NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

Nº LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 4 – Respuesta Pregunta 1

Dado un alfabeto $\Sigma = \{a_1, ..., a_n\}$ se define la relación binaria $\sim$ sobre el conjunto Σ^*, de la siguiente manera. Dadas dos palabras u y v en Σ^*, diremos que $u \sim v$ si, y sólo si, existen $i, j > 0$ tal que $u^i = v^j$.

Queremos demostrar que $\sim$ es refleja, es decir, se cumple que $\forall a \in \Sigma^*.(a, a) \in \sim$ **(1)**.

Sea a una palabra cualquiera tal que $a \in \Sigma^*$.

Tenemos que si existen $i, j > 0$ tal que $a^i = a^j$, entonces $(a, a) \in \sim$. La igualdad $a^i = a^j$ se cumple para todo $i = j > 0$ (siempre existe un par i y j tal que se cumple la igualdad). Esto implica que $(a, a) \in \sim$ es válido para toda palabra $a \in \Sigma^*$ (lo que corresponde a **(1)**).

Por lo tanto, $\sim$ es refleja.

Al mismo tiempo, queremos demostrar también que $\sim$ es simétrica, es decir, se cumple que $\forall u, v \in \Sigma^*.(u, v) \in \sim \implies (v, u) \in \sim$ **(2)**.

Sean u y v palabras tal que $u \in \Sigma^*$ y $v \in \Sigma^*$.

Caso 1: Si no existen $i, j > 0$ tal que $u^i = v^j$, entonces tenemos que $(u, v) \notin \sim$, por lo tanto toda la expresión **(2)** se hace verdadera para estos casos.

Caso 2: Si existen $i, j > 0$ tal que $u^i = v^j$, entonces tenemos que $(u, v) \in \sim$. Dado que la igualdad es simétrica, tenemos que también existen $n = j > 0$ y $m = i > 0$ tal que $v^n = u^m$, y por lo tanto, también se cumple que $(v, u) \in \sim$. Al ser tanto $(u, v) \in \sim$ como $(v, u) \in \sim$ verdaderos, toda le expresión **(2)** se hace verdadera para estos casos.

Por lo tanto, $\sim$ es también simétrica. $\square$

Queremos demostrar que $\sim$ es transitiva, es decir, se cumple que
$\forall a, b, c \in \Sigma^*.((a, b) \in\sim \ \wedge \ (b, c) \in\sim) \implies (a, c) \in\sim$ **(3)**.

Sean a, b, y c palabras cualquiera tal que $a, b, c \in \Sigma^*$.

Supongamos que se cumplen simultáneamente que existen $i, j > 0$ tal que $a^i = b^j$ (o $(a, b) \in\sim$), y que existen $m, n > 0$ tal que $b^m = c^n$ (o $(b, c) \in\sim$). Tenemos que debe existir un $k > 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $kj = m$ y $b^{kj} = b^m$. Tenemos también que $b^{kj} = (b^j)^k$. Entonces, podemos reescribir la igualdad $(b^j)^k = c^n$ como $(a^i)^k = c^n$, lo que corresponde a $a^{ki} = c^n$. Por lo tanto, se comprueba que existen $i, j > 0$ tal que $a^i = c^j$, lo que implica que $(a, c) \in\sim$ y que por lo tanto todo **(3)** es verdadero.

Para los otros casos, y sin pérdida de generalidad, supongamos que no se cumple simultáneamente que existen $i, j > 0$ tal que $a^i = b^j$, y que existen $m, n > 0$ tal que $b^m = c^n$. Esto implica que $(a, b) \in\sim \ \wedge \ (b, c) \in\sim$ es falso, por lo tanto todo **(3)** es verdadero.

Dado que **(3)** se cumple en todo caso y para todo $a, b, c \in \Sigma^*$, podemos concluir que $\sim$ es transitiva. $\square$