NOMBRE: Matías Duhalde

SECCIÓN: 1

Nº LISTA: 34

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

Tarea 6 – Respuesta Pregunta 1

Parte 1

Las funciones se pueden modelar como relaciones. Si trabajamos sobre las funciones crecientes $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, tenemos que la relación $f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, y el conjunto $\mathcal{C}$ se define como:

$$\mathcal{C} = \{f \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \forall n, m \in \pi_1(f).\ n < m \implies f(n) < f(m)\}$$

Notar que $f(n), f(m) \in \pi_2(f)$

Sea $g(n)$ una función tal que $g(n) : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$. Para demostrar que $\mathcal{C}$ no es numerable, se debe demostrar que no existe ninguna función $g(n)$ biyectiva.

Por contradicción, supongamos que existe una función $g(n)$, tal que esta es biyectiva. De esta manera, se pueden listar los pares (g_i, j) tal que $g_i(j) = a_{ij}$, con $i, j \in \mathbb{N}$:

$g_i \backslash j$	1	2	3	4	...
g_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	...
g_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	...
g_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}	...
g_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	...
...	...	...	...	...	...

Con $g(i) = g_i$ para todo $i \geq 1$. Por el argumento de diagonalización de Cantor, podemos formar una nueva función usando la diagonal de la tabla.

$$g_k(n) = \begin{cases} a_{11} & n = 1 \\ a_{nn} & n > 1 \text{ y } g_k(n-1) < a_{nn} \\ a_{(n-1)(n-1)} + 1 & n > 1 \text{ y } g_k(n-1) \geq a_{nn}, \text{ o si } a_{nn} \text{ no está definido} \end{cases}$$

Notar que se cumple que esta función es creciente, es decir, si $n, m \in \mathbb{N}$ y $n < m$, entonces $g_k(n) < g_k(m)$. Al ser creciente, tenemos que $g_k \in \mathcal{C}$. Sin embargo, por otro lado, no existe ningún $i \in \mathbb{N}$ tal que $g_i = g_k$. En otras palabras, no existe ningún $n \in \mathbb{N}$ tal que $g(n) = g_k$. Esto significa que la función $g(n)$ no puede ser biyectiva.

Finalmente, llegamos a una contradicción, lo que implica que no puede existir una función $g(n) : \mathbb{N} \to \mathcal{C}$ que sea biyectiva. Por lo tanto, el conjunto $\mathcal{C}$ no es numerable. $\square$

Parte 2

Por contradicción, supongamos que existe una función biyectiva $f(x) : \mathbb{N} \to B$. Tomemos un subconjunto no numerable A de B. Dado que A no es numerable, no existe ninguna función $g(x) : \mathbb{N} \to A$ tal que $g(x)$ sea biyectiva. Sin embargo, habíamos definido una función f biyectiva sobre B. Dado que $A \subseteq B$, f también debería aplicar sobre A, pero como no puede existir una función biyectiva sobre A, llegamos a una contradicción.

Por lo tanto, si B es numerable, entonces A debe ser también numerable, o equivalentemente, si A es no numerable, entonces B es no numerable. $\square$

Usando este mismo argumento, podemos elaborar los siguiente:

Sea N el conjunto de las funciones crecientes e inyectivas. Usando el mismo procedimiento de la pregunta 1.1, se puede concluir que el conjunto N es no numerable. Además, tenemos que $N \subseteq \mathcal{F}$. Usando el hecho de que si un conjunto A es no numerable, entonces un conjunto B tal que $A \subseteq B$ tampoco lo es, se concluye que el conjunto $\mathcal{F}$ es no numerable.