Unidad IV: Relaciones

Clase 08

IIC 1253

Prof. Jorge Salas

¿cómo se definen los números naturales?

Para todo conjunto A considere el operador:

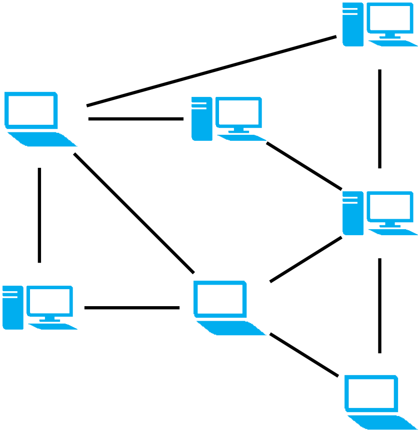
$$\sigma(A) = A \cup \{A\}$$

El **conjunto de los números naturales** se puede definir como sigue:

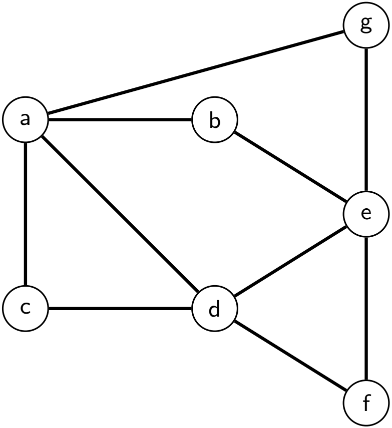
$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \sigma(0) = \sigma(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} \\
2 &= \sigma(1) = \sigma(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
3 &= \sigma(2) = \sigma(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

¿cuál es el significado del operador σ en $\mathbb{N}$?

¿cómo modelamos redes con teoría de conjuntos?



¿cómo modelamos redes con teoría de conjuntos?



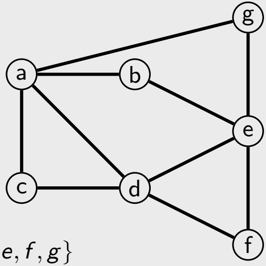
¿cómo modelamos las conecciones entre los nodos?

Grafos como conjuntos

Definición

Un **grafo** G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.

Ejemplo



- $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $E = \Big\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\} \Big\}$

,

Grafos como conjuntos

Definición

Un **grafo** G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.

Notación

- Los elementos en V los llamaremos los **vértices** o nodos del grafo.
- Los elementos en E los llamaremos las **aristas** del grafo.

Teoría de grafos será muy útil durante el curso ...

Tablas o relaciones

Nombre	**Curso**
Marcelo	Tópicos avanzados en CS
Juan	Lógica
Jorge	Matemáticas Discretas
Cristian	Matemáticas Discretas

¿cómo representamos esta estructura con **conjuntos**?

Necesitamos relaciones

Una **relación** es una correspondencia de objetos de distintos dominios.

Varios ejemplos en matemáticas como:

- 'menor que', 'subconjunto', 'igualdad', ...

Relaciones nos darán **orden** a nuestros objectos

Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

Operaciones

Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

Operaciones

Pares ordenados

Definición (informal)

Una pareja de objetos (a, b) es un **par ordenado** si
se distingue un **primer** elemento y un **segundo** elemento.

¿cómo definimos **pares ordenados** con teoría de conjuntos?

Pares ordenados

Definición

Para dos elementos a y b, se define el **par ordenado** (a,b) como:

$$(a,b) \; = \; \big\{\{a\},\{a,b\}\big\}$$

Proposición

$$(a,b) = (c,d) \qquad \text{si, y solo si} \qquad a = c \;\; \text{y} \;\; b = d$$

Demostración.

En particular, $\quad (a,b) \neq (b,a)$ para $a \neq b$.

Pares ordenados (generalización)

Definición

- Para tres elementos a, b, c se define el **triple ordenado** (a, b, c) como:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

- En general, para $a_1, \ldots, a_n$, se define una ***n*-tupla ordenada** como:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

Proposición

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \quad \text{si, y solo si} \quad a_i = b_i \text{ para todo } i \leq n$$

Demostración: ejercicio.

Producto cartesiano

Definición

- Para dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B \; = \; \{ \; (a, b) \; \mid \; a \in A \; \wedge \; b \in B \; \}$$

- En general, para conjuntos $A_1, \ldots, A_n$
  se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \; = \; \{ \, (a_1, \ldots, a_n) \; \mid \; a_i \in A_i \, \}$$

Ejemplos

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\{a, b\} \times \{c, d\} \; = \; \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$

Producto cartesiano

Algunas preguntas

1. ¿ $A \times B = B \times A$?
2. ¿ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

Ejemplo

- $\{1\} \times \{2\} = \{2\} \times \{1\}$?
- $(\{1\} \times \{1\}) \times \{1\} = \{1\} \times (\{1\} \times \{1\})$?

Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

Operaciones

Relaciones

Definición

Dado un conjunto A y B, R es una **relación binaria** sobre A y B si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$ decimos que R es una relación binaria sobre A.

¿qué relaciones binarias conocen?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo

Nombre	**Curso**
Marcelo	Tópicos Avanzados en CS
Jorge	Matemáticas Discretas
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

Considere los siguientes conjuntos A y B:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Marcelo}, \text{Juan}, \text{Cristian}, \text{Jorge}\} \\ B &= \{\text{TACS}, \text{Lógica}, \text{MD}\} \end{aligned}$$

Una relación que modela la tabla anterior es:

$$\begin{aligned} R_1 = \big\{&(\text{Marcelo}, \text{TACS}), (\text{Jorge}, \text{MD}), \\ &(\text{Juan}, \text{Lógica}), (\text{Cristian}, \text{MD})\big\} \end{aligned}$$

¿cuál es la diferencia entre una "tabla" y una relación?

Relaciones (notación)

Definición

Para una relación R y un par (a, b) usaremos la siguiente **notación**:

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \in R \\ \text{o} \\ a\ R\ b \end{array}\right\} \quad (a,b) \text{ pertenece a la relación } R$$

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \notin R \\ \text{o} \\ a\ \not R\ b \end{array}\right\} \quad (a,b) \textbf{ NO} \text{ pertenece a la relación } R$$

Más ejemplos de relaciones.

Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

Operaciones

Representación de relaciones

1. Grafos dirigidos.

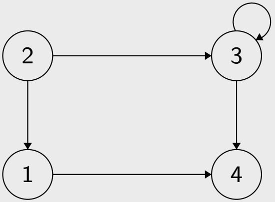
Grafos dirigidos

Definición

Un **grafo dirigido** G es un par (V, E) donde:

- V es un conjunto (**vertices**),
- $E \subseteq V \times V$ es una relación binaria sobre V (**aristas**).

Ejemplo



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1,4), (2,1), (2,3), (3,3), (3,4)\}$

Grafos dirigidos

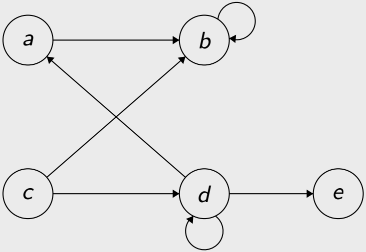
Propiedad

Toda **relación binaria** R sobre A
se puede ver como un **grafo dirigido** $G_R = (A, R)$.

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$



Outline

Producto cartesiano

Relaciones

Representación

Operaciones

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R una relación sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Proyección 1**: $\pi_1(R)$ son todos los elementos que estan en la primera componente de R.

$$x \in \pi_1(R) \qquad \text{ssi} \qquad \text{existe un } y \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

- **Proyección 2**: $\pi_2(R)$ son todos los elementos que estan en la segunda componente de R.

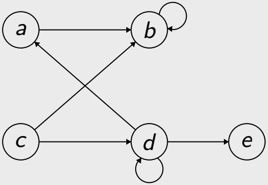
$$y \in \pi_2(R) \qquad \text{ssi} \qquad \text{existe un } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

Operaciones entre relaciones

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$



- ¿cuál es el conjunto $\pi_1(R)$?
- ¿cuál es el conjunto $\pi_2(R)$?

¿a qué corresponde $\pi_1(R)$ en la representación de grafo dirigido?

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

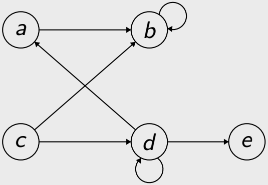
$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A.\ (x, z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z, y) \in R_2\}$$

Operaciones entre relaciones

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$



- ¿cuál es la relación R^{-1}?
- ¿cuál es la relación $R \circ R$?

¿a qué corresponde R^{-1} y $R \circ R$
en la representación de **grafo dirigido**?

Caminos en grafos dirigidos

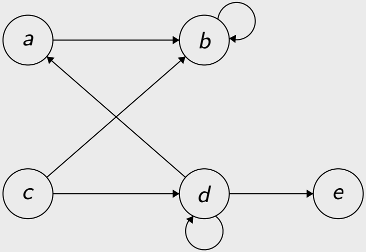
Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Definición

- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que:
  - $v_i \in V$ para todo $0 \leq i \leq n$.
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.
- Un **camino simple** en G es un camino donde todos los nodos son distintos en la secuencia.
- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n, esto es, el al largo de la secuencia menos uno.

Caminos en grafos dirigidos

Ejemplo



- ¿cuál es un camino de largo 2? ¿y de largo 3?
- ¿cuál es un camino simple de largo 4? ¿y de largo 5?

¿qué significa el grafo de $R \circ R$? ¿y de $R \circ R \circ R$?