NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

N° LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 2

Se quiere encontrar el conjunto $\mathcal{I}$ de intersecciones sobre $B = \{1, 2, 3, 4\}$. El conjunto de intersecciones debe cumplir con las siguientes condiciones:

1. $\forall a \in \mathcal{I}. a \subseteq B$
2. $\forall a \in \mathcal{I}. \forall b \in \mathcal{I}. a \cap b \neq \emptyset$

Tenemos que el primer punto corresponde a la definición de conjunto potencia, por lo que podemos establecer que $\forall a \in \mathcal{I}. a \in \mathcal{P}(B)$. La cardinalidad del conjunto potencia, como se demostró en clases, corresponde a 2^n, con n el número de elementos en n. Por lo tanto, tenemos que $|\mathcal{I}| \leq |\mathcal{P}(B)| = 2^n$.

El conjunto potencia de B es:

$$\mathcal{P}(B) = \Big\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{1,2,3,4\}\Big\}$$

Hay que encontrar un subconjunto del conjunto potencia, tal que también se cumpla el punto 2, para poder obtener un conjunto de intersecciones $\mathcal{I}$.

Tenemos que $\mathcal{I}$ no puede contener al conjunto vacío $\emptyset$, ya que por definición $\forall A. \emptyset \cap A = \emptyset$.

También, tenemos que $\{1\} \cap \{2\} = \emptyset$, $\{1\} \cap \{3\} = \emptyset$, $\{1\} \cap \{4\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{3\} = \emptyset$, $\{2\} \cap \{4\} = \emptyset$, y $\{3\} \cap \{4\} = \emptyset$, por lo que sólo podemos conservar uno de los 4 subconjuntos.

Sea a el subconjunto elegido, tenemos que para el resto de los elementos en $\mathcal{I}$ se tiene que cumplir que **(3)** $\forall b \in \mathcal{I}. a \cap b \neq \emptyset$. Por lo tanto, $\forall b \in \mathcal{I}. \exists x.(x \in a \land x \in b)$.

Si tomamos $a = \{1\}$ (sin pérdida de generalidad), entonces debemos tomar los conjuntos de $\mathcal{I}$ tal que se cumpla **(3)**. Es decir, se deben tomar todos los elementos de $\mathcal{P}(B)$ tal que estos contengan el valor 1.

Tenemos que $\{1\} \cap \{2,3\} = \emptyset$, $\{1\} \cap \{2,4\} = \emptyset$, $\{1\} \cap \{3,4\} = \emptyset$, y $\{1\} \cap \{2,3,4\} = \emptyset$.

Entonces, el conjunto $\mathcal{I}$ de intersecciones sobre B con el mayor tamaño (cardinalidad) posible corresponde a:

$$\mathcal{I} = \Big\{\{1\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,2,3\}, \{1,2,4\}, \{1,3,4\}, \{1,2,3,4\}\Big\}$$

Notar que la cardinalidad (tamaño) de este conjunto es $2^3 = 8$. Al elegir otro subconjunto a (de los 4 posibles), se obtiene otro $\mathcal{I}$ con la misma cantidad de elementos. $\square$

Tenemos que para todo conjunto $A = 1, ..., n$, su conjunto potencia $\mathcal{P}(A)$ tendrá cardinalidad 2^n y será de la forma:

$$\mathcal{P}(A) = \Big\{\emptyset, \{1\}, ...\{n\}, \{1, 2\}, ...\{n-1, n\}, ...\{1, ..., n\}\Big\}$$

Para un conjunto $\mathcal{I}$ de intersecciones sobre A, tenemos que $\forall a \in \mathcal{I}. a \in \mathcal{P}(A)$.

Sea C el conjunto que contiene los elementos de tamaño 1 en $\mathcal{P}(A)$. Tenemos que:

$$C := \Big\{\{1\}, ..., \{n\}\Big\}$$

Tenemos que $\forall a, b \in C. a \neq b \implies a \cap b = \emptyset$.

Sin pérdida de generalidad, elijamos un elemento cualquiera de C. Sea k el único elemento en este conjunto elegido, se debe cumplir que **(4)** $\forall a \in \mathcal{I}. k \in a$.

Si definimos un conjunto D tal que este contenga todos los elementos de A, menos k. Su conjunto potencia sería $\mathcal{P}(D)$. Podemos notar que este conjunto contiene todos los elementos que están en $\mathcal{P}(A)$, pero que no pueden estar en $\mathcal{I}$, debido a que no cumplen el punto (2) de su definición, $\forall a \in \mathcal{I}. \forall b \in \mathcal{I}. a \cap b \neq \emptyset$. Sabemos que la cardinalidad de este conjunto es $2^(n-1)$, por lo que para obtener la cardinalidad de $\mathcal{I}$ basta con restar la cardinalidad de $\mathcal{P}(A)$ con la de $\mathcal{P}(D)$.

$$2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$$

$\square$