Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA TAREA 1

Pregunta 1

Pregunta 1.1

Si definimos:

$$\varphi = (p_1 \iff p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \iff p_n)$$

$$\gamma = ((p_1 \implies p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \implies p_n)) \wedge ((p_n \implies p_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (p_2 \implies p_1))$$

Desarrollando podemos ver que se nos pide demostrar la siguiente equivalencia:

$$\varphi \equiv \gamma$$

Primero debemos recordar la siguiente equivalencia lógica vista en clases:

$$p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$$

Usando lo anterior vemos que:

$$\varphi \equiv ((p_1 \implies p_2) \wedge (p_2 \implies p_1)) \wedge \cdots \wedge ((p_{n-1} \implies p_n) \wedge (p_n \implies p_{n-1}))$$

Luego por **asociatividad** se cumple que:

$$\varphi \equiv (p_1 \implies p_2) \wedge (p_2 \implies p_1) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \implies p_n) \wedge (p_n \implies p_{n-1})$$

Finalmente, por **conmutatividad**:

$$\varphi \equiv (p_1 \implies p_2) \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \implies p_n) \wedge (p_n \implies p_{n-1}) \wedge \cdots \wedge (p_2 \implies p_1) \equiv \gamma$$

- (**4 Puntos**) Demostración correcta y clara.
- (**3 Puntos**) Demostración con pequeños errores u omisiones.
- (**0 Puntos**) En otros casos.

Pregunta 1.2

($\implies$)
Sea $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ una valuación cualquiera tal que:

$$\bigleftrightarrow_{i=1}^{n} p_i(v) = 1$$

Luego suponga que:

$$\exists i \in \{1, \ldots, n-1\} \text{ tal que } v_i \neq v_{i+1}$$

Es decir: $$\longleftrightarrow_{i=1}^{n} p_i(v) = (p_1 \iff p_2) \wedge \cdots \wedge \underbrace{(p_i \iff p_{i+1})}_{0} \wedge \cdots \wedge (p_{n-1} \iff p_n)$$

Lo que por definición de conjunción significaría que:

$$\longleftrightarrow_{i=1}^{n} p_i(v) = 0$$

Por lo tanto notamos que se debe cumplir que $v_i = v_{i+1}\ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

($\Longleftarrow$)
Por hipótesis sabemos que, dada una valuación $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, se cumple lo siguiente:

$$v_i = v_{i+1}\ \forall i \in \{1, \ldots, n-1\}$$

Luego por definición de conjunción y de bicondicional se tiene que:

$$\longleftrightarrow_{i=1}^{n} p_i(v) = 1$$

- (**4 Puntos**) Demostración correcta y clara.
- (**3 Puntos**) Demostración con pequeños errores u omisiones.
- (**0 Puntos**) En otros casos.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Esta afirmación era FALSA. Bastaba con dar un contraejemplo:

Consideremos $\Sigma = \{p \vee q\}, \alpha = \neg p \wedge q$. Construyamos la parte de la tabla de verdad que nos sirve para el contraejemplo:

p	q	Σ	α	$\neg\alpha$
1	1	1	0	1
1	0	1	1	0

Luego:
$$(\Sigma(1,1) = 1 \wedge \alpha(1,1) = 0) \implies \Sigma \not\models \alpha$$

y
$$(\Sigma(1,0) = 1 \wedge \neg\alpha(1,1) = 0) \implies \Sigma \not\models \neg\alpha$$

Finalmente, $\Sigma \not\models \neg\alpha \wedge \Sigma \not\models \alpha$.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(4 puntos)** Por dar un contraejemplo correcto.
- **(3 puntos)** Por errores menores.
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 2.2

Esta afirmación era VERDADERA. Hay que demostrarla.

$\underline{\Leftarrow}$ Primero demostraremos que si Σ es satisfacible por 0 o por exactamente una valuación, entonces ocurre $\Sigma \models \neg\alpha \vee \Sigma \models \alpha$. Veamos ambos casos:

1. Caso 1:Σ no es satisfacible (inconsistente). Cada vez que una valuación satisface Σ (o sea, nunca, pues es inconsistente), entonces también se satisface α. Luego, por la definición de consecuencia lógica, se tiene que $\Sigma \models \alpha$.

2. Caso 2: Σ es satisfacible sólo por la valuación v. Para que una fórmula β sea consecuencia lógica de Σ sólo basta que $\beta(v) = 1$ (por la defínción de consecuencia lógica). Así, si $\alpha(v) = 1$, tenemos que $\Sigma \models \alpha$. Pero si $\alpha(v) = 0$, entonces $\neg\alpha(v) = 1$, y por lo tanto, $\Sigma \models \neg\alpha$. Concluímos que $\Sigma \models \alpha \vee \Sigma \models \neg\alpha$.

$\underline{\Rightarrow}$ Este inciso es equivalente a demostrar que si Σ no es inconsistente, y tampoco es satisfacible por exactamente una valuación (en otras palabras, si Σ es satisfacible por dos o más valuaciones), entonces Σ no es completo.
Supongamos que hay dos valuaciones que satisfacen Σ, llamadas v_1, v_2. Luego, sabemos que con CNF podemos construir una tabla de verdad que tenga la siguiente forma:

	Σ	α_Σ	$\neg\alpha_\Sigma$
v_1	1	0	1
v_2	1	1	0

Es decir, podemos construir una fórmula α_Σ tal que $\alpha_\Sigma(v_1) = 0, \alpha_\Sigma(v_2) = 1$, y el valor que tome α_Σ con las otras valuaciones no nos importa. Luego, con un argumento similiar al de la pregunta 2,1, podemos justificar que $\Sigma \not\models \neg\alpha_\Sigma \wedge \Sigma \not\models \alpha_\Sigma$. Por lo tanto, $(\forall\Sigma)(\exists\alpha_\Sigma) : \Sigma \not\models \neg\alpha_\Sigma \wedge \Sigma \not\models \alpha_\Sigma$, donde α_Σ es una fórmula que se puede construir con CNF de forma que cumpla las condiciones impuestas en la tabla mostrada más arriba, para dos valuaciones que satisfagan a Σ. Por lo tanto, si Σ tiene dos o más valuaciones que lo satisfacen, entonces no será completo.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(4 punto)** Por ambas implicancias correctas.
- **(3 puntos)** Por una implicancia correcta.
- **(0 puntos)** En otro caso.