PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA TAREA 3

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Se pide definir el operador $A * B$ usando sólo los operadores de unión, intersección y negación. Luego mostrar su equivalencia con $A * B$.

$$
\begin{aligned}
x \in A * B &\iff (x \in A \iff x \in B) && (1)\\
&\iff (x \in A \implies x \in B) \wedge (x \in B \implies x \in A) && (2)\\
&\iff (x \notin A \vee x \in B) \wedge (x \notin B \vee x \in A) && (3)\\
&\iff (x \in A^{\mathsf{c}} \cup B) \wedge (x \in B^{\mathsf{c}} \cup A) && (4)\\
&\iff x \in (A^{\mathsf{c}} \cup B) \cap (B^{\mathsf{c}} \cup A) && (5)
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $x \in A * B \iff x \in (A^{\mathsf{c}} \cup B) \cap (B^{\mathsf{c}} \cup A)$.
Notemos que del paso 1 al 2 se usó la equivalencia

$$p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

y del paso 2 al 3 la equivalencia

$$p \implies q \equiv \neg p \vee q$$

vistas en clases. ■

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Desarrollo correcto y bien explicado
- (**3 Puntos**) Idea correcta pero hay errores menores.
- (**0 Puntos**) Idea y desarrollo incorrectos.

Pregunta 1.2

Se pide demostrar que para cualquier operador $C(p_1, ..., p_n)$ en lógica proposicional, su operador respectivo R_C para conjuntos se puede definir sólo utilizando los operadores de unión, intersección y complemento.

Sea $C(p_1, ..., p_n)$. Por el teorema de formas normales, tenemos

$$C(p_1, ..., p_n) \equiv \bigvee_{i:b_i=1} \Big(\Big(\bigwedge_{j:v_{ij}=1} p_j\Big) \wedge \Big(\bigwedge_{j:v_{ij}=0} \neg p_j\Big)\Big)$$

donde $b_i = C(v_{i1}, ..., v_{in})$, es decir, $b_i = 1$ si $C = 1$ en la i-ésima fila de la tabla de verdad.

Por lo tanto,

$$C(x \in A_1, ..., x \in A_n) \equiv \bigvee_{i:b_i=1} ((\bigwedge_{j:v_{ij}=1} x \in A_j) \wedge (\bigwedge_{j:v_{ij}=0} x \notin A_j))$$

El lado derecho de la ecuación anterior lo llamaremos φ.

Entonces,

$$\begin{aligned} x \in R_C(A_1, ..., A_n) &\iff \varphi && (6)\\ &\iff \bigvee_{i:b_i=1} (x \in (\bigcap_{j:v_{ij}=1} A_j) \cap (\bigcap_{j:v_{ij}=0} {A_j}^{\mathsf{c}})) && (7)\\ &\iff x \in \bigcup_{i:b_i=1} ((\bigcap_{j:v_{ij}=1} A_j) \cap (\bigcap_{j:v_{ij}=0} {A_j}^{\mathsf{c}})) && (8) \end{aligned}$$

■

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Desarrollo correcto y bien explicado usando el teorema de formas normales en los operadores C y R_C.
- (**3 Puntos**) Idea correcta, es decir, usar el teorema y demostrar por separado $\vee, \wedge, \neg$ relacionando el C con R_C, pero le faltó demostrar la inclusión entre ambos.
- (**0 Puntos**) Todos los otros casos.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Sea $\mathcal{I} = \{\{1,2,3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2\}, \{2,3\}, \{1,3\}\}$ el conjunto con mayor tamaño entre todos los conjuntos de intersecciones sobre B. Para demostrar que no existe un conjunto de mayor tamaño se puede utilizar el argumento de la Pregunta 2.3, instanciada con $k = 4$, pero cualquier argumento exhaustivo de que no se puede hacer crecer más es válido.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por explicar que es maximal.
- (**3 Puntos**) Por presentar un ejemplo.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.2

Sea $\mathcal{I} = \{S \subseteq A \,|\, n \in S\}$, es decir, el conjunto de intersecciones que contiene a todos los subconjuntos de A tales que contienen al elemento n. Demostraremos que $|\mathcal{I}| = 2^{n-1}$. Para esto, podemos escribir a $\mathcal{I}$ como:

$$\mathcal{I} = \bigcup_{B \in 2^{\{1,...,n-1\}}} \{B \cup \{n\}\}$$

Luego se cumple que si un par de elementos B_1, B_2 son distintos, al unir cada uno con $\{n\}$ también lo serán. Formalmente, tenemos que para todo $B_1, B_2 \in 2^{\{1,\ldots,n-1\}}$ si $B_1 \neq B_2$ entonces $B_1 \cup \{n\} \neq B_2 \cup \{n\}$. En otras palabras, cada conjunto $B \in 2^{\{1,\ldots,n-1\}}$ define de manera única un elemento en $\mathcal{I}$. Finalmente, $\mathcal{I}$ tiene tantos elementos como su equivalencia, esto es:

$$|\mathcal{I}| = |2^{\{1,\ldots,n-1\}}| = 2^{n-1}$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar correctamente.
- (**3 Puntos**) Por presentar el conjunto de intersecciones $\mathcal{I}$.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

Pregunta 2.3

Dado el hint de la tarea, considere el conjunto $X = \{\{B, A \backslash B\} \mid B \subseteq A\}$. Primero demostraremos que $|X| = 2^{n-1}$. Suponga que $X = \{P_1, \ldots, P_k\}$ son todos los elementos de X y cada $P_i = \{B_i, B_i'\}$ con $i \in [1, ..., k]$. Luego es fácil ver que:

$$2^A \;=\; \bigcup_{i=1}^{k}\{B_i\} \;\cup\; \bigcup_{i=1}^{k}\{B_i'\}$$

Al ser pares, tenemos que $\left|\bigcup_{i=1}^{k}\{B_i\}\right| = \left|\bigcup_{i=1}^{k}\{B_i'\}\right|$. Por lo tanto, $|X| = \frac{|2^A|}{2} = \frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$.

Volviendo a la demostración principal, supongamos por contradicción que existe un conjunto de intersecciones $\mathcal{I}$ tal que $|\mathcal{I}| > 2^{n-1}$. Como $|\mathcal{I}| > 2^{n-1} = |X|$, entonces existe $\{B, A \backslash B\} \in X$ tal que $B \in \mathcal{I}$ y $A \backslash B \in \mathcal{I}$. Pero $B \cap (A \backslash B) = \varnothing$, es decir, $\mathcal{I}$ no cumple la propiedad (2) de un conjunto de intersecciones (contradicción). Por lo tanto no existe un conjunto de intersecciones con tamaño mayor a 2^{n-1}.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por demostrar correctamente.
- (**3 Puntos**) Por demostrar asumiendo que $|X| = 2^{n-1}$.
- (**0 Puntos**) En otro caso.