Pontificia Universidad Católica de Chile
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC1253 - Matemáticas Discretas

Ayudantía 6

8 de mayo de 2020

Profesores C. Riveros - J. Salas

Tamara Cucumides y Bernardo Barías

Pregunta 1

1. Sean $\preccurlyeq_1$ y $\preccurlyeq_2$ dos órdenes parciales sobre un conjunto X. Definimos una nueva relación R sobre X tal que xRy si y solo si $x \preccurlyeq_1 y$ y $x \preccurlyeq_2 y$. Demuestre que R también es un orden parcial sobre X.
2. Suponga que $(S, \preccurlyeq_1)$ y $(T, \preccurlyeq_2)$ son órdenes parciales. Muestre que $(S \times T, \preccurlyeq)$ es un orden parcial, en donde $(s,t) \preccurlyeq (u,v)$ si y solo si $s \preccurlyeq_1 u$ y $t \preccurlyeq_2 v$.
3. Demuestre que si (A, R) es un orden parcial entonces el grafo dirigido (A, R) no tiene ciclos de largo ≥ 2. En otras palabras, el diagrama de Hasse de (A, R) es un grafo dirigido acíclico (DAG).

Pregunta 2

Dado un grafo finito no dirigido $G = (V, E)$ con $V \subseteq \mathbb{N}$, se definen las siguientes operaciones sobre G:

- Dada una arista $e = \{u, v\} \in E$, se define la operacion *eliminación* de e en G:

$$\textsc{Delete}(e, G) = H$$

  donde $H = (V, E - \{e\})$, esto es, H es el grafo al eliminar la arista e de G.

- Dada una arista $e = \{u, v\} \in E$ con $u < v$, se define la operación de *contracción* de e en G:

$$\textsc{Contract}(e, G) = H$$

  donde $H = (V - \{u\}, (E - E') \cup E'')$ es un nuevo grafo tal que $E' = \{\{u, x\} \mid \{u, x\} \in E\}$ y $E'' = \{\{v, x\} \mid \{u, x\} \in E \wedge x \neq v\}$. Es decir, el grafo que se conforma al "fusionar" u en v: se eliminan las aristas asociadas a u y se agregan a v (notar que no se repiten aristas en el grafo H).

Sea $\mathcal{G}$ el conjunto de todos los grafos finitos no dirigidos $G = (V, E)$ con $V \subseteq \mathbb{N}$. Se define la relación binaria $\preceq$ sobre $\mathcal{G}$ tal que $H \preceq G$ si existe una secuencia de operaciones de eliminación o contracción $\textsc{Op}_1, \textsc{Op}_2, \ldots, \textsc{Op}_n \in \{\textsc{Delete}, \textsc{Contract}, \epsilon\}$ (ϵ significa no realizar operación) y aristas $e_1, e_2, \ldots, e_n$ tales que:

$$H = \textsc{Op}_1(e_1,\ \textsc{Op}_2(e_2, \ldots\ \textsc{Op}_n(e_n, G)\ \ldots))$$

En otras palabras, una secuencia de operaciones de eliminación y contracción que transforman a G en H.

1. Demuestre que $\preceq$ es un orden parcial sobre $\mathcal{G}$.
2. Demuestre que $\preceq$ NO es un orden total sobre $\mathcal{G}$.

Pregunta 3

Un orden total $(A, \preceq)$ se dice *bien ordenado* si todo conjunto $B \subseteq A$ tiene un elemento mínimo. Una *cadena descendiente infinita* es una secuencia infinita $a_1, a_2, a_3, \ldots$ en A tal que $a_{i+1} \preceq a_i$ y $a_{i+1} \neq a_i$ para todo $i \geq 1$.

Demuestre que $(A, \preceq)$ está bien ordenado si, y solo si, $(A, \preceq)$ NO tiene cadenas descendientes infinitas.