $\mathcal{I} \models \Sigma$ si, y solo si, $\mathcal{I}(dom)$ es infinito.

8. Demuestre que la siguiente oración es satisfacible, esto es, existe una interpretación $\mathcal{I}$ que la satisface:

$$\forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \, (x_1 = y_1 \land x_2 = y_2 \land P(x_1, x_2)) \rightarrow P(y_1, y_2)$$

   tal que $\mathcal{I}$ interpreta $=$ como la igualdad de elementos.

9. Sea R un símbolo de predicado binario y $=$ un predicado binario que se interpreta siempre como igualdad. Construya una oración α usando el predicado R tal que α es satisfacible y para toda interpretación $\mathcal{I}$ se tiene que si $\mathcal{I} \models \alpha$, entonces el dominio de $\mathcal{I}$ es infinito.

10. Sea R un símbolo de predicado binario y $=$ un predicado binario que se interpreta siempre como igualdad. Decimos que una oración α es *existencial* si $\alpha = \exists x_1 \dots \exists x_k \, \beta$, donde β es una fórmula sin cuantificadores.

    (a) Sea α una oración existencial. Demuestre que si α es satisfacible, entonces existe una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \alpha$ y $\mathcal{I}$ tiene un dominio finito.

    (b) Utilizando (a) y el ejercicio 9, demuestre que existe una oración β tal que para toda oración existencial α, se tiene que $\beta \not\equiv \alpha$.

11. Sea R un símbolo de predicado binario y $=$ un predicado binario que se interpreta siempre como igualdad. Construya una oración α tal que:

    - para todo $n \in \mathbb{N}$, existe una interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A tal que A es finito, $|A| \geq n$ y $\mathcal{I} \models \alpha$; y
    - para toda interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A, si $\mathcal{I} \models \alpha$ y A es finito, entonces A tiene un número par de elementos.

12. Sea $<$ un símbolo de predicado binario y $=$ un predicado binario que se interpreta siempre como igualdad. Sea Σ un conjunto formado por las siguientes oraciones:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \forall x \, \neg(x < x) \\ \alpha_2 &= \forall x \forall y \forall z \, ((x < y \land y < z) \rightarrow x < z) \\ \alpha_3 &= \forall x \forall y \, (x < y \lor y < x \lor x = y). \end{aligned}$$

    Conteste las siguientes preguntas.

(a) Construya una interpretación $\mathcal{I}_1$ tal que $\mathcal{I}_1 \models \Sigma$.

(b) Construya una interpretación $\mathcal{I}_2$ tal que $\mathcal{I}_2 \models \Sigma \cup \{\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6\}$, donde:

$$\begin{aligned}
\alpha_4 &= \forall x \exists y\, (x < y) \\
\alpha_5 &= \forall x \exists y\, (y < x) \\
\alpha_6 &= \forall x \forall y\, (x < y \to \exists z\, (x < z \wedge z < y)).
\end{aligned}$$

(c) Construya una interpretación $\mathcal{I}_3$ tal que $\mathcal{I}_3 \models \Sigma \cup \{\alpha_6, \alpha_7, \alpha_8\}$, donde α_6 es la oración definida en (b) y:

$$\begin{aligned}
\alpha_7 &= \exists x \forall y\, (y < x \vee y = x) \\
\alpha_8 &= \exists x \forall y\, (x < y \vee y = x)
\end{aligned}$$

(d) Construya una interpretación $\mathcal{I}_4$ tal que $\mathcal{I}_4 \models \Sigma \cup \{\alpha_7, \alpha_8, \alpha_9\}$, donde α_7 y α_8 son las oraciones definida en (c) y:

$$\alpha_9 \quad = \quad \forall x\, (\exists y\, (x < y) \to \exists z\, (x < z \wedge \neg \exists w\, (x < w \wedge w < z))).$$

13. Una fórmula α en lógica de predicados está en Forma Normal Prenex (FNP) si:

$$\alpha \quad = \quad Q_1 x_1 \cdots Q_k x_k\, \beta,$$

donde $Q_i = \exists$ o $Q_i = \forall$, para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, y β es una fórmula sin cuantificadores. Por ejemplo, la fórmula $\forall x \exists y\, (R(x, y) \wedge \neg T(y, x, z))$ está en FNP, mientras que la fórmula $\forall x (P(x) \to \exists y\, R(x, y))$ no lo está.

Sea α la oración:

$$\neg \Bigg[\Bigg(\Bigg(\exists x \exists y\, (R(x, y) \wedge \neg S(y, x)) \Bigg) \wedge \Bigg(\forall x\, ((\exists y\, R(x, y)) \to (\exists y\, S(x, y))) \Bigg) \Bigg) \leftrightarrow \Bigg(\forall x \exists z\, (R(x, z) \vee \forall y\, (S(x, y) \wedge R(z, y))) \Bigg) \Bigg].$$

Construya una oración β en FNP que sea equivalente a α.

14. Sea α una oración arbitraria. Demuestre que existe una oración β tal que:

- las variables mencionadas en β son x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5; y
- para cada interpretación $\mathcal{I}$ cuyo dominio tiene 4 elementos, se tiene que $\mathcal{I} \models \alpha$ si, y sólo si, $\mathcal{I} \models \beta$.

Para esta pregunta usted puede utilizar el símbolo de igualdad $=$ que se interpreta siempre como igualdad de elementos.

15. Dado una interpretación $\mathcal{I}$ con dominio A y un conjunto $S \subseteq A$, decimos que S es definible en $\mathcal{I}$ si existe una fórmula $\alpha(x)$ tal que:

$$S \quad = \quad \{a \in A \mid \mathcal{I} \models \alpha(a)\}$$

Suponga que $+, \cdot$ son símbolos de predicados ternarios (esto es, $x + y = z$, $x \cdot y = z$), y suponga que $\mathcal{I}$ es la interpretación sobre los reales donde $\mathcal{I}(dom) = \mathbb{R}$ y $\mathcal{I}(+)$, $\mathcal{I}(\cdot)$ son la interpretación de la suma y multiplicación sobre los reales.

(a) Demuestre que $\{0\}$ y $\{1\}$ son definibles en $\mathcal{I}$.

(b) Demuestre que $\{a \in \mathbb{R} \mid a > 0\}$ es definible en $\mathcal{I}$.

(c) Sea n un número natural arbitrario. Demuestre que $\{n\}$ es definible en $\mathcal{I}$.

(d) Sea n un número entero arbitrario. Demuestre que $\{n\}$ es definible en $\mathcal{I}$.

(e) Sea r un número racional arbitrario. Demuestre que $\{r\}$ es definible en $\mathcal{I}$.

16. Considere la definición de definibilidad dada en la pregunta anterior. Suponga que $+, \cdot$ son símbolos de predicados ternarios, y suponga que $\mathcal{I}$ es la interpretación sobre los naturales donde $\mathcal{I}(dom) = \mathbb{N}$ y $\mathcal{I}(+)$, $\mathcal{I}(\cdot)$ son la interpretación de la suma y multiplicación sobre los naturales. En esta pregunta, usted debe demostrar que el conjunto:

$$S \quad = \quad \{a \in \mathbb{N} \mid \text{existe un número primo } p \text{ y un número } b \in \mathbb{N} \text{ tal que } p^b = a\}$$

es definible en $\mathcal{I}$.