Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

# PAUTA TAREA 6

## Pregunta 2

### Pregunta 2.1

Asuma que $f \in o(g)$ y demostraremos que $f \in O(g)$ y $g \notin O(f)$.

1. $f \in O(g)$. Por definición, para que $f \in O(g)$, se debe cumplir que:

$$\exists c > 0. \exists n_0. \forall n \geq n_0. f(n) \leq c \cdot g(n)$$

   Dado que $f \in o(g)$, si escogemos c = 1, tenemos que $\exists n_0. \forall n \geq n_0. f(n) \leq c \cdot g(n)$ dado que $f \in o(g)$ significa que esto se cumple para todo $c$. Por lo tanto, vemos que se cumple que $f \in O(g)$.

2. $g \notin O(f)$. Sabemos que $f \in o(g)$, esto es, $\forall c > 0. \exists n_0. \forall n \geq n_0.\ f(n) \leq c \cdot g(n)$. Para demostrar que $g \notin O(f)$, lo haremos por contradicción. Suponga entonces que $g \in O(f)$, esto es:

$$\exists c' > 0. \exists n_0'. \forall n \geq n_0'.\ g(n) \leq c' \cdot f(n).$$

   Sean $c'$ y $n_0'$ los números que cumplen la definición anterior, o sea:

$$\forall n \geq n_0'.\ g(n) \leq c' \cdot f(n). \quad (1)$$

   Como $f \in o(g)$ se tiene que para todo $c^*$:

$$\exists n_0. \forall n \geq n_0.\ f(n) \leq c^* \cdot g(n).$$

   Si escogemos $c^* = 1/(c'+1)$, sabemos que hay un $n_0^*$ tal que $f(n) \leq c^* \cdot g(n)$ para todo $n \geq n_0^*$. En particular, $(c'+1)f(n) \leq g(n)$ (2). Por último, dado que $f(n) > 0$ se tiene que $c' \cdot f(n) < (c'+1) \cdot f(n)$ para todo $n$ (3). Juntando todas las piezas (1), (2), y (3) concluimos que para todo $n \geq \max\{n_0', n_0^*\}$:

$$g(n) \ \leq \ c' \cdot f(n) \ < \ (c'+1) \cdot f(n) \ \leq \ g(n)$$

   Como $g(n) < g(n)$ es una contradicción, concluimos que $g \notin O(f)$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por tener ambas demostraciones correctas.
- (**3 Puntos**) Por tener al menos una demostración correcta.
- (**0 Puntos**) En otro caso.

**Pregunta 2.2**

Sea $p(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ y $\epsilon > 0$. Para demostrar que $p(x) \in o(x^{k+\epsilon})$ tomaremos un $c > 0$ cualquiera, y demostraremos que existe $n_0$, tal que para todo $n > n_0$, se cumple que $p(x) \leq c \cdot x^{k+\epsilon}$.

Primero, como $n^\varepsilon$ es una función creciente (tiende a infinito), sabemos que existe $n_c \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n_c$ se tiene que:

$$\frac{1}{c} \cdot \sum_{i=0}^{k} |a_i| \leq n^\varepsilon$$

Ahora para todo $n \geq max\{n_c, 1\}$, se deduce que:

$$\begin{array}{rcl} p(n) = a_k n^k + \cdots + a_0 & \leq & |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^{k-1} + \cdots + |a_0| \\ & \leq & |a_k| n^k + |a_{k-1}| n^k + \cdots + |a_0| n^k \\ & = & \sum_{i=0}^{k} |a_i| \cdot n^k \\ & \leq & c \cdot n^\varepsilon \cdot n^k \\ & = & c \cdot n^{k+\varepsilon} \end{array}$$

Como esto se cumple para cualquier $c > 0$, por lo tanto $p(x) \in o(x^{k+\varepsilon})$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**4 Puntos**) Por tener la demostración correcta.
- (**3 Puntos**) Por tener la lógica del procedimiento correcta, pero errores menores.
- (**0 Puntos**) En otro caso.