Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 2

27 de marzo de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

Para dos valuaciones $\bar{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ y $\bar{v}' = (v'_1, \ldots, v'_n)$, decimos que $\bar{v} \leq \bar{v}'$ si para todo $i \leq n$ se cumple que $v_i \leq v'_i$, considerando el orden entre valores de verdad como $0 \leq 1$. También, decimos que una fórmula proposicional $\varphi(\bar{p})$ con variables $\bar{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ es *monótona* si cumple que para toda valuación $\bar{v}$ y $\bar{v}'$, si $\bar{v} \leq \bar{v}'$ entonces $\varphi(\bar{v}) \leq \varphi(\bar{v}')$. En otras palabras, φ es monótona si al cambiar algunos valores de la valuación de 0 a 1, el valor de verdad "solo puede subir o quedar igual". Por ejemplo, $\varphi_1(p, q, r) = (p \wedge q) \vee r$ es monótona pero $\varphi_2(p, q) = \neg p \vee q$ no lo es, ya que $\varphi_2(0, 0) = 1$ y $\varphi_2(1, 0) = 0$. Por último, decimos que φ es una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula si solo esta compuesta por variables proposicionales, 0, 1, conjunciones y disyunciones. Por ejemplo, φ_1 es una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula, pero φ_2 no lo es.

1. Demuestre que toda $\{\wedge, \vee\}$-fórmula es monótona. Para esto demuestre que si dos $\{\wedge, \vee\}$-fórmulas φ_1 y φ_2 son monótonas, entonces $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ y $\varphi_1 \vee \varphi_2$ también son monótonas.
2. Demuestre que si una fórmula φ es monótona, entonces existe una $\{\wedge, \vee\}$-fórmula φ' tal que φ es lógicamente equivalente a φ'.

Pregunta 2

Suponga $\mathcal{S}$ un dominio de *seres* de la misma especie donde se cuenta con el siguientes predicado sobre $\mathcal{S}$:

$$C(x, y, z) := \quad z \text{ es la "concepción" entre } x \text{ e } y \text{ donde } x \text{ es la madre y } y \text{ el padre, respectivamente.}$$

En otras palabras, para tres seres m, p, y h del dominio se tiene que $C(m, p, h) = 1$ si, y solo si, h es un hijo de la unión entre m y p donde m es la madre y p es el padre. Este predicado es definido sobre el conjunto de seres $\mathcal{S}$ que tiene uno o más seres (posiblemente infinito). También se cuenta con un predicado $E(x, y)$ sobre $\mathcal{S}$ tal que $E(a, b) = 1$ si, y solo si, $a = b$. En otras palabras, a es exactamente el mismo ser que b.

Usando lógica de predicados, uno puede definir afirmaciones sobre esta especie de seres $\mathcal{S}$. Por ejemplo, la afirmación "todo ser fue concebido por una madre y un padre" se puede definir con la siguiente fórmula en lógica de predicados:

$$\forall x. \exists y. \exists z.\ C(y, z, x)$$

Defina las siguientes afirmaciones en lógica de predicados.

1. "Todo ser es padre o madre de algún ser".
2. "Existe un ser que es madre o padre de algún otro ser".
3. "Existen seres que no concibieron hijos".
4. "Todo ser fue concebido por un único padre y madre".

5. "Los seres de la especie son monógamos: cada ser, si concibe hijos, es con un único ser".
6. "Toda madre o padre no puede haber sido concebido por sus hijos".

Hint: Recuerde que el orden y la posición de los cuantificadores $\forall x$ y $\exists x$ en las formulas de lógica de predicados es muy importante.

Pregunta 3

Para las siguientes preguntas considere la siguiente interpretación $\mathcal{I}$ con predicados binarios $O(\cdot,\cdot)$ y $E(\cdot,\cdot)$:

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{I}(\text{Dom}) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}(O(x,y)) & := & x \leq y \\ \mathcal{I}(E(x,y)) & := & x = y \end{array}$$

Además, decimos que un elemento a en el dominio $\mathcal{I}(Dom)$ es *definible* bajo la interpretación $\mathcal{I}$ si existe una fórmula en lógica de predicados $\varphi(x)$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi(b)$ si, y solo si, $b = a$.

1. Demuestre que el número 0 es definible con la interpretación $\mathcal{I}$.
2. Demuestre que el número 2 es definible con la interpretación $\mathcal{I}$.
3. Demuestre que cualquier número natural $n \in \mathbb{N}$ es definible bajo la interpretación $\mathcal{I}$, esto es, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe una fórmula $\varphi_n(x)$ tal que $\mathcal{I} \models \varphi_n(a)$ si, y solo si, $a = n$.

Para las formulas anteriores usted solo puede utilizar lógica de predicados ($\forall x, \exists y, \wedge, \vee, \neg, \ldots$) y los predicados $O(\cdot,\cdot)$ y $E(\cdot,\cdot)$ asumiendo que esta en el dominio .