

Ordenes parciales

Clase 10

IIC 1253

Prof. Cristian Riveros

¿en qué se parecen estas relaciones?

■ subconjunto: $\mathbf{A \subseteq B}$

■ menor o igual: $\mathbf{n \leq m}$

■ divide a: $\mathbf{a \mid b}$

Outline

Ordenes parciales

Ejemplos

Representación

Outline

Ordenes parciales

Ejemplos

Representación

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja:** $\forall a \in A. (a, a) \in R.$
2. **Antisimétrica:** $\forall a, b \in A. ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b.$
3. **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A. ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R.$

Ejemplos

- subconjunto: $A \subseteq B$
- menor o igual: $n \leq m$
- divide a: $a \mid b$

¿cómo comparamos el 6 con el 9 en la relación “divide a”?

Ordenes parciales

Sea A un conjunto y $R \subseteq A \times A$ una relación binaria.

Definición

Decimos que R es un **orden parcial** si R cumple ser:

1. **Refleja:** $\forall a \in A. (a, a) \in R.$
2. **Antisimétrica:** $\forall a, b \in A. ((a, b) \in R \wedge (b, a) \in R) \rightarrow a = b.$
3. **Transitiva:** $\forall a, b, c \in A. ((a, b) \in R \wedge (b, c) \in R) \rightarrow (a, c) \in R.$

Notación

Un orden parcial sobre A los denotaremos como $(\mathbf{A}, \leq).$

Ordenes totales

Sea A un conjunto y (A, \leq) un orden parcial.

Definición

Decimos que un orden parcial (A, \leq) es un **orden total** si \leq cumple ser:

- **Conexo:** $\forall a, b \in A. (a, b) \in R \vee (b, a) \in R.$

¿cuál de los ordenes parciales anteriores son **totales**?

Outline

Ordenes parciales

Ejemplos

Representación

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación \leq_2 entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i_1, i_2) \leq_2 (j_1, j_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad (i_1 \neq j_1 \rightarrow i_1 < j_1) \wedge (i_1 = j_1 \rightarrow i_2 \leq j_2)$$

Ejemplos

- $(2, 100) \leq_2 (3, 5)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 100)$?
- $(2, 5) \leq_2 (2, 3)$?

Ejemplos de ordenes parciales

Definición

Se define la relación \leq_2 entre pares en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ como:

$$(i_1, i_2) \leq_2 (j_1, j_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad (i_1 \neq j_1 \rightarrow i_1 < j_1) \wedge (i_1 = j_1 \rightarrow i_2 \leq j_2)$$

¿qué propiedades cumple \leq_2 ?

1. ¿es \leq_2 **refleja**?



2. ¿es \leq_2 **antisimétrica**?



3. ¿es \leq_2 **transitiva**?



Por lo tanto, \leq_2 es un **orden parcial**.

Orden lexicográfico

En general, si (A, \leq) es un orden parcial, entonces siempre podemos definir un orden parcial sobre $A \times A$.

Definición

Sea (A, \leq) un orden parcial.

Se define la relación \leq_2 entre pares en $A \times A$ como:

$$(a_1, a_2) \leq_2 (b_1, b_2) \quad \text{si, y solo si,} \quad (a_1 \neq a_2 \rightarrow a_1 \leq a_2) \wedge (a_1 = a_2 \rightarrow b_1 \leq b_2)$$

Demuestre que \leq_2 es un **orden parcial**.

- La relación \leq_2 se conoce como el **orden lexicográfico** en $A \times A$.
- Para todo k , es posible definir \leq_k sobre A^k . (¿cómo?)

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- Un **alfabeto** Σ es un conjunto finito de elementos.
- Un elemento $a \in \Sigma$ lo llamaremos una **letra** o **símbolo**.
- Una **palabra** w sobre Σ es una secuencia finita de letras en Σ .

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b, c\}$ es un alfabeto con tres letras.
- aa , $abbca$, o $acaabaa$ son palabras.

Alfabetos, letras y palabras

Definiciones

- El largo $|w|$ de una palabra w sobre Σ es el número de letras.

$$|w| \stackrel{\text{def}}{=} \# \text{ de letras en } w$$

- Denotaremos ϵ como la **palabra vacía** de largo 0.

$$|\epsilon| \stackrel{\text{def}}{=} 0$$

- Denotaremos por Σ^* como el **conjunto de todas las palabras** sobre Σ .

Ejemplo

- $\Sigma = \{a, b\}$ es un alfabeto con dos letras.
- $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, aab, aba, \dots\}$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} u \text{ concatenado con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v .

Ejemplo

- $aab \cdot bab = aabbab$
- $bc \cdot aabbc = bcaabbc$
- $\epsilon \cdot abaca = abaca$

Concatenación de palabras

Definición

Dado dos palabras $u, v \in \Sigma^*$:

$$u \cdot v \stackrel{\text{def}}{=} u \text{ concatenado con } v$$

$u \cdot v$ corresponde a la secuencia u **seguido** de la secuencia v .

Preguntas

- ¿es la concatenación **asociativa**: $(u \cdot v) \cdot w = u \cdot (v \cdot w)$?
- ¿es la concatenación **conmutativa**: $u \cdot v = v \cdot u$?

¿por qué nos podría interesar trabajar con **palabras**?

Relaciones entre palabras

Definición




Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^* :

$$u \leq_p v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*. \quad u \cdot w = v$$

$$u \leq_s v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*. \quad w \cdot u = v$$

$$u \leq_i v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*. \quad w_1 \cdot u \cdot w_2 = v$$

Ejemplos

- $aaab \leq_p aaabba$? 
- $bab \leq_s baab$? 
- $cba \leq_i aabbcbaaa$? 

Relaciones entre palabras

Definición

Sea Σ un alfabeto. Se definen las siguientes relaciones entre palabras en Σ^* :

$$u \leq_p v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*. \quad u \cdot w = v$$

$$u \leq_s v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w \in \Sigma^*. \quad w \cdot u = v$$

$$u \leq_i v \quad \text{si, y solo si,} \quad \exists w_1, w_2 \in \Sigma^*. \quad w_1 \cdot u \cdot w_2 = v$$

¿qué propiedades cumple \leq_p , \leq_s o \leq_i ?

1. ¿es \leq_p , \leq_s o \leq_i **refleja**?



2. ¿es \leq_p , \leq_s o \leq_i **anti-simétrica**?



3. ¿es \leq_p , \leq_s o \leq_i **transitiva**?



Por lo tanto, \leq_p , \leq_s y \leq_i son **ordenes parciales**.

Outline

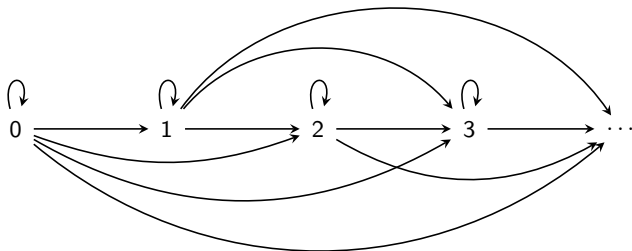
Ordenes parciales

Ejemplos

Representación

¿cómo se ve un orden parcial?

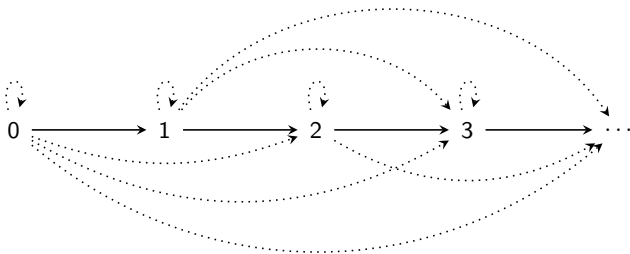
orden \leq sobre \mathbb{N}



¿podemos **simplificar** la visualización de este grafo?

¿cómo se ve un orden parcial?

orden \leq sobre \mathbb{N}

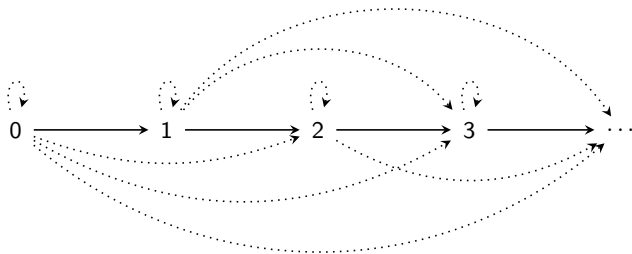


Para simplificar la visualización del grafo podemos:

- Remover **loops**.
- Remover aristas "**transitivas**"

¿cómo se ve un orden parcial?

orden \leq sobre \mathbb{N}



Definición

El **diagrama de Hasse** de (A, \leq) es el diagrama del grafo de \leq pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \leq$ se omita si existe un c tal que $(a, c) \in \leq$ y $(c, b) \in \leq$.

¿cómo se ve un orden parcial?

orden \leq sobre \mathbb{N}



Diagrama de Hasse de (\mathbb{N}, \leq)

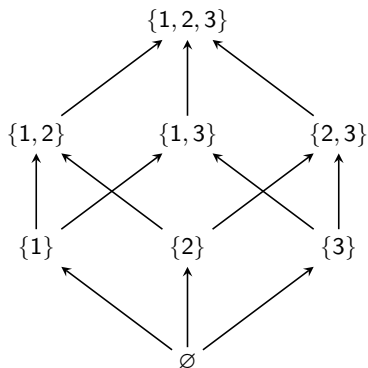
Definición

El **diagrama de Hasse** de (A, \leq) es el diagrama del grafo de \leq pero:

- se omiten los loops.
- $(a, b) \in \leq$ se omite si existe un c tal que $(a, c) \in \leq$ y $(c, b) \in \leq$.

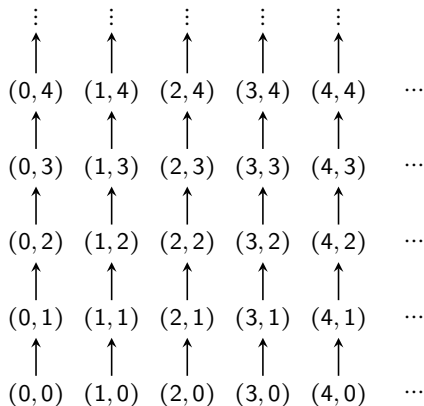
¿cómo se ve el orden parcial \subseteq ?

Diagrama de Hasse de $(\mathcal{P}(\{1,2,3\}), \subseteq)$



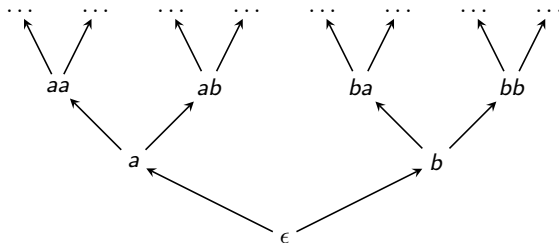
¿cómo se ve el orden lexicográfico \leq_2 ?

Diagrama de Hasse del orden lexicográfico $(\mathbb{N} \times \mathbb{N}, \leq_2)$



¿cómo se ve el orden parcial \leq_p sobre palabras?

Diagrama de Hasse de (Σ^*, \leq_p)



¿qué tienen de parecido todos estos grafos?