Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1' 2020

PAUTA CONTROL 2

Pregunta 1

Una posible solución es...

Sea R:

1. Si $(a,b) \notin R$ y $(b,a) \notin R \rightarrow a = b$
2. Si $(a,b) \notin R$ y $(b,c) \notin R \rightarrow (a,c) \notin R$
3. $\forall a.(a,a) \notin R$

P.d $(A \times A \backslash R)^{-1}$ es refleja, antisimétrica y transitiva.

Vemos que $(A \times A \backslash R)^{-1} = (R^c)^{-1}$

1. **Refleja**
   Sea $a \in A$, ya que R es irrefleja:
   $$(a,a) \notin R$$
   $$\Rightarrow (a,a) \in R^c$$
   $$\Rightarrow (a,a) \in (R^c)^{-1}$$
   Por tanto, $(R^c)^{-1}$ es refleja.
2. **Antisimétrica**
   P.d $(R^c)^{-1}$ es antisimétrico.
   Sea $(a,b) \in (R^c)^{-1}$ y $(b,a) \in (R^c)^{-1}$
   $$\Rightarrow (b,a) \in R^c \wedge (a,b) \in R^c$$
   $$\Rightarrow (b,a) \notin R \wedge (a,b) \notin R$$
   Entonces, por antiasimetría de R, $a = b$.
3. **Transitiva**
   P.d $(R^c)^{-1}$ es transitivo.
   Sean $(a,b) \in (R^c)^{-1}$ y $(b,c) \in (R^c)^{-1}$
   $$\Rightarrow (b,a) \in (R^c) \wedge (c,b) \in (R^c)$$
   $$\Rightarrow (b,a) \notin R \wedge (c,b) \notin R$$
   Por atransitividad,
   $$\Rightarrow (c,a) \notin R$$
   $$\Rightarrow (c,a) \in R^c$$
   $$\Rightarrow (a,c) \in (R^c)^{-1}$$

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por demostrar que la relación es refleja
- (**2 Puntos**) Por demostrar que la relación es antisimétrica. (1 punto por aplicar la definición de inversa y 1 punto por aplicar la definición de antisimetría)
- (**3 Puntos**) Por demostrar que la relación es transitiva. (1 punto por usar la definición de atransitividad, los otros 2 puntos se evalúan en cuanto al uso del inverso y del complemento)

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Para demostrar lo pedido bastaba con demostrar las siguientes afirmaciones:

1. Si R es transitiva, entonces $R \circ R \subseteq R$
2. Si R es refleja, entonces $R \subseteq R \circ R$

La primera afirmación se demostró en clases, por lo que vamos a dar una solución propuesta para la segunda. Sea R refleja y $(a,b) \in R$, como sabemos que $(b,b) \in R$, entonces por definición de composición es claro que $(a,b) \in R \circ R$ y por ende $R \subseteq R \circ R$. Luego con esto se demuestra, dado que R es transitiva y refleja, que $R = R \circ R$ y $p = 1$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**0.5 Puntos**) Por definir que se debe demostrar $R = R \circ R$
- (**0.5 Puntos**) Por demostrar $R \circ R \subseteq R$
- (**1 Puntos**) Por demostrar $R \subseteq R \circ R$

Pregunta 2.2

Sea $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, $p \leq n$ y una relación $R \subseteq A \times A$ definida de la siguiente manera:

$$R = \{(a_i, a_{i+1}) | 1 \leq i < p\} \cup \{(a_p, a_1)\}$$

Por la construcción de R podemos ver con R^i estaremos conectando por una arista los caminos de largo i de la relación original. Por esto mismo, cuando conectemos los de largo p nos quedará una relación en donde cada elemento se relaciona solo consigo mismo. Luego al componer con la R original pasará que:

$$(a,a) \in R^p \wedge (a,b) \in R \implies (a,b) \in R^{p+1} = R^1 = R$$

Y por ende el periodo de R es p.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por mencionar la idea de hacer un ciclo.
- (**1 Punto**) Por hacer la construcción general.

Pregunta 2.3

Lo primero que debemos demostrar es lo siguiente:

$$R \subseteq A \times A \text{ y } S \subseteq A \times A \text{ son reflejas } \implies R \circ S \text{ es refleja}$$

Se puede ver que si $a \in A \implies (a, a) \in S \wedge (a, a) \in R$ y por definición de composición $(a, a) \in R \circ S$.
Luego como el R propuesto es una relación refleja se da que $R \circ R$ también lo es. Más aún, por la Pregunta 2.1 sabemos que $R \subseteq R \circ R$, por lo que se cumple lo siguiente:

$$R \subseteq R^2 \subseteq R^3 \subseteq \ldots$$

Luego si consideramos que R tiene un periodo p en particular se cumple que $\exists k. \forall i \geq k. R^{i+p} \subseteq R^i$. Luego tenemos que:

$$R \subseteq R^2 \subseteq \cdots \subseteq R^i \subseteq \cdots \subseteq R^{i+p} \subseteq R^i$$

Como sabemos que la relación $\subseteq$ es antisimetrica y A es finito:

$$R^i = R^{i+1} = \cdots = R^{i+p}$$

Finalmente como p es el mínimo se da que $p = 1$.

Dado lo anterior el puntaje asignado es el siguiente:

- (**1 Punto**) Por demostrar que si R es refleja entonces $R^i \subseteq R^{i+1}$
- (**1 Punto**) Por demostrar que $R^i = R^{i+1} = \cdots = R^{i+p}$ por finitud de A.