Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA CONTROL 3

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Para mostrar que es una relación de equivalencia se debe probar que $((R^r)^s)^t$ es refleja, transitiva y simétrica.

I) **Refleja**: Dado que R^r es refleja y por definición de clausura se tiene que

$$R^r \subseteq (R^r)^s \subseteq ((R^r)^s)^t$$

Luego, $\forall a\ (a,a) \in ((R^r)^s)^t$, es decir, $((R^r)^s)^t$ es refleja.

II) **Transitiva**: $((R^r)^s)^t$ es transitiva porque la clausura transitiva $(.)^t$ lo es.

III) **Simétrica**:
Sea $S = (R^r)^s$
PD: S^t es simétrica
Sea $(a,b) \in S^t$
PD: $(b,a) \in S^t$
Como $(a,b) \in S^t$ y $S^t = \cup_{i=1}^{\infty} S^i$, entonces $(a,b) \in S^k$, para algún k
Luego por definición de S^k se puede construir un camino de largo k entre a y b.
Sea $(a,c_1),(c_1,c_2),\ldots,(c_{k-1},b) \in S$ el camino de largo k.
Dado que S es simétrico por ser clausura simétrica, se tiene que $(c_1,a),(c_2,c_1),\ldots,(b,c_{k-1}) \in S$
Reordenando este camino, $(b,c_{k-1}),\ldots,(c_1,a) \in S$, entonces por definición de S^k se tiene que $(b,a) \in S^k$
Como k era genérico, en participar se cumple para t.
$\therefore (b,a) \in S^t$
$\therefore S^t$ es simétrica.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por demostrar correctamente la propiedad refleja usando la definición de clausura.
- (**1 Punto**) Por demostrar correctamente la propiedad transitiva usando la definición de clausura.
- (**1 Punto**) Por demostrar correctamente la propiedad simétrica:
  - (**0.5 Puntos**) Por encontrar un camino de largo k de a hacia b.
  - (**0.5 Puntos**) Por probar la simetría de dicho camino.
  - (**0 Punto**) Si se utilizó $\left((R^r)^t\right)^s$ puesto que le faltan caminos a esta relación para que sea simétrica.

Pregunta 1.2

Dado que A es infinito numerable, entonces 2^A es no numerable por el teorema de Cantor.
Para cada $S \subseteq A$ se tiene que $E(S) = \{S, A \setminus S\}$ clase de equivalencia dada por la partición de A.
Luego, podemos construir el conjunto $R(S)$ con la partición S de A:
$R(S) = \{(a,b) \in A \times A | ((a,b) \in S \times S) \vee ((a,b) \in A \setminus S \times A \setminus S)\}$
Entonces, $E(S)$ lo podemos escribir como el conjunto cociente $E(S) = A/R(S)$.
Como $\{R(S)|S \subseteq A\} \subseteq \mathcal{C}(A)$ queda que

$$|\{R(S)|S \subseteq A\}| = |\{E(S)|S \subseteq A\}| = \frac{\left|2^A\right|}{2}$$

Puesto que $\frac{2^A}{2}$ es no numerable, se concluye que $\mathcal{C}(A)$ es no numerable.
Por último, sólo faltaría probar que $\frac{2^A}{2}$ es no numerable.
PD: $\frac{2^A}{2} = \{E(S)|S \subseteq A\}$ es no numerable

Por contradicción, suponga que $\{E(S)|S \subseteq A\}$ es numerable.
Luego se puede construir una secuencia $E_0, E_1, \dots$ de $E(S)$.
Sea $E_i = \{S_i, A \setminus S_i\}$
Entonces, para la secuencia $E_0, E_1, \dots$ se va a tener $S_0, A \setminus S_0\, S_1, A \setminus S_1, \dots$
Esta última es una lista de enumeración para 2^A que es no numerable.
Aquí se llega a una contradicción pues la hipótesis era que dicho conjunto es numerable.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por usar el teorema de Cantor en la conclusión de que 2^A es no numerable.
- (**1 Punto**) Por formular la partición y crear la clase de equivalencia $E(S)$.
- (**1 Punto**) Por concluir la no numerabilidad de $\mathcal{C}(A)$ usando la cardinalidad de $R(S)$, $E(S)$ y $\frac{2^A}{2}$.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

El *mejor-caso* ocurre si $(u, v) \in E$, para $U = M$. Si esta condición se cumple, entonces entraría en el while y retorna 1 en la fila 5 en la primera iteración que se realice.

Sea C el tiempo que demoran las líneas 1 a la 5, entonces;

$$5 \cdot C \in \Theta(1) \tag{1}$$

Por lo tanto, el *mejor-caso* $\in \Theta$ (1)

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por describir el mejor *mejor-caso*
- (**1 Punto**) Por encontrar la expresión correcta del *mejor-caso*.

Pregunta 2.2

El *peor-caso* ocurre si no existe un camino de u a v. Si esto ocurre entonces el algoritmo realizará n iteraciones del while. Al entrar, cada iteración ejecutará la línea 7.

Sea C_1 tal que *Tiempo de* $M \circ E \geq C_1 \cdot n^3$. Entonces tenemos que,

$$Tiempo_A(G) \geq C_1 \cdot n^3 \cdot n = C_1 \cdot n^4 \tag{2}$$

Sea C' el tiempo que toman las líneas constantes ($\sum_{i=1}^{11} C_i = C'$) y C_2 es tal que *Tiempo línea 7* $\leq C_2 \cdot n^3$

$$Tiempo_A(G) \leq n \cdot C' + n \cdot n^3 \cdot C_2 \tag{3}$$

Notamos que,

$$Tiempo_A(G) \leq n^4(C_2 + C_1) \tag{4}$$

Por lo tanto, $T_A(G) \in \Theta(n^4)$ y también que *peor-caso* $\in \Theta(n^4)$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por describir el *peor-caso*.
- (**1 Punto**) Por notar la cota sobre $T_A(G)$ de *Tiempo de* $M \circ E$.
- (**1 Punto**) Por incorporar el tiempo de las líneas constantes a la expresión.
- (**1 Punto**) Por encontrar la expresión correcta de $Tiempo_A(G)$ y del *peor-caso*.