Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas 1'2020

GUIA 1
Lógica proposicional

1. Formalice el siguiente argumento en el cálculo proposicional:

   > "Si Superman fuera capaz y deseara prevenir el mal, entonces lo haría. Si Superman fuera incapaz de prevenir el mal, entonces sería impotente, y si no deseara prevenir el mal, entonces sería malévolo. Si Superman existe, no es ni impotente ni malévolo. Superman no previene el mal. Entonces, Superman no existe."

   Demuestre usando tablas de verdad que Superman no existe.

2. Demuestre que una valuación $v_1, \ldots, v_n$ hace verdadera la fórmula:

   $$(\cdots((p_1 \leftrightarrow p_2) \leftrightarrow p_3) \cdots \leftrightarrow p_n)$$

   si, y solo si, el número de valores falsos en $v_1, \ldots, v_n$ es par.

3. Sea EQ un conectivo ternario definido como $\mathrm{EQ}(p, q, r) = 1$ si y sólo si $3 \cdot p - 2 \cdot (q + r) \geq 0$. Defina el conectivo EQ utilizando los conectivos $\wedge$, $\vee$ y $\neg$.

4. Demuestre la siguiente equivalencia lógica usando las equivalencias lógicas vistas en clases:

   $$\neg(p \leftrightarrow q) \equiv \neg p \leftrightarrow q$$

5. ¿Es verdad que si $\alpha \not\equiv \beta$, entonces $\alpha \equiv \neg\beta$? Demuestre o de un contraejemplo.

6. Sea α la siguiente fórmula en lógica proposicional:

   $$(p \to (\neg q)) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \wedge (\neg r)))$$

   Construya una fórmula β en CNF que sea equivalente a α.

7. Encuentre un algoritmo que verifique si una fórmula en DNF es satisfacible.

8. Encuentre un algoritmo que verifique si una fórmula en CNF es una tautología.

9. Decimos que una fórmula α esta en k-CNF si α es de la forma:

   $$\alpha = C_1 \wedge C_2 \wedge \ldots \wedge C_n$$

   para algún n y para todo $i \leq n$ se tiene que $C_i = l_1^i \vee \ldots \vee l_k^i$ con $l_1^i, \ldots, l_k^i$ literales. Por ejemplo, $(p \vee q \vee \neg r) \wedge (\neg p \vee r \vee t)$ está en 3-CNF pero $p \vee q \vee r \vee \neg t$ no está en 3-CNF.

   a) Demuestre que existen fórmulas que no son equivalentes a ninguna fórmula en 3-CNF.

b) ¿Existe algún valor de k para el cual toda fórmula es lógicamente equivalente a una fórmula en k-CNF? Demuestre su afirmación.

c) Demuestre que para toda fórmula α en CNF, existe una fórmula α' en 3-CNF tal que α es satisfacible si, y solo si, α' es satisfacible.

10. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ fórmulas proposicionales. Demuestre que si $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} \models \alpha$, entonces:

$$\alpha_1 \rightarrow (\alpha_2 \rightarrow (\ldots (\alpha_n \rightarrow \alpha) \ldots))$$

es una tautología.

11. Demuestre que las siguientes fórmulas son tautologías:

$$\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$
$$(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$
$$(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

12. Considere la siguiente definición recursiva de formulas proposicionales:

- $\alpha_0 \ := \ (p \rightarrow q)$
- $\alpha_{i+1} \ := \ (\alpha_i \rightarrow p) \quad$ para $i \geq 0$.

¿Para cuáles valores de i la formula α_i es una tautología y para cuáles no? Explique su respuesta.

13. Sea Σ un conjunto satisfacible de fórmulas proposicionales, y α una fórmula proposicional que no es una tautología. Además, suponga que Σ y α no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \not\models \alpha$? Demuestre o de un contraejemplo.

14. ¿Es verdad que si $\Sigma \models \alpha$, entonces $\neg\alpha \models \neg\beta$ para cualquier fórmula β en Σ? Demuestre o de un contraejemplo.

15. Sea Σ un conjunto de fórmulas y α, β dos fórmulas proposicionales cualquiera. Demuestre que $\Sigma \models \alpha \rightarrow \beta$ si, y sólo si, $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$.

16. Sea Σ un conjunto de fórmulas y α, β dos fórmulas proposicionales cualquiera. Demuestre que si α es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ si, y sólo si, $\Sigma \models \beta$.

17. Sea Σ un conjunto de fórmulas y α, β, γ fórmulas proposicionales cualquiera. Demuestre que si $\alpha \rightarrow \beta$ es una tautología, entonces $\Sigma \cup \{\alpha, \beta\} \models \gamma$ si, y sólo si, $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \gamma$.

18. Sea Σ un conjunto de fórmulas y α, β dos fórmulas proposicionales tal que α y $\Sigma \cup \{\beta\}$ no tienen variables proposicionales en común. ¿Es cierto que $\Sigma \models \beta$ si, y sólo si, $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$?

19. Sean α, β y γ fórmulas proposicionales y Σ un conjunto de fórmulas proposicionales. Demuestre que $\Sigma \cup \{\alpha\} \models \beta$ y $\Sigma \cup \{\gamma\} \models \beta$ si, y solo si, $\Sigma \cup \{\alpha \vee \gamma\} \models \beta$.

20. Sea α y β dos fórmulas proposicionales sin variables en común tal que $\alpha \models \beta$. Demuestre que si α es satisfacible, entonces β es una tautología.

21. Un conjunto Σ de fórmulas proposicionales se dice *redundante* si existe una fórmula $\alpha \in \Sigma$ tal que $\Sigma \smallsetminus \{\alpha\} \models \alpha$ ($\Sigma \smallsetminus \{\alpha\}$ es el conjunto Σ sin α). Además, Σ se dice *fuertemente redundante*, si para cada $\Sigma' \subseteq \Sigma$ tal que Σ y Σ' son equivalentes, se tiene que Σ' es redundante. Construya un conjunto de fórmulas que sea fuertemente redundante.

22. Sea α y β dos formulas proposicionales tal que $\alpha \models \beta$. Demuestre que existe una formula γ tal que $\alpha \models \gamma$, $\gamma \models \beta$ y γ solo contiene variables mencionadas en α y β simultáneamente. Por ejemplo, considere $\alpha = p \wedge (p \to q)$ y $\beta = r \to q$ tal que $\alpha \models \beta$. Entonces, si consideramos la formula $\gamma = q$, es fácil ver que $\alpha \models \gamma$ y $\gamma \models \beta$.

    Hint: Recuerde la construcción para formulas en DNF y modifiquela para obtener una subfórmula γ a partir de α que tenga solo las variables de α y β.

23. Dada una matriz C de 3×3 que contiene números entre 0 y 3, decimos que C es *completable* si es que existe una manera de reemplazar los números 0 por números entre 1 y 3 de tal forma que la suma de cada fila y de cada columna es la misma. Por ejemplo, la siguiente matriz es completable:

2	0	0
0	2	0
0	0	3

    puesto que podemos reemplazar los valores 0 por los siguientes valores:

2	2	1
2	2	1
1	1	3

    de manera tal que la suma de cada fila y de cada columna es 5. En cambio, la siguiente matriz no es completable:

1	1	1
0	0	0
3	0	0

    Dada una matriz C de 3×3, construya una fórmula α en lógica proposicional tal que C es completable si, y sólo si, α es satisfacible. En particular, α tiene que ser construida de tal forma que cada valuación σ que satisface a α represente una forma de completar C.

24. Sea $S = \{1, \ldots, n\}$ y $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ donde $\mathcal{P}(S)$ es el conjunto de todos los subconjuntos de S. Para un $k \leq n$ decimos que un conjunto $A \subseteq S$ es un k-*cubrimiento* de $\mathcal{A}$ si $|A| = k$ y para todo $B \in \mathcal{A}$ se tiene que $A \cap B \neq \emptyset$. Por ejemplo, si $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $\mathcal{A} = \big\{\{1, 2\}, \{2, 4\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}\big\}$, entonces el conjunto $A = \{2, 3\}$ es un 2-cubrimiento de $\mathcal{A}$.

    Para un conjunto $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ defina una formula $\alpha_{\mathcal{A},k}$ en lógica proposicional tal que $\mathcal{A}$ tiene un k-cubrimiento si, y solo si, $\alpha_{\mathcal{A},k}$ es satisfacible.