NOMBRE: Matías Duhalde | Nº LISTA: -

PUNTAJE:

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
ESCUELA DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE CIENCIA DE LA COMPUTACIÓN

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2021

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 1

Algorithm 1 Determinar si w es separable por L

```
function IsSeparable(A = (Q, Σ, Δ, I, F), w)
    S ← I
    n ← |w|
    for i ← 1 to n do
        S_old ← S
        S ← ∅
        for p ∈ S_old do
            S ← S ∪ {q | (p, a_i, q) ∈ Δ}
        end for
        if i < n and Check(S ∩ F ≠ ∅) then
            S ← I
        end if
    end for
    if Check(S ∩ F ≠ ∅) then
        return TRUE
    end if
    return FALSE
end function
```

El algoritmo es correcto, porque si durante la revisión de una palabra w no se encuentra ningún estado final, se cumpliría la primera condición, y la palabra es separable.

En el caso de que se encuentre el primer estado final, el prefijo u "escaneado" hasta ese estado de por sí es separable, debido a que este u no tiene a su vez prefijos distintos de u aceptados por el autómata. Dado que ya no se cumpliría la primera condición, es necesario revisar por la segunda condición, por lo que si $w = uv$, entonces debe revisar si la palabra v es separable, para lo cual se vuelve a colocar el autómata en los estados iniciales I. Se procede luego con la misma lógica inicial de revisar w, y volviendo a separar y "reiniciar" el autómata de ser necesario. De esta manera, si al terminar de revisar la palabra o se encuentra el autómata sobre un estado final, significa que la sub-palabra (y también la palabra original) es separable, por lo que el algoritmo retorna `TRUE`.

Es fácil ver que el algoritmo funciona con la complejidad esperada, debido a que sólo se recorre la palabra una vez $|w|$, y las operaciones que se realizan durante la revisión de la palabra, o son constantes en complejidad, o dependen linealmente del largo del autómata $|A|$ (notar el for que se encuentra anidado, que recorre los estados, y agrega este parámetro a la complejidad $O(|A||w|)$.

NOMBRE: Matías Duhalde N° LISTA: -

PUNTAJE:

Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2021

Tarea 3 – Respuesta Pregunta 2

1. R^{-1}

La afirmación es verdadera

Sea $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ un transductor que define una relación racional R cualquiera. Se define el siguiente transductor $\mathcal{T}^{-1} = (Q, \Sigma', \Omega', \Delta', I, F)$, con:

$$\Sigma' = \Omega$$
$$\Omega' = \Sigma$$
$$\Delta' = \{(p, a, b, q) \mid (p, b, a, q) \in \Delta\}$$

Queremos demostrar que $\mathcal{T}^{-1}$ define la relación R^{-1}.

Sea la siguiente una configuración de $\mathcal{T}$, con $a_i \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$, y $b_i \in \Omega \cup \{\epsilon\}$, y $q \in Q$:

$$(q_i, a_{i+1}...a_n, b_0...b_i)$$

Si existe la transición $(q_i, a_{i+1}, b_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta$, entonces:

$$(q_i, a_{i+1}...a_n, b_0...b_i) \vdash_{\mathcal{T}} (q_{i+1}, a_{i+2}...a_n, b_0...b_i b_{i+1})$$

Por definición de $\mathcal{T}^{-1}$, existe también la transición $(q_i, b_{i+1}, a_{i+1}, q_{i+1}) \in \Delta'$, por lo que en $\mathcal{T}^{-1}$ se cumple lo siguiente:

$$(q_i, b_{i+1}...b_n, a_0...a_i) \vdash_{\mathcal{T}} (q_{i+1}, b_{i+2}...b_n, a_0...a_i a_{i+1})$$

Dado que los estados Q, los estados iniciales I, y los finales F son los mismos para ambos transductores, si existen configuraciones en $\mathcal{T}$ $(q_0, a_1 a_2...a_n, \epsilon)$ y $(q_f, \epsilon, b_1...b_n)$ tal que $q_0 \in I$, $q_f \in F$, y

$$(q_0, a_1 a_2...a_n, \epsilon) \vdash^*_{\mathcal{T}} (q_f, \epsilon, b_1...b_n)$$

entonces existen configuraciones en $\mathcal{T}^{-1}$ tal que

$$(q_0, b_1 b_2...b_n, \epsilon) \vdash^*_{\mathcal{T}^{-1}} (q_f, \epsilon, a_1...a_n)$$

Por lo tanto, para $u = a_1...a_n$, $v = b_1...b_n$, si $(u, v) \in [\![\mathcal{T}]\!]$, entonces $(v, u) \in [\![\mathcal{T}^{-1}]\!]$.

La demostración para el otro lado es análoga, demostrando que si $(v, u) \in [\![\mathcal{T}^{-1}]\!]$, entonces $(u, v) \in [\![\mathcal{T}]\!]$, por lo que $\mathcal{T}^{-1}$ define la relación R^{-1}. $\square$

2. $R \circ S$

La afirmación es verdadera

Sea $\mathcal{T} = (Q, \Sigma, \Omega, \Delta, I, F)$ un transductor que define una relación racional R, y $\mathcal{T}' = (Q', \Omega, \Gamma, \Delta', I', F')$ transductor que define una relación racional S. Se define el siguiente transductor:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T} \times \mathcal{T}' &= (Q \times Q', \Sigma, \Gamma, \Delta \times \Delta', I \times I, F \times F) \\
Q \times Q' &= \{(p, q) \mid p \in Q, q \in Q'\} \\
\Delta \times \Delta' &= \{((p, p'), a, b, (q, q')) \mid (p, a, x, q) \in \Delta \wedge (p', x, b, q') \in \Delta', x \in \Omega\} \\
I \times I' &= \{(p, q) \mid p \in I \wedge q \in I'\} \\
F \times F' &= \{(p, q) \mid p \in F \wedge q \in F'\}
\end{aligned}
$$

Queremos demostrar que $\mathcal{T} \times \mathcal{T}'$ define la relación $R \circ S$.

a. $(u, v) \in R \circ S \to (u, v) \in [\![\mathcal{T} \times \mathcal{T}']\!]$

Si el par (u, v) está en $R \circ S$, entonces existen configuraciones:

$$
\begin{aligned}
(q_0, u, \epsilon) &\vdash^*_{\mathcal{T}} (q_f, \epsilon, w) \\
(q'_0, w, \epsilon) &\vdash^*_{\mathcal{T}'} (q'_f, \epsilon, v)
\end{aligned}
$$

Tal que $q_0 \in I$, $q'_0 \in I'$, $q_f \in F$, y $q'_f \in F'$, para algún $w \in \Omega^*$

Sea la siguiente una serie de configuraciones tal que $(p_0, p'_0) \in I \times I'$, $(p_f, p'_f) \in F \times F'$, $(p_i, p'_i) \in Q \times Q'$, $a_i \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ y $b_i \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$:

$$((p_0, p'_0), a_1...a_n, \epsilon) \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ... \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ((p_i, p'_i), a_{i+1}...a_n, b_1...b_{i+1}) \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ... \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ((p_f, p'_f), \epsilon, b_1...b_n)$$

Tenemos que si $(a_1...a_n, b_1...b_n) \in R \circ S$, entonces existe $(p_0, a_1, w_1, p_1) \in \Delta$, y $(p'_0, w_1, b_1, p'_1) \in \Delta'$. Por construcción de $\vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'}$, también existe $((p_0, p'_0), a_1, b_1, (p_1, p'_1)) \in \Delta \times \Delta'$. Análogamente, para un $(p_i, a_{i+1}, w_{i+1}, p_{i+1}) \in \Delta$, y $(p'_i, w_{i+1}, b_{i+1}, p'_{i+1}) \in \Delta'$ (con $w_{i+1} \in \Omega \cup \{\epsilon\}$), debe existir también una transición $((p_i, p'_i), a_{i+1}, b_{i+1}, (p_{i+1}, p'_{i+1})) \in \Delta \times \Delta'$. Además, si $p_f \in F$ y $p'_f \in F'$, también $(p_f, p'_f) \in F \times F'$, por lo que $(u, v) \in [\![\mathcal{T} \times \mathcal{T}']\!]$.

b. $(u, v) \in [\![\mathcal{T} \times \mathcal{T}']\!] \to (u, v) \in R \circ S$

La demostración es análoga a la anterior, si tenemos un $(u = a_1...a_n, v = b_1...b_n) \in [\![\mathcal{T} \times \mathcal{T}']\!]$, entonces existe una serie de configuraciones tal que $(p_0, p'_0) \in I \times I'$, $(p_f, p'_f) \in F \times F'$, $(p_i, p'_i) \in Q \times Q'$, $a_i \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ y $b_i \in \Gamma \cup \{\epsilon\}$:

$$((p_0, p'_0), a_1...a_n, \epsilon) \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ... \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ((p_i, p'_i), a_{i+1}...a_n, b_1...b_{i+1}) \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ... \vdash_{\mathcal{T}\times\mathcal{T}'} ((p_f, p'_f), \epsilon, b_1...b_n)$$

Entonces existe $((p_i, p'_i), a_{i+1}, b_{i+1}, (p_{i+1}, p'_{i+1})) \in \Delta \times \Delta'$, y por construcción, existen también $(p_i, a_{i+1}, w_{i+1}, p_{i+1}) \in \Delta$, y $(p'_i, w_{i+1}, b_{i+1}, p'_{i+1}) \in \Delta'$, para algún $w_{i+1} \in \Omega \cup \{\epsilon\}$, y se cumple también que si $(p_0, p'_0) \in I \times I' \to p_0 \in I \wedge p'_0 \in I'$, y si $(p_f, p'_f) \in F \times F' \to p_f \in F \wedge p'_f \in F'$.

Finalmente, dado que $(u, v) \in [\![\mathcal{T} \times \mathcal{T}']\!] \leftrightarrow (u, v) \in R \circ S$, $R \circ S$ es una relación racional, para R y S relaciones racionales. $\square$