Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 3

3 de abril de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

Sean P y S fórmulas en lógica de predicados. Considere que x no es variable libre en S y demuestre las siguientes equivalencias lógicas:

- $(\exists x P(x)) \wedge S \equiv \exists x(P(x) \wedge S)$
- $(\forall x P(x)) \vee S \equiv \forall x(P(x) \vee S)$
- $(\exists x P(x)) \rightarrow S \equiv \forall x(P(x) \rightarrow S)$

Solución

- $(\exists x P(x)) \wedge S \equiv \exists x(P(x) \wedge S)$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models (\exists x P(x)) \wedge S \\
&\leftrightarrow \exists a \in \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } P(a) \text{ y } \mathcal{I} \models S \\
&\leftrightarrow \exists a \in \mathcal{I}(\text{dom}) \text{ tal que } \mathcal{I} \models P(a) \wedge S \\
&\leftrightarrow \mathcal{I} \models \exists x(P(x) \wedge S)
\end{aligned}$$

- $(\forall x P(x)) \vee S \equiv \forall x(P(x) \vee S)$
  Primero vamos de izquierda a derecha:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models (\forall x P(x)) \vee S \\
&\leftrightarrow \forall a \in \mathcal{I}(\text{dom})\ P(a) \text{ o } \mathcal{I} \models S \\
&\text{sin pérdida de generalidad } \forall a \in \mathcal{I}(\text{dom})\ P(a) \\
&\leftrightarrow \mathcal{I} \models \forall x P(x) \\
&\rightarrow \mathcal{I} \models \forall x P(x) \vee S
\end{aligned}$$

  Ahora la otra dirección:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{I} \models \forall x(P(x) \vee S) \\
&\leftrightarrow \forall a \in \mathcal{I}(\text{dom})(P(a) \vee S) \\
&\text{sin pérdida de generalidad } \forall a \in \mathcal{I}(\text{dom})\ P(a) \\
&\leftrightarrow \mathcal{I} \models \forall x P(x) \\
&\rightarrow \mathcal{I} \models (\forall x P(x)) \vee S
\end{aligned}$$

- $(\exists x P(x)) \to S \equiv \forall x(P(x) \to S)$

$$\begin{aligned}&\mathcal{I} \models (\exists x P(x)) \to S\\ &\leftrightarrow \mathcal{I} \models \neg(\exists x P(x)) \vee S\\ &\leftrightarrow \mathcal{I} \models (\forall x \neg P(x)) \vee S\end{aligned}$$

Usamos la equivalencia del inciso anterior y tenemos

$$\begin{aligned}&\leftrightarrow \mathcal{I} \models \forall x(\neg P(x) \vee S)\\ &\leftrightarrow \mathcal{I} \models \forall x(P(x) \to S)\end{aligned}$$

Pregunta 2

a) Demuestre que la siguiente oración es satisfacible:

$$\varphi \quad = \quad \forall x_1 \forall x_2 \forall y_1 \forall y_2 \, (x_1 = y_1 \wedge x_2 = y_2 \wedge P(x_1, x_2)) \to P(y_1, y_2)$$

Para esto dé una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$

b) Demuestre que la siguiente oración es una tautología:

$$\varphi \quad = \quad (\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) \to \forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$$

Para esto muestre que para toda interpretación $\mathcal{I}$ se cumple $\mathcal{I} \models \varphi$

Solución

a) Debemos encontrar una interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi$. Proponemos la siguiente:

- $\mathcal{I}(\text{dom}) = \mathbb{N}$
- $\mathcal{I}(P(x, y)) = x \leq y$

Ahora debemos demostrar que $\mathcal{I} \models \varphi$. Veamos entonces que para todo $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$, si $x_1 = y = 1$, $x_2 = y_2$ y $x_1 \leq y_1$, entonces $x_2 \leq y_2$.
Como hemos encontrado una interpretación $\mathcal{I} \models \varphi$, entonces φ es satisfacible.

b) Para probar que φ es una tautología, la reescribiremos mediante equivalencias lógicas. Veamos que la fórmula tiene la siguiente estructura:

$$\alpha \to \beta$$

con $\alpha = (\exists x P(x) \to \forall y Q(y))$ y $\beta = \forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$. Intentaremos reescribir esta formula para que quede como $\alpha \to \alpha$ lo cual es una tautología. Para eso basta demostrar que $\alpha \equiv \beta$.

$$\begin{aligned}(\exists x P(x) \to \forall y Q(y)) &\equiv (\neg(\exists x P(x)) \vee \forall y Q(y))\\ &\equiv ((\forall x \neg P(x)) \vee (\forall y Q(y)))\end{aligned}$$

Ahora como $P(x)$ no tiene libre a la variable x y $Q(y)$ no tiene libre a y, tenemos

$$\begin{aligned}&\equiv (\forall x \forall y(\neg P(x) \vee Q(y)))\\ &\equiv (\forall x \forall y(P(x) \to Q(y))) = \beta\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado que φ es tautología

Pregunta 3

Sean $\varphi_1, \varphi_2, \varphi$ fórmulas en LP definidas de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
\varphi_1 &= \forall x \forall y \forall z.(R(x,y) \wedge R(y,z)) \rightarrow R(x,z) \\
\varphi_2 &= \forall x \forall y.(R(x,y) \wedge R(y,x)) \rightarrow x = y \\
\varphi_3 &= \forall x \exists y.R(x,y) \rightarrow \exists y \forall x.R(x,y)
\end{aligned}$$

Demuestre que ninguna de las afirmaciones es consecuencia lógica de las otras dos.

Solución

Para esta pregunta nos piden demostrar los 3 casos:

- $\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \varphi_3$

  Recordemos que $\Sigma \models \alpha$ si para cualquier interpretación $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \Sigma$ se cumple que $\mathcal{I} \models \alpha$. De lo anterior, si $\{\varphi_1, \varphi_2\} \not\models \varphi_3$, entonces existe al menos una interpretación que satisface φ_1 y φ_2 pero no satisface φ_3.

  Si construimos $\mathcal{I}_1$ tal que

  - $\mathcal{I}_1(dom) := \mathbb{N}$
  - $\mathcal{I}_1(R(x,y)) := x \leq y$

  y podemos ver que la interpretación $\mathcal{I}_1$ hace verdad φ_1, φ_2 pero no a φ_3.

- $\{\varphi_2, \varphi_3\} \not\models \varphi_1$

  Análogamente al item anterior, podemos construir $\mathcal{I}_2$ tal que:

  - $\mathcal{I}_2(dom) := \{1, 2, 3\}$
  - $\mathcal{I}_2(R(x,y)) := x - y = 1$

  y podemos ver que la interpretación $\mathcal{I}_2$ hace verdad φ_2, φ_3 pero no a φ_1.

- $\{\varphi_1, \varphi_3\} \not\models \varphi_2$ Por último, construimos $\mathcal{I}_3$ tal que

  - $\mathcal{I}_3(dom) := \{1, 2, 3\}$
  - $\mathcal{I}_3(R(x,y)) := x + y < 10$

  y podemos ver que la interpretación $\mathcal{I}_3$ hace verdad φ_1, φ_3 pero no a φ_2.

Pregunta 4

Todo gato es querido por al menos un perro.

Ningún perro quiere a un reptil

Por lo tanto, ningún gato es reptil.

Modele la afirmación anterior usando lógica de predicados y demuestre que es verdadera o que es falsa.

Solución

Primero modelamos las 3 afirmaciones en lógica de predicados. Para esto construimos los siguientes predicados:

- $G(x) := x$ es gato
- $P(x) := x$ es perro
- $R(x) := x$ es reptil
- $Q(x, y) := x$ quiere a y

Y usando los predicados anteriores, modelamos el problema:

- $\varphi_1 := \forall x \exists y (G(x) \rightarrow (P(y) \wedge Q(y, x)))$
- $\varphi_2 := \forall x \forall y ((P(x) \wedge R(y)) \rightarrow \neg Q(x, y))$
- $\varphi := \forall x (G(x) \rightarrow \neg R(x))$

Ahora, para demostrar que la conclusión es válida, debemos demostrar que $\{\varphi_1, \varphi_2\} \models \varphi$. Para esto, debemos tomar una valuación cualquiera $\mathcal{I}$ que satisfaga φ_1 y φ_2, y mostrar que también satisface a φ.

Sea $\mathcal{I}$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi_1 \wedge \varphi_2$. **Supongamos por contradicción que** $\mathcal{I} \not\models \varphi$ ($\mathcal{I} \models \neg\varphi$).

$$\begin{aligned} \neg\varphi &\equiv \forall x (G(x) \rightarrow \neg R(x)) \\ &\equiv \exists x \neg(\neg G(x) \vee \neg R(x)) \\ &\equiv \exists x (G(x) \wedge R(x)) \end{aligned} \tag{1}$$

Si hacemos instanciación existencial de la ecuación (1) tenemos que existe un $a \in \mathcal{I}(dom)$ tal que

$$\mathcal{I} \models G(a) \wedge R(a) \tag{2}$$

Por otro lado, podemos hacer instanciación universal en φ_1, y se cumple para $x = a$ (el mismo elemento a anterior):

$$\mathcal{I} \models \exists y (G(a) \rightarrow (P(y) \wedge Q(y, a)))$$

y haciendo instanciación existencial a lo anterior, obtenemos que existe un $b_a \in \mathcal{I}(dom)$ tal que

$$\mathcal{I} \models G(a) \rightarrow (P(b_a) \wedge Q(b_a, a)) \tag{3}$$

De la misma forma, podemos hacer instanciación universal en la fórmula φ_2 y como se cumple para todo $x \in \mathcal{I}(dom)$ entonces se cumple para $x = b_a$:

$$\mathcal{I} \models \forall y ((P(b_a) \wedge R(y)) \rightarrow \neg Q(b_a, y))$$

Y como lo anterior se cumple para cualquier $y \in \mathcal{I}(dom)$, entonces también se cumple para $y = a$:

$$\begin{aligned} & \mathcal{I} \models ((P(b_a) \wedge R(a)) \rightarrow \neg Q(b_a, a)) \\ \Rightarrow\ & \mathcal{I} \models \neg(P(b_a) \wedge R(a)) \vee \neg Q(b_a, a) \\ \Rightarrow\ & \mathcal{I} \models \neg(P(b_a) \wedge R(a) \wedge Q(b_a, a)) \end{aligned} \tag{4}$$

Si juntamos (2) y (3) obtenemos que

$$\mathcal{I} \models [\neg G(a) \vee (P(b_a) \wedge Q(b_a, a))] \wedge G(a) \wedge R(a)$$

Pero notemos que

$$\begin{aligned}(\neg A \vee B) \wedge A &\equiv (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge A)\\ &\equiv B \wedge A\end{aligned}$$

Luego, de lo anterior tenemos que

$$\begin{aligned}&\mathcal{I} \models (P(b_a) \wedge Q(b_a, a)) \wedge G(a) \wedge R(a)\\ \Rightarrow\ &\mathcal{I} \models P(b_a) \wedge Q(b_a, a) \wedge R(a) \qquad (5)\end{aligned}$$

Y juntando (4) y (5) tenemos que

$$\mathcal{I} \models \neg[P(b_a) \wedge Q(b_a, a) \wedge R(a)] \wedge [P(b_a) \wedge Q(b_a, a) \wedge R(a)] \equiv 0$$

Lo cual es una contradicción, ya que ninguna interpretación satisface a 0. Entonces, concluimos que $\mathcal{I}$ debe satisfacer φ.