Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2 (Solución parcial)

27 de marzo de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

Para dos valuaciones $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\bar{v}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$, decimos que $\bar{v} \leq \bar{v}'$ si para todo $i \leq n$ se cumple que $v_i \leq v'_i$, considerando el orden entre valores de verdad como $0 \leq 1$. También, decimos que una fórmula proposicional $\varphi(\bar{p})$ con variables $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ es *monótona* si cumple que para toda valuación $\bar{v}$ y $\bar{v}'$, si $\bar{v} \leq \bar{v}'$ entonces $\varphi(\bar{v}) \leq \varphi(\bar{v}')$. En otras palabras, φ es monótona si al cambiar algunos valores de la valuación de 0 a 1, el valor de verdad "solo puede subir o quedar igual". Por ejemplo, $\varphi_1(p, q, r) = (p \wedge q) \vee r$ es monótona pero $\varphi_2(p, q) = \neg p \vee q$ no lo es, ya que $\varphi_2(0, 0) = 1$ y $\varphi_2(1, 0) = 0$. Por último, decimos que φ es una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula si solo esta compuesta por variables proposicionales, 0, 1, conjunciones y disyunciones. Por ejemplo, φ_1 es una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula, pero φ_2 no lo es.

1. Demuestre que toda $\{\wedge, \vee\}$-fórmula es monótona. Para esto demuestre que si dos $\{\wedge, \vee\}$-fórmulas φ_1 y φ_2 son monótonas, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ y $\varphi_1 \vee \varphi_2$ también son monótonas.
2. Demuestre que si una fórmula φ es monótona, entonces existe una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula φ' tal que φ es lógicamente equivalente a φ'.

Solución

1. Sean φ_1 y φ_2 dos $\{\wedge, \vee\}$-fórmulas monótonas. Sean dos valuaciones v y v' tal que $v' \geq v$
   - Queremos demostrar que $\varphi_1 \vee \varphi_2$ es monótona, es decir, $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(v') \geq (\varphi_1 \vee \varphi_2)(v)$. Veamos por casos:
     Si $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(v) = 0$, entonces se cumple que $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(v') \geq (\varphi_1 \vee \varphi_2)(v)$.
     Si $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(v) = 1$, entonces al menos una formula φ_i $(i = 1, 2)$ cumple $\varphi_i(v) = 1$. Sin perdida de generalidad, suponemos $\varphi_1(v) = 1$, entonces como φ_1 es monótona, necesariamente $\varphi_1(v') = 1$ y se concluye que $(\varphi_1 \vee \varphi_2)(v') = 1$
   - Ahora de manera análoga, demostraremos que $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ es monótona.
     Si $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v) = 0$, entonces se cumple que $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v') \geq (\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v)$.
     Si $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v) = 1$, entonces entonces ambas $\varphi_1(v) = \varphi_2(v) = 1$. Como las dos formulas son monótonas, necesariamente $\varphi_1(v') = \varphi_2(v') = 1$. Finalmente $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)(v') = 1$
2. Ahora queremos mostrar que cualquier formula monótona φ es equivalente a una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula. Para esto necesitamos construir una $\{\wedge, \vee\}$-formula φ' tal que $\varphi \equiv \varphi'$. Se propone la siguiente construcción (muy similar a la construcción de DNF vista en clases):

$$\varphi' = \bigvee_{v : \varphi(v) = 1} \left(\bigwedge_{p_i : p_i(v) = 1} p_i \right)$$

Ahora demostraremos que $\varphi \equiv \varphi'$, para lo cual debemos demostrar que para toda valuación v', $\varphi(v') = 1$ si y solo si $\varphi'(v') = 1$.

- $\rightarrow$) Suponemos que $\varphi(v') = 1$, entonces por construcción se cumplirá $\varphi'(v') = 1$
- $\leftarrow$) Ahora suponemos que $\varphi'(v') = 1$. Digamos que

$$\varphi' = \bigvee_{v:\varphi(v)=1} \left(\bigwedge_{p_i:p_i(v)=1} p_i \right) = \bigvee_{i=1}^{m} C_i$$

  Como $\varphi'(v') = 1$ entonces existe i tal que $C_i(v') = 1$. Veamos que $C_i = \bigwedge_{p_i:p_i(v)=1} p_i$. De aquí se tiene que $v' \geq v$ (pues al menos hace verdaderos a los mismos literales que hacia verdaderos v). Finalmente, como $\varphi(v) = 1$, $v' \geq v$ y φ es monótona, necesariamente $\varphi(v') = 1$, lo que concluye la demostración.

Pregunta 3

Para las siguientes preguntas considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ con predicados binarios $O(\cdot,\cdot)$ y $E(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}(\text{Dom}) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}(O(x,y)) & := & x \leq y \\ \mathcal{I}(E(x,y)) & := & x = y \end{array}$$

Además, decimos que un elemento a en el dominio $\mathcal{I}(Dom)$ es *definible* bajo la interpretación $\mathcal{I}$ si existe una fórmula en lógica de predicados $\varphi(x)$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi(b)$ si, y solo si, $b = a$.

1. Demuestre que el número 0 es definible con la interpretación $\mathcal{I}$.
2. Demuestre que el número 2 es definible con la interpretación $\mathcal{I}$.
3. Demuestre que cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ es definible bajo la interpretación $\mathcal{I}$, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una fórmula $\varphi_n(x)$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi_n(a)$ si, y solo si, $a = n$.

Para las formulas anteriores usted solo puede utilizar lógica de predicados $(\forall x, \exists y, \land, \lor, \neg, \ldots)$ y los predicados $O(\cdot,\cdot)$ y $E(\cdot,\cdot)$ asumiendo que esta en el dominio .

Solución

1. $\texttt{Cero}(x) = \forall z\ E(x,z)$
2. $\texttt{Uno}(x) = \neg\texttt{Cero}(x) \land (\forall z\ \neg\texttt{Cero}(z) \implies E(x,z))$
3. $\texttt{Dos}(x) = \neg\texttt{Cero}(x) \land \neg\texttt{Uno}(x) \land (\forall z\ (\neg\texttt{Cero}(z) \land \neg\texttt{Uno}(z)) \implies E(x,z))$

Para un caso general, podemos definir la relacion binaria $\texttt{Sucesor}(-,-)$ de tal manera que $\texttt{Sucesor}(x,y) = 1$ ssi y es el sucesor de x.

- $\texttt{Sucesor}(x,y) = \neg E(x,y) \land O(x,y) \land (\forall z(O(x,z) \land \neg E(x,z)) \implies O(y,z))$

De este modo, teniendo $\texttt{Cero}(x)$, tendremos que:

- $\texttt{Uno}(x) = \forall y(\texttt{Cero}(y) \implies \texttt{Sucesor}(y,x))$

Y en general,

- $\varphi_n(x) = \forall y(\varphi_{n-1}(y) \implies \texttt{Sucesor}(y,x))$