Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas 1'2020

GUIA 3
Conjunto, relaciones y funciones

Los siguientes ejercicios son una recopilación de guías de ejercicios del curso de Matemáticas Discretas dictado por Marcelo Arenas y Jorge Pérez en años anteriores.

Teoría de conjuntos

1. Diga en cada caso si las afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique. (A y B son conjuntos cualesquiera)

   a) $\emptyset = \{\emptyset\}$
   b) $\emptyset \in \{\emptyset\}$
   c) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$
   d) $A \subseteq A \cup B$
   e) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
   f) $A \notin \mathcal{P}(A)$
   g) $\emptyset \in \mathcal{P}(A)$
   h) $\emptyset \subseteq \mathcal{P}(A)$
   i) $\bigcap \mathcal{P}(A) = \emptyset$
   j) $\bigcup \mathcal{P}(A) = A$
   k) $(A \setminus B) \subseteq A$
   l) $(A \setminus B) \subseteq B$

2. Sea x un elemento cualquiera. Diga en cada caso si las afirmaciones son verdaderas o falsas y justifique.

   a) $\{x\} \subseteq \{x\}$
   b) $\{x\} \in \{x\}$
   c) $\{x\} \in \{x, \{x\}\}$
   d) $\{x\} \subseteq \{x, \{x\}\}$
   e) $\{\{x\}\} \not\subseteq \{x, \{x\}\}$

3. Demuestre cada una de las siguientes propiedades.

   a) $\bigcup \emptyset = \emptyset$
   b) $\bigcup \{A\} = A$
   c) Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ entonces $\bigcup \mathcal{R} \subseteq \bigcup \mathcal{S}$
   d) $\bigcup(\mathcal{R} \cup \mathcal{S}) = \bigcup \mathcal{R} \cup \bigcup \mathcal{S}$
   e) Para todo $A \in \mathcal{S}$ se cumple que $A \subseteq \bigcup \mathcal{S}$
   f) Si $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$ entonces $\bigcap \mathcal{S} \subseteq \bigcap \mathcal{R}$
   g) $\bigcap \mathcal{R} \cap \bigcap \mathcal{S} \subseteq \bigcap(\mathcal{R} \cap \mathcal{S})$
   h) Para todo $A \in \mathcal{S}$ se cumple que $\bigcap \mathcal{S} \subseteq A$

4. Para dos conjuntos A y B se define el siguiente operador entre A y B:

$$A + B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

   a) Demuestre que $A + B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ para todo par de conjuntos A y B.
   b) ¿Es $+$ un operador conmutativo, asociativo, distributivo sobre $\cup$ o distributivo sobre $\cap$? Para cada respuesta de una demostración o un contra-ejemplo según sea el caso.

5. Sean A, B, C y D conjuntos. Para las siguientes afirmaciones, demuestre o de un contra-ejemplo.

   a) $(A \cup B) \times (C \cup D) = (A \times C) \cup (B \times D)$
   b) $(A \setminus B) \setminus (C \setminus D) = (A \setminus C) \setminus (B \setminus D)$
   c) $(A \setminus B) \times (C \setminus D) = (A \times C) \setminus (B \times D)$

6. Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto finito. Decimos que un conjunto $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$ es una *anti-cadena* si para todo $A, B \in \mathcal{C}$ con $A \neq B$ se cumple que $A \not\subseteq B$ y $B \not\subseteq A$.

   a) ¿Cuántas anti-cadenas puede uno formar para $S = \{1, 2, 3\}$? Explique su respuesta.
   b) Un conjunto $\mathcal{A} = \{A_1, \ldots, A_m\} \subseteq \mathcal{P}(S)$ se dice que es un *sistema separador* de S si para todo $i \neq j$ en S, existen $A \in \mathcal{A}$ y $B \in \mathcal{A}$ tal que $i \in A$, $i \notin B$, $j \notin A$ y $j \in B$ (en otras palabras, $i \in A \setminus B$ y $j \in B \setminus A$). El conjunto dual $\mathcal{A}^* = \{B_1, \ldots, B_n\}$ de $\mathcal{A}$ se define como $B_i = \{k \in \{1, \ldots, m\} \mid i \in A_k\}$ para todo $i \leq n$.

      Demuestre que un conjunto $\mathcal{A}$ es un sistema separador si, y solo si, $|\mathcal{A}^*| = n$ y $\mathcal{A}^*$ es una anti-cadena.

Relaciones

1. Dibuje el diagrama de Hasse para cada uno de los siguientes órdenes parciales.

   a) $(\mathcal{P}(\{1, 2, 3, 4\}), \subseteq)$.
   b) $(\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}, \mid)$.

2. Demuestre o refute la siguiente afirmación: "Si R es una relación simétrica y transitiva entonces también es refleja".

3. Dé un ejemplo de relaciones que sean

   a) simétrica y refleja pero no transitiva.
   b) refleja y transitiva pero no simétrica.
   c) simétrica y transitiva pero no refleja.

4. El conjunto $\emptyset$ es una relación, ya que es subconjunto de cualquier conjunto. ¿Qué propiedades cumple $\emptyset$ como relación?

5. Sea A un conjunto con n elementos.

   a) ¿Cuántas relaciones reflejas se pueden crear con elementos de A?
   b) ¿Cuántas relaciones simétricas se pueden crear con elementos de A?
   c) ¿Cuántas relaciones antisimétricas se pueden crear con elementos de A?

6. Sea A un conjunto con n elementos y R una relación antisimétrica sobre A.

   a) ¿Cuál es la máxima cantidad de pares ordenados que puede contener R?
   b) ¿Cuantas relaciones antisimétricas distintas sobre A tienen exactamente esa cantidad de pares?

7. Para cada una de las siguientes relaciones determine si es refleja, simétrica, antisimétrica o transitiva, demostrando o dando un contraejemplo en cada caso.

   a) $R_{//}$ sobre el conjunto de todas las rectas de $\mathbb{R}^2$, tales que la recta l_1 está relacionada con la recta l_2 si y sólo si l_1 es paralela a l_2 ($l_1 R_{//} l_2 \Leftrightarrow l_1 // l_2$).

b) $R_\perp$ sobre el conjunto de todas las rectas de $\mathbb{R}^2$, tales que la recta l_1 está relacionada con la recta l_2 si y sólo si l_1 es perpendicular a l_2 ($l_1 R_\perp l_2 \Leftrightarrow l_1 \perp l_2$).

c) R sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(a,b)R(c,d)$ si y sólo si $a \leq c$. (Note que en este último caso la relación R es subconjunto de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$.)

8. ¿Qué puede decir de la relación $R_{//} \circ R_\perp$ (la composición de las relaciones $R_{//}$ y $R_\perp$ definidas en el ejercicio anterior), qué propiedades cumple, cómo se compara con $R_{//}$ y con $R_\perp$, etc.?

9. Sea $f : A \to B$ una función cualquiera de A en B. Sea R una relación sobre A tal que xRy si y sólo si $f(x) = f(y)$. Demuestre que R es refleja, simétrica y transitiva.

10. Demuestre o refute (de un contraejemplo) cada una de las siguiente afirmaciones. En cada caso R_1 y R_2 son relaciones sobre un conjunto A cualquiera.

    a) Si R_1 y R_2 son simétricas entonces $R_1 \cap R_2$ es simétrica.

    b) Si R_1 y R_2 son reflejas entonces $R_1 \cup R_2$ es refleja.

    c) Si R_1 y R_2 son transitivas entonces $R_1 \cap R_2$ es transitiva.

    d) Si R_1 y R_2 son transitivas entonces $R_1 \circ R_2$ es transitiva.

11. Sean $\preceq_1$ y $\preceq_2$ dos relaciones de orden sobre un conjunto A. Se define la siguiente relación sobre el conjunto $A \times A$: $(a,b) \preceq (c,d)$ si y sólo si $a \preceq_1 c$ y $b \preceq_2 d$. Demuestre que $\preceq$ es una relación de orden sobre $A \times A$.

12. Sea A un conjunto. Un *preorden* es una relación $\trianglelefteq \subseteq A \times A$ tal que es refleja y transitiva (no necesariamente antisimétrica). Se define la relación $\sim_\trianglelefteq \subseteq A \times A$ tal que $a \sim_\trianglelefteq b$ si, y solo si, $a \trianglelefteq b$ y $b \trianglelefteq a$.

    a) Demuestre que $\sim_\trianglelefteq$ es una relación de equivalencia. ¿Que representan las clases de equivalencia de $\sim_\trianglelefteq$ según $\trianglelefteq$? De una explicación en base al grafo de $\trianglelefteq$.

    b) Demuestre que $\sim_\trianglelefteq$ es una relación de congruencia para $\trianglelefteq$.

    c) Demuestre que $\trianglelefteq_{\sim_\trianglelefteq}$ es un orden parcial para el conjunto $A/\sim_\trianglelefteq$. ¿Que representa $\trianglelefteq_{\sim_\trianglelefteq}$ para las clases de equivalencia en $A/\sim_\trianglelefteq$? De nuevo, de una explicación en base al grafo de $\trianglelefteq$.

13. Muestre ejemplos de órdenes parciales $(A, \preceq)$ y subconjuntos $S \subseteq A$ tales que:

    a) S tiene exactamente cuatro elementos maximales.

    b) S tiene exactamente tres elementos minimales.

    c) S tiene máximo y mínimo.

    d) Todos los elementos de S son maximales y minimales a la vez.

    e) S tiene tres elementos maximales, tres elementos minimales, tiene un ínfimo y tiene un supremo.

14. Sea $(A, \preceq)$ un orden parcial. Una sucesión infinita $(x_0, x_1, x_2, \ldots)$ de elementos de A se dice *estrictamente decreciente* si se cumple que $x_n \neq x_{n+1}$ y que $x_{n+1} \preceq x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Demuestre que todo subconjunto no vacío de A tiene un elemento minimal si y sólo si no existen sucesiones infinitas estrictamente decrecientes en A.

15. ¿Cuántas relaciones de equivalencia existen sobre el conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$?

16. Demuestre que para cada conjunto A, existe una relación de equivalencia $\sim$ sobre A tal que $A/\sim$ es un conjunto finito.

17. Sea A un conjunto. Demuestre que existen relaciones de equivalencia $\sim_1$ y $\sim_2$ sobre A tales que para toda relación de equivalencia $\sim$ sobre A, se tiene que $\sim_1 \subseteq \sim \subseteq \sim_2$ (vale decir, para todo $(a,b) \in A \times A$, si $a \sim_1 b$, entonces $a \sim b$, y si $a \sim b$, entonces $a \sim_2 b$).

18. Sea n un número natural mayor o igual a 2, y sea $A = \{1, \ldots, n\}$. Demuestre que el número de relaciones de equivalencia sobre A es estrictamente menor que el número de órdenes parciales sobre A.

19. Sea R una relación sobre $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tal que $(x, y)R(z, w)$ si y sólo si $x = z$.

    a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

    b) Describa geométricamente las clases de equivalencia y las particiones inducidas por R.

20. Sea R una relación sobre $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que $(m, n)R(r, s)$ si y sólo si $m + n = r + s$.

    a) Demuestre que R es una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

    b) Liste algunos elementos de las clases de equivalencia $[(0, 0)]$, $[(1, 3)]$, y $[(7, 3)]$.

    c) Describa las clases de equivalencia y las particiones inducidas por R (puede hacer un dibujo como el de la figura 1.3 de los apuntes).

21. Así como en los apuntes se definió $\mathbb{Z}$ a partir de una relación de equivalencia en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, en este ejercicio definiremos el conjunto de los racionales $\mathbb{Q}$ usando una relación de equivalencia en $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$. Definimos entonces la relación $\uparrow$ tal que $(k_1, n_1) \uparrow (k_2, n_2)$ si y sólo si $k_1 \cdot n_2 = k_2 \cdot n_1$.

    a) Demuestre que la relación $\uparrow$ es de equivalencia sobre $\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\})$.

    b) Liste algunos elementos de las clases de equivalencia de $[(0, 2)]$, $[(3, 1)]$, y $[(2, 3)]$.

    c) Formalmente los racionales se definen como $\mathbb{Q} = (\mathbb{Z} \times (\mathbb{N} - \{0\}) / \uparrow$. Intuitivamente a qué número racional corresponde la clase de equivalencias $[(k, n)]$?

    d) Se define la operación $\odot$ entre clases de equivalencia de $\uparrow$ tal que $[(k_1, n_1)] \odot [(k_2, n_2)] = [(k_1 \cdot k_2, n_1 \cdot n_2)]$. Intuitivamente la operación $\odot$ representa a la multiplicación de racionales. Muestre un par de ejemplos de aplicación de $\odot$.

    e) Defina la operación $\oplus$ entre clases de equivalencia de $\uparrow$ que capture la suma de números racionales.

22. Sea A un conjunto finito. Una relación $R \subseteq A \times A$ se dice que es un *rectangulo* si existen conjuntos $B, C \subseteq A$ tal que $R = B \times C$.

    a) Demuestre que R es un rectangulo si, y solo si, para todo $a_1, b_1, a_2, b_2 \in A$ se cumple que:

    $$\text{si } (a_1, b_1) \in R \text{ y } (a_2, b_2) \in R, \text{ entonces } (a_1, b_2) \in R.$$

    b) Un rectangulo R se dice *simple* si $R = B \times B$ para algún $B \subseteq A$. Demuestre que si R es una relación de equivalencia, entonces para algún $n \in \mathbb{N}$ existen rectangulos simples $R_1, \ldots, R_n \subseteq A \times A$ tal que:

    $$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i$$

    ¿es la otra dirección cierta? Demuestrelo o de un contra-ejemplo.

Funciones

1. Demuestre que si se tiene una bolsa con 5 pares de calcetines, cada par de un color distinto, si se sacan 6 calcetines al azar de la bolsa, necesariamente dos de los calcetines sacados comparten color.

2. Sea $G = (V, E)$ un grafo finito. Demuestre que si un camino en G tiene mas de $|V|$ vértices entonces G contiene un ciclo.

3. Sean A y B dos conjuntos finitos tales que $|A| = n$ y $|B| = m$

a) Demuestre formalmente que $|A \times B| = n \cdot m$ encontrando una función biyectiva h desde $A \times B$ al conjunto $\{0, 1, 2, \ldots, (n \cdot m) - 1\}$.

b) ¿Cuántas relaciones binarias distintas de A en B existen?

c) ¿Cuántas funciones de A en B existen?

d) Si $n \leq m$ ¿cuántas funciones inyectivas de A en B existen?

e) Si $n \geq m$ ¿cuántas funciones sobreyectivas de A en B existen?

f) Si $n = m$ ¿cuántas funciones biyectivas de A en B existen?