Relaciones

Clase 08

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

Teoría de conjuntos es la base de las matemáticas

Con conjuntos podemos **representar**:

- Números naturales, enteros, racionales, ...
- Funciones, secuencias, ...
- Grafos, árboles, tablas, matrices, ...

¿algunos ejemplos?

¿desde donde empiezan los naturales? ¿0 o 1?

Para todo conjunto A considere el operador:

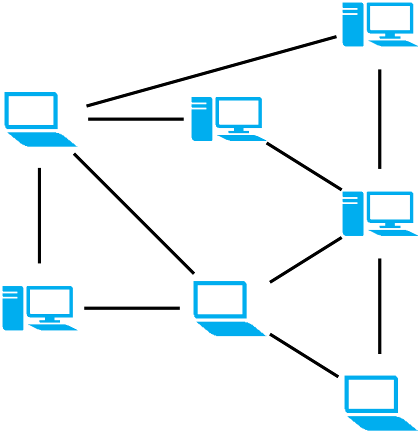
$$\sigma(A) = A \cup \{A\}$$

El **conjunto de los números naturales** se define como sigue:

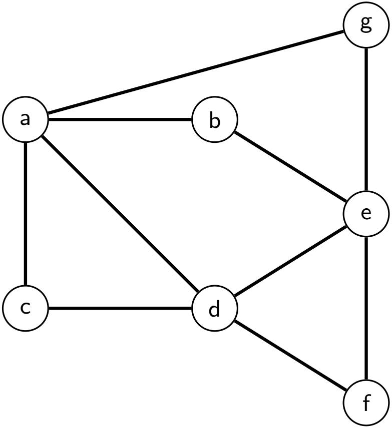
$$\begin{aligned}
0 &= \varnothing \\
1 &= \sigma(0) = \sigma(\varnothing) = \varnothing \cup \{\varnothing\} = \{\varnothing\} = \{0\} \\
2 &= \sigma(1) = \sigma(\{\varnothing\}) = \{\varnothing\} \cup \{\{\varnothing\}\} = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \{0, 1\} \\
3 &= \sigma(2) = \sigma(\{\varnothing, \{\varnothing\}\}) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} \cup \{\{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \\
&= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \{0, 1, 2\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

¿cuál es el significado del operador σ en $\mathbb{N}$?

¿cómo representamos redes con teoría de conjuntos?



¿cómo representamos redes con teoría de conjuntos?



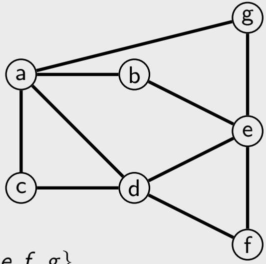
¿cómo modelamos las conecciones entre los nodos?

Grafos como conjuntos

Definición

Un **grafo** G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.

Ejemplo



- $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$
- $E = \big\{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{a, g\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\} \big\}$

Grafos como conjuntos

Definición

Un **grafo** G sobre el dominio V es un subconjunto $E \subseteq \mathcal{P}(V)$ tal que para todo $e \in E$ se cumple que $|e| = 2$.

Notación

- Los elementos en V los llamaremos los **vértices** o nodos del grafo.
- Los elementos en E los llamaremos las **aristas** del grafo.

Grafos serán estructuras muy útiles durante el curso!

¿cómo representamos tablas con teoría de conjuntos?

Nombre	**Curso**
Marcelo	Tópicos avanzados en CS
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

¿cómo representamos esta estructura con **conjuntos**?

Necesitamos relaciones

Una **relación** es una correspondencia entre objetos.

Varios ejemplos en matemáticas como:

- 'menor que', 'subconjunto', 'igualdad', ...

Relaciones nos darán **orden** a nuestros objectos

Outline

Outline

Pares ordenados

Definición (informal)

Un pareja de objetos (a, b) es un **par ordenado** si
se distingue un **primer** elemento y un **segundo** elemento.

Definición

Para dos elementos a y b, se define el **par ordenado** (a, b) como:

$$(a, b) \ = \ \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$$

Proposición

$$(a, b) = (c, d) \quad \text{si, y solo si} \quad a = c \ \text{ y } \ b = d$$

En particular, $\quad (a, b) \ \neq \ (b, a)$

Pares ordenados

Demostración: $(a, b) = (c, d) \quad \text{ssi} \quad a = c \ \text{ y } \ b = d$

$(\Leftarrow)$ Por definición de par ordenado.

$(\Rightarrow)$ Suponga que $(a, b) = (c, d)$. Por casos:

1. Si $c = d$, entonces como $\{\{a\}, \{a, b\}\} \subseteq \{\{c\}, \{c, d\}\} = \{\{c\}\}$:

   Por lo tanto, $a = c$ y $b = a = c$ ✓

2. Si $c \neq d$, entonces como $\{\{c\}, \{c, d\}\} \subseteq \{\{a\}, \{a, b\}\}$ se cumple:

   - $\{c, d\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$ entonces $a \neq b$.
   - $\{c\} \in \{\{a\}, \{a, b\}\}$ entonces $a = c$ y $b = d$. ✓

$\square$

Pares ordenados (generalización)

Definición

- Para tres elementos a, b, c se define el **triple ordenado** (a, b, c) como:

$$(a, b, c) = ((a, b), c)$$

- En general, para $a_1, \ldots, a_n$, se define una ***n*-tupla ordenada** como:

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) = ((a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}), a_n)$$

Proposición

$$(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \quad \text{si, y solo si} \quad a_i = b_i \text{ para todo } i \leq n$$

Demostración: ejercicio.

Producto cartesiano

Definición

- Para dos conjuntos A y B se define el **producto cartesiano** como:

$$A \times B \;=\; \{\; (a,b) \;\mid\; a \in A \;\wedge\; b \in B \;\}$$

- En general, para conjuntos $A_1, \ldots, A_n$
  se define el **producto cartesiano generalizado**:

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \;=\; \{\, (a_1, \ldots, a_n) \;\mid\; a_i \in A_i \,\}$$

Ejemplos

- $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
- $\{a,b\} \times \{c,d\} \;=\; \{(a,c),(a,d),(b,c),(b,d)\}$

Producto cartesiano

Algunas preguntas

1. ¿ $A \times B = B \times A$?
2. ¿ $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$?

Ejemplo

- $\{1\} \times \{2\} = \{2\} \times \{1\}$?
- $(\{1\} \times \{1\}) \times \{1\} = \{1\} \times (\{1\} \times \{1\})$?

Outline

Relaciones

Definición

Dado un conjunto A y B, R es una **relación binaria** sobre A y B si:

$$R \subseteq A \times B$$

Si $B = A$ decimos que R es una relación binaria sobre A.

¿qué relaciones binarias conocen?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 1

Considere el conjunto A:

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

Considere la siguiente relación:

$$R_2 = \big\{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\big\}$$

- ¿es cierto que $(d, a) \in R_2$?
- ¿es cierto que $(c, c) \in R_2$?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 2

Nombre	**Curso**
Marcelo	Tópicos Avanzados en CS
Marcelo	Matemáticas Discretas
Juan	Lógica
Cristian	Matemáticas Discretas

Considere los siguientes conjuntos A y B:

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Marcelo}, \text{Juan}, \text{Cristian}\} \\ B &= \{\text{TACS}, \text{Lógica}, \text{MD}\} \end{aligned}$$

Una relación que modela la tabla anterior es:

$$\begin{aligned} R_1 &= \big\{(\text{Marcelo}, \text{TACS}), (\text{Marcelo}, \text{MD}), \\ &\quad (\text{Juan}, \text{Lógica}), (\text{Cristian}, \text{MD})\big\} \end{aligned}$$

¿cuál es la diferencia entre una "tabla" y una relación?

Relaciones (ejemplos)

Ejemplo 3

Considere el conjunto $\mathbb{N}$ y las relaciones:

$$\begin{aligned} T_1 &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a \leq b\} \\ T_2 &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\} \\ T_3 &= \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a = b\} \end{aligned}$$

- ¿es cierto que $T_1 \subseteq T_2$?
- ¿es cierto que $T_3 \subseteq T_1$?
- ¿es cierto que $(T_2 \cup T_3) = T_1$?

Relaciones (notación)

Definición

Para una relación R y un par (a, b) usaremos la siguiente **notación**:

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \in R \\ \text{o} \\ a \; R \; b \end{array}\right\} \quad (a,b) \text{ pertenece a la relación } R$$

$$\left.\begin{array}{c} (a,b) \notin R \\ \text{o} \\ a \; \not R \; b \end{array}\right\} \quad (a,b) \textbf{ NO} \text{ pertenece a la relación } R$$

Ejemplos

- $(2, 3) \in \leq$ o $2 \leq 3$
- $(5, 2) \notin \leq$ o $5 \nleq 2$

Outline

Representación de relaciones

1. Grafos dirigidos.

2. Matrices sobre bits.

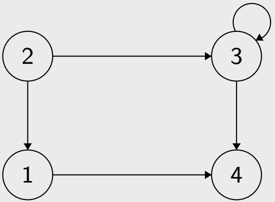
Grafos dirigidos

Definición

Un **grafo dirigido** G es un par (V, E) donde:

- V es un conjunto (**vertices**),
- $E \subseteq V \times V$ es una relación binaria sobre V (**aristas**).

Ejemplo



- $V = \{1, 2, 3, 4\}$
- $E = \{(1, 4), (2, 1), (2, 3), (3, 3), (3, 4)\}$

Grafos dirigidos

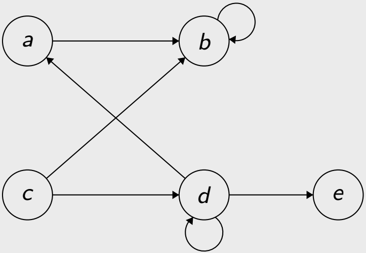
Propiedad

Toda **relación binaria** R sobre A
se puede ver como un **grafo dirigido** $G_R = (A, R)$.

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a, b), (b, b), (c, b), (c, d), (d, a), (d, d), (d, e)\}$$



Representación matricial

Definición

Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ un conjunto ordenado arbitrariamente y R una relación binaria sobre A. Definimos la **matriz** M_R de tamaño $n \times n$ como:

$$M_R[i,j] \;=\; \begin{cases} 1 & \text{si} \;\; a_i \; R \; a_j \\ 0 & \text{si} \;\; a_i \; \not R \; a_j \end{cases}$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Representación matricial

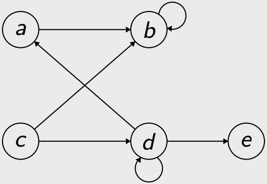
Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

Entonces la matriz M_R que representa a R es:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



¿qué ventaja tiene la representación matricial de una relación?

Operaciones de bits y matrices

Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n, definimos las matrices:

$$
\begin{aligned}
(M \vee N)[i,j] &= M[i,j] \vee N[i,j] \\
(M \wedge N)[i,j] &= M[i,j] \wedge N[i,j] \\
(\neg M)[i,j] &= \neg M[i,j]
\end{aligned}
$$

Para dos relacions R y S, ¿qué representa $M_R \vee M_S$? ¿$M_R \wedge M_S$? ¿$\neg M_R$?

Operaciones de bits y matrices

Operaciones sobre matrices

Dada dos matrices de bits M y N de tamaño n definimos el orden $M \leq N$:

$$M[i,j] \quad \leq \quad N[i,j]$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$ suponiendo que $0 \leq 1$.

Para dos relacions R y S, ¿qué representa $M_R \leq M_S$?

Outline

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R una relación sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Proyección 1**: $\pi_1(R)$ son todos los elementos que estan en la primera componente de R.

$$x \in \pi_1(R) \qquad \text{ssi} \qquad \text{existe un } y \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

- **Proyección 2**: $\pi_2(R)$ son todos los elementos que estan en la segunda componente de R.

$$y \in \pi_2(R) \qquad \text{ssi} \qquad \text{existe un } x \in A \text{ tal que } (x, y) \in R$$

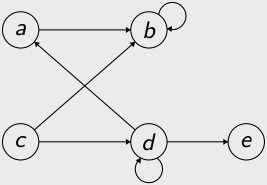
Operaciones entre relaciones

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- ¿cuál es el conjunto $\pi_1(R)$?
- ¿cuál es el conjunto $\pi_2(R)$?

¿a qué corresponde $\pi_1(R)$ en la representación de grafo dirigido?

Operaciones entre relaciones

Sea A un conjunto y R, R_1 y R_2 relaciones sobre A.

Definición

Se definen las siguientes operaciones entre relaciones:

- **Inverso**: R^{-1} son todos los pares (x, y) tal que $(y, x) \in R$.

$$R^{-1} \quad = \quad \{(x, y) \mid (y, x) \in R\}$$

- **Composición**: $R_1 \circ R_2$ son todos los elementos (x, y) tal que existe un z que cumple $(x, z) \in R_1$ y $(z, y) \in R_2$.

$$R_1 \circ R_2 \quad = \quad \{(x, y) \mid \exists z \in A.\ (x, z) \in R_1 \ \text{ y } \ (z, y) \in R_2\}$$

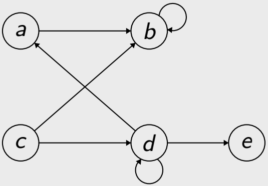
Operaciones entre relaciones

Ejemplo

Considere el conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ y la relación:

$$R = \{(a,b),(b,b),(c,b),(c,d),(d,a),(d,d),(d,e)\}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



- ¿cuál es la relación R^{-1}?
- ¿cuál es la relación $R \circ R$?

¿a qué corresponde R^{-1} y $R \circ R$
en la representación de **grafo dirigido** y **matricial**?

Caminos en grafos dirigidos

Sea $G = (V, E)$ un grafo dirigido.

Definición

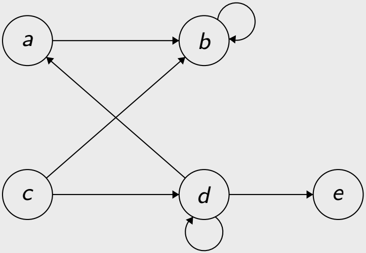
- Un **camino** en G es una secuencia $v_0, v_1, \ldots, v_n$ tal que:
  - $v_i \in V$ para todo $0 \leq i \leq n$.
  - $(v_i, v_{i+1}) \in E$ para todo $0 \leq i < n$.

- Un **camino simple** en G es un camino donde todos los nodos son distintos en la secuencia.

- El **largo** de un camino $v_0, v_1, \ldots, v_n$ es igual a n, esto es, el al largo de la secuencia menos uno.

Caminos en grafos dirigidos

Ejemplo



- ¿cuál es un camino de largo 2? ¿y de largo 3?
- ¿cuál es un camino simple de largo 4? ¿y de largo 5?

¿qué significa el grafo de $R \circ R$? ¿y de $R \circ R \circ R$?

Multiplicación de matrices de bits

Definición

Dado dos matrices de bits M y N de tamaño $n \times n$, se define la **multiplicación** $M \cdot N$ tal que:

$$(M \cdot N)[i,j] \;=\; \bigvee_{k=1}^{n} M[i,k] \wedge N[k,j]$$

para todo $1 \leq i \leq n$ y $1 \leq j \leq n$.

Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dada una relación R, ¿qué representa $M_R \cdot M_R$?