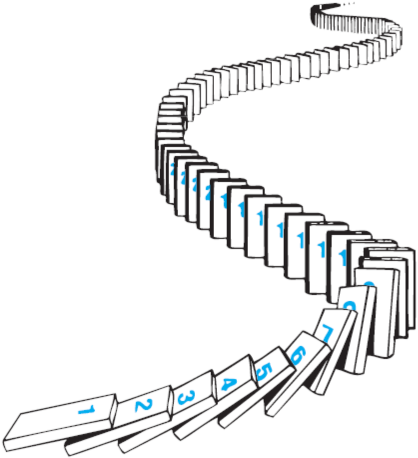
Inducción simple

Clase 18

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Inducción



Principio de inducción sobre los naturales

Principio de inducción simple

Para una afirmación $P(x)$ sobre los naturales, si $P(x)$ cumple que:

1. $P(0)$ es verdadero,
2. si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero,

entonces para todo n en los naturales se tiene que $P(n)$ es verdadero.

Notación

- $P(0)$ se llama el **caso base**.
- En el paso 2.
  - $P(n)$ se llama la **hipótesis de inducción**.
  - $P(n+1)$ se llama la **tesis de inducción** o paso inductivo.

Ejemplo de demostración por inducción

Ejemplo

Supongamos la afirmación:

$$P(n) \ := \ \sum_{i=0}^{n} 2^i \ = \ 2^{n+1} - 1$$

1. $\mathbf{P(0)}$: $2^0 = 2^{0+1} - 1 = 1$ ✓

2. si $\mathbf{P(n)}$: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$ es verdadero, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{P(n+1)} : \quad \sum_{i=0}^{n+1} 2^i \quad &= \underbrace{2^0 + 2^1 + \ldots + 2^n}_{\text{P(n)}} + 2^{n+1} \\ &= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\ &= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\ &= 2^{n+2} - 1 \end{aligned}$$

✓

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \in \mathbb{N}$.

Principio de inducción sobre los naturales

Principio de inducción simple (versión teoría de conjunto)

Para un subconjuto $A \subseteq \mathbb{N}$, si se cumple que:

1. $0 \in A$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}.\ (\, n \in A \ \rightarrow\ (n+1) \in A\,)$

entonces $A = \mathbb{N}$.

(con $A = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n)$ es verdadero$\}$
es el mismo principio anterior)

¿por qué se cumple este principio? ¿es un axioma de $\mathbb{N}$?

Axiomas de los número naturales $\mathbb{N}$

Axiomas de Peano (extracto)

1. El número $0 \in \mathbb{N}$.
2. Si $n \in \mathbb{N}$, entonces $(n+1) \in \mathbb{N}$ donde $n+1$ es el sucesor de n.
3. Todo $n \in \mathbb{N}$ tal que $n \neq 0$ tiene un sucesor en $\mathbb{N}$.
4. Todo subconjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.
   (**principio del buen orden**)

¿cómo podemos derivar de estos axiomas el **principio de inducción**?

Buen orden implica inducción

Teorema

El principio del **buen orden** implica el principio de **inducción**.

Buen orden implica inducción

Demostración

Suponemos que el principio del buen orden se cumple en $\mathbb{N}$.

Por **contradicción** suponga que existe un conjunto $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que:

1. $0 \in A$,
2. $\forall n \in \mathbb{N}.\ (\, n \in A \ \rightarrow\ (n+1) \in A\,)$

pero $A \neq \mathbb{N}$.

- entonces el conjunto $B = \mathbb{N} - A$ es no vacío.
- existe un menor elemento $n^* \in B$. (¿por qué?)
- $n^* \neq 0$ y $n^* - 1 \in A$. (¿por qué?)
- como $n^* - 1 \in A$, entonces $n^* \in A$. $\rightarrow\leftarrow$ (¿por qué?)

Por lo tanto, se tiene que $A = \mathbb{N}$.

Caso base extendido

Principio de inducción simple (caso base extendido)

Para una afirmación P sobre los naturales y un $k \in \mathbb{N}$, si P cumple que:

1. $P(k)$ es verdadero,
2. para todo $n \geq k$, si $P(n)$ es verdadero, entonces $P(n+1)$ es verdadero

entonces $P(n)$ es verdadero para todo $n \geq k$.

Demuestre este principio a partir del principio del buen orden. (ejercicio)

Caso base extendido

Ejemplo

$$P(n) \; := \; n! \; > \; 2^n \quad \text{para } n \geq 4$$

1. $\mathbf{P(4)}: \; 4! \; = \; 24 \; > \; 16 \; = \; 2^4$ ✓
2. si $\mathbf{P(n)}: \; n! \; > \; 2^n$ es verdadero con $n \geq 4$, entonces:

$$\begin{aligned} \mathbf{P(n+1)}: \quad (n+1)! \quad &= \; n! \cdot (n+1) \\ &> \; 2^n \cdot (n+1) \quad && \text{(por HI)} \\ &> \; 2^n \cdot 4 && \text{(como } n \geq 4\text{)} \\ &> \; 2^{n+1} \end{aligned}$$

✓

Por lo tanto, $P(n)$ **es verdadero para todo** $n \geq 4$.