PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC2213 — LÓGICA PARA CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN 2021-1

NOMBRE: Matías Duhalde

Tarea 4

1 Parte 1

Sea τ una valuación cualquiera para $\Sigma = \{\varphi_E, \varphi_{\bar{E}}\}$. Para que se Σ sea verdad, τ debe satisfacer tanto φ_E como $\varphi_{\bar{E}}$.

- Para que φ_E sea verdadero, todas sus variables deben ser verdaderas ($= 1$), debido a que es una conjunción de variables. Por definición de φ_E, tenemos que sus variables corresponden a aquellas e_{ij}, tales que $(i, j) \in E$, o en otras palabras, (i, j) es una arista de E. De esta manera, τ debe ser tal que si (i, j) es arista del grafo, entonces asigna $e_{ij} = 1$.
- Para que $\varphi_{\bar{E}}$, todas sus variables deben ser falsas ($= 0$), debido a que esta formula corresponde a una conjunción de la negación de estas variables. Por definición de $\varphi_{\bar{E}}$, sus variables corresponden a aquellas e_{ij} tales que $(i, j) \notin E$, es decir, los pares (i, j) que NO son arista del grafo. Entonces, τ debe estar definida de tal forma que si (i, j) no es arista del grafo, entonces $e_{ij} = 0$

Con las dos condiciones anteriores, se define τ de la siguiente forma:

$$\tau(e_{ij}) = \begin{cases} 1, & \text{si } (i, j) \text{ es arista del grafo} \\ 0, & \text{si } (i, j) \text{ NO arista del grafo} \end{cases}$$

Dado que llegamos a la definición anterior a partir de un τ cualquiera, es la única valuación que hace verdad a Σ. Además, la valuación asigna un 1 a la variable e_{ij} si y solo si (i, j) es una arista del grafo en E, y en caso contrario, asigna 0. $\square$

2 Parte 2

Para un grafo $G = (V, E)$, y suponiendo que (i, j) representa a una arista dirigida que va desde i a j.

$$\bigvee_{x \in V} \left(\bigwedge_{y \in V} \neg e_{yx} \right)$$

Explicación: Se hace una conjunción de la negación de todas las variables que representan a la arista (y, x), con x fijo. Si e_{yx} está en el grafo (es decir, existe una arista que llega a x), entonces su valor será 1, por lo que su negación 0, y toda la conjunción será 0. Si no existe ninguna arista e_{yx} (ninguna arista llega al nodo x), entonces el valor de toda la fórmula será 1. Fuera de los paréntesis, se hace una disyunción entre todos los nodos del grafo, por lo que se “revisan” todos los nodos, y la disyunción indica que al menos uno debe cumplir lo de adentro para que toda la fórmula sea verdadera.

3 Parte 3

Para $n = 2$:

$$\psi_2 = \bigwedge_{x \in V} \left(\bigwedge_{y \in V} \neg (e_{xy} \wedge e_{yx}) \right)$$

Para $n = 3$:

$$\psi_3 = \bigwedge_{x \in V} \left(\bigwedge_{y \in V} \left(\bigwedge_{z \in V} \neg(e_{xy} \wedge e_{yz} \wedge e_{zx}) \right) \right)$$

Entonces, para un $n > 1$ arbitrario, la fórmula se vería como:

$$\psi_n = \bigwedge_{a_1 \in V} \left(\bigwedge_{a_2 \in V} ... \left(\bigwedge_{a_n \in V} \neg(e_{a_1 a_2} \wedge e_{a_2 a_3} ... \wedge e_{a_{n-1} a_n} \wedge e_{a_n a_1}) \right) ... \right)$$

4 Parte 4

Primero, es importante dejar definido a P en base a lo hecho en los items anteriores. Sea ψ_n la fórmula definida en la parte 3, γ la formula definida en la parte 2, y sea n la cantidad de nodos.

$$P = (\psi_2 \wedge \psi_3 \wedge ... \wedge \psi_n) \rightarrow \gamma$$

Entonces, para un grafo con n nodos, P equivale a lo siguiente: si se cumple que no tiene ciclos de largo 2 ($\psi_2 = 1$), no tiene ciclos de largo 3 ($\psi_2 = 1$), ..., y no tiene ciclos de largo n ($\psi_n = 1$), entonces existe al menos un nodo que no tienen ninguna arista entrante ($\gamma = 1$).

Queremos encontrar una fórmula que sea tautología si y solo si P es verdad para todos los grafos con n nodos.