Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 — Lógica para ciencias de la Computación 2021-1

NOMBRE: Matías Duhalde

Tarea 6

1 Demostrar que Conjunto Oscuro (CO) es NP-Complete

Para esto, se debe demostrar lo siguiente

- $CO \in$ NP
- $CO \in$ NP-Hard

1.1 $CO \in$ NP

Para probar el primer punto, se puede definir la siguiente máquina, muy parecida a la definida en la tarea 3: al string original $C(G)$ que representa la codificación del grafo, se le agrega un string de la forma 0^n al principio ($n = |V|$), quedando w de la forma $0^n\#1^k\#C(G)$.

A continuación, se transforma el string 0^n a un string $a \in \{0,1\}^n$ de manera no-determinista, con los siguientes estados: $\delta(q_A, 0) = \{(q_A, 0, \rightarrow), (q_A, 1, \rightarrow)\}$, resultando un string que representa un posible conjunto oscuro formado por los vértices correspondientes a los valores 1 de este nuevo string. Esta fase no-determinista funciona en tiempo polinomial, y genera un árbol de 2^n ramas (los conjuntos oscuros posibles).

Posteriormente, se cuenta la cantidad de 1s que tenga este nuevo substring, y se comprueba que corresponda a la cantidad representada por el string 1^k. Se detiene la ejecución luego si la cantidad de 1s es distinta a k.

Finalmente, sólo basta comprobar que el string resultante represente un conjunto oscuro de largo k que exista en G. Esto se puede hacer con la Máquina de Turing descrita en la tarea 3, en tiempo polinomial. De esta manera, se demuestra que el lenguaje CO es aceptado por una máquina no-determinista, que funciona en tiempo polinomial, por lo que $CO \in NP$.

1.2 $CO \in$ NP-Hard

Ahora, se debe demostrar el segundo punto, es decir, que CO es NP-Hard. Para esto, se reduce desde Clique hasta CO, el cual sabemos que es NP-Hard (demostrado en la ayudantía a partir de 3CNF-SAT).

Supongamos que tenemos un grafo $G = (V, E)$ que tiene un clique de tamaño k. Formamos el grafo $G' = (V', E')$ de la siguiente manera:

- Para cada par de vértices v_1 y v_2 en V, si existe una arista $(v_1, v_2) \in E$, entonces la arista $(v_1, v_2) \notin E'$. En otras palabras, si dos nodos se encuentran conectados en G, entonces **no** estarán conectados en G'
- Para cada par de vértices v_1 y v_2 en V, si la arista (v_1, v_2) no se encuentra en E, entonces la arista $(v_1, v_2) \in E'$. Es decir, si dos nodos **no** se encuentran conectados en G, entonces estarán conectados en G'
- $V' := V$

Para un grafo G que tiene un clique de k vértices, al armar G' con la reducción, los nodos del clique no estarán conectados entre sí, por lo que se formará un conjunto oscuro de tamaño k.

Para un grafo G que no tiene ningún clique de tamaño $k > 1$, al generar G', se conectarán todos los nodos entre sí, debido a que para que no haya ningún clique de tamaño mayor a 1, no puede haber ninguna conexión ($E = \emptyset$). Dado que todos los nodos están conectados en G', no hay ningún conjunto oscuro.

Para un grafo G, si tiene un clique de tamaño $r < k$, al armar G', este tampoco tendrá un conjunto oscuro de tamaño k. Esto, debido a que el máximo conjunto oscuro posible que se genera es de tamaño r. Si se generara un conjunto oscuro de tamaño $r+1 <= k$, esto implica que en el grafo G original, existiría un nodo que estaba conectado a todos los nodos del clique original, y al reducir el grafo, este estaría desconectado de todos los otros nodos del clique, por lo que formaría parte del conjunto oscuro. Sin embargo, dado que este nodo estaba conectado con todos los del clique, significa que también es parte del clique, por lo que el tamaño de este sería $r+1$. De esta manera esta reducción genera un grafo G' con conjunto oscuro de tamaño k, si y solo si, el grafo original G tenía un clique de tamaño k.

Esta reducción es realizable en $O(n^2)$, debido a que se debe revisar cada conexión/arista en G, y determinar si existe o no, para generar u omitir la conexión correspondiente en G'. El número de aristas está acotado por $O(n^2)$, donde n es la cantidad de vértices $|V|$. Por lo tanto, esta reducción está en PTIME. De esta manera, se demuestra que CO es NP-Hard, y dado que se cumple que $CO \in$ NP, CO es NP-Complete. $\square$