Lógica proposicional

Clase 01

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Razonamiento lógico

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro y Sofía estudiaron para la I1.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

¿por qué es válido este razonamiento?

Razonamiento lógico

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro **o** Sofía estudiaron para la I1.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

¿y ahora? ¿és válido este razonamiento?

Razonamiento lógico

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro **no** estudió para la I1.

Por lo tanto, Pedro **no** obtendrá una buena nota.

¿és válido este razonamiento ?

Lógica

Lógica es el uso y estudio del razonamiento válido.

Wikipedia

¿cómo podemos decir cuál es un **razonamiento válido** y cuál no?

Lógica y razonamiento válido

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿és válido este razonamiento?

Lógica y razonamiento válido

Existen hombres mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿por qué este razonamiento **NO** es válido?

Lógica y razonamiento válido

Creo que todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿és este razonamiento válido o no?

Conclusión

La lógica y el razonamiento dependen del **lenguaje**.

¿podemos usar el **lenguaje** natural para estudiar el razonamiento?

Paradojas en el lenguaje natural

- Podemos representar los números naturales usando **oraciones**.
  - "Mil quinientos veinte", "el primer número", ...
- El **número de palabras** en el Diccionario de la Real Academia es finito.
- El **número de oraciones** con a los más 50 palabras también es finito.

Defina el siguiente número ...

"El ***primer número natural*** *que* ***NO*** *puede ser definido por una oración con a lo más 50 palabras tomadas del Diccionario de la Real Academia."*

¿és correcta esta definición?

Necesitamos un lenguaje formal para estudiar el razonamiento

Estudiaremos dos **lenguajes** o “lógicas” en este curso:

- Lógica proposicional.
- Lógica de predicados (un fragmento de lógica de primer orden).

Ambas son lenguajes formales para estudiar una forma de “**razonamiento**”

¿por qué necesitamos estas lógicas?

Queremos usar este lenguaje en nuestro razonamiento matemático :

- Definición de **objetos** matemáticos:
  conjunto, números naturales, números reales.

- Definición de **teorías** matemáticas:
  teoría de conjuntos, teoría de los número naturales.

- Formalizar el concepto de **demostración**.

¿por qué necesitamos estas lógicas en computación?

Lógica es el **cálculo** de la computación!

1. Bases de datos.
2. Inteligencia artificial.
3. Ingeniería de software.
4. Teoría de la computación.
5. Criptografía.
6. Procesamiento de lenguaje natural.
7. ...

Outline

Outline

Lógica proposicional (LP)

Lenguaje para de estudiar el siguiente tipo de razonamiento:

Si Pedro estudia para la I3, entonces obtendrá una buena nota.

Pedro y Sofía estudiaron para la I3.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

LP se preocupa del **argumento lógico** de la deducción no del significado.

Componentes básicas de LP: proposiciones

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

$$\textbf{verdadera}\ (1) \quad \text{o} \quad \textbf{falsa}\ (0).$$

Ejemplos

- Socrates es mortal. 1
- La luna es una estrella. 0
- El universo es infinito. ?

El valor 1 o 0 es independiente del **significado** de la afirmación.

Componentes básicas de LP: proposiciones

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

verdadera (1) o **falsa** (0).

¿cuáles son proposiciones y cuáles no?

- cuatro más nueve es igual a once ✓
- $4 + 9 = 11$ ✓
- $4 + 9 = 10$ ✓
- $34 + 59$ ✗
- ¿es el cielo azul? ✗

Componentes básicas de LP: proposiciones

Definición

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

$$\textbf{verdadera } (1) \quad \text{o} \quad \textbf{falsa } (0).$$

- Usaremos letras **mayusculas** (como P, Q, R, ...) para denotar proposiciones básicas.
- Decimos que el valor 1 o 0 de una proposición P es su **valor de verdad**.

Nos interesa el valor de P y **NO su significado**.

Componentes básicas de LP: conectivos lógicos

LP usa **conectivos** muy sencillos para crear **proposiciones** más complejas.

Conectivos	**Ejemplo**	**Significado**
$\wedge$	$P \wedge Q$	"P y Q"
$\vee$	$P \vee Q$	"P o Q"
$\neg$	$\neg P$	"no P"
$\rightarrow$	$P \rightarrow Q$	"si P entonces Q"
$\leftrightarrow$	$P \leftrightarrow Q$	"P si, y solo si, Q"

Componentes básicas de LP: conectivos lógicos

LP usa **conectivos** muy sencillos para crear **proposiciones** más complejas.

Ejemplos

- $\neg$ El universo es finito
- Pedro estudió para la I1 $\wedge$ Sofía estudió para la I1
- Pedro estudió para la I1 $\rightarrow$ Pedro obtuvo una buena nota

El **valor de verdad** de estas proposiciones
depende del valor de verdad de las proposiciones **básicas**.

Conectivos lógicos: Negación ($\neg$)

Definición

El valor de verdad de una **negación** $\neg P$ es verdadera si P es falsa, y falsa si P es verdadera.

P	$\neg P$
0	1
1	0

Conectivos lógicos: Conjunción ($\wedge$)

Definición

El valor de verdad de una **conjunción** $P \wedge Q$ es **verdadera** si P y Q son verdaderos, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

"$P \wedge Q$ es ***verdadero*** *si P y Q son* ***verdaderas****, simultaneamente"*

Conectivos lógicos: Disyunción ($\vee$)

Definición

El valor de verdad de una **disyunción** $P \vee Q$ es **verdadera** si P o Q son verdaderos, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

"$P \vee Q$ es ***falso*** *si P y Q son* ***falsas****, simultaneamente"*

Notar que $P \vee Q$ es un "o" **inclusivo**.

Proposición compuesta

Definición

Decimos que una proposición es **compuesta** si es una proposición básica, o la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), o disyunción ($\vee$) de prop. compuestas.

Ejemplos

- $P \wedge (Q \vee R)$
- $\neg(R \vee (Q \wedge (\neg P)))$

Proposición compuesta

Definición

Decimos que una proposición es **compuesta** si es una proposición básica, o la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), o disyunción ($\vee$) de prop. compuestas.

El **valor de verdad** de una proposición **compuesta** corresponde a la evaluación recursiva de sus conectivos lógicos y proposiciones básicas.

¿cuál es el valor de verdad de las proposiciones compuestas?

Si P es verdadero, Q es falso y R es verdadero , entonces:

- $P \wedge (Q \vee R)$
- $(P \wedge (\neg Q)) \vee (R \wedge (\neg P))$

Más conectivos lógicos: condicional ($\rightarrow$)

Definición

El valor de verdad de un **condicional** $P \rightarrow Q$ es **falso** si P es verdadero y Q es falso, y verdadero de lo contrario.

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

"$P \rightarrow Q$ es ***verdadero*** *si P implica Q, esto es,*
si P es verdadero entonces necesariamente Q es verdadero"

Notar que si P es **falso**, entonces
$P \rightarrow Q$ es verdadero **sin importar** el valor de Q.

Más conectivos lógicos: bicondicional ($\leftrightarrow$)

Definición

El valor de verdad de un **bicondicional** $P \leftrightarrow Q$ es **verdadero** si P y Q tienen el mismo valor de verdad, y falso de lo contrario.

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

"$P \leftrightarrow Q$ es ***verdadero*** *si,*
P es verdadero si, y solo si, Q es verdadero"

Proposición compuesta (revisitado)

(re)Definición

Decimos que una proposición es **compuesta** si es una proposición básica, o la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), **condicional** ($\rightarrow$), **bicondicional** ($\leftrightarrow$) de proposiciones compuestas.

El **valor de verdad** de una proposición **compuesta** corresponde a la evaluación recursiva de sus conectivos lógicos y proposiciones básicas.

¿cuál es el valor de verdad de las proposiciones compuestas?

Si P es verdadero, Q es falso y R es verdadero , entonces:

- $(P \rightarrow Q) \leftrightarrow (P \wedge Q)$
- $P \leftrightarrow ((\neg Q) \rightarrow R)$

Paréntesis y precedencia

Simplificación de formulas y parentésis

Desde ahora asumiremos el siguiente orden de precedencia entre operadores:

Conectivo	**Precedencia**
$\neg$	1
$\wedge$	2
$\vee$	3
$\rightarrow$	4
$\leftrightarrow$	5

Ejemplo

- $P \wedge \neg Q \vee R \wedge Q \;=\; ((P \wedge (\neg Q)) \vee (R \wedge Q))$
- $P \wedge Q \rightarrow R \vee Q \;=\; ((P \wedge Q) \rightarrow (R \vee Q))$

Outline

Variables y formulas

Definiciones

Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazada por los valores 1 o 0.

Una **formula proposicional** α es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores 1 o 0, o
3. la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de formulas proposicionales.

Ejemplos

- $\alpha(p, q, r) \ := \ p \wedge (q \rightarrow r)$
- $\beta(p, q) \ := \ (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$

Variables y formulas

Definiciones

Una **variable proposicional** p es una variable que puede ser reemplazada por los valores `1` o `0`.

Una **formula proposicional** α es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores `1` o `0`, o
3. la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de formulas proposicionales.

Notación

- variables proposicionales las denotaremos por letras **minúsculas** como p, q, r, s, etc.
- formulas proposicionales las denotaremos por letras griegas junto con sus variables libres como $\alpha(p, q)$, $\beta(p, q, r)$, $\gamma(p_1, \ldots, p_n)$, etc.

Valuaciones (o asignación de verdad)

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ una formula con variables $p_1, \ldots, p_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ una secuencia de valores 1 o 0.

Definición

Una **valuación** (o asignación de verdad) $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$ es el **valor de verdad** que resulta al considerar α como una proposición y $p_1, \ldots, p_n$ como proposiciones atómicas con valores de verdad $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente.

Ejemplos

Si $\alpha(p, q, r) \ := \ p \wedge (q \to r)$ y $\beta(p, q) \ := \ (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$, entonces:

- $\alpha(1, 0, 1)$
- $\alpha(0, 0, 0)$
- $\beta(0, 1)$

Valuaciones (o asignación de verdad)

Sea $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ una formula con variables $p_1, \ldots, p_n$ y $v_1, \ldots, v_n$ una secuencia de valores 1 o 0.

Definición

Una **valuación** (o asignación de verdad) $\alpha(v_1, \ldots, v_n)$ es el **valor de verdad** que resulta al considerar α como una proposición y $p_1, \ldots, p_n$ como proposiciones atómicas con valores de verdad $v_1, \ldots, v_n$, respectivamente.

Interpretación de formulas y valuaciones

1. $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ define una **función** desde $\{1, 0\}^n$ en $\{1, 0\}$

$$\alpha : \{1, 0\}^n \to \{1, 0\}$$

2. $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ es una proposición compuesta, $p_1, \ldots, p_n$ son proposiciones básicas y las valuaciones son "**posibles mundos**".

Tablas de verdad

Si vemos $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ como una **función**,
entonces podemos enumerar su "comportamiento" en una tabla!

Ejemplo

Para la formula $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$ tenemos que:

p	q	r	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Tablas de verdad

Si vemos $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ como una **función**,
entonces podemos enumerar su "comportamiento" en una tabla!

Ejemplo

Para la formula $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$ tenemos

p	q	r	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
	$\ldots$		$\ldots$
v_1	v_2	v_3	$\alpha(v_1, v_2, v_3)$

Esta tabla se conoce como la **tabla de verdad** de la formula $\alpha(p, q, r)$.

¿cuántas **filas** tiene la tabla de verdad de una formula $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$?

Tautología y contradicciones

Definición

Decimos que una formula $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ es:

- una **tautología** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- una **contradicción** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

¿qué propiedad tiene que cumplir la tabla de verdad de $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ para que α sea una **tautología**/**contradicción**?

Tautología y contradicciones

Definición

Decimos que una formula $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ es:

- una **tautología** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$$

- una **contradicción** si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$$

¿cuáles formulas son tautologías/contradicciones?

- $p \vee \neg p$
- $p \wedge \neg p$
- $(p \leftrightarrow p) \rightarrow p$

Outline

Equivalencia lógica entre formulas

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta(p_1, \ldots, p_n)$ dos formulas proposicionales con las mismas variables proposicionales.

Decimos que α y β son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si para toda valuación $v_1, \ldots, v_n$ se cumple que:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) = \beta(v_1, \ldots, v_n)$$

¿qué propiedad tienen que cumplir las **tablas de verdad** de α y β para que α y β sean **lógicamente equivalentes**?

Equivalencia entre formulas

Ejemplo

Para las formulas $p \wedge (q \vee r)$ y $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$:

p	q	r	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Como ambas formulas son equivalentes para toda valuación, entonces:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Podemos demostrar varias **equivalencias útiles** de esta manera.

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes** :

1. **Conmutatividad**:

$$
\begin{aligned}
p \wedge q &\equiv q \wedge p \\
p \vee q &\equiv q \vee p
\end{aligned}
$$

2. **Asociatividad**:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \wedge r) &\equiv (p \wedge q) \wedge r \\
p \vee (q \vee r) &\equiv (p \vee q) \vee r
\end{aligned}
$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

3. **Idempotente**:

$$
\begin{aligned}
p \wedge p &\equiv p \\
p \vee p &\equiv p
\end{aligned}
$$

4. **Doble negación**:

$$\neg\neg p \equiv p$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

5. **Distributividad**:

$$
\begin{aligned}
p \wedge (q \vee r) &\equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \\
p \vee (q \wedge r) &\equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)
\end{aligned}
$$

6. **De Morgan**:

$$
\begin{aligned}
\neg(p \wedge q) &\equiv \neg p \vee \neg q \\
\neg(p \vee q) &\equiv \neg p \wedge \neg q
\end{aligned}
$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

7. **Implicación**:

$$\begin{aligned} p \to q &\equiv \neg p \vee q \\ p \to q &\equiv \neg q \to \neg p \\ p \leftrightarrow q &\equiv (p \to q) \wedge (q \to p) \end{aligned}$$

8. **Absorción**:

$$\begin{aligned} p \vee (p \wedge q) &\equiv p \\ p \wedge (p \vee q) &\equiv p \end{aligned}$$

Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

9. **Identidad**:

$$\begin{aligned} p \vee 0 &= p \\ p \wedge 1 &= p \end{aligned}$$

10. **Dominación**:

$$\begin{aligned} p \wedge 0 &= 0 \\ p \vee 1 &= 1 \end{aligned}$$

11. **Negación**:

$$\begin{aligned} p \vee \neg p &= 1 \\ p \wedge \neg p &= 0 \end{aligned}$$

Verifique las equivalencias lógicas anteriores.

(Composición de formulas proposicionales)

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y β_1, ..., β_n formulas proposicionales.

La **composición** $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es la formula resultante de reemplazar en α cada aparición de la variable p_i por la formula β_i para todo $i \leq n$.

Ejemplo

- $\alpha(p, q) \ := \ p \wedge (q \vee \neg p)$
- $\beta_1(r, s) \ := \ (r \wedge \neg s)$
- $\beta_2(t, u) \ := \ (t \rightarrow u)$

$$\alpha(\beta_1(r, s), \beta_2(t, u)) \ := \ (r \wedge \neg s) \wedge ((t \rightarrow u) \vee \neg(r \wedge \neg s))$$

(Composición de formulas proposicionales)

Definición

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta_1, \ldots \beta_n$ formulas proposicionales.

La **composición** $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ es la formula resultante de reemplazar en α cada aparición de la variable p_i por la formula β_i para todo $i \leq n$.

Teorema

Sean $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$, $\alpha'(p_1, \ldots, p_n)$ y $\beta_1, \ldots, \beta_n$ formulas proposicionales.

Si $\alpha(p_1, \ldots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \ldots, p_n)$, entonces $\alpha(\beta_1, \ldots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

¿qué implicancias tiene esta teorema para las **equivalencias útiles**?

(Composición de formulas proposicionales)

Demostración

Sean $\alpha(p, q)$, $\alpha'(p, q)$, $\beta_1(r, s)$ y $\beta_2(r, s)$ formulas tal que:

$$\alpha(p, q) \quad \equiv \quad \alpha'(p, q)$$

¿qué debemos demostrar?

(Composición de formulas proposicionales)

Demostración

Sean $\alpha(p,q)$, $\alpha'(p,q)$, $\beta_1(r,s)$ y $\beta_2(r,s)$ formulas tal que:

$$\alpha(p,q) \equiv \alpha'(p,q)$$

Considere una valuación cualquiera (v_1, v_2) y defina los valores de verdad:

$$\begin{aligned} v_1' &:= \beta_1(v_1, v_2) \\ v_2' &:= \beta_2(v_1, v_2) \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \alpha(\beta_1(v_1,v_2), \beta_2(v_1,v_2)) &= \alpha(v_1', v_2') \\ &= \alpha'(v_1', v_2') \\ &= \alpha'(\beta_1(v_1,v_2), \beta_2(v_1,v_2)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha(\beta_1(r,s), \beta_2(r,s)) \equiv \alpha'(\beta_1(r,s), \beta_2(r,s))$ $\square$

¿para qué nos sirven las equivalencias lógicas?

Ejemplo

¿ $\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q$?

$$
\begin{array}{rcll}
\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) & \equiv & \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) & \text{(De Morgan)} \\
& \equiv & \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) & \text{(De Morgan)} \\
& \equiv & \neg p \wedge (p \vee \neg q) & \text{(doble neg.)} \\
& \equiv & (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) & \text{(distrib.)} \\
& \equiv & 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) & (\neg p \wedge p \equiv 0) \\
& \equiv & (\neg p \wedge \neg q) \vee 0 & \text{(conmut.)} \\
& \equiv & \neg p \wedge \neg q & \text{(identidad)}
\end{array}
$$