Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC1253 — Matemáticas Discretas — 1'2020

GUIA 5
Notación asintótica

1. Determine cuál de las siguientes funciones son $O(n)$:
   - $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$
   - $f(n) = \frac{n^2+1}{n+1}$
   - $f(n) = \frac{n}{\log(n)}$

2. Determine cuál de las siguientes funciones son $O(n^2)$:
   - $f(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$
   - $f(n) = n \cdot \log(n)$
   - $f(n) = \frac{n^3+1}{n \cdot \log(n)}$

3. Determine cuál de las siguientes funciones son $O(\log(n))$:
   - $f(n) = \log(n+1)$
   - $f(n) = \log(n^2+1)$
   - $f(n) = \frac{x}{\log(x)}$

4. Demuestre que $n^2 + 4n + 17 \in O(n^3)$ pero $n^3 \notin O(n^2 + 4n + 17)$.

5. Demuestre que $n \log(n) \in O(n^2)$ pero $n^2 \notin O(n \log(n))$.

6. Demuestre que $2^n \in O(3^n)$ pero $3^n \notin O(2^n)$.

7. Ordene las siguientes funciones:

$$\sqrt{n}, \quad (1{,}5)^n, \quad n^{100}, \quad (\log(n))^3, \quad \sqrt{n} \cdot \log(n), \quad 10^n, \quad (n!)^2, \quad n^{99} + n^{98}$$

8. Demuestre una buena estimación O para las siguientes funciones:
   - $(n^2+8)(n+1)$
   - $(n \log(n) + n^2)(n^3+2)$
   - $(n! + 2^n)(n^3 + \log(n^2+1))$
   - $(n^3 + n^2 \log(n))(\log(n)+1) + (17 \log(n) + 19)(n^3+2)$

9. Demuestre que si $f(n) \in O(g(n))$, entonces $f(n)^n \in O(g(n)^n)$ para todo $n > 0$.

10. Suponga que $f(n) \in O(g(n))$ con f y g son funciones crecientes y no-acotadas. Demuestre que $\log(f(n)) \in O(\log(g(n)))$.

11. Sean f y g funciones crecientes y sea $c > 0$ una constante tal que para todo $n > 0$ se cumple que:

   - $4g(n) \leq g(2n) \leq 8g(n)$ y
   - $f(2n) \leq 2f(n) + cg(n)$.

   Demuestre que $f(n) \in O(g(n))$.

12. Sean f y g dos funciones. Demuestre que $O(f) = O(g)$ si, y solo si, $\Theta(f) = \Theta(g)$.

13. ¿Es verdad que $2^{\log_a(n)} \in O(2^{\log_b(n)})$ para $b < a$?

14. Demuestre que $\sum_{i=1}^{k} i^k \in \Theta(n^{k+1})$.

15. Demuestre que $\sum_{i=1}^{k} i^{-1} \in \Theta(\log(n))$.

16. Demuestre que $n! \in O(n^n)$ pero que $n^n \notin O(n!)$.

17. Sean $f(n)$ y $g(n)$ dos funciones de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{R}_0^+$ (reales no-negativos). Demuestre o refute las siguientes afirmaciones:

   a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existe y es distinto de ∞, entonces $f(n) \in O(g(n))$.
   b) $f(n) \notin O(g(n))$, entonces $g(n) \in O(f(n))$.
   c) $f(n) \in O(g(n))$, entonces $2^{f(n)} \in O(2^{g(n)})$.

18. Para los siguientes pares de funciones f y g, ¿es verdad que $f \in O(g)$? Demuestre su afirmación.

   a) $(\log(n))^k$ y n^ϵ para $k \geq 1$ y $\epsilon > 0$.
   b) $\sqrt{n}$ y $n^{\sin(n)}$.
   c) $\log(n!)$ y $n \cdot \log(n)$.
   d) $(\log(n))^{\log(n)}$ y n^ϵ para algún $\epsilon > 0$.
   e) $n^{\log(n)}$ y $\log(n)^n$.