Notación asintótica

Clase 16

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Outline

Outline

Notación $\mathcal{O}$

Notación Ω y Θ

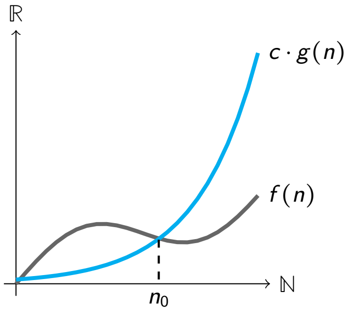
Notación $\mathcal{O}$

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\mathcal{O}(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tal que **existe** $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \leq c \cdot g(n)$$



Notación $\mathcal{O}$

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\mathcal{O}(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
tal que **existe** $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \;\leq\; c \cdot g(n)$$

En notación lógica:

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\mid\; \exists c \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \;\}$$

Si $f \in \mathcal{O}(g)$, entonces f **crece más lento o igual** que g.

Notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\mid\; \exists c \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \;\}$$

Ejemplo

Considere las funciones $f(x) = x^3 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3$.

$$¿\ f \in \mathcal{O}(g)\ \ ?$$

Para $n \geq 1$ tenemos que:

$$n^3 + 2n + 1 \;\leq\; n^3 + 2n^3 + n^3 \;=\; 4n^3$$

Si tomamos $c = 4$ y $n_0 = 1$ entonces para todo $n \geq n_0$:

$$f(n) \;=\; n^3 + 2n + 1 \;\leq\; 4n^3 \;=\; c \cdot g(n)$$

Por lo tanto, $x^3 + 2x + 1 \in \mathcal{O}(x^3)$.

Notación $\mathcal{O}$

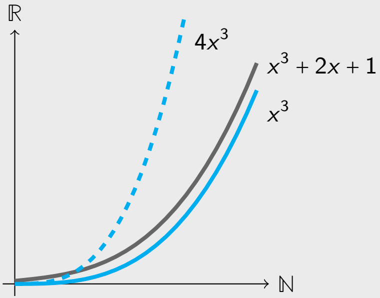
Definición

$$\mathcal{O}(g) = \{ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \}$$

Ejemplo

Considere las funciones $f(x) = x^3 + 2x + 1$ y $g(x) = x^3$.

$$¿f \in \mathcal{O}(g)?$$



Notación $\mathcal{O}$

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\mathcal{O}(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
tal que **existe** $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \;\leq\; c \cdot g(n)$$

Notación

Cuando $f \in \mathcal{O}(g)$ diremos alternativamente que:

- f es $\mathcal{O}(g)$ (se dice "f es O-grande de g").
- f es de **orden** g
- $f = \mathcal{O}(g)$ (ojo, esto es solo notación!)

Mas ejemplos de la notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\mid\; \exists c \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n) \;\}$$

Ejemplo

Considere las funciones $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ y $g(x) = x^k$.

$$¿f \in \mathcal{O}(g)?$$

Para $n \geq 1$ tenemos que:

$$a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 \;\leq\; |a_k| n^k + \ldots + |a_1| n^k + |a_0| n^k \;=\; \left(\sum_{i=0}^{k} |a_i| \right) \cdot n^k$$

Si tomamos $c = \sum_{i=0}^{k} |a_i|$ y $n_0 = 1$ entonces para todo $n \geq n_0$:

$$f(n) \;=\; a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 \;\leq\; c \cdot n^k \;=\; c \cdot g(n)$$

Por lo tanto, $f \in \mathcal{O}(g)$.

Notación $\mathcal{O}$ para polinomios

Teorema

1. Sea $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ un polinomio sobre $\mathbb{N}$, entonces:

$$f \in \mathcal{O}(x^k)$$

2. $x^{k+1} \notin \mathcal{O}(x^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demostración 2.

Por contradicción, suponga que existe $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n^{k+1} \leq c \cdot n^k \quad \text{para todo } n \geq n_0$$

Si consideramos $n \geq \max\{c+1, n_0\}$, entonces:

$$\begin{aligned} n^{k+1} &= n \cdot n^k \\ &\geq (c+1) \cdot n^k \\ &= c \cdot n^k + n^k > c \cdot n^k \quad \times \end{aligned}$$

Mas ejemplos de la notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) = \{\ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \exists c \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ \ f(n) \leq c \cdot g(n)\ \}$$

Ejemplo

Considere la función $f(n) = \log_a(n)$ y $g(n) = \log_b(n)$.

$$¿\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))?$$

Por propiedad de la función logaritmo sabemos:

$$\log_b(n) = \frac{\log_a(n)}{\log_a(b)}$$

Si consideramos $c = \log_a(b)$ y $n_0 = 1$, entonces:

$$\log_a(n) \ \leq \ c \cdot \log_b(n) \qquad \text{para todo } n \geq n_0$$

Por lo tanto, $\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))$.

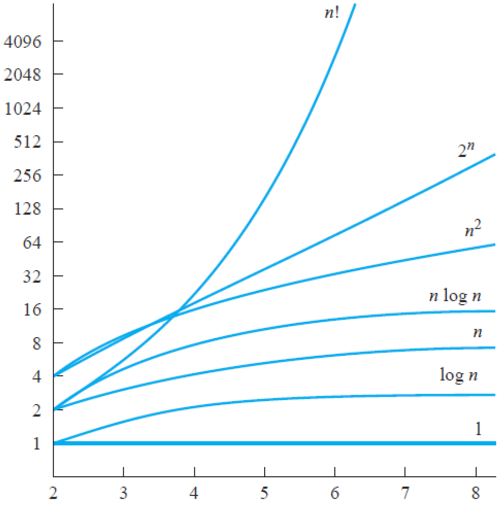
Logaritmos y exponenciales en notación $\mathcal{O}$

Teorema

1. Para todo $a, b > 1$, se tiene que $\log_a(n) \in \mathcal{O}(\log_b(n))$.
2. Para todo $a < b$ con $a, b \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^n \in \mathcal{O}(b^n)$ y $b^n \notin \mathcal{O}(a^n)$.
3. Para todo $a \in \mathbb{N}$, se tiene que $a^n \in \mathcal{O}(n!)$ y $n! \notin \mathcal{O}(a^n)$.
4. $n! \in \mathcal{O}(2^{n \cdot \log(n)})$.

Demuestre 2., 3. y 4..

Jerarquía en notación $\mathcal{O}$



Jerarquía en notación $\mathcal{O}$

Notación	Nombre
$\mathcal{O}(1)$	Constante
$\mathcal{O}(\log n)$	Logarítmico
$\mathcal{O}(n)$	Lineal
$\mathcal{O}(n \log n)$	$n \log n$
$\mathcal{O}(n^2)$	Cuadrático
$\mathcal{O}(n^3)$	Cúbico
$\mathcal{O}(n^m)$	Polinomial
$\mathcal{O}(k^n)$	Exponencial
$\mathcal{O}(n!)$	Factorial

Algunas preguntas de la notación $\mathcal{O}$

Definición

$$\mathcal{O}(g) \;=\; \{\; f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \;\mid\; \exists c\in\mathbb{R}.\ \exists n_0\in\mathbb{N}.\ \forall n\geq n_0.\ \ f(n)\leq c\cdot g(n)\;\}$$

Preguntas

1. ¿Si $f(n)\leq g(n)$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces $f\in\mathcal{O}(g)$?
2. ¿Para todo $k\in\mathbb{N}\setminus\{0\}$, si $f\in\mathcal{O}(g)$ entonces $k\cdot f\in\mathcal{O}(g)$?
3. ¿Para todo $g:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ y $k\in\mathbb{N}$, si $f\in\mathcal{O}(g)$ entonces $f+k\in\mathcal{O}(g)$?
4. ¿Si $f\in\mathcal{O}(g)$ y $g\in\mathcal{O}(h)$, entonces $f\in\mathcal{O}(h)$?
5. ¿Si $\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{g(n)}=0$, entonces $f\in O(g)$?

Importante: esta última propiedad NO se puede usar en este curso.

Combinaciones de funciones en notación $\mathcal{O}$

Teorema

Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, entonces $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(\max\{g_1, g_2\})$.

Demostración

Suponga que:

- existe $C_1 \in \mathbb{R}$, $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(n) \leq C_1 \cdot g_1(n)$ para todo $n \geq n_0^1$.
- existe $C_2 \in \mathbb{R}$, $n_0^2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_2(n) \leq C_2 \cdot g_2(n)$ para todo $n \geq n_0^2$.

Si $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$ y $C = C_1 + C_2$, entonces para todo $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} f_1(n) + f_2(n) &\leq C_1 \cdot g_1(n) + C_2 \cdot g_2(n) \\ &\leq C_1 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} + C_2 \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} \\ &\leq (C_1 + C_2) \cdot \max\{g_1(n), g_2(n)\} \end{aligned}$$

Notar que $f_1 \in \mathcal{O}(g)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g)$ implica $f_1 + f_2 \in \mathcal{O}(g)$

Combinaciones de funciones en notación $\mathcal{O}$

Teorema

Si $f_1 \in \mathcal{O}(g_1)$ y $f_2 \in \mathcal{O}(g_2)$, entonces $f_1 \cdot f_2 \in \mathcal{O}(g_1 \cdot g_2)$.

Demostración

Suponga que:

- existe $C_1 \in \mathbb{R}$, $n_0^1 \in \mathbb{N}$ tal que $f_1(n) \leq C_1 \cdot g_1(n)$ para todo $n \geq n_0^1$.
- existe $C_2 \in \mathbb{R}$, $n_0^2 \in \mathbb{N}$ tal que $f_2(n) \leq C_2 \cdot g_2(n)$ para todo $n \geq n_0^2$.

Si $n_0 = \max\{n_0^1, n_0^2\}$ y $C = C_1 \cdot C_2$, entonces para todo $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned} f_1(n) \cdot f_2(n) &\leq C_1 \cdot g_1(n) \cdot C_2 \cdot g_2(n) \\ &\leq (C_1 \cdot C_2) \cdot (g_1(n) \cdot g_2(n)) \end{aligned}$$

Combinaciones de funciones en notación $\mathcal{O}$

Ejemplo

De un buen estimador del orden de la siguientes funciones:

- $(x+1)\cdot\log(x^2+1) \; + \; 3\cdot x^2$
- $3\cdot x\cdot\log(x!) \; + \; (x^2+3)\cdot\log(x)$

Outline

Notación $\mathcal{O}$

Notación Ω y Θ

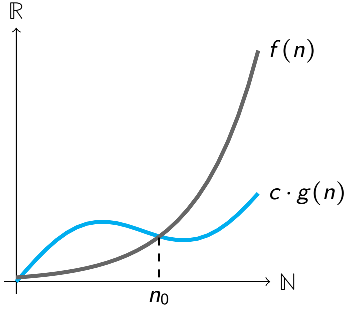
Notación Ω

Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\Omega(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$
tal que **existe** $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \; \geq \; c \cdot g(n)$$



Notación Ω

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\Omega(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
tal que **existe** $c \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$f(n) \ \geq \ c \cdot g(n)$$

En notación lógica:

$$\Omega(g) \ = \ \{ \ f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ \mid \ \exists c \in \mathbb{R}. \ \exists n_0 \in \mathbb{N}. \ \forall n \geq n_0. \ f(n) \geq c \cdot g(n) \ \}$$

Notación

Cuando $f \in \Omega(g)$ diremos que f es $\Omega(g)$ o "f es omega-grande de g".

Si $f \in \Omega(g)$, entonces f **crece más rápido o igual** que g.

Notación Ω

Definición

$$\Omega(g) \;=\; \{\; f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\mid\; \exists c \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\;\; f(n) \geq c \cdot g(n) \;\}$$

Ejemplo

Considere la función $f(x) = x^4 + 2x^2 + 5$ y $g(x) = 5x^4$.

$$¿\;\; x^4 + 2x^2 + 5 \in \Omega(5x^4) \;\;?$$

Para $n \geq 1$ tenemos que:

$$n^4 + 2n^2 + 5 \;\geq\; \frac{1}{5} \cdot 5n^4$$

Si tomamos $c = \frac{1}{5}$ y $n_0 = 1$ entonces para todo $n \geq n_0$:

$$f(n) \;=\; n^4 + 2n^2 + 5 \;\geq\; \frac{1}{5} \cdot 5n^4 \;=\; c \cdot g(n)$$

Por lo tanto, $x^4 + 2x^2 + 5 \in \Omega(5x^4)$.

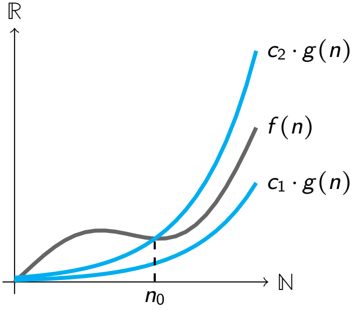
Notación Θ

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\Theta(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
tal que **existen** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$c_1 \cdot g(n) \;\leq\; f(n) \;\leq\; c_2 \cdot g(n)$$



Notación Θ

Sea $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ una función cualquiera (también funciona para $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$).

Definición

Se define el conjunto $\Theta(g)$ de todas las funciones $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$
tal que **existen** $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ y $n_0 \in \mathbb{N}$, tal que **para todo** $n \geq n_0$:

$$c_1 \cdot g(n) \;\leq\; f(n) \;\leq\; c_2 \cdot g(n)$$

En notación lógica:

$$\Theta(g) \;=\; \{\, f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\mid\; \exists c_1, c_2 \in \mathbb{R}.\ \exists n_0 \in \mathbb{N}.\ \forall n \geq n_0.\ c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \,\}$$

$f \in \Theta(g)$ si, y solo si, $f \in \Omega(g)$ y $f \in \mathcal{O}(g)$.

(demuestre esta afirmación)

Notación Θ

Ejemplo

Considere la función $g(x) = x^k$ y $f(x) = a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0$ con $a_k > 0$.

$$¿\ a_k x^k + \ldots + a_1 x + a_0 \in \Theta(x^k)\ \ ?$$

Ya sabemos que $f \in \mathcal{O}(g)$ por lo que queda demostrar que $f \in \Omega(g)$.

Buscamos un $c > 0$ tal que (desde algún n_0 en adelante):

$$a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0 \ \geq\ \frac{1}{c} \cdot n^k$$

Sea cualquier c tal que $c > \frac{1}{a_k}$. Como $(c \cdot a_k - 1)n^k + \ldots + c \cdot a_0 \geq 0$ es un polinomio tal que $c \cdot a_k - 1 > 0$, entonces (por cálculo) sabemos que existe un n_0 tal que para todo $n > n_0$:

$$\begin{aligned}
(c \cdot a_k - 1)n^k + \ldots + c \cdot a_0 &\geq 0 \\
c \cdot a_k n^k + \ldots + c \cdot a_0 &\geq n^k \\
c \cdot (a_k n^k + \ldots + a_0) &\geq n^k \\
a_k n^k + \ldots + a_0 &\geq \tfrac{1}{c} n^k
\end{aligned}$$

$\square$

Propiedades de notación Θ

Teorema

1. Sea $f(n) = a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0$ un polinomio sobre $\mathbb{N}$, entonces:

$$f \in \Theta(n^k)$$

2. $n^k \notin \Omega(n^{k+1})$ para todo $k > 0$.

Demostración (ejercicio)

Propiedades de notación Θ

Teorema

1. Para todo $a, b > 1$, se tiene que $\log_a(n) \in \Theta(\log_b(n))$.
2. Si $f_1 \in \Theta(g)$ y $f_2 \in \Theta(g)$, entonces $f_1 + f_2 \in \Theta(g)$.
3. Si $f_1 \in \Theta(g_1)$ y $f_2 \in \Theta(g_2)$, entonces $f_1 \cdot f_2 \in \Theta(g_1 \cdot g_2)$.

Demostración (ejercicio)

Sobre la notación Θ

Podemos ver Θ como una relación entre funciones:

$$\text{``}(f, g) \in R_\Theta\text{''} \quad \text{si, y solo si,} \quad f \in \Theta(g)$$

¿es Θ una "relación de equivalencia"?

- Refleja?
- Simétrica?
- Transitiva?