Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 10

26 de junio de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

1. Sea S_1 el conjunto definido recursivamente de la siguiente manera:
   - $(0,0) \in S_1$
   - Si $(a,b) \in S_1$, entonces $(a+2, b+3) \in S_1$ y $(a+3, b+2) \in S_1$

   Demuestre que si $(a,b) \in S_1$ entonces $a+b$ es divisible por 5.

2. Sea Σ un alfabeto finito. Definamos Σ^* el conjunto de palabras finitas sobre Σ de manera recursiva como:
   - $\varepsilon \in \Sigma^*$
   - $a \in \Sigma^*$ para todo $a \in \Sigma$
   - si $w_1 \in \Sigma^*$ y $w_2 \in \Sigma^*$, entonces $w_1 \cdot w_2 \in \Sigma^*$

   Sea $w = a_1 \dots a_n$ una palabra sobre Σ, definimos

   $$\texttt{reverse}(w) = a_n \dots a_1$$

   Demuestre que para dos palabras x, $y \in \Sigma^*$, se cumple que

   $$\texttt{reverse}(x \cdot y) = \texttt{reverse}(y) \cdot \texttt{reverse}(x)$$

Pregunta 2

Demuestre que todo número $n \in \mathbb{N}$ se puede representar de la forma

$$n \;=\; \epsilon_k \cdot 3^k + \cdots + \epsilon_1 \cdot 3^1 + \epsilon_0,$$

donde $\epsilon_0, ..., \epsilon_k \in \{1, 0, -1\}$.

Pregunta 3

Considere la siguiente sucesión:

$$\begin{aligned}
G_0 &= 1 \\
G_1 &= 3 \\
G_2 &= 9 \\
G_n &= G_{n-1} \;+\; 3 \cdot G_{n-2} \;+\; 3 \cdot G_{n-3}, \quad n \geq 3
\end{aligned}$$

Demuestre que para todo $n \geq 0$ se cumple que $G_n \leq 3^n$.