PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN
IIC2213 — LÓGICA PARA CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN 2021-1

NOMBRE: Matías Duhalde

Tarea 1 - Parte B

$$MoM = \{w \in \{0,1\}^* | \text{ existen MT } M_1 \text{ y } M_2 \text{ tal que } w = C(M_1)0000C(M_2) \text{ y:}$$
$$M_1 \text{ acepta a } C(M_2) \text{ o } M_2 \text{ acepta a } C(M_1)\}$$

Mostrar que MoM es indecidible.

Sea DA el lenguaje de diagonalización, tal que:

$$DA = \{w \in \{0,1\}^* \mid w \text{ es una codificación de una MT } M, \text{ y } M \text{ acepta a } C(M)\}$$

Sea f una función de reducción de DA a MoM, que toma como input una palabra w en $\{0,1\}^*$ de la forma $C(M)$ tal que $w \in DA$, y entrega como output la palabra $C(M)0000C(M)$, donde M es una Máquina de Turing. Además, si w no es una codificación válida de una Máquina de Turing, $f(w)$ simplemente retorna w.

Esta función $f(w)$ es claramente computable, debido a que sólo consiste en concatenar a w el string de cuatro ceros 0000, y después nuevamente w, resultando finalmente en el string $w0000w = C(M)0000C(M)$.

Tenemos que si $w \in DA$, implica que w es una codificación válida de una Máquina de Turing M, y además esta máquina M acepta a su propia codificación $C(M)$. Entonces, tenemos que $f(w) = w0000w = C(M)0000C(M)$, y para que $f(w)$ pertenezca a MoM, se debe cumplir que M acepte a $C(M)$, lo cual efectivamente se cumple debido a lo anterior, por lo que $f(w) \in MoM$.

Por otro lado, tenemos que si $f(w) \in MoM$, implica que la Máquina de Turing M en el string $f(w) = w0000w = C(M)0000C(M)$ acepta a su propia codificación $C(M)$, por la misma definición de MoM. Entonces, tenemos que para que w pertenezca a DA, se debe cumplir que la máquina M en $w = C(M)$ acepte a su propia codificación, lo cual es verdadero, debido a lo anterior, por lo que $f(w) \in DA$.

Así, se cumple la condición de que $w \in DA \iff f(w) \in MoM$, por lo que f corresponde a una reducción válida y $DA \leq MoM$.

Entonces, nuestra función f "mapea" desde las palabras $w = C(M)$, hasta las palabras $w = C(M_1)0000C(M_2)$, con $M_1 = M_2$, el cual es un subconjunto de las palabras $w = C(M_1)0000C(M_2)$, para M_1 y M_2 cualquiera. Sin embargo, como estamos intentando probar "indecidibilidad", usando el teorema de la reducción, podemos concluir que MoM es indecidible, debido a que sabemos que el lenguaje DA es indecidible, y si $L_1 = DA$ es indecidible, entonces también lo es $L_2 = MoM$. □