PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

TAREA 3

Publicación: Viernes 17 de abril.
Entrega: **Jueves 23 de abril hasta las 23:59 horas**.

Indicaciones

- Debe entregar una solución para cada pregunta (sin importar si esta en blanco).
- Cada solución debe estar escrita en LaTeX. No se aceptarán tareas escritas a mano ni en otro sistema de composición de texto.
- Responda cada pregunta en una hoja separada y ponga su nombre, sección y número de lista en cada hoja de respuesta.
- Debe entregar una copia digital por el buzón del curso, antes de la fecha/hora de entrega.
- **Se penalizará con 1 punto en la nota final de la tarea por cada regla que no se cumpla.**
- La tarea es individual.

Pregunta 1

Como vimos en clases, los operadores de conjuntos se definen a partir de los conectivos en lógica proposicional. Para esta pregunta deberán crear nuevos operadores sobre teoría de conjuntos usando formulas en esta lógica.

1. Dado dos conjuntos A y B se define el operador de conjuntos $A * B$ tal que para todo x se tiene que $x \in A * B$ sí, y sólo sí, $x \in A \leftrightarrow x \in B$. Defina el operador $A * B$ sólo utilizando los operadores de unión, intersección y complemento de teoría de conjuntos. Luego demuestre que su definición es equivalente al operador $A * B$.

2. Dado un operador n-ario en lógica proposicional $C(p_1, ..., p_n)$ donde $p_1, \ldots, p_n$ son variables proposicionales, podemos definir un operador $n-$ario entre conjuntos $R_C(A_1, ..., A_n)$ tal que, para todo x, se tiene que $x \in R_C(A_1, ..., A_n)$ sí, y solo sí, $C(x \in A_1, ..., x \in A_n)$ es verdadero. Por ejemplo, para nuestro operador $A * B$ el operador en lógica proposicional es $C(p_1, p_2) := p_1 \leftrightarrow p_2$ y tenemos que la definición de $A * B$ es que $x \in R_C(A, B)$ sí, y solo sí, $C(x \in A, x \in B) := x \in A \leftrightarrow x \in B$ es verdadero.

   Otro ejemplo, es el el operador de lógica proposicional $C^{\rightarrow}(p_1, p_2) = p_1 \rightarrow p_2$. Este operador define el operador $R_{C^{\rightarrow}}(A, B)$ tal que $x \in R_{C^{\rightarrow}}(A, B)$ sí, y solo sí, $x \in A \rightarrow x \in B$. De hecho, es fácil ver que este operador $R_{C^{\rightarrow}}(A, B)$ se puede definir con los operadores unión y complemento como $R_{C^{\rightarrow}}(A, B) = A^c \cup B$.

   Demuestre que para cualquier operador $C(p_1, ..., p_n)$ en lógica proposicional, su operador respectivo R_C para conjuntos se puede definir sólo utilizando los operadores de unión, intersección y complemento.

Pregunta 2

Sea $A = \{1, \ldots, n\}$ un conjunto con n-elementos distintos con $n \geq 1$. Un conjunto $\mathcal{I}$ se dice que es un *conjunto de intersecciones sobre* A si (1) todo elemento a en $\mathcal{I}$ es un subconjunto de A ($\forall a \in \mathcal{I}.\, a \subseteq A$) y (2) para todo par de elementos a y b de $\mathcal{I}$, la intersección entre a y b es no-vacía ($\forall a \in \mathcal{I}.\ \forall b \in \mathcal{I}.\ \ a \cap b \neq \emptyset$).

Por ejemplo, si $A = \{1, 2, 3\}$ entonces $\mathcal{I} = \big\{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 3\}\big\}$ es un conjunto de intersecciones sobre A.

1. Para el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$, encuentre un conjunto $\mathcal{I}$ que sea un conjunto de intersecciones sobre B y que tenga el máximo tamaño posible de entre todos los conjuntos de intersecciones sobre B, esto es, para todo conjunto de intersecciones $\mathcal{I}'$ sobre B se debe cumplir que $|\mathcal{I}'| \leq |\mathcal{I}|$. Demuestre que el conjunto encontrado satisface dicha propiedad.

2. Demuestre que para todo conjunto $A = \{1, \ldots, n\}$ se tiene que existe un conjunto de intersecciones sobre A de tamaño 2^{n-1}.

3. Demuestre que para todo conjunto $A = \{1, \ldots, n\}$ no existe un conjunto de intersecciones sobre A de tamaño mayor estricto que 2^{n-1}.

   Hint: Considere el conjunto $X = \{\{B, A \setminus B\} \mid B \subseteq A\}$. ¿Cuál es la cardinalidad de X?

Evaluación y puntajes de la tarea

Cada **item** de cada pregunta se evaluará con un puntaje de:

- 0 (respuesta incorrecta),
- 3 (con errores menores),
- 4 (correcta).

Todas las preguntas tienen la misma ponderación en la nota final.