

# Cardinalidad

Clase 14

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

# Juego de niños

Juanita y Pedrito juegan a “**quién dice el número más grande**”:

**Juanita:** 1

**Pedrito:** 2

**Juanita:** 3

**Pedrito:** 5

**Juanita:** 10

**Pedrito:** 100

**Juanita:** 200

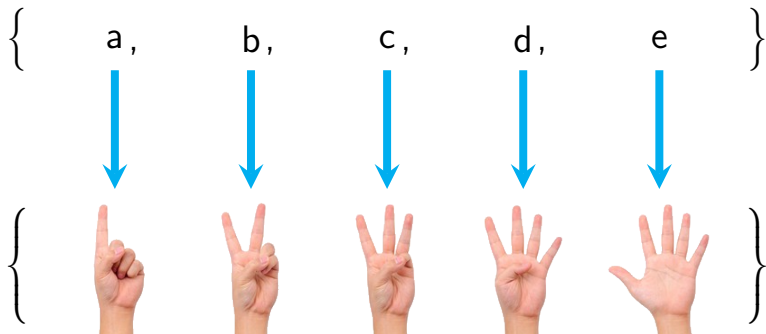
**Pedrito:**  $\infty$



¿perdió Juanita? ¿hay algo más grande que  $\infty$ ?

¿son igual de infinitos  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{R}$ ?

¿cómo medimos el tamaño de un conjunto?



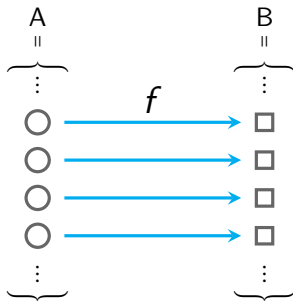
¿por qué el conjunto tiene tamaño 5?

# Cardinalidad

Sea  $A$  y  $B$  dos conjuntos.

## Definición

$A$  y  $B$  son **equinumerosos** si existe una biyección  $f : A \rightarrow B$ .



Si  $A$  es **equinumeroso** con  $B$  lo anotaremos como  $|A| = |B|$ .

¿qué propiedad cumple la relación  $|A| = |B|$ ?

# Cardinalidad

## Proposición

La relación  $|\cdot| = |\cdot|$  es una **relación de equivalencia**, esto es:

1. refleja.
2. simétrica.
3. transitiva.

Por lo tanto, podemos tomar las clases de equivalencia de  $|\cdot| = |\cdot|$ .

## Definición

Para un conjunto  $A$ , denotaremos por  $|A|$  su **clase de equivalencia** según la relación  $|\cdot| = |\cdot|$ .

# Cardinalidad (ejemplos)

## Ejemplos

¿qué conjuntos están en las siguientes clases de equivalencia para  $|\cdot| = |\cdot|$ ?

■  $|\{\heartsuit, \clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}|$

■  $|\emptyset|$

■  $|\mathbb{N}|$

# Cardinalidad de conjuntos finitos

Sea  $A$  un conjunto cualquiera.

## Definición

- Diremos que  $A$  es **finito** si existe un  $n$  tal que:

$$|A| = |\{0, 1, 2, \dots, n-1\}|$$

- Si  $|A| = |\{0, 1, 2, \dots, n-1\}|$  diremos que la **cardinalidad** de  $A$  es  $n$ .

$$|A| = n$$

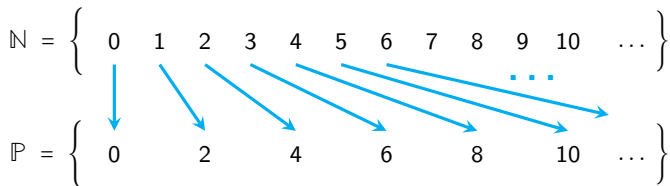
¿sirve la relación  $|\cdot| = |\cdot|$  para medir la cardinalidad de conjuntos **infinitos**?

# Cardinalidad de conjuntos infinitos

## Definición

Sea  $\mathbb{P}$  el conjunto de todos los números **pares**.

¿tiene  $\mathbb{P}$  **la misma cardinalidad** que  $\mathbb{N}$ ?



Con la biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$  tal que  $f(n) = 2 \cdot n$ , se tiene que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{P}|$ .

Demuestre que  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{P}$  es una biyección.



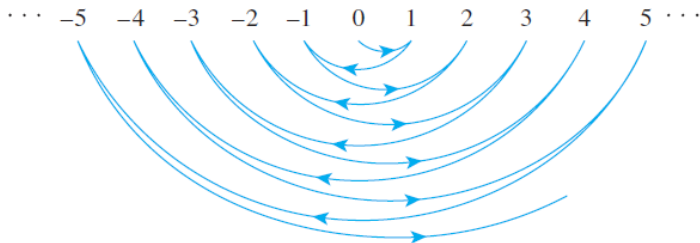
¿tiene  $\mathbb{Z}$  la misma cardinalidad que  $\mathbb{N}$ ?

¿tiene  $\mathbb{Z}$  la misma cardinalidad que  $\mathbb{N}$ ?

Teorema

Los conjuntos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  son **equinumerosos**.

¿cómo demostramos que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ?



¿tiene  $\mathbb{Z}$  la misma cardinalidad que  $\mathbb{N}$ ?

### Teorema

Los conjuntos  $\mathbb{N}$  y  $\mathbb{Z}$  son **equinumerosos**.

¿como demostramos que  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$ ?

0	1	2	3	4	5	...	2n	2n+1	...
↓	↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	↓	...
0	1	-1	2	-2	3	...	n	-n	...

Definimos la biyección  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  como:

$$f(n) = \begin{cases} -\frac{n}{2} & \text{si } n \text{ es par} \\ \frac{n+1}{2} & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto,  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}|$  !!

# Conjuntos numerables

## Definición

$A$  es **numerable** si tiene la misma cardinalidad que un subconjunto de  $\mathbb{N}$ .

$$\exists S \subseteq \mathbb{N}. |A| = |S|.$$

## Proposición

$A$  es **numerable** si, y solo si, existe una secuencia (finita o infinita) en  $A$ :

$$a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$$

1.  $a_i \neq a_j$  para todo  $i \neq j$ , y
2. para todo  $a \in A$ , existe un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $a = a_i$ .

$A$  es numerable si, y solo si,  
todos sus elementos se pueden poner en una **lista**.

¿hay más conjuntos numerables?

¿son los racionales  $\mathbb{Q}$  numerables? ¿es  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  numerable?

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  son conjuntos **numerables**.

¿cómo podemos enumerar  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ?

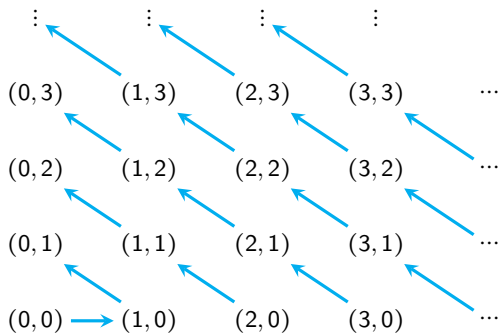
0	1	2	3	4	...	2n	2n+1	...
↓	↓	↓	↓	↓	...	↓	↓	...
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	...	(0,n)	(0,n+1)	...

¿funciona?

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  son conjuntos **numerables**.



¿cuál es la secuencia que estamos siguiendo?

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  son conjuntos **numerables**.

$(0, 0),$

$(1, 0), (0, 1),$

$(2, 0), (1, 1), (0, 2),$

$\dots$

$(n, 0), (n-1, 1), (n-2, 2), \dots, (2, n-2), (1, n-1), (0, n), \dots$



# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  son conjuntos **numerables**.

$$S_0 := (0, 0),$$

$$S_1 := (1, 0), (0, 1),$$

$$S_2 := (2, 0), (1, 1), (0, 2),$$

...

$$S_n := (n, 0), (n-1, 1), (n-2, 2), \dots, (2, n-2), (1, n-1), (0, n), \dots$$

1. ¿ $a_i \neq a_j$  para todo  $i \neq j$ ? ✓
2. ¿para todo  $(n_1, n_2) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , existe un  $i \in \mathbb{N}$  tal que  $(n_1, n_2) = a_i$ ? ✓

Por lo tanto,  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  es un conjunto numerable.

# ¿hay más conjuntos numerables?

## Teorema

$\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  son conjuntos **numerables**.

¿cómo podemos enumerar  $\mathbb{Q}$ ?

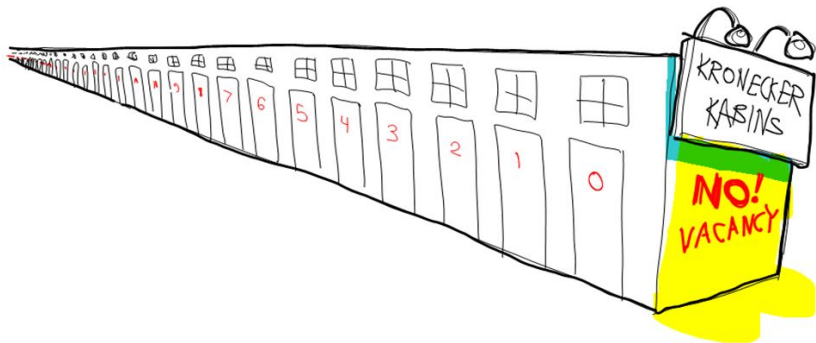
(ejercicio)

¿por qué nos falla la intuición?



David Hilbert  
(1862 - 1943)

# Paradoja del gran hotel de Hilbert



# ¿son todos los conjuntos numerables?

¿es  $\mathbb{R}$  numerable?

Teorema

$\mathbb{R}$  **NO** es numerable.

Demostración que  $\mathbb{R}$  NO es numerable

- Demostraremos que el intervalo  $(0,1)$  de  $\mathbb{R}$  NO es numerable.
- Por **contradicción**, supongamos que  $(0,1)$  es numerable.
- Entonces existe una **lista infinita** del los reales en  $(0,1)$ :

$$r_0, r_1, r_2, r_3, \dots$$

donde cada real en  $(0,1)$  aparece una vez, y solo una vez.

¿son todos los conjuntos numerables?

### Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

Reales	Representación decimal							
$r_0$	0.	$d_{00}$	$d_{01}$	$d_{02}$	$d_{03}$	$d_{04}$	$d_{05}$	$\dots$
$r_1$	0.	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15}$	$\dots$
$r_2$	0.	$d_{20}$	$d_{21}$	$d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24}$	$d_{25}$	$\dots$
$r_3$	0.	$d_{30}$	$d_{31}$	$d_{32}$	$d_{33}$	$d_{34}$	$d_{35}$	$\dots$
$r_4$	0.	$d_{40}$	$d_{41}$	$d_{42}$	$d_{43}$	$d_{44}$	$d_{45}$	$\dots$
$r_5$	0.	$d_{50}$	$d_{51}$	$d_{52}$	$d_{53}$	$d_{54}$	$d_{55}$	$\dots$
$\vdots$					$\vdots$			$\ddots$

¿son todos los conjuntos numerables?

### Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

Reales	Representación decimal						
$r_0$	0.	$d_{00}$	$d_{01}$	$d_{02}$	$d_{03}$	$d_{04}$	$d_{05} \dots$
$r_1$	0.	$d_{10}$	$d_{11}$	$d_{12}$	$d_{13}$	$d_{14}$	$d_{15} \dots$
$r_2$	0.	$d_{20}$	$d_{21}$	$d_{22}$	$d_{23}$	$d_{24}$	$d_{25} \dots$
$r_3$	0.	$d_{30}$	$d_{31}$	$d_{32}$	$d_{33}$	$d_{34}$	$d_{35} \dots$
$r_4$	0.	$d_{40}$	$d_{41}$	$d_{42}$	$d_{43}$	$d_{44}$	$d_{45} \dots$
$r_5$	0.	$d_{50}$	$d_{51}$	$d_{52}$	$d_{53}$	$d_{54}$	$d_{55} \dots$
$\vdots$					$\vdots$		$\ddots$

- Para cada  $i \geq 0$ , definamos: 
$$d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$$
- Defina el número real:  $r = 0.d_0d_1d_2d_3d_4d_5d_6\dots$

¿aparece  $r$  en la lista?

¿son todos los conjuntos numerables?

### Demostración que $\mathbb{R}$ NO es numerable

- Para cada  $i \geq 0$ , definamos:  $d_i = \begin{cases} d_{ii} + 1 & d_{ii} < 9 \\ 0 & d_{ii} = 9 \end{cases}$ .
- Defina el número real:  $r = 0.d_0d_1d_2d_3d_4d_5d_6\dots$

¿aparece  $r$  en la lista?

Veamos:

- $r = r_0?$  ✗
- $r = r_1?$  ✗
- $\dots$
- $r = r_n?$  NO, porque el  $n$ -ésimo dígito de  $r$  es distinto al de  $r_n$ :

$$d_n \neq d_{nn}$$

→← **CONTRADICCIÓN** →←