Relaciones de equivalencia

Clase 12

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Relaciones de equivalencia

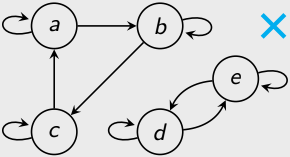
Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

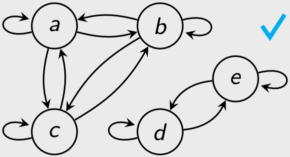
Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ (a,a) \in R$
2. **Simétrica**: $\forall a,b \in A.\ (a,b) \in R \rightarrow (b,a) \in R$
3. **Transitiva**: $\forall a,b,c \in A.\ \big((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R\big) \rightarrow (a,c) \in R$

Ejemplos



✗



✓

Relaciones de equivalencia

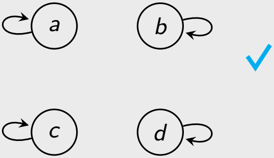
Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

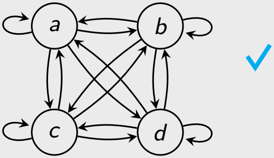
Definición

Decimos que R es una **relación de equivalencia** si R cumple ser:

1. **Refleja**: $\forall a \in A.\ \ (a, a) \in R$
2. **Simétrica**: $\forall a, b \in A.\ \ (a, b) \in R \ \rightarrow\ (b, a) \in R$
3. **Transitiva**: $\forall a, b, c \in A.\ \ \big((a, b) \in R \ \wedge\ (b, c) \in R\big) \ \rightarrow\ (a, c) \in R$

Ejemplos





¿qué otras relaciones de equivalencia conocen?

Mas ejemplos de relaciones de equivalencia

Personas y cumpleaños: (P, C).

- $P \;=\;$ todas las **personas** del planeta.
- $C \subseteq P \times P$ tal que:
  $(p_1, p_2) \in C$ si, y solo si, p_1 esta de **cumpleaños** el mismo día que p_2.

Rectas y paralelas: $(L, \|)$.

- $L \;=\;$ todas las **rectas** en el plano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
- $\| \;\subseteq\; L \times L$ tal que: $(l_1, l_2) \in \|$ si, y solo si, l_1 es **paralela** a l_2.

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $n \in \mathbb{N} - \{0\}$. Para $a, b \in \mathbb{Z}$ decimos que a es **equivalente** a b **módulo** n:

$$\mathbf{a} \equiv_{\mathbf{n}} \mathbf{b} \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists k \in \mathbb{Z}.\ (a - b) = k \cdot n$$

En otros palabras, $\mathbf{a} \equiv_{\mathbf{n}} \mathbf{b}$ ssi $n \mid (a - b)$.

1. Refleja? ✓
2. Simétrica? ✓
3. Transitiva? ✓

Ejemplo de relaciones de equivalencia

Definición

Sea $\mathbb{N}^2 = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Se define la relación $\downarrow \subseteq \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2$ como:

$$(a, b) \downarrow (c, d) \quad \text{si, y solo si} \quad a - b = c - d$$

1. Refleja? ✓
2. Simétrica? ✓
3. Transitiva? ✓

¿qué representa la relación $\downarrow$?

Outline

Particiones

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ (un conjunto de subconjuntos de A).

Definición

Decimos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si:

1. todos los elementos de $\mathcal{S}$ son distinto de vacío.

$$\forall X \in \mathcal{S}.\ X \neq \varnothing$$

2. la unión de todos los elementos de $\mathcal{S}$ es igual a A.

$$\bigcup \mathcal{S} = A$$

3. todos los elementos de $\mathcal{S}$ son disjuntos de a pares.

$$\forall X, Y \in \mathcal{S}.\ X \neq Y \ \rightarrow\ X \cap Y = \varnothing$$

Particiones (ejemplos)

Sea A un conjunto y $\mathcal{S} \subseteq 2^A$ un conjunto de subconjuntos de A.

Definición

Decimos que $\mathcal{S}$ es una **partición** de A si:

1. $\forall X \in \mathcal{S}.\ X \neq \varnothing$
2. $\bigcup \mathcal{S} = A$
3. $\forall X, Y \in \mathcal{S}.\ X \neq Y \rightarrow X \cap Y = \varnothing$

Ejemplo

Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, ¿cuáles son particiones?

- $\{\ \{1,3\}, \{2,5\}, \{4,6\}\ \}$ ✓
- $\{\ \{1,2,3\}, \{4,5\}, \{3,6\}\ \}$ ✗
- $\{\ \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}\ \}$ ✓
- $\{\ \{1,2,3\}, \{4,5\}\ \}$ ✗

Particiones (ejemplos)

¿en qué se parecen las **particiones** a las **relaciones de equivalencia**?

Clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

Sea $x \in A$. Se define la **clase de equivalencia de x** según $\sim$ como:

$$[x]_\sim = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

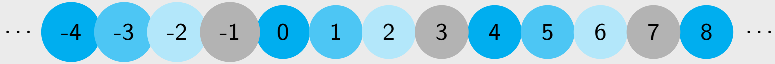
$[x]_\sim$ son todos los elementos de A que son "equivalentes" a x.

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere $\equiv_4$, ¿cuales son sus clases de equivalencia?

$$
\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{\dots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{\dots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{\dots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{\dots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}
\end{aligned}
$$



Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere la relación $\downarrow$, ¿cuales son sus clases de equivalencia?

$$
\begin{array}{rcl}
[(0,0)]_{\downarrow} & = & \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\} \\
[(1,0)]_{\downarrow} & = & \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\ldots\} \\
[(2,0)]_{\downarrow} & = & \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),\ldots\} \\
[(3,0)]_{\downarrow} & = & \{(3,0),(4,1),(5,2),(6,3),\ldots\} \\
 & \vdots & \\
[(0,1)]_{\downarrow} & = & \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\} \\
[(0,2)]_{\downarrow} & = & \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),\ldots\} \\
[(0,3)]_{\downarrow} & = & \{(0,3),(1,4),(2,5),(3,6),\ldots\} \\
 & \vdots &
\end{array}
$$

Clases de equivalencia

Ejemplo

Considere la relación $\downarrow$, ¿cuales son sus clases de equivalencia?

$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
$(0,4)$	$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(4,4)$	$\cdots$
$(0,3)$	$(1,3)$	$(2,3)$	$(3,3)$	$(4,3)$	$\cdots$
$(0,2)$	$(1,2)$	$(2,2)$	$(3,2)$	$(4,2)$	$\cdots$
$(0,1)$	$(1,1)$	$(2,1)$	$(3,1)$	$(4,1)$	$\cdots$
$(0,0)$	$(1,0)$	$(2,0)$	$(3,0)$	$(4,0)$	$\cdots$

Propiedades de las clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

Sea $x \in A$. Se define la **clase de equivalencia de x** según $\sim$ como:

$$[x]_{\sim} = \{y \in A \mid x \sim y\}$$

Propiedades

1. $\forall x \in A.\ x \in [x]_{\sim}$
2. $x \sim y$ si, y solo si, $[x]_{\sim} = [y]_{\sim}$
3. si $x \nsim y$, entonces $[x]_{\sim} \cap [y]_{\sim} = \varnothing$

Ejercicio!

Particiones vs clases de equivalencia

Sea A un conjunto y $\sim \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia.

Definición

El **conjunto cuociente** $A/\!\sim$ de A con respecto a $\sim$ se define:

$$A/\!\sim \;=\; \{\, [x]_\sim \mid x \in A \,\}$$

Teorema

El conjunto cuociente $A/\!\sim$ es una **partición** de A.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim \;=\; \{\ [x]_\sim \subseteq A \mid x \in A\ \}$.

¿que debemos demostrar?

1. $\forall X \in A/\sim .\ \ X \neq \varnothing$
2. $\bigcup A/\sim \;=\; A$
3. $\forall X, Y \in A/\sim .\ \ X \neq Y \ \rightarrow\ \ X \cap Y = \varnothing$

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim \; = \; \{ \; [x]_\sim \subseteq A \; \mid \; x \in A \; \}$.

1. $\forall X \in A/\sim . \;\; X \neq \varnothing$

   Sea $X \in A/\sim$.

   PD: $X \neq \varnothing$.

   Por definición de $A/\sim$, sabemos que existe un $x \in A$ tal que $X = [x]_\sim$.

   $\Rightarrow \;\; x \in [x]_\sim$ (¿por qué?)

   $\Rightarrow \;\; x \in X$

   Por lo tanto, $X \neq \varnothing$.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim \; = \; \{ \; [x]_\sim \subseteq A \; \mid \; x \in A \; \}$.

2. $\bigcup A/\sim \; = \; A$

PD: $\bigcup A/\sim \; \subseteq \; A$ y $A \; \subseteq \; \bigcup A/\sim$.

- $\bigcup A/\sim \; \subseteq \; A$ (por definición de $A/\sim$)
- $A \; \subseteq \; \bigcup A/\sim$

  Sea $x \in A$.

  $\Rightarrow \; [x]_\sim \in A/\sim$ y $x \in [x]_\sim$

  $\Rightarrow \; x \in \bigcup A/\sim$

Por lo tanto, $\bigcup A/\sim \; = \; A$.

Particiones vs clases de equivalencia

Demostración

Sea $A/\sim \; = \; \{ \, [x]_\sim \subseteq A \mid x \in A \, \}$.

3. $\forall X, Y \in A/\sim . \; X \neq Y \; \rightarrow \; X \cap Y = \varnothing$

Sea $X, Y \in A/\sim$ tal que $X \neq Y$.

PD: $X \cap Y = \varnothing$.

Sea $x, y \in A$ tal que $[x]_\sim = X$ y $[y]_\sim = Y$.

Como $[x]_\sim \neq [y]_\sim$, entonces $x \not\sim y$ (¿por qué?)

Como $x \not\sim y$, entonces $[x]_\sim \cap [y]_\sim = \varnothing$ (¿por qué?)

Por lo tanto, concluimos que $X \cap Y = \varnothing$.

$\square$

Conjunto cuociente (ejemplos)

Ejemplo

Considere $\equiv_4$ y sus clases de equivalencia:

$$
\begin{aligned}
[0]_{\equiv_4} &= \{\ldots, -12, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \ldots\} \\
[1]_{\equiv_4} &= \{\ldots, -11, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \ldots\} \\
[2]_{\equiv_4} &= \{\ldots, -10, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \ldots\} \\
[3]_{\equiv_4} &= \{\ldots, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \ldots\}
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$\mathbb{Z}/ \equiv_4 \;=\; \{\ [0],\ [1],\ [2],\ [3]\ \}$$

Conjunto cuociente (ejemplos)

Ejemplo

Considere la relación $\downarrow$ y sus clases de equivalencia:

$$
\begin{aligned}
[(0,0)]_{\downarrow} &= \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),\ldots\} \\
[(1,0)]_{\downarrow} &= \{(1,0),(2,1),(3,2),(4,3),\ldots\} \\
[(2,0)]_{\downarrow} &= \{(2,0),(3,1),(4,2),(5,3),\ldots\} \\
&\vdots \\
[(0,1)]_{\downarrow} &= \{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),\ldots\} \\
[(0,2)]_{\downarrow} &= \{(0,2),(1,3),(2,4),(3,5),\ldots\} \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Entonces:

$$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\downarrow \;=\; \{\ \ldots,\ [(0,2)],\ [(0,1)],\ [(0,0)],\ [(1,0)],\ [(2,0)],\ \ldots\ \}$$