Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2021

PAUTA TAREA 1

Pregunta 1

Sabemos que, para cualquier L regular, existe un autómata $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \Delta, I, F)$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = L$. Ahora, para demostrar que $L - 1$ es regular, nos basta con definir $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma, \Delta', I', F')$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = L - 1$. Una construcción posible para este autómata es la siguiente:

- $Q' = Q$
- $I' = I$
- $\Delta' = \Delta$
- $F' = \{q \in Q \mid \exists a \in \Sigma . \exists p \in F . (q, a, p) \in \Delta\}$

Es decir, los estados finales del nuevo autómata son todos aquellos para los cuales existía una transición hacia un estado final en el autómata original. Ahora nos queda demostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}') = L - 1$.

($\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq L - 1$)

Sea $w = a_1 a_2 a_3 \ldots a_n \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$ y sea ρ una ejecución sobre w de $\mathcal{L}(\mathcal{A}')$:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} p_n$$

con $p_0 \in I'$ y $p_n \in F'$. Ahora, como $p_n \in F'$ entonces $\exists p \exists a . (p_n, a, p) \in \Delta$ y $p \in F$ por definición de $\mathcal{A}'$. Finalmente si construimos ρ' tal que:

$$\rho' : p_0 \xrightarrow{a_1} p_1 \xrightarrow{a_2} \ldots \xrightarrow{a_n} p_n \xrightarrow{a} p$$

Notamos que es una ejecución de aceptación sobre $\mathcal{A}$ por lo que $w \cdot a \in L$.

$$\therefore w \in L - 1$$

($L - 1 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$)

Sea $w = b_1 b_2 \ldots b_n \in L - 1$. Por definición de $L - 1$ sabemos que $\exists a . w \cdot a \in L$ y por ende $w \cdot a \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ y por lo tanto existe la siguiente ejecución de $\mathcal{A}$ sobre w:

$$\rho : p_0 \xrightarrow{b_1} p_1 \xrightarrow{b_2} \ldots \xrightarrow{b_n} p_n \xrightarrow{a} p$$

con $p_0 \in I$ y $p_n \in F$. Esto que implica que:

$$\rho' : p_0 \xrightarrow{b_1} p_1 \xrightarrow{b_2} \ldots \xrightarrow{b_n} p_n$$

es una ejecución sobre w de $\mathcal{A}'$ ya que, por construcción, $p_n \in F$. Finalmente, como $(p_n, a, p) \in \Delta$ entonces $(p_n, a, p) \in \Delta'$ y $p_n \in F'$ ya que $p \in F$.

$$\therefore w \in \mathcal{L}(\mathcal{A}')$$

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por dar una intuición de como construir el autómata que acepta $L - 1$
- **(1 punto)** Por construir el autómata que acepta $L - 1$
- **(1 punto)** Por demostrar $\mathcal{L}(\mathcal{A}') \subseteq L - 1$
- **(1 punto)** Por demostrar $L - 1 \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}')$

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Un autómata que lee el lenguaje descrito en el enunciado es $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, definido por:

- $Q = \{0, 1\}^3$
- $\Sigma = \{0, 1\}^3$
- $\delta(\vec{v}, \vec{v'}) = \vec{v} + \vec{v'}$
- $q_0 = [0\ 0\ 0]^T$
- $F = \{[0\ 0\ 0]^T\}$

Una intuición para este autómata es que el estado en el que nos encontramos representa la suma de todos los vectores hasta ahora. Por lo tanto al estar en un estado u y leer un vector v, termina en el estado $u + v$, con la operación de suma tal como está descrita en la tabla de verdad del enunciado. Luego, los estados finales serán solo los que terminen con un vector $[0\ 0\ 0]^T$

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** por definir correctamente los estados del autómata
- **(1 punto)** por definir correctamente las transiciones del autómata
- **(1 punto)** por definir correctamente los estados iniciales y finales del autómata
- **(1 punto)** por la explicación (si la construcción es correcta otorgar este punto)

Pregunta 2.2

Un autómata que lee el lenguaje descrito en el enunciado es $\mathcal{A}' = (Q', \Sigma', \Delta', I', F')$, definido por:

- $Q' = \{0, 1\} \cup \{0, 1\}^3$
- $\Sigma = \{0, 1\}^3$
- $q_0 = 0$
- $F = 1$

y con la relación de transición definida por:

$$\begin{aligned}\Delta \; = \; & \{(0, \vec{v}, 0) \mid \vec{v} \in \{0,1\}^3\} \cup \\ & \{(0, \vec{v}, \vec{v}) \mid \vec{v} \in \{0,1\}^3\} \cup \\ & \{(\vec{v}, \vec{v'}, \vec{v}) \mid \vec{v}, \vec{v'} \in \{0,1\}^3\} \cup \\ & \{(\vec{v}, \vec{v'}, 1)\} \mid \vec{v}, \vec{v'} \in \{0,1\}^3 \wedge \vec{v}^T \cdot \vec{v'} = 0\}\end{aligned}$$

Una intuición para este autómata es que lee 2 vectores cualquiera (de forma no determinista) de la palabra de input, y ejecuta la multiplicación entre ellos. Al leer el primer vector, se llega al estado del vector leído (de la misma forma que se almacena en la primera pregunta), y al leer el segundo vector, la transición solo está definida si se la multiplicación da 0. De esta forma, los estados finales son sólo si hay al menos un par de vectores distintos que al multiplicarlos den 0.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** por definir correctamente los estados del autómata
- **(1 punto)** por definir correctamente las transiciones del autómata
- **(1 punto)** por definir correctamente los estados iniciales y finales del autómata
- **(1 punto)** por la explicación (si la construcción es correcta otorgar este punto)