Lógica de predicados

Clase 04

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Lógica proposicional y sus limitaciones

Todos los hombres son mortales.

Sócrates es hombre.

Por lo tanto, Sócrates es mortal.

¿cómo podemos modelar esta deducción en **lógica proposicional**?

Lógica proposicional y sus limitaciones

Todo número natural es par o impar

2 no es impar

Por lo tanto, 2 es par

¿cómo podemos modelar esta deducción en **lógica proposicional**?

¿qué le falta a la lógica proposicional?

- objetos (no solo proposiciones).
- predicados.
- cuantificadores: **para todo** ($\forall$) o **existe** ($\exists$).

Lógica de predicados

Lógica de predicados $\subseteq$ Lógica de primer orden

Lógica nos permitirá expresar propiedades de estructuras como:

- Números naturales, enteros, racionales, reales, ...
- Conjuntos, relaciones, ...
- Grafos, árboles, palabras, ...

Podremos definir propiedades como:

- Para todo hombre x, x es mortal.
- Para todo número n, existe un m tal que $n \geq m$.

Outline

Outline

Predicados

Cuantificadores

Predicados

Ejemplos

1. x es par
2. $x \leq y$
3. $x + y = z$

¿cuál de estos ejemplos son **proposiciones**?

Ninguno!!

Pero, si reemplazamos las **variables** por objetos obtenemos **proposiciones**:

1. 2 es par, 3 es par, ...
2. $2 \leq 3$, $6 \leq 0$, $10 \leq 5$, ...
3. $10 + 5 = 15$, $3 + 8 = 1$, ...

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cual es evaluado.

Ejemplos

- $P(x) :=$ x es par
- $R(x) :=$ x es primo
- $M(x) :=$ x es mortal

Predicados

Definición

- Un **predicado** $P(x)$ es una proposición abierta,
  cuyo valor de verdad depende del objeto en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x)$ y un valor a,
  la **valuación** $P(a)$ es el valor de verdad del predicado $P(x)$ en a.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $P(x)$:= x es par
- $R(x)$:= x es primo
- $M(x)$:= x es mortal

$$P(2) \qquad P(3) \qquad R(31) \qquad M(\text{Socrates}) \qquad M(\text{Zeus})$$

Predicados n-arios

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cual es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$,
  la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

¿cuál es el valor de verdad de las siguientes valuaciones?

- $O(x, y) \ := \ x \leq y$
- $S(x, y, z) \ := \ x + y = z$
- $Padre(x, y) \ := \ x$ es padre de y

$O(2, 3) \qquad S(5, 10, 15) \qquad S(4, 12, 1) \qquad Padre(\text{Homero}, \text{Bart})$

¿cuál es el valor de verdad de $O(\frac{2}{3}, \frac{4}{7})$? ¿$O(\text{Homero}, \text{Bart})$?

Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.

- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Ejemplos depredicados y sus dominios

- $O(x, y) \ := \ x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$

- $S(x, y, z) \ := \ x + y = z$ sobre $\mathbb{Q}$

- $Padre(x, y) \ := \ x$ es padre de y sobre todas las personas

Predicados y dominio

Definición

- Un **predicado n-ario** $P(x_1, \ldots, x_n)$ es una prop. abierta con n variables, cuyo valor de verdad depende de los objetos en el cuál es evaluado.
- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$ y valores $a_1, \ldots, a_n$, la **valuación** $P(a_1, \ldots, a_n)$ es el valor de verdad de P en $a_1, \ldots, a_n$.
- Todos los predicados están restringidos a un **dominio** de evaluación.

Notación

- Para un predicado $P(x_1, \ldots, x_n)$, diremos que $x_1, \ldots, x_n$ son las **variables libres** de P.
- Un predicado **0-ario** es un predicado sin variables y tiene valor de verdad verdadero o falso sin importar la valuación.

Predicados compuestos (o formulas)

Definición

Un predicado es **compuesto** si es un predicado básico, o
la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el **mismo dominio**.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus conectivos lógicos y predicados básicos.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $P'(x) \; := \; \neg P(x)$
- $O'(x, y, z) \; := \; O(x, y) \wedge O(y, z)$
- $P''(x, y) \; := \; (P(x) \wedge P(y)) \rightarrow O(x, y)$

Outline

Cuantificador universal

Sea $P(x, y_1, \dots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

Definición

- Definimos el cuantificador **universal**:

$$P'(y_1, \dots, y_n) \;:=\; \forall x.\, P(x, y_1, \dots, y_n)$$

  donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \dots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \dots, b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, \dots, b_n) \;=\; 1$$

  si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \dots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador universal (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \forall x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **para todo** a en D se tiene que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \forall x.\, O(x, y)$ $\qquad O'(2) = \forall x.\, O(x, 2)$
- $O''(x) := \forall y.\, O(x, y)$ $\qquad O''(0) = \forall y.\, O(0, y)$
- $P_0 \ := \ \forall x.\, P(x)$
- $P_0' \ := \ \forall x.\, \big(P(x) \vee \neg P(x)\big)$

Cuantificador existencial

Sea $P(x, y_1, \ldots, y_n)$ un predicado compuesto con dominio D.

Definición

- Definimos el cuantificador **existencial**:

$$P'(y_1, \ldots, y_n) \ := \ \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$$

donde x es la **variable cuantificada** y $y_1, \ldots, y_n$ son las **variables libres**.

- Para $b_1, \ldots, b_n$ en D, definimos la valuación:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \ = \ 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Cuantificador existencial (ejemplos)

Definición

Para $b_1, \ldots, b_n$ en D y $P'(y_1, \ldots, y_n) \;:=\; \exists x.\, P(x, y_1, \ldots, y_n)$, definimos:

$$P'(b_1, \ldots, b_n) \;=\; 1$$

si **existe** a en D tal que $P(a, b_1, \ldots, b_n) = 1$, y 0 en otro caso.

Ejemplos

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x, y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{N}$:

- $O'(y) := \exists x.\, O(x, y)$ $\qquad O'(2) = \exists x.\, O(x, 2)$
- $O''(x) := \exists y.\, O(x, y)$ $\qquad O''(2) = \exists y.\, O(2, y)$
- $O'''(x, y) := \exists z.\, O(x, z) \land O(z, y)$ $\qquad O'''(1, 2)$
- $P_0 \;:=\; \exists x.\, P(x)$

Interpretación de cuantificadores

Sea $P(x)$ un predicado compuesto sobre el **dominio** $D = \{a_1, a_2, \ldots\}$.

Los cuantificadores **universal** y **existencial** se pueden "interpretar" como:

$$\forall x.\, P(x) \quad := \quad P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge P(a_3) \wedge \ldots \quad = \quad \bigwedge_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

$$\exists x.\, P(x) \quad := \quad P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \ldots \quad = \quad \bigvee_{i=1}^{\infty} P(a_i)$$

Es posible combinar cuantificadores

¿qué significan las siguientes formulas?

Para los predicados $P(x) := x$ es par y $O(x,y) := x \leq y$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $\forall x.\, \forall y.\, O(x,y)$
- $\exists x.\, \exists y.\, O(x,y)$
- $\forall x.\, \exists y.\, O(x,y)$
- $\exists x.\, \forall y.\, O(x,y)$
- $\forall x.\, P(x) \to \exists y.\, O(x,y)$

Predicados compuestos (con cuantificadores)

(re)Definición

Decimos que una predicado es **compuesto** (o también formula) si es:

- un predicado básico,
- la negación ($\neg$), conjunción ($\wedge$), disyunción ($\vee$), condicional ($\rightarrow$), bicondicional ($\leftrightarrow$) de predicados compuestos sobre el mismo dominio o
- la cuatificación **universal** ($\forall$) o **existencial** ($\exists$) de un pred. compuesto.

El **valuación** de un predicado **compuesto** corresponde a la valuación recursiva de sus cuantificadores, conectivos lógicos y predicados básicos.

Predicados compuestos (mas ejemplos)

¿qué representan las siguientes formulas?

Para los predicados $x \leq y$, $x = y$, e $x + y = z$ sobre $\mathbb{Z}$:

- $C(x) \ := \ x + x = x$
- $L(x, y) \ := \ x \leq y \ \wedge \ \neg(x = y)$
- $S(x, y) \ := \ L(x, y) \wedge \neg\exists z. \, (L(x, z) \ \wedge \ L(z, y))$
- $U(x) \ := \ \exists y. \, S(y, x) \wedge C(y)$
- $I \ := \ \forall x. \, \exists y. \, \exists z. \ C(z) \wedge x + y = z$

Outline

¿de qué depende si una formula sea verdadera o falsa?

¿es la formula verdadera o falsa?

$$\alpha = \exists x.\, \forall y.\, x \leq y$$

- si el "dominio" donde se evalúa α son los naturales.
- si el "dominio" donde se evalúa α son los enteros.
- si el "dominio" donde se evalúa α son nombres de personas. (?)

Depende de la **interpretación** (significado) del dominio y el símbolo $\leq$.

Interpretaciones

Notación

Desde ahora, diremos que $P(x_1, \ldots, x_n)$ es un **símbolo de predicado**.

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Interpretaciones

Definición

Una **interpretación** $\mathcal{I}$ para sím. de predicado $P_1, \ldots, P_m$ se compone por:

1. un **dominio** $\mathcal{I}(dom)$ y
2. para cada símbolo P_i un **predicado** $\mathcal{I}(P_i)$.

Ejemplos

Considere los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$.

- $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) & := & x \neq 1 \\ \mathcal{I}_1(O) & := & x \text{ divide a } y \end{array}$$

- $$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) & := & x < 0 \\ \mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0 \end{array}$$

Interpretaciones

Definición

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \vDash \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Ejemplos

Para los símbolos $P(x)$ y $O(x, y)$:

$$\begin{array}{lll} \mathcal{I}_1(dom) & := & \mathbb{N} \\ \mathcal{I}_1(P) & := & x \neq 1 \\ \mathcal{I}_1(O) & := & x \text{ divide a } y \end{array} \qquad \begin{array}{lll} \mathcal{I}_2(dom) & := & \mathbb{Z} \\ \mathcal{I}_2(P) & := & x < 0 \\ \mathcal{I}_2(O) & := & x + y = 0 \end{array}$$

- $\mathcal{I}_1 \vDash \forall x. \exists y. P(y) \land O(x, y)$?
- $\mathcal{I}_2 \vDash \forall x. \exists y. P(y) \land O(x, y)$?

Interpretaciones

Definición

Sea $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$ una formula y $\mathcal{I}$ una interpretación de los símbolos en α.

Diremos que la interpretación $\mathcal{I}$ **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$:

$$\mathcal{I} \models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

si $\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ es **verdadero** al evaluar cada símbolo en α según $\mathcal{I}$.

Si $\mathcal{I}$ **NO** **satisface** α sobre $a_1, \ldots, a_n$ en $\mathcal{I}(dom)$ lo anotaremos como:

$$\mathcal{I} \not\models \alpha(a_1, \ldots, a_n)$$

$\mathcal{I} \models \alpha$ se puede leer como:
"α es **verdadero** bajo el dominio y predicados dados por $\mathcal{I}$."