Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA CONTROL 1

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Por enunciado se tiene que

$$\varphi_k(p_1, p_2, ..., p_{2^{k-1}}, p_1, p_2, ..., p_{2^{k-1}}) = \varphi_{k-1}(p_1, p_2, ..., p_{2^{k-1}}) \leftrightarrow \varphi_{k-1}(p_1, p_2, ..., p_{2^{k-1}}) \tag{1}$$

Dado lo anterior dos opciones para demostrar que la fórmula anterior es una tautología son:

- Opción 1: Dado $k \geq 1$, sea $v_1, v_2, ..., v_{2^{k-1}}$ una valuación para las variables $p_1, p_2, ..., p_{2^{k-1}}$.
  P.D: $\varphi_k(v_1, ..., v_{2^{k-1}}, v_1, ..., v_{2^{k-1}}) = 1$

  $$\begin{aligned} \text{sea } \; b &= \varphi_{k-1}(v_1, ..., v_{2^{k-1}}) \\ \varphi_k(v_1, ..., v_{2^{k-1}}, v_1, ..., v_{2^{k-1}}) &= \varphi_{k-1}(v_1, ..., v_{2^{k-1}}) \leftrightarrow \varphi_{k-1}(v_1, ..., v_{2^{k-1}}) && \text{(por (1))} \\ &= b \leftrightarrow b \\ &= 1 && \text{(definición de bicondicional)} \end{aligned}$$

  Distribución de puntaje:

  - (**0.5 Puntos**) Por escribir definición (1)
  - (**0.5 Puntos**) Por evaluar φ_k en una valuación cualquiera $v_1, ..., v_{2^{k-1}}$
  - (**0.5 Puntos**) Por asignar un valor de verdad (b) a $\varphi_{k-1}(v_1, ..., v_{2^{k-1}})$
  - (**0.5 Puntos**) Por notar que $b \leftrightarrow b = 1$
  - (**1 Puntos**) Por concluir

- Opción 2: Dado $k \geq 1$:

  $$\begin{aligned} \varphi_k(p_1, ..., p_{2^{k-1}}, p_1, ..., p_{2^{k-1}}) &\equiv \varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) \leftrightarrow \varphi_{k-1}(p_2, ..., p_{2^{k-1}}) \\ &\equiv (\varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) \rightarrow \varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}})) \wedge \qquad (2) \\ &\quad\; (\varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) \rightarrow \varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}})) && \text{(def. de doble implicancia)} \\ &\equiv \varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) \rightarrow \varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) && \text{(idempotencia)} \qquad (3) \\ &\equiv \neg\varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) \vee \varphi_{k-1}(p_1, ..., p_{2^{k-1}}) && \text{(visto en clases)} \qquad (4) \end{aligned}$$

  Lo anterior es una tautología $(\neg p \vee p)$ vista en clases, por lo tanto $\varphi_k(p_1, ..., p_{2^{k-1}}, p_1, ..., p_{2^{k-1}})$ es una tautología.

  Distribución de puntaje:

- (**0.5 Puntos**) Por escribir definición (1)
- (**0.5 Puntos**) Por equivalencia (2)
- (**0.5 Puntos**) Por equivalencia (3)
- (**0.5 Puntos**) Por equivalencia (4)
- (**1 Punto**) Por decir que (4) es una tautología vista en clases y concluir.

Pregunta 1.2

Dado $k \geq 1$, el valor de verdad de la fórmula φ_k depende solo de cláusulas de la forma $C_i = (p_i \leftrightarrow p_{i+1})$, $i \in \{1, 2, ..., 2^k - 1\}$. Dada una valuación $v_1, ..., v_{2^k}$ cualquiera y dado $i \in \{1, 2, ..., 2^k - 1\}$ hay cuatro posibilidades:

1. $v_i = 1$, $v_{i+1} = 0$. Entonces $\bar{v}_i = 0$, $\bar{v}_{i+1} = 1$.

   $$C_i(v_i, v_{i+1}) = 1 \leftrightarrow 0 = 0$$

   $$C_i(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$$

   El valor de verdad de C_i no cambia.

2. $v_i = 0$, $v_{i+1} = 1$. Entonces $\bar{v}_i = 1$, $\bar{v}_{i+1} = 0$.

   $$C_i(v_i, v_{i+1}) = 0 \leftrightarrow 1 = 0$$

   $$C_i(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = 1 \leftrightarrow 0 = 0$$

   El valor de verdad de C_i no cambia.

3. $v_i = 1$, $v_{i+1} = 1$. Entonces $\bar{v}_i = 0$, $\bar{v}_{i+1} = 0$.

   $$C_i(v_i, v_{i+1}) = 1 \leftrightarrow 1 = 1$$

   $$C_i(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = 0 \leftrightarrow 0 = 1$$

   El valor de verdad de C_i no cambia.

4. $v_i = 0$, $v_{i+1} = 0$. Entonces $\bar{v}_i = 1$, $\bar{v}_{i+1} = 1$.

   $$C_i(v_i, v_{i+1}) = 0 \leftrightarrow 0 = 1$$

   $$C_i(\bar{v}_i, \bar{v}_{i+1}) = 1 \leftrightarrow 1 = 1$$

   El valor de verdad de C_i no cambia.

Como los valores de todos los C_i no cambian al evaluar en la inversa, entonces el valor de φ_k también se mantiene, en otras palabras, $\varphi_k(v_1, ...v_{2^k}) = \varphi_k(\bar{v}_1, ..., \bar{v}_{2^k})$

Distribución de puntaje:

- (**1 Punto**) Por notar que el valor de φ_k depende solo de formulas bicondicionales $p_i \leftrightarrow p_{i+1}$
- (**0.75 Puntos**) Por ver que el valor de verdad de C_i no cambia cuando $v_i \neq v_{i+1}$
- (**0.75 Puntos**) Por ver que el valor de verdad de C_i no cambia cuando $v_i = v_{i+1}$
- (**0.5 Puntos**) Por concluir que el valor de φ_k evaluado en la inversa no cambia.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Sea $\mathcal{I}$ una interpretación cualquiera y α una fórmula universal:

$$\alpha := \forall\ x_1\ \forall\ x_2 ... \forall\ x_k.\ \beta(x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_k)$$

Sea $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ y $\mathcal{I} \vDash \alpha$.

Como $\mathcal{I} \vDash \alpha$ entonces, por definición $\forall\ a_1,\ a_2, ...,\ a_k \in \mathcal{I}(dom)$;

$$\mathcal{I} \vDash \beta(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k)$$

En particular, si lo anterior se cumple, tenemos que $\forall\ a_1,\ a_2, ...,\ a_k \in \mathcal{I}'(dom)$;

$$\mathcal{I} \vDash \beta(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k)$$

Como $\mathcal{I} \vDash E(a, b)$ si, y solo si $\mathcal{I}' \vDash E(a, b)\ \forall\ a,\ b \in \mathcal{I}'(dom)$, entonces;

$$\mathcal{I} \vDash \gamma(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k) \text{ si, y solo si } \mathcal{I}' \vDash \gamma(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k)\ \forall\ \gamma \text{ (sin cuantificadores)}$$

Entonces, como $\mathcal{I} \vDash \beta(a_1,\ a_2, ...,\ a_n)$, por lo anterior tenemos que $\mathcal{I}' \vDash \beta(a_1,\ a_2, ...,\ a_n)$.

Como $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_n \in \mathcal{I}'(dom)$ es cualquiera, entonces por definición;

$$\mathcal{I}' \vDash \forall\ x_1\ \forall\ x_2 ... \forall\ x_k.\ \beta(x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_k)$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**0.5 Puntos**) Por definir un caso generalizado.
- (**1 Punto**) Por aplicar la definición sobre $\mathcal{I}$.
- (**1 Punto**) Por ver que se debía cumplir para β.
- (**0.5 Puntos**) Por volver a la definición y concluir.

Pregunta 2.2

Sea $\mathcal{I}$ interpretación cualquiera tal que $\mathcal{I} \vDash \alpha$ y α está definido como una fórmula existencial;

$$\alpha := \exists\ x_1\ \exists\ x_2 ... \exists\ x_k.\ \beta(x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_k)$$

Por definición existe $a_1,\ a_2, ...,\ a_k \in \mathcal{I}$ tal que;

$$\mathcal{I} \vDash \beta(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k)$$

Sea $\mathcal{I}'$ tal que $\mathcal{I}'(dom) = \{\ a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k\ \}$ y $\forall\ a,\ b \in \mathcal{I}'(dom)$ tenemos que;

- Si $\mathcal{I} \vDash E(a, b)$ entonces, $\mathcal{I}' \vDash E(a, b)$

- Si $\mathcal{I} \nvDash E(a, b)$ entonces, $\mathcal{I}' \nvDash E(a, b)$

Como $\mathcal{I} \vDash E(a, b)$ si, y solo si $\mathcal{I}' \vDash E(a, b)\ \forall\ a,\ b \in \mathcal{I}'(dom)$. Entonces;

$$\mathcal{I} \vDash \gamma(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k) \text{ si, y solo si } \mathcal{I}' \vDash \gamma(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k)\ \forall\ \gamma \text{ (sin cuantificadores)}$$

Como $\mathcal{I}' \vDash \beta(a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k)$ para $a_1,\ a_2,\ a_3, ...,\ a_k$. Entonces, por definición de existe ;

$$\mathcal{I}' \vDash \exists\, x_1\ \exists\, x_2 ... \exists\, x_k.\ \beta(x_1,\, x_2,\, x_3, ...,\, x_k) \text{ y } \mathcal{I}' \text{ tiene dominio finito.}$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**0.5 Puntos**) Por definir un caso generalizado y aplicar la definición.
- (**1.5 Puntos**) Por definir un $\mathcal{I}'(dom)$ y aplicar la definición.
- (**0.5 Puntos**) Por ver que se debía cumplir para β.
- (**0.5 Puntos**) Por volver a la definición y concluir.