

# Equivalencia lógica y formas normales

Clase 02

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

# Recordatorio última clase...

## Proposiciones

Una **proposición** es una afirmación que puede ser:

**verdadera** (1) o **falsa** (0).

## Conectivos lógicos

$p$	$q$	$\neg p$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Estos conectivos los usamos para crear proposiciones compuestas

# Recordatorio última clase...

## Variables y formulas

Una **variable proposicional**  $p$  es una variable que puede ser reemplazada por los valores 1 o 0.

Una **formula proposicional**  $\alpha$  es una formula que puede ser:

1. una variable proposicional,
2. los valores 1 o 0, o
3. la negación ( $\neg$ ), conjunción ( $\wedge$ ), disyunción ( $\vee$ ), condicional ( $\rightarrow$ ), bicondicional ( $\leftrightarrow$ ) de formulas proposicionales.

# Recordatorio última clase...

Sea  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  una formula con variables  $p_1, \dots, p_n$  y  $v_1, \dots, v_n$  una secuencia de valores 1 o 0.

## Valuaciones (o asignación de verdad)

Una **valuación** (o asignación de verdad)  $\alpha(v_1, \dots, v_n)$  es el **valor de verdad** que resulta al considerar  $\alpha$  como una proposición y  $p_1, \dots, p_n$  como proposiciones atómicas con valores de verdad  $v_1, \dots, v_n$ , respectivamente.

## Ejemplos

Si  $\alpha(p, q, r) := p \wedge (q \rightarrow r)$  y  $\beta(p, q) := (p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge 1)$ , entonces:

- $\alpha(1, 0, 1) = 1$
- $\alpha(0, 0, 0) = 0$
- $\beta(0, 1) = 1$

## Recordatorio última clase...

### Ejemplo (Tabla de verdad)

Para la formula  $\alpha(p, q, r) := (\neg p \vee q) \wedge r$  tenemos

$p$	$q$	$r$	$(\neg p \vee q) \wedge r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Esta tabla se conoce como la **tabla de verdad** de la formula  $\alpha(p, q, r)$ .

¿qué es una **tautología**? ¿qué es una **contradicción**?

# Outline

Equivalencia lógica

Formas normales

# Outline

Equivalencia lógica

Formas normales

# Equivalencia lógica entre formulas

## Definición

Sean  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  y  $\beta(p_1, \dots, p_n)$  dos formulas proposicionales con las mismas variables proposicionales.

Decimos que  $\alpha$  y  $\beta$  son **lógicamente equivalentes**:

$$\alpha \equiv \beta$$

si para toda valuación  $v_1, \dots, v_n$  se cumple que:

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = \beta(v_1, \dots, v_n)$$

¿qué propiedad tienen que cumplir las **tablas de verdad** de  $\alpha$  y  $\beta$  para que  $\alpha$  y  $\beta$  sean **lógicamente equivalentes**?



# Equivalencia entre formulas

## Ejemplo

Para las formulas  $p \wedge (q \vee r)$  y  $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$  :

$p$	$q$	$r$	$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1

Como ambas formulas son equivalentes para toda valuación, entonces:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Podemos demostrar varias **equivalencias útiles** de esta manera.

# Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes** :

## 1. Conmutatividad:

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

## 2. Asociatividad:

$$p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

# Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

## 3. Idempotente:

$$p \wedge p \equiv p$$

$$p \vee p \equiv p$$

## 4. Doble negación:

$$\neg\neg p \equiv p$$

# Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

## 5. Distributividad:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

## 6. De Morgan:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

# Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

## 7. Implicación:

$$p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \neg q \rightarrow \neg p$$

$$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

## 8. Absorción:

$$p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

# Equivalencias útiles

Las siguientes formulas son **lógicamente equivalentes**:

## 9. Identidad:

$$p \vee 0 = p$$

$$p \wedge 1 = p$$

## 10. Dominación:

$$p \wedge 0 = 0$$

$$p \vee 1 = 1$$

## 11. Negación:

$$p \vee \neg p = 1$$

$$p \wedge \neg p = 0$$

Verifique las equivalencias lógicas anteriores.

# (Composición de formulas proposicionales)

## Definición

Sean  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  y  $\beta_1, \dots, \beta_n$  formulas proposicionales.

La **composición**  $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$  es la formula resultante de reemplazar en  $\alpha$  cada aparición de la variable  $p_i$  por la formula  $\beta_i$  para todo  $i \leq n$ .

## Ejemplo

$$\blacksquare \alpha(p, q) := p \wedge (q \vee \neg p)$$

$$\blacksquare \beta_1(r, s) := (r \wedge \neg s)$$

$$\blacksquare \beta_2(t, u) := (t \rightarrow u)$$

$$\alpha(\beta_1(r, s), \beta_2(t, u)) := (r \wedge \neg s) \wedge ((t \rightarrow u) \vee \neg(r \wedge \neg s))$$

# (Composición de formulas proposicionales)

## Definición

Sean  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  y  $\beta_1, \dots, \beta_n$  formulas proposicionales.

La **composición**  $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$  es la formula resultante de reemplazar en  $\alpha$  cada aparición de la variable  $p_i$  por la formula  $\beta_i$  para todo  $i \leq n$ .

## Teorema

Sean  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ ,  $\alpha'(p_1, \dots, p_n)$  y  $\beta_1, \dots, \beta_n$  formulas proposicionales.

Si  $\alpha(p_1, \dots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \dots, p_n)$ , entonces  $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

¿qué implicación tiene este teorema para las **equivalencias útiles**?



# (Composición de formulas proposicionales)

## Teorema

Sean  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ ,  $\alpha'(p_1, \dots, p_n)$  y  $\beta_1, \dots, \beta_n$  formulas proposicionales.

Si  $\alpha(p_1, \dots, p_n) \equiv \alpha'(p_1, \dots, p_n)$ , entonces  $\alpha(\beta_1, \dots, \beta_n) \equiv \alpha'(\beta_1, \dots, \beta_n)$ .

## Demostración

Sean  $\alpha(p, q)$ ,  $\alpha'(p, q)$ ,  $\beta_1(r, s)$  y  $\beta_2(r, s)$  formulas tal que:

$$\alpha(p, q) \equiv \alpha'(p, q)$$

¿qué debemos demostrar?

# (Composición de formulas proposicionales)

## Demostración

Sean  $\alpha(p, q)$ ,  $\alpha'(p, q)$ ,  $\beta_1(r, s)$  y  $\beta_2(r, s)$  formulas tal que:

$$\alpha(p, q) \equiv \alpha'(p, q)$$

Considere una valuación cualquiera  $(v_1, v_2)$  y defina los valores de verdad:

$$v'_1 := \beta_1(v_1, v_2)$$

$$v'_2 := \beta_2(v_1, v_2)$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\alpha(\beta_1(v_1, v_2), \beta_2(v_1, v_2)) &= \alpha(v'_1, v'_2) \\ &= \alpha'(v'_1, v'_2) \\ &= \alpha'(\beta_1(v_1, v_2), \beta_2(v_1, v_2))\end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\alpha(\beta_1(r, s), \beta_2(r, s)) \equiv \alpha'(\beta_1(r, s), \beta_2(r, s))$



# ¿para qué nos sirven las equivalencias lógicas?

## Ejemplo

$$\text{¿ } \neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg q \text{ ?}$$

$$\neg(p \vee (\neg p \wedge q)) \equiv \neg p \wedge \neg(\neg p \wedge q) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\equiv \neg p \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \quad (\text{De Morgan})$$

$$\equiv \neg p \wedge (p \vee \neg q) \quad (\text{doble neg.})$$

$$\equiv (\neg p \wedge p) \vee (\neg p \wedge \neg q) \quad (\text{distrib.})$$

$$\equiv 0 \vee (\neg p \wedge \neg q) \quad (\neg p \wedge p \equiv 0)$$

$$\equiv (\neg p \wedge \neg q) \vee 0 \quad (\text{conmut.})$$

$$\equiv \neg p \wedge \neg q \quad (\text{identidad})$$

# Operadores generalizados

Gracias a la **asociatividad** de  $\vee$  y  $\wedge$ , nos ahorraremos los **paréntesis**:

$$(p_1 \vee p_2) \vee p_3 \equiv p_1 \vee (p_2 \vee p_3) \equiv p_1 \vee p_2 \vee p_3$$

$$(p_1 \wedge p_2) \wedge p_3 \equiv p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3) \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge p_3$$

También usaremos una **generalización** de  $\wedge$  y  $\vee$ :

$$\bigwedge_{i=1}^n p_i \equiv p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots \wedge p_n$$

$$\bigvee_{i=1}^n p_i \equiv p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n$$

# Operadores generalizados

## Ejemplo equivalencias generalizadas

**Distributividad:**

$$p \vee \bigwedge_{i=1}^n q_i \equiv \bigwedge_{i=1}^n (p \vee q_i)$$

$$p \wedge \bigvee_{i=1}^n q_i \equiv \bigvee_{i=1}^n (p \wedge q_i)$$

**De Morgan:**

$$\neg \bigwedge_{i=1}^n p_i \equiv \bigvee_{i=1}^n \neg p_i$$

$$\neg \bigvee_{i=1}^n p_i \equiv \bigwedge_{i=1}^n \neg p_i$$

# Outline

Equivalencia lógica

**Formas normales**

# Conectivos ternarios

Queremos definir el conectivo lógico: `if  $p$  then  $q$  else  $r$`

$p$	$q$	$r$	if $p$ then $q$ else $r$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	1

¿cómo se puede representar este conectivo usando  $\neg$ ,  $\wedge$  y  $\rightarrow$ ?

# Conectivos ternarios

**Solución:**  $(p \rightarrow q) \wedge ((\neg p) \rightarrow r)$

$p$	$q$	$r$	if $p$ then $q$ else $r$	$(p \rightarrow q) \wedge ((\neg p) \rightarrow r)$
0	0	0	0	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	1	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	1	1



# Conectivos $n$ -arios

Usando tablas de verdad podemos definir conectivos  $n$ -arios:  $C(p_1, \dots, p_n)$ .

$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{n-1}$	$p_n$	$C(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$
0	0	$\dots$	0	0	$b_1$
0	0	$\dots$	0	1	$b_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\dots$	1	1	$b_{2^n}$

¿és posible representar  $C(p_1, \dots, p_n)$  usando  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$ ?

# Conectivos $n$ -arios

## Ejemplo

$p$	$q$	$r$	$C(p, q, r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$p$	$q$	$r$	$\alpha_4(p, q, r)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

$$\alpha_4(p, q, r) := (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \vee (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee (p \wedge q \wedge r)$$

¿és posible representar  $C(p, q, r)$  usando  $\neg$ ,  $\vee$ ,  $\wedge$ ,  $\rightarrow$  y  $\leftrightarrow$ ?

## Conectivos $n$ -arios

$p_1$	$p_2$	$\dots$	$p_{n-1}$	$p_n$	$C(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n)$
0	0	$\dots$	0	0	$b_1$
0	0	$\dots$	0	1	$b_2$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$v_{i1}$	$v_{i2}$	$\dots$	$v_{i(n-1)}$	$v_{in}$	$b_i$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
1	1	$\dots$	1	1	$b_{2^n}$

Suponiendo que  $v_{i1}, \dots, v_{ij}, \dots, v_{in}$  es la valuación correspondiente a la fila  $i$  con valor  $b_i$  de la tabla de verdad de  $C(p_1, \dots, p_n)$ , entonces:

$$C(p_1, p_2, \dots, p_{n-1}, p_n) \equiv \bigvee_{i: b_i=1} \left( \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Toda tabla de verdad se puede representar con  $\wedge$ ,  $\vee$  y  $\neg$  !!!

# Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

## Definición

Una formula  $\alpha$  está en **Forma Normal Disyuntiva** (DNF) si es una **disyunción de conjunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha = \beta_1 \vee \beta_2 \vee \dots \vee \beta_k$$

con  $\beta_i = (l_{i1} \wedge \dots \wedge l_{ik_i})$  y  $l_{i1}, \dots, l_{ik_i}$  son literales.

¿cuáles formulas están en DNF?

- $(p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge p \wedge s) \vee (r \wedge \neg s)$
- $(s \wedge (p \vee r)) \vee (\neg q \wedge r \wedge s)$
- $(s \wedge r) \vee \neg q \vee r \vee s$

# Formas normales

Un **literal** es una variable proposicional o la negación de una variable.

## Definición

Una formula  $\alpha$  está en **Forma Normal Conjuntiva** (CNF) si es una **conjunción de disyunciones de literales**, o sea, si es de la forma:

$$\alpha = \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \dots \wedge \beta_k$$

con  $\beta_i = (l_{i1} \vee \dots \vee l_{ik_i})$  y  $l_{i1}, \dots, l_{ik_i}$  son literales.

¿cuáles formulas estan en CNF?

- $(p \vee \neg q) \wedge (\neg p \vee p \vee s) \wedge (r \vee \neg s)$
- $(s \wedge r) \wedge (\neg q \vee r \vee s)$

# Formas normales y equivalencia lógica

## Teorema

1. Toda formula  $\alpha$  es **lógicamente equivalente** a una formula en **DNF**.
2. Toda formula  $\alpha$  es **lógicamente equivalente** a una formula en **CNF**.

## Demostración DNF (explicación)

Sea  $\alpha(p_1, \dots, p_n)$  y  $v_{i1}, \dots, v_{in}$  la valuación correspondiente a la  $i$ -ésima fila de la tabla de verdad de  $\alpha$  con valor  $\alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})$ , entonces:

$$\alpha(p_1, \dots, p_n) \equiv \bigvee_{i: \alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})=1} \left( \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)$$

Solo por esta vez, daremos la afirmación de DNF como verdadera sin dar una demostración.

# Formas normales y equivalencia lógica

## Demostración CNF (asumiendo que DNF es verdadera)

Considere la formula  $\neg\alpha(p_1, \dots, p_n)$ . Asumiendo DNF, sabemos que:

$$\begin{aligned}\neg\alpha(p_1, \dots, p_n) &\equiv \bigvee_{i: (\neg\alpha)(v_{i1}, \dots, v_{in})=1} \left( \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right) \\ &\equiv \bigvee_{i: \alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})=0} \left( \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=1} p_j \right) \wedge \left( \bigwedge_{j: v_{ij}=0} \neg p_j \right) \right)\end{aligned}$$

¿cómo usamos lo anterior para demostrar CNF?

# Formas normales y equivalencia lógica

## Demostración (CNF)

Por el teorema de composición de formulas y De Morgan:

$$\begin{aligned}\alpha(p_1, \dots, p_n) &\equiv \neg(\neg\alpha(p_1, \dots, p_n)) \\ &\equiv \neg\left(\bigvee_{i: \alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})=0} \left(\bigwedge_{j: v_{ij}=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j: v_{ij}=0} \neg p_j\right)\right) \\ &\equiv \bigwedge_{i: \alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})=0} \neg\left(\left(\bigwedge_{j: v_{ij}=1} p_j\right) \wedge \left(\bigwedge_{j: v_{ij}=0} \neg p_j\right)\right) \\ &\equiv \bigwedge_{i: \alpha(v_{i1}, \dots, v_{in})=0} \left(\bigvee_{j: v_{ij}=1} \neg p_j\right) \vee \left(\bigvee_{j: v_{ij}=0} p_j\right)\end{aligned}$$

□ (significa “queda esto demostrado”)