NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

Nº LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 5 – Respuesta Pregunta 2

Parte 1

Sea A un conjunto infinito cualquiera y $n \in \mathbb{N}$.

Sea $\sim$ una relación tal que $\sim = A \times A$. Tenemos que $\sim$ cumple con las propiedades necesarias para ser una relación de equivalencia:

- **Refleja:** $\forall a \in A.(a, a) \in \sim$
- **Simétrica:** $\forall a, b \in A.(a, b) \in \sim \implies (b, a) \in \sim$
- **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A.(a, b) \in \sim \wedge (b, c) \in \sim \implies (a, c) \in \sim$

Tenemos que $|A/\sim|$ es el conjunto cuociente de A con respecto a $\sim$, el cual corresponde al conjunto de las clases de equivalencia de A.

Sea n un elemento cualquiera tal que $n \in A$. Tenemos que la clase de equivalencia de n con respecto a $\sim$ corresponde a:

$$[n]_\sim = \{m \in A | n \sim m\}$$

Dado que $\sim = A \times A$, n se relaciona según la relación de equivalencia $\sim$ con todos los elementos de A. En otras palabras, n es equivalente a cualquier otro elemento $m \in A$. Por lo tanto, su clase de equivalencia:

$$[n]_\sim = A$$

Usando el mismo argumento, se cumple que

$$\forall m \in A.[m]_\sim = A$$

Puesto que por definición, $A/\sim = \{[n]_\sim | n \in A\}$, y dado que todas las clases de equivalencia son iguales, tenemos que el conjunto cuociente corresponde a:

$$A/\sim = \{A\}$$

Notar que se cumple la propiedad de que $A/\sim$ es una partición de A.

Por lo tanto, $|A/\sim| = |\{A\}| = 1 = n$, y se cumple que existe una relación de equivalencia $\sim \subseteq A \times A$ tal que $|A/\sim| = n$, con $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. $\square$

Parte 2

Sea A un conjunto no vacío, y $\mathcal{P}$ una partición de A, decimos que $\mathcal{P}$ es una *partición finita numerable*, si se cumple que $\mathcal{P}$ es un conjunto numerable, y $\forall S \in \mathcal{P}.\ S$ es un conjunto finito.

Queremos demostrar que A es numerable si, y sólo sí, existe una *partición finita numerable* de A.

Supongamos que A es un conjunto no vacío numerable. Queremos demostrar que existe una partición $\mathcal{P}$ tal que esta sea *partición finita numerable* de A.

Dado que A es numerable, es posible formar una partición $\mathcal{P}$ tal que $\forall S \in \mathcal{P}.\ S$ es finito. Ahora, debemos demostrar que esta partición $\mathcal{P}$ es también numerable.

Dado que por definición de partición, tenemos que $\bigcup \mathcal{P} = A$. Sea $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$, equivalentemente la expresión anterior se puede escribir como:

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ... = A$$

De esta manera, los elementos de $\mathcal{P}$ se pueden ordenar en una secuencia:

$$S_1, S_2, S_3, ...$$

Por lo tanto, se puede concluir que la partición $\mathcal{P}$ es numerable, y dado que se cumple que $\forall S \in \mathcal{P}.\ S$ es finito, $\mathcal{P}$ corresponde a una *partición finita numerable* de A (es decir, existe una *partición finita numerable* para cualquier conjunto A numerable). $\square$

Supongamos que $\mathcal{P}$ es una *partición finita numerable* de un conjunto no vacío A. Queremos demostrar que el conjunto A es numerable.

Dado que $\mathcal{P}$ es una *partición finita numerable* de A, $\mathcal{P}$ es numerable, y $\forall S \in \mathcal{P}. S$ es un conjunto finito. También, $\mathcal{P}$ es una partición de A, por lo que es posible formar A a partir de la unión de todos los elementos de $\mathcal{P}$.

Tenemos que $\mathcal{P} = \{S_1, S_2, S_3, ...\}$, y:

$$S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup ... = A$$

Dado que cada uno de estos conjuntos S_i, con $i \geq 1$, es finito, estos conjuntos también son numerables. Sea $a_{i,j}$ el j-ésimo elemento del conjunto S_i, con $1 \leq j \leq |S_i|$, los elementos pueden ser ordenados de la siguiente manera:

$$a_{1,1}, a_{1,2},\ \ldots,\ a_{1,|S_1|}, a_{2,1}, a_{2,2},\ \ldots,\ a_{2,|S_2|}, a_{3,1}\ \ldots$$

Lo que implica que la unión de los elementos de $\mathcal{P}$ es numerable (*Notar que* $\forall i \geq 1.\ |S_i| \in \mathbb{N}$).

Dado que la unión de los elementos de la partición $\mathcal{P}$ es numerable, y esta corresponde a A, el conjunto A también es numerable. $\square$