Elementos extremos y clausuras

Clase 11

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Cotas superiores

Definición

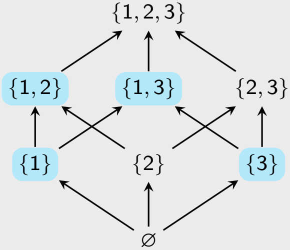
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$

¿cuál es una cota superior para S_1?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores

Definición

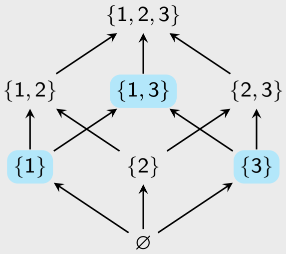
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$

¿cuál es una cota superior para S_2?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$.



$c \in A$ es una cota superior si es **mayor o igual a todos los elementos** de S

Cotas superiores y maximales

Definición

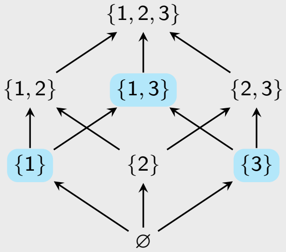
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$

¿cuál es un **maximal** para S_2?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores y maximales

Definición

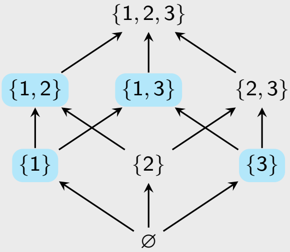
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$

¿cuál es un **maximal** para S_1?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.



$\hat{x} \in S$ es un maximal si **ningún elemento es mayor que** $\hat{x}$

Cotas superiores, maximales y máximo

Definición

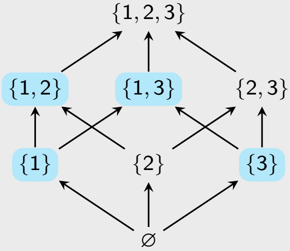
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

¿cuál es un **máximo** para S_1?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_1 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores, maximales y máximo

Definición

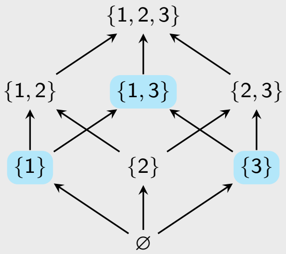
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

¿cuál es un **máximo** para S_2?

Sea $(2^{\{1,2,3\}}, \subseteq)$ y

$S_2 = \{\{1\}, \{3\}, \{1,3\}\}$.



Cotas superiores, maximales y máximo

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota superior** de S ssi $\forall y \in S.\ y \preceq c$
- $\hat{x} \in S$ es un **maximal** ssi $\forall y \in S.\ \hat{x} \preceq y \rightarrow \hat{x} = y$
- $x^{\uparrow} \in S$ es un **máximo** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq x^{\uparrow}$

$x^{\uparrow} \in S$ es un máximo si $x^{\uparrow}$ es **mayor o igual a cualquier elemento** en S

Cotas inferiores

Definición

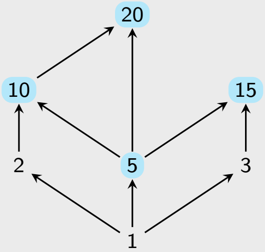
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$

¿cuál es una cota inferior para T_1?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_1 = \{5, 10, 15, 20\}$.



Cotas inferiores

Definición

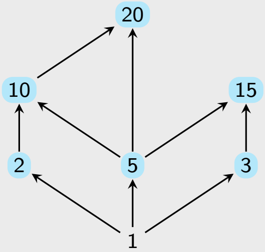
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$

¿cuál es una cota inferior para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Cotas inferiores y minimales

Definición

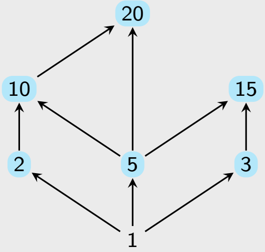
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$

¿cuál es un **minimal** para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



$\check{x} \in S$ es un minimal si **ningún elemento es menor que** $\check{x}$

Cotas inferiores, minimales y mínimo

Definición

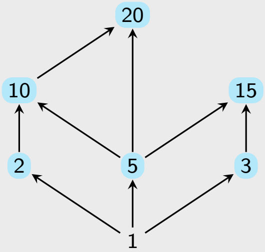
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

¿cuál es un **mínimo** para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}.$



Cotas inferiores, minimales y mínimo

Definición

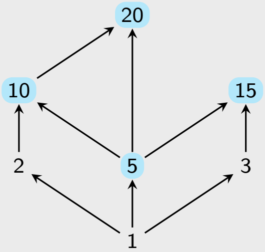
Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

¿cuál es un **mínimo** para T_1?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_1 \ = \ \{5, 10, 15, 20\}.$



Cotas inferiores, minimales y mínimo

Definición

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

- $c \in A$ es una **cota inferior** de S ssi $\forall y \in S.\ c \preceq y$
- $\check{x} \in S$ es un **minimal** ssi $\forall y \in S.\ y \preceq \check{x} \rightarrow \check{x} = y$
- $x^{\downarrow} \in S$ es un **mínimo** ssi $\forall y \in S.\ x^{\downarrow} \preceq y$

$x^{\downarrow} \in S$ es un mínimo si $x^{\downarrow}$ es **menor o igual a cualquier elemento** en S

Sobre minimales y mínimos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un elemento mínimo, entonces ¿es único?
2. ¿tiene S siempre un mínimo?
3. Si x es mínimo, entonces ¿es x minimal?
4. Si x es minimal, entonces ¿es x mínimo?
5. ¿tiene S siempre un elemento minimal?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

…lo mismo es cierto sobre maximales / máximos.

Outline

Ínfimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

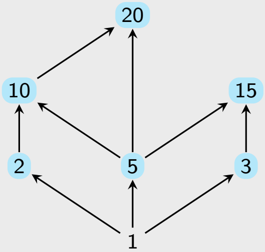
Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c de S se cumple que $c \preceq c^*$.

¿cuál es un ínfimo para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 \;=\; \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Ínfimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

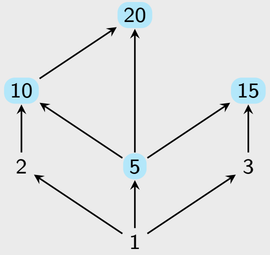
Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c de S se cumple que $c \preceq c^*$.

¿cuál es un ínfimo para T_1?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_1 = \{5, 10, 15, 20\}$.



Para cualquier $T \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿quién es el **ínfimo** de T según $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$?

Ínfimo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si:

1. c^* es una cota inferior de S y
2. para toda cota inferior c de S se cumple que $c \preceq c^*$.

c^* es la **mayor de las cotas inferiores**

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **ínfimo** de S si c es un máximo del conjunto:

$$S_{\succeq} = \left\{ c \mid c \text{ es una cota inferior de } S \right\}$$

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

Definición

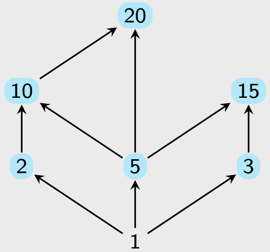
Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c de S se cumple que $c^* \preceq c$.

¿cuál es un supremo para T_2?

Sea $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$ y

$T_2 = \{2, 3, 5, 10, 15, 20\}$.



Para cualquier $T \subseteq \mathbb{N} - \{0\}$, ¿quién es el **supremo** de T según $(\mathbb{N} - \{0\}, |)$?

Supremo de un conjunto

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\emptyset$.

Definición

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si:

1. c^* es una cota superior de S y
2. para toda cota superior c de S se cumple que $c^* \preceq c$.

c^* es el **menor de las cotas superiores**

Definición alternativa

Decimos que $c^* \in A$ es un **supremo** de S si c es un mínimo del conjunto:

$$S_{\preceq} = \{ c \mid c \text{ es una cota superior de } S \}$$

Sobre ínfimos y supremos

Preguntas

Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial y $S \subseteq A$ distinto de $\varnothing$.

1. Si S tiene un ínfimo, entonces ¿es único?
2. Si x es el mínimo, ¿es x el ínfimo?
3. Si S NO tiene mínimo, ¿entonces tiene ínfimo?

Demuestre o de un contra-ejemplo.

...lo mismo es cierto sobre máximos / supremos.

Outline

Clausura refleja

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

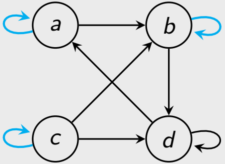
Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda otra relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la clausura refleja de esta relación?



Clausura refleja

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^r \subseteq A \times A$ es la **clausura refleja** de R si:

1. $R \subseteq R^r$.
2. R^r es refleja.
3. para toda otra relación refleja R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^r \subseteq R'$.

R^r es la **menor relación refleja** que contiene a R.

¿cuál es la relación de R^r con el **mínimo** de un conjunto?

Clausura transitiva

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

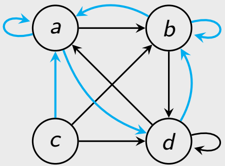
Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la clausura transitiva de esta relación?



Clausura transitiva

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Definición

Una relación $R^t \subseteq A \times A$ es la **clausura transitiva** de R si:

1. $R \subseteq R^t$.
2. R^t es transitiva.
3. para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple $R^t \subseteq R'$.

R^t es la **menor relación transitiva** que contiene a R.

¿cuál es la relación de R^t con el mínimo de un conjunto?

Clausura transitiva y clausura refleja

- ¿siempre existe R^r o R^t para un R cualquiera?

- ¿cómo podemos calcular R^r o R^t (si existen)?

¿cómo calculamos la clausura refleja de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r \;=\; R \;\cup\; I_A$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Demostración: ejercicio.

¿cómo calculamos la clausura refleja de una relación?

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^r \;=\; R \;\cup\; I_A$$

donde $I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}$ es la relación identidad.

Propiedad

$\left(R^r\right)^r = R^r$ para todo $R \subseteq A \times A$.

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Recordatorio

- $R \circ R \;=\; \left\{\; (x, y) \;\middle|\; \exists z \in A.\ (x, z) \in R \;\land\; (z, y) \in R \;\right\}$
- Se define $R^1 = R$ y $R^2 = R \circ R$.
- Se define $R^i = R^{i-1} \circ R$ para $i > 1$.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

¿qué debemos demostrar?

1. $R \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$. ✓
2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.
3. Para toda otra relación transitiva R' con $R \subseteq R'$ se cumple:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$$

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Demostración: $R^t \;=\; \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

2. $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

PD: Si $(x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$, entonces $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

Supongamos que $(x,y) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ y $(y,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$.

$\Rightarrow$ existe k y j tal que $(x,y) \in R^k$ y $(y,z) \in R^j$.

$\Rightarrow$ $(x,z) \in R^k \circ R^j = R^{k+j}$

$\Rightarrow$ $(x,z) \in \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$ es transitiva.

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Demostración: $R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$

3. Para toda R' transitiva con $R \subseteq R'$ se cumple: $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$.

Sea R' transitiva tal que $R \subseteq R'$.

PD: para todo $i \geq 1$, $R^i \subseteq R'$. (por inducción)

Caso base: $i = 1$. ✓

Caso inductivo: se cumple $R^i \subseteq R'$ y demostramos que $R^{i+1} \subseteq R'$.

Supongamos que $(x,z) \in R^{i+1}$. (**PD**: $(x,z) \in R'$)

$\Rightarrow$ existe $y \in A$, tal que $(x,y) \in R^i$ y $(y,z) \in R$.

$\Rightarrow$ $(x,y) \in R'$ y $(y,z) \in R'$. (¿por qué?)

$\Rightarrow$ $(x,z) \in R'$. (¿por qué?)

Por lo tanto, $\bigcup_{i=1}^{\infty} R^i \subseteq R'$. $\square$

¿cómo calculamos la clausura transitiva de una relación?

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación.

Proposición

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación. Entonces:

$$R^t = \bigcup_{i=1}^{\infty} R^i$$

Algunas preguntas:

- Dado un R finito, ¿podemos computar R^t?
- ¿es verdad que $\left(R^t\right)^t = R^t$?

Demostración (ejercicio)