Consecuencia lógica y satisfacibilidad

Clase 03

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Modelación en lógica proposicional

Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá un buena nota.

Pedro y Sofía estudiaron para la I1.

Por lo tanto, Pedro obtendrá una buena nota.

¿cómo formalizamos esta **deducción** en lógica proposicional?

¿Cuáles son nuestras proposiciones **básicas**?

$$
\begin{aligned}
PE &:= \text{Pedro estudia para la I1} \\
SE &:= \text{Sofía estudia para la I1} \\
BN &:= \text{Pedro obtiene una buena nota.}
\end{aligned}
$$

¿Cuáles son nuestras proposiciones **compuestas**?

$$
\begin{aligned}
PE \rightarrow BN &:= \text{Si Pedro estudia para la I1, entonces obtendrá un buena nota.} \\
PE \wedge SE &:= \text{Pedro y Sofía estudiaron para la I1}
\end{aligned}
$$

Modelación en lógica proposicional

$$\begin{array}{l} PE \rightarrow BN \\ PE \wedge SE \\ \hline BN \end{array}$$

PE := Pedro estudia para la I1
SE := Sofía estudia para la I1
BN := Pedro obtiene una buena nota.

¿por qué decimos que esta deducción es **válida**?

PE	SE	BN	$PE \rightarrow BN$	$PE \wedge SE$	BN
0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	1

Modelación en lógica proposicional (otro ejemplo)

$$\begin{array}{l} PE \;\vee\; SE \\ \neg PE \;\vee\; SE \\ \hline SE \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} PE & := & \text{Pedro estudia para la I1} \\ SE & := & \text{Sofía estudia para la I1} \\ BN & := & \text{Pedro obtiene una buena nota.} \end{array}$$

¿por qué decimos que esta deducción es **válida**?

PE	SE	$PE \vee SE$	$\neg PE \vee SE$	SE
0	0	0	1	0
0	1	1	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Modelación en lógica proposicional (anti-ejemplo)

$$\begin{array}{l} PE \rightarrow BN \\ PE \vee SE \\ \hline BN \quad \times \end{array}$$

PE := Pedro estudia para la I1

SE := Sofía estudia para la I1

BN := Pedro obtiene una buena nota.

¿por qué decimos que esta deducción es **inválida**?

PE	SE	BN	$PE \rightarrow BN$	$PE \vee SE$	BN	
0	0	0	1	0	0	
0	0	1	1	0	1	
0	1	0	1	1	0	×
0	1	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	0	
1	0	1	1	1	1	
1	1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	1	

Consecuencia lógica

Sea $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ un conjunto de formulas con variables $p_1, \ldots, p_n$.

Definición

- Diremos que α es **consecuencia lógica** de Σ si, y solo si, **para toda valuación** $v_1, \ldots, v_n$ se tiene que:

$$\text{si} \quad \left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1, \quad \text{entonces} \quad \alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1.$$

- Si α es consecuencia lógica de Σ, entonces escribiremos $\Sigma \vDash \alpha$.
- Diremos que $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ son **premisas** y α la **conclusión**.

Ejemplo

- $\{\ q \to p,\ q \wedge s\ \} \ \vDash\ p$
- $\{\ p \vee q,\ \neg p\ \} \ \vDash\ q$

Algunas consecuencias lógicas clásicas

Consecuencias lógicas

1. **Modus ponens**: $\{p, p \to q\} \models q$

p	q	p	$p \to q$	q
0	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

2. **Modus tollens**: $\{\neg q, p \to q\} \models \neg p$

p	q	$\neg q$	$p \to q$	$\neg p$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	1	0	1	0

Algunas consecuencias lógicas clásicas

Consecuencias lógicas

3. **Resolución**: $\{\ p \vee q,\ \neg q \vee r\ \} \models\ p \vee r$

p	q	r	$p \vee q$	$\neg q \vee r$	$p \vee r$
0	0	0	0	1	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1

Sobre consecuencia lógica

¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

- $\{1\} \vDash \alpha$ entonces α es una **tautología**. ✓
- Si α es una **contradicción**, entonces $\{\alpha\} \vDash \beta$ para toda formula β. ✓

¿cuál es la relación entre $\vDash$ y $\rightarrow$?

Outline

Algunas reglas de consecuencia lógica

1. **Modus ponens**: $\{\ p,\ p \to q\ \} \models q$
2. **Modus tollens**: $\{\ \neg q,\ p \to q\ \} \models \neg p$
3. **Silogismo**: $\{\ p \to q,\ q \to r\ \} \models p \to r$
4. **Silogismo disyuntivo**: $\{\ p \vee q,\ \neg p\ \} \models q$
5. **Conjunción**: $\{\ p,\ q\ \} \models p \wedge q$
6. **Simplificación conjuntiva**: $\{\ p \wedge q\ \} \models p$
7. **Aplificación disyuntiva**: $\{\ p\ \} \models p \vee q$
8. **Demostración condicional**: $\{\ p \wedge q,\ p \to (q \to r)\ \} \models r$
9. **Demostración por casos**: $\{\ p \to r,\ q \to r\ \} \models (p \vee q) \to r$

Demuestre cada una de las consecuencias lógicas

¿cómo demostramos que $\Sigma \vDash \alpha$?

1. Verificando todas las valuaciones (tabla de verdad).

2. Deducimos α desde Σ **reusando alguna de las reglas anteriores.**

¿cómo podemos "reusar" las reglas anteriores?

Composición y consecuencia lógica

Sean $\Sigma = \{\alpha_1(p_1, \dots, p_n), \dots, \alpha_m(p_1, \dots, p_n)\}$ y $\beta_1, \dots \beta_n$ formulas proposicionales.

Definición

La **composición** $\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n)$ es el conjunto resultante de componer cada formula en Σ con $\beta_1, \dots, \beta_n$, esto es:

$$\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n) \;=\; \{\alpha_1(\beta_1, \dots, \beta_n), \dots, \alpha_m(\beta_1, \dots, \beta_n)\}$$

Teorema

Sean Σ un conjunto de formulas y $\alpha(p_1, \dots, p_n)$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ formulas.

Si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\Sigma(\beta_1, \dots, \beta_n) \models \alpha(\beta_1, \dots, \beta_n)$.

Demuestre este teorema (muy similar al caso de equivalencia lógica)

¿cómo demostramos que $\Sigma \models \alpha$?

1. Verificando todas las valuaciones (tabla de verdad).

2. **Deducimos** α desde Σ reusando alguna de las reglas anteriores.

¿cómo hacemos esta “deducción”?

Para deducir α desde Σ, necesitamos antes responder las siguientes preguntas

¿cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

1. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \models \alpha$,
   entonces $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta\} \models \alpha$ para toda formula β. ✓

2. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta\} \models \alpha$, entonces $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \models \alpha$. ✕

3. Si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \beta\} \models \alpha$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \models \beta$,
   entonces $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \models \alpha$. ✓

Usando las reglas de consecuencia lógica más 1. y 3.
podemos **deducir** nuevas consecuencias lógicas.

¿cómo demostramos que $\Sigma \models \alpha$?

Ejemplo

¿ $\{\, p,\; p \to q,\; s \vee r,\; \neg s \wedge \neg t \,\} \models q \wedge r$?

1.	p	(Premisa)
2.	$p \to q$	(Premisa)
3.	q	(Modus Ponens 1 y 2)
4.	$s \vee r$	(Premisa)
5.	$\neg s \to r$	(equivalencia con 4.)
6.	$\neg s \wedge \neg t$	(Premisa)
7.	$\neg s$	(Simplificación conjuntiva 6)
8.	r	(Modus Ponens 5 y 7)
9.	$q \wedge r$	(Conjunción 3 y 8)

¿alguna estrategia mejor?

Outline

Satisfacción de un conjunto de formulas

Definiciones

- $\alpha(p_1, \ldots, p_n)$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$:

$$\alpha(v_1, \ldots, v_n) \ = \ 1$$

- $\Sigma = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\}$ con variables $p_1, \ldots, p_n$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \ldots, v_n$ tal que: $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1.$

- Σ es **inconsistente** si NO es satisfacible.

¿qué propiedad cumple la tabla de verdad de una formula satisfacible?
¿y la del conjunto?

Satisfacción de un conjunto de formulas

Definiciones

- $\alpha(p_1, \dots, p_n)$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \dots, v_n$:

$$\alpha(v_1, \dots, v_n) = 1$$

- $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}$ con variables $p_1, \dots, p_n$ se dice **satisfacible** si existe una valuación $v_1, \dots, v_n$ tal que: $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \dots, v_n) = 1.$

- Σ es **inconsistente** si NO es satisfacible.

¿cuál de las siguientes formulas/conjuntos son satisfacibles?

- $(p \vee q \vee r) \wedge (\neg p \vee \neg q \vee \neg r)$
- $\{\ \neg q \vee p,\ \ q \vee \neg r,\ \ \neg p \vee r\ \}$
- $\{\ \neg q \vee p,\ \ \neg p \vee r,\ \ \neg r \vee q,\ \ p \vee q \vee r,\ \ \neg p \vee \neg q \vee \neg r\ \}$

Consecuencia lógica vs satisfacibilidad

Teorema

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \vDash \alpha$ si, y solo si, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

Demostración ($\Rightarrow$)

Suponga que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \vDash \alpha$.

PD: para toda $v_1, \ldots, v_n$ se cumple que $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \wedge \neg\alpha\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$.

Tomamos una valuación cualquiera $v_1, \ldots, v_n$ y tenemos dos casos:

1. Si $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$,

   entonces $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \wedge \neg\alpha\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$. ✓

2. Si $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$, entonces:
   - $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$ (¿por qué?)
   - $\neg\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0$

   …y por lo tanto $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i \wedge \neg\alpha\right](v_1, \ldots, v_n) = 0$. ✓

Consecuencia lógica vs satisfacibilidad

Teorema

$\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m\} \vDash \alpha$ si, y solo si, $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

Demostración ($\Leftarrow$)

Suponga que $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \neg\alpha\}$ es **inconsistente**.

PD1: para toda $v_1, \ldots, v_n$,
si $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$, entonces $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

Sea $v_1, \ldots, v_n$ una valuación cualquiera tal que $\left[\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1$.

PD2: $\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1$.

$$\begin{aligned} \left[\textstyle\bigwedge_{i=1}^{m} \alpha_i\right](v_1, \ldots, v_n) = 1 \quad & \text{entonces} \quad \neg\alpha(v_1, \ldots, v_n) = 0 \quad (\text{¿por qué?}) \\ & \text{entonces} \quad \alpha(v_1, \ldots, v_n) = 1 \end{aligned}$$

$\square$

Satisfacibilidad y representación de problemas

Problema

Dada una fórmula α, queremos verificar si α es **satisfacible**.

¿cómo podemos hacer esto **eficientemente**?

- El problema de satisfacción es un problema fundamental tanto en ciencia de la computación como en ingeniería.
- Muchos otros problemas pueden ser resueltos usando este problema.

Más sobre satisfiabilidad en IA, lógica para CS, etc ...