Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación
IIC2213 — Lógica para ciencias de la Computación 2021-1

NOMBRE: Matías Duhalde

Tarea 8

1 Definición de fórmula

Sea n un número finito que representa la cantidad de elementos de la estructura. Se define la fórmula ϕ:

$$\phi = \exists x_1 \exists x_2 ... \exists x_n \Big(\bigwedge_{i \neq j} \neg(x_i = x_j) \tag{1}$$

$$\wedge \left(\forall y \bigvee_i (y = x_i) \right) \tag{2}$$

$$\wedge \bigwedge_{a_i, a_j \in R} R(x_i, x_j) \tag{3}$$

$$\wedge \bigwedge_{a_i, a_j \notin R} \neg R(x_i, x_j) \tag{4}$$

$$\wedge \bigwedge_{a_i \in S} S(x_i) \tag{5}$$

$$\wedge \bigwedge_{a_i \notin S} \neg S(x_i) \Big) \tag{6}$$

Se tiene que una estructura sobre el vocabulario L satisface esta formula, debido a que:

- (1) sólo se cumple si la estructura tiene al menos n elementos (se asegura de que no haya también elementos "repetidos"). Además, (2) sólo se cumple si hay como máximo n elementos (para todo y del dominio, este es igual a al menos un x_i). Así, estas dos condiciones validan que el dominio sea de tamaño n.
- (3) es verdadero si es es que para todo par perteneciente a la relación R, sean también verdaderos en la estructura, y (4) valida que sean falsos aquellos que no pertenecen. De esta manera, se define el alcance de cada relación.
- Ocurre algo similar a lo anterior en (5) y (6), pero para la relación unaria S.

Se quiere demostrar el siguiente predicado:

Para toda estructura $\mathfrak{B}$ sobre el vocabulario L, se tiene que $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\mathfrak{A}$ (1) si y sólo si $\mathfrak{B}$ satisface a ϕ (2)

Si tenemos una estructura $\mathfrak{B}$ que satisface a ϕ, entonces $\mathfrak{B} \models \phi(b_1, b_2, ..., b_n)$. Dado que también $\mathfrak{A}$ satisface a ϕ tal que $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, a_2, ..., a_n)$, entonces podemos definir una función que "mapea" de el dominio de $\mathfrak{A}$ A al dominio de $\mathfrak{B}$ B: $a_i \to b_i$. Al comprobarse la existencia de esta función, comprobamos también que existe un isomorfismo entre $\mathfrak{A}$ y $\mathfrak{B}$, demostrando (2) $\to$ (1).

Equivalentemente, si tenemos que $\mathfrak{B}$ es isomorfa a $\mathfrak{A}$, entonces, por definición de isomorfismo, existe una función f que mapea los elementos del dominio de $\mathfrak{B}$ a $\mathfrak{A}$ (y viceversa), tal que para toda relación R, si $(b_1, ..., b_n) \in R^{\mathfrak{B}}$, entonces $(f(b_1), ..., f(b_n)) \in R^{\mathfrak{A}}$. Dado que sabemos que $\mathfrak{A}$ satisface a ϕ, es decir, $\mathfrak{A} \models \phi(a_1, a_2, ..., a_n)$, teniendo f, sabemos que $\mathfrak{B} \models \phi(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$.

□