Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 1

20 de marzo de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

Considere la siguiente definición recursiva de fórmulas proposicionales:

- $\varphi_0 \ := \ (p \to q)$
- $\varphi_{i+1} \ := \ (\varphi_i \to p)$, para $i \geq 0$.

¿Para qué valores de i la fórmula φ_i es una tautología?

Pregunta 2

Sean α y β fórmulas proposicionales y $\Sigma = \{\varphi_1, ..., \varphi_n\}$ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre o dé un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

1. Si $\alpha \not\equiv \beta$, entonces $\alpha \equiv \neg\beta$.
2. Si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\neg\alpha \models \neg\varphi_i$ para cualquier fórmula φ_i en Σ.
3. Si $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$, entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\} \models \beta$.
4. Si $\{\varphi_1, ..., \varphi_n, \alpha\} \models \beta$, entonces $\{\varphi_1, ..., \varphi_n\} \models \alpha \wedge \beta$.

Pregunta 3

Sean α_1,...,α_n fórmulas proposicionales. Demuestre que si $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\} \models \alpha$, entonces:

$$\alpha_1 \to (\alpha_2 \to (\cdots(\alpha_n \to \alpha)\cdots))$$

es una tautología.

Pregunta 4

Sea Σ un conjunto de conectivos lógicos. Se dice que Σ es funcionalmente completo si toda tabla de verdad puede ser definida usando solamente los operadores de Σ (en clases se demostró que $\{\neg, \vee, \wedge\}$ es funcionalmente completo). Demuestre que el conectivo lógico `NOR` definido a continuación es funcionalmente completo.

p	q	p `NOR` q
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Pregunta 5 (P3-I1-2019)

Sea $\Sigma = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ un conjunto de formulas proposicionales y φ una formula proposicional. Decimos que φ es *consecuencia lógica débil* de Σ, que denotamos como $\Sigma \vdash \varphi$, si para toda valuación $\bar{v}$, si existe algún $i \leq n$ tal que $\varphi_i(\bar{v}) = 1$, entonces $\varphi(\bar{v}) = 1$. En otras palabras, para toda valuación que hace verdadera alguna formula de Σ, entonces debe hacer verdadera φ.

Para las siguientes preguntas sobre consecuencia lógica débil, debe responder si es verdadero o falso. En caso de responder verdadero, demuestrelo, y en caso de responder falso, de un contra ejemplo.

1. ¿Es cierto que si $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi\} \vdash \varphi$, entonces $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$?
2. ¿Es cierto que $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\} \vdash \varphi$ si, y solo si, $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \neg\varphi\}$ no es satisfacible?