NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

Nº LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

Dada la definición de $A * B$, esta en lenguaje natural equivaldría a:

"x es un elemento de $A * B$ sí, y sólo sí, x pertenece a A y a B a la vez, o no pertenece a ninguno".

Esto, definido solo con los operadores de unión, intersección y complemento, equivale a:

$$A * B := (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c) \tag{1}$$

Si partimos de la definición de $A * B$, tenemos que:

$$x \in A \iff x \in B$$

Por equivalencia lógica $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p)$

$$(x \in A \implies x \in B) \quad \wedge \quad (x \in B \implies x \in A)$$

Por equivalencia lógica $p \implies q \equiv \neg p \vee q$

$$(\neg(x \in A) \vee x \in B) \quad \wedge \quad (\neg(x \in B) \vee x \in A)$$

Por propiedad $\neg(x \in A) \equiv x \notin A$

$$(x \notin A \vee x \in B) \quad \wedge \quad (x \notin B \vee x \in A)$$

Por distributividad

$$((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \notin B) \quad \vee \quad ((x \notin A \vee x \in B) \wedge x \in A)$$
$$((x \notin A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin B)) \quad \vee \quad ((x \notin A \wedge x \in A) \vee (x \in B \wedge x \in A))$$

Se generan las contradicciones $(x \notin A \wedge x \in A)$ y $(x \in B \wedge x \notin B)$. Entonces, por equivalencia lógica $p \vee 0 \equiv p$

$$(x \notin A \wedge x \notin B) \quad \vee \quad (x \in B \wedge x \in A)$$

Usando las definiciones de complemento $A^c = \{x \mid x \notin A\}$, intersección $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$, y unión $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ tenemos que

$$(A^c \cap B^c) \quad \cup \quad (B \cap A)$$

Obteniendo la definición establecida en (1). □

Sea $C(p_1, ..., p_n)$ un operador n-ario cualquiera en lógica proposicional, donde $p_1, ..., p_n$ son variables proposicionales cualquiera (es decir, que pueden tomar un valor verdadero o falso). Se define un operador n-ario de conjuntos $R_C(A_1, ..., A_n)$ tal que para todo x se tiene que $x \in R_C(A_1, ..., A_n)$ sí, y sólo sí, $C(x \in A_1, ..., x \in A_n)$ es verdadero.

Tenemos que el operador n-ario C está compuesto por las variables proposicionales $p_1, ..., p_n$, las cuales se relacionan mediante los conectivos lógicos básicos: negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\implies$), y bicondicional ($\iff$). Podemos reducir este conjunto con las siguientes identidades:

1. $p \implies q \equiv \neg p \vee q$
2. $p \iff q \equiv (p \implies q) \wedge (q \implies p) \equiv (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p)$

De esta manera, poseemos un conjunto de conectivos lógicos sólo con negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), y disyunción ($\vee$), como consecuencia C también se puede definir sólo con estos conectivos lógicos.

Si analizamos las definiciones de unión, intersección, y complemento:

1. $A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
2. $A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
3. $A^c = \{x \mid x \notin A\} = \{x \mid \neg(x \in A)\}$

Notamos que estas sólo se definen a partir del conjunto de conectivos especificado anteriormente ($\neg$, $\wedge$, y $\vee$). De esta manera, dado que $R_C(A_1, ..., A_n)$ se define a partir de $C(x \in A_1, ..., x \in A_n)$, se puede definir el operador n-ario entre conjuntos R_C usando sólo los operadores de unión, intersección, y complemento.