Vimos dos algoritmos de ordenación, ambos *in place* y $O(n^2)$ en el peor caso

Selection sort:

- no tiene un mejor caso claramente mejor que el peor caso

Insertion sort:

- es $O(n)$ en el mejor caso —cuando los datos ya vienen ordenados
- sigue siendo $O(n^2)$ en el caso promedio —promedio sobre todas las permutaciones posibles igualmente probables

Vimos que el número promedio de inversiones en un arreglo de n elementos es $n(n–1)/4$

… por lo que un algoritmo que ordena intercambiando elementos (después de compararlos)

… y sólo corrige una inversión por intercambio (es decir, compara e intercambia sólo elementos adyacentes),

… no puede ordenar más rápidamente que $O(n^2)$ en promedio (y en el peor caso)

Pero, ¿qué pasa si un intercambio corrige más de una inversión?

P.ej., *A* = [34 8 64 51 32 21] tiene 9 inversiones:

- (34, 8), (34, 32), (34, 21), (64, 51), (64, 32), (64, 21), (51, 32), (51, 21), (32, 21)

Si intercambiamos 34 y 8, corregimos sólo una inversión:

- (34, 8)

… pero si intercambiamos 34 y 21, corregimos seis:

- (34, 8), (34, 32), (34, 21), (64, 21), (51, 21), (32, 21)
- (aunque introducimos algunas inversiones nuevas)

Otra instancia del problema de ordenación

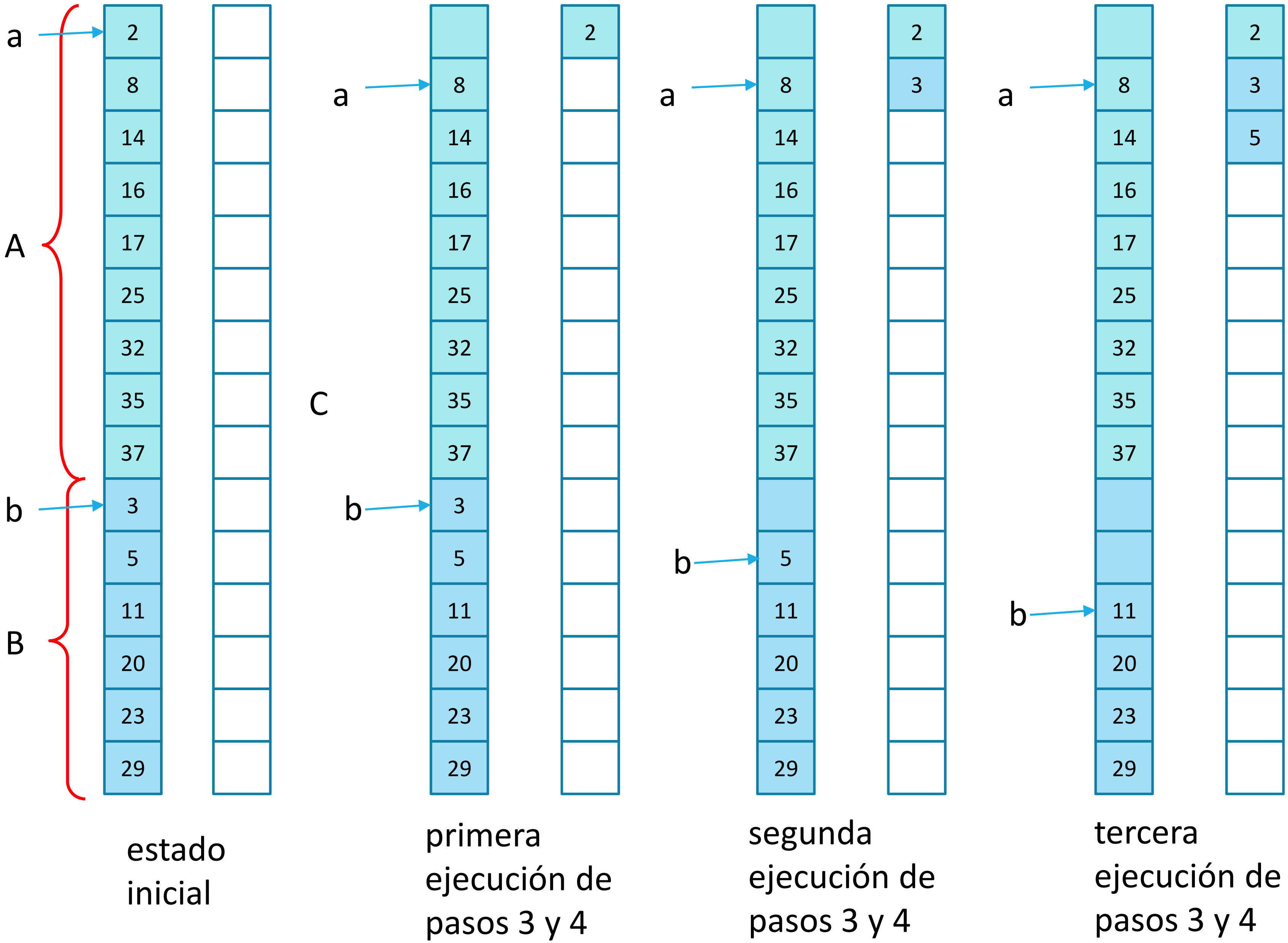
¿Qué tan rápido podemos ordenar un arreglo si

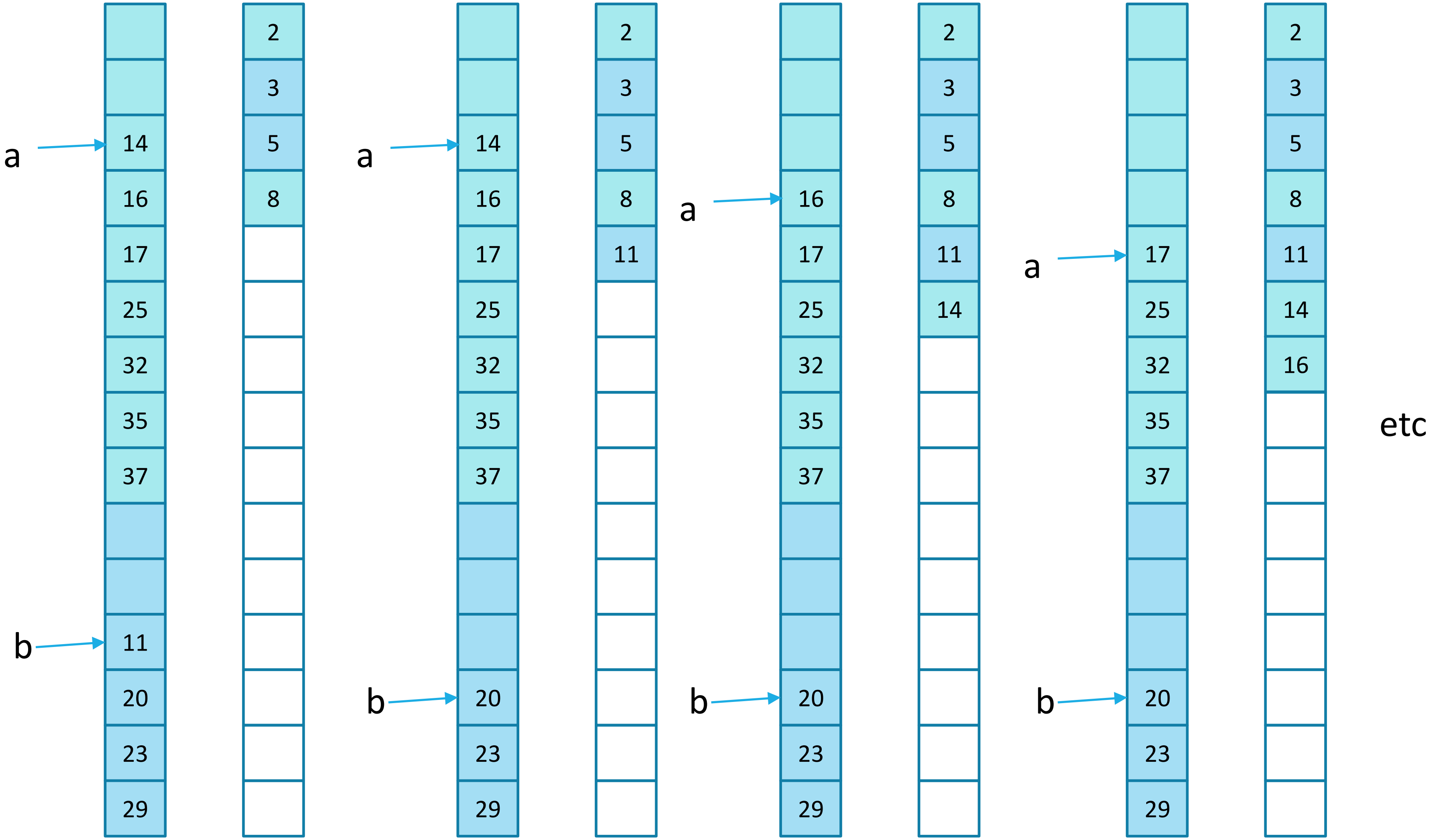
… los datos están separados en dos secuencias ordenadas?

Mezcla (o *merge*) de dos secuencias ordenadas, en otra secuencia ordenada

Para dos secuencias ordenadas, A y B:

1. Sea C una secuencia ordenada, inicialmente vacía
2. Sean a y b el primer elemento de A y B, respectivamente
3. Extraer de su respectiva secuencia el menor entre a y b
4. Insertar ese elemento extraído al final de C
5. Si quedan elementos en ambos A y B, volver a 2.
6. Concatenar C con la secuencia que aún tenga elementos


a
A
b
B
2
8
14
16
17
25
32
35
37
3
5
11
20
23
29
estado inicial
a
C
b
primera ejecución de pasos 3 y 4
a
b
segunda ejecución de pasos 3 y 4
a
b
tercera ejecución de pasos 3 y 4



cuarta ejecución de pasos 3 y 4

quinta ejecución de pasos 3 y 4

sexta ejecución de pasos 3 y 4

séptima ejecución de pasos 3 y 4

Propiedades de *merge*

¿Cómo demostramos que *merge* es correcto?

¿Cuál es su complejidad?

(en principio, *merge* se podría ejecutar in place, pero, como se puede deducir de la figura anterior, esto requeriría desplazar la secuencia *A* un lugar hacia abajo cada vez que se saca un elemento de la secuencia *B*)

Finitud

En cada paso el algoritmo extrae un elemento de A o B y lo pone en C

Cuando una de las secuencias queda vacía, se toma todo lo de la otra secuencia y se pone en C

En total se hacen $|A| + |B|$ pasos, y como tanto A como B son finitos, el algoritmo es finito

Corrección (por inducción sobre las inserciones en C)

PD: Luego de insertar el último elemento en C, ésta está ordenada

Caso Base: Luego de la primera inserción, C tiene un solo elemento x_1, por lo que está ordenada.

Hipótesis Inductiva: Luego de la i-ésima, i.e., inserción del elemento x_i, C está ordenada.

Ahora toca la siguiente inserción.

- Si quedan elementos en A y en B, sea x_{i+1} el menor entre las cabezas de A y de B.

- Si sólo quedan elementos en una de las dos secuencias, sea x_{i+1} la cabeza de ésta.

Se elimina x_{i+1} de su respectiva secuencia y se inserta al final de C.

$x_i \leq x_{i+1}$. De no ser así x_{i+1} habría salido antes, ó A y B no habrían estado ordenadas.

Como C estaba ordenada, $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_i$, y como $x_i \leq x_{i+1}$, entonces C está ordenada.

Por lo tanto, luego de insertar el último elemento x_n, C está ordenada.

Complejidad de *merge*

Para dos secuencias ordenadas, A y B:

1. Sea C una secuencia ordenada, inicialmente vacía
2. Sean a y b el primer elemento de A y B, respectivamente
3. Extraer de su respectiva secuencia el menor entre a y b
4. Insertar ese elemento extraído al final de C
5. Si quedan elementos en ambos A y B, volver a 2.
6. Concatenar C con la secuencia que aún tenga elementos

Definiciones → no influyen

O(1) c/u → O(1) en total

Sumar el O(1) anterior tantas veces como la cantidad de elementos que hay en *A* y *B* combinados → **O(*n*)**

Ordenación basada en *merge*

¿Podemos usar **merge** para ordenar una secuencia arbitraria?

(recordemos: *merge* necesita partir de dos (sub)secuencias ya ordenadas)

Si de algún modo primero podemos crear dos secuencias ordenadas

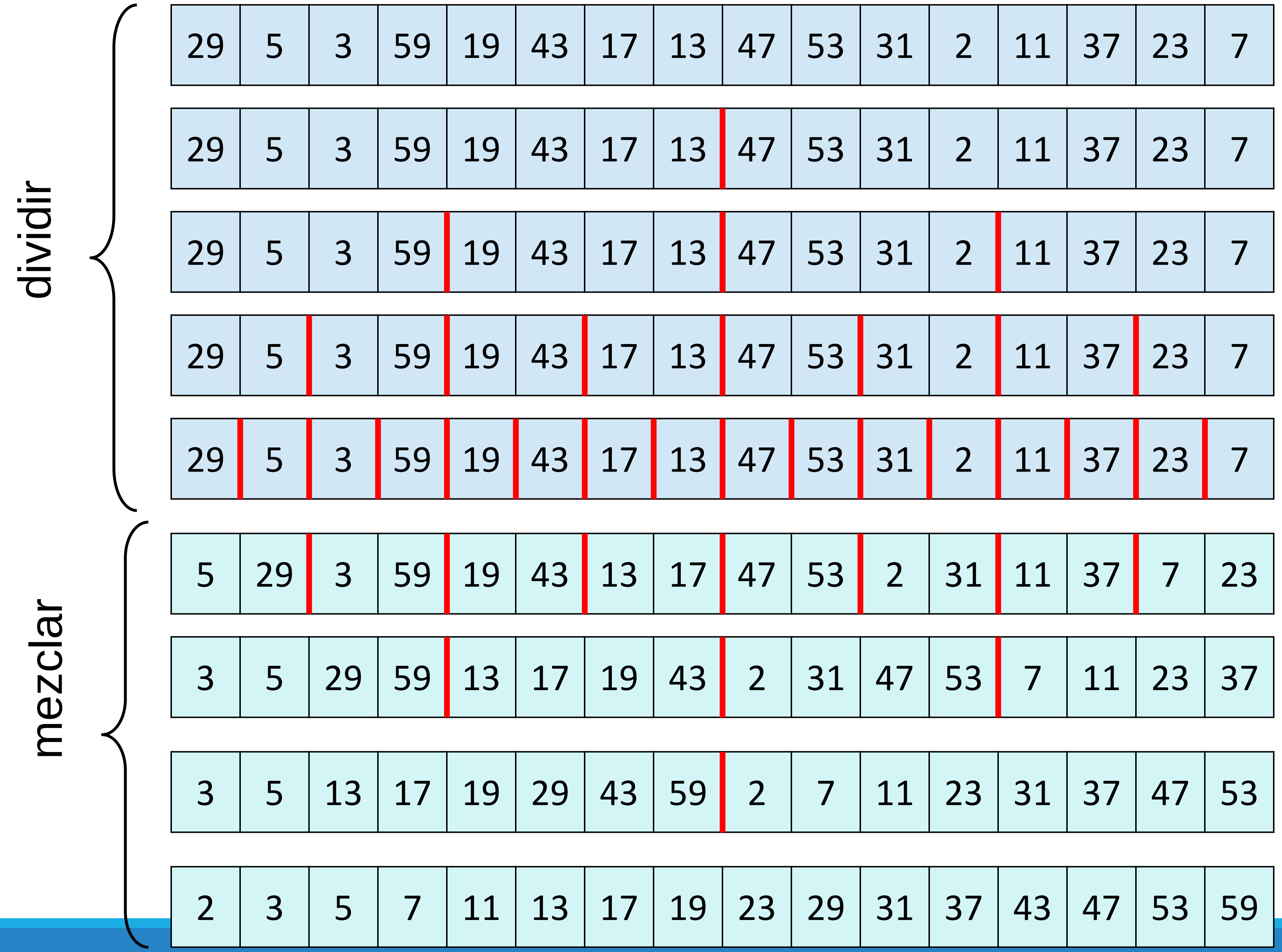
(p.ej., la mitad izquierda y la mitad derecha de la secuencia arbitraria)

… entonces luego podemos combinarlas usando *merge*, ordenando así la secuencia completa

El algoritmo *mergeSort*

Para una secuencia A:

1. Si A tiene un solo elemento, entonces A está ordenada; terminar en este paso
2. Dividir la secuencia en mitades
3. Ordenar cada mitad recursivamente usando *mergeSort*
4. Combinar las mitades (ya ordenadas) usando *merge*


dividir
29 5 3 59 19 43 17 13 47 53 31 2 11 37 23 7
29 5 3 59 19 43 17 13 | 47 53 31 2 11 37 23 7
29 5 3 59 | 19 43 17 13 | 47 53 31 2 | 11 37 23 7
29 5 | 3 59 | 19 43 | 17 13 | 47 53 | 31 2 | 11 37 | 23 7
29 | 5 | 3 | 59 | 19 | 43 | 17 | 13 | 47 | 53 | 31 | 2 | 11 | 37 | 23 | 7
mezclar
5 29 | 3 59 | 19 43 | 13 17 | 47 53 | 2 31 | 11 37 | 7 23
3 5 29 59 | 13 17 19 43 | 2 31 47 53 | 7 11 23 37
3 5 13 17 19 29 43 59 | 2 7 11 23 31 37 47 53
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 43 47 53 59

… y sus propiedades

Demuestra que *mergeSort* es correcto

Calcula y justifica su complejidad

mergeSort es un algoritmo **recursivo**

Todo algoritmo recursivo debe chequear en primer lugar el *caso base*:

- el caso cuya solución se calcula **sin hacer recursión**

Las llamadas recursivas deben ser para **casos** distintos al caso original y **que se acerquen un poco más al caso base**

mergeSort(secuencia A):

1. Si A tiene un solo elemen-to, entonces A está ordenada; terminar en este paso
2. Dividir la secuencia en mitades
3. Ordenar cada mitad recur-sivamente usando *mergeSort*
4. Combinar las mitades (ya ordenadas) usando *merge*

Sea $T(n)$ el número de pasos que *mergeSort* toma para ordenar n elementos

El caso base se calcula aparte:

$T(1) = 1$

El caso general se calcula a partir de una *ecuación de recurrencia*:

$T(n) = 2T(n/2) + n$

mergeSort(secuencia A):

1. Si A tiene un solo elemento, entonces A está ordenada; terminar en este paso
2. Dividir la secuencia en mitades
3. Ordenar cada mitad recursivamente usando *mergeSort*
4. Combinar las mitades (ya ordenadas) usando *merge*

Resolvamos la recurrencia $T(n) = 2T(n/2) + n$ sabiendo que $T(1) = 1$

$$\left.\begin{array}{lcl} T(n)/n & = & T(n/2)/(n/2) + 1 \\ T(n/2)/(n/2) & = & T(n/4)/(n/4) + 1 \\ T(n/4)/(n/4) & = & T(n/8)/(n/8) + 1 \\ & \vdots & \\ T(2)/2 & = & T(1)/1 + 1 \end{array}\right\} \log n \text{ niveles}$$

Sumando ambas columnas (las sumas son iguales) y cancelando los términos que aparecen a ambos lados del signo "=", obtenemos

$$T(n)/n \quad = \quad T(1)/1 + \log n$$

$$\Rightarrow \qquad \boldsymbol{T(n) = n \log n + n = \mathrm{O}(n)}$$

En resumen …

mergeSort es un algoritmo de ordenación

… de complejidad de tiempo O(n log n)

- una mejora importante con respecto a los algoritmos O(n^2)

… y de complejidad de espacio O(n)

- debido a que *merge* requiere un arreglo adicional para mezclar eficientemente dos secuencias ordenadas

La estrategia algorítmica
dividir para reinar

1. Dividir el problema original es dos (o más) subproblemas del mismo tipo

2. Resolver (recursivamente) cada subproblema

3. Encontrar la solución al problema original a partir de las soluciones a cada subproblema

mergesort es un algoritmo basado en la estrategia **dividir para reinar**

A. Dividir el problema original es dos subproblemas del mismo tipo

B. Resolver (recursivamente) cada subproblema

C. Encontrar la solución al problema original a partir de las soluciones a cada subproblema

mergeSort(secuencia A):

1. Si A tiene un solo elemento, terminar en este paso
2. Dividir la secuencia en mitades
3. Ordenar cada mitad recursivamente usando *mergeSort*
4. Combinar las mitades (ya ordenadas) usando *merge*