Pregunta 2

Pregunta 2.1

Para demostrar que la relación $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{G}$, se debe demostrar que $\preceq$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

- $\preceq$ es Refleja.
$$\forall G \in \mathcal{G}. \quad (G, G) \in \preceq$$
Basta tomar la secuencia vacía $S_0 = \{\epsilon\}$, y cualquier grafo G se relaciona con si mismo $G \preceq G$.

- $\preceq$ es Antisimétrica.
$$\forall G_1, G_2 \in \mathcal{G}. \quad ((G_1, G_2) \in \preceq \wedge (G_2, G_1) \in \preceq) \rightarrow G_1 = G_2$$
Supongamos que $G_1 \preceq G_2$ y $G_2 \preceq G_1$, y además $G_1 \neq G_2$. Sin perdida de generalidad, tomamos que G_1 y G_2 tienen la misma cantidad de nodos $V(G_1) = V(G_2)$, pues, no hay operaciones que agreguen nodos. Como los grafos son distintos, se tiene:
$$\exists e \in E(G_1) \text{ pero } e \notin E(G_2)$$
Al hacer operaciones a G_2 para llegar a G_1, solo se podrá eliminar aristas. Por lo tanto, no se cumple que $G_1 \preceq G_2$ y llegamos a una contradicción. Luego: $G_1 = G_2$.

- $\preceq$ es Transitiva.
$$\forall G_1, G_2, G_3 \in \mathcal{G}. \quad ((G_1, G_2) \in \preceq \wedge (G_2, G_3) \in \preceq) \rightarrow (G_1, G_3) \in \preceq$$
Sean G_1, G_2, G_3 tres grafos $\in \mathcal{G}$, tal que $G_1 \preceq G_2$ y $G_2 \preceq G_3$. Además, existen las siguientes secuencias de operaciones y conjuntos de aristas, respectivamente:
$$S_1, S_2, \ldots, S_n \in \{\textsc{Delete}, \textsc{Contract}, \epsilon\}$$
$$T_1, T_2, \ldots, T_m \in \{\textsc{Delete}, \textsc{Contract}, \epsilon\}$$
$$e_1^1, e_2^1, \ldots, e_n^1 \in 2^{\mathbb{N}}$$
$$e_1^2, e_2^2, \ldots, e_m^2 \in 2^{\mathbb{N}}$$
Por definición de la relación, tenemos lo siguiente:
$$G_1 = S_1(e_1^1, S_2(e_2^1, S_3(\ldots, e_{n-1}^1, S_n(e_n^1, G_2))))$$
$$G_2 = T_1(e_1^2, T_2(e_2^2, T_3(\ldots, e_{m-1}^2, T_m(e_m^2, G_3))))$$
Luego:
$$G_1 = S_1(e_1^1, \ldots, S_n(e_n^1, T_1(e_1^2, \ldots, T_m(e_m^2, G_3))))$$
y se cumple que $G_1 \preceq G_3$.