RECURSIVIDAD

Definición

Un procedimiento o función se dice recursivo si durante su ejecución se invoca directa o indirectamente a sí mismo. Esta invocación depende al menos de una condición que actúa como condición de corte que provoca la finalización de la recursión.

Un algoritmo recursivo consta de:

1- Al menos un caso trivial o base, es decir, que no vuelva a invocarse y que se ejecuta cuando se cumple cierta condición, y

2- el caso general que es el que vuelve a invocar al algoritmo con un caso más pequeño del mismo.

Los lenguajes como Pascal, que soportan recursividad, dan al programador una herramienta poderosa para resolver ciertos tipos de problemas reduciendo la complejidad u ocultando los detalles del problema.

La recursión es un medio particularmente poderoso en las definiciones matemáticas. Para apreciar mejor cómo es una llamada recursiva, estudiemos la descripción matemática de factorial de un número entero no negativo:

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ n * (n - 1) * (n - 2) * .. * 1 = n * (n - 1)! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Esta definición es recursiva ya que expresamos la función factorial en términos de sí misma.

Ejemplo: 4! = 4 * 3!

Por supuesto, no podemos hacer la multiplicación aún, puesto que no sabemos el valor de 3!

3! = 3 * 2!

2! = 2 * 1!

1! = 1 * 0!

0! = 1

Podemos ahora completar los cálculos

1! = 1 * 1 = 1

2! = 2 * 1 = 2

3! = 3 * 2 = 6

4! = 4 * 6 = 24

- Atención a la primera parte de la función recursiva: es **muy importante** comprobar que hay salida de la función, para que no se quede dando vueltas todo el tiempo. Normalmente, la condición de salida será que ya hallamos llegado al caso fácil (en este ejemplo: el factorial de 1 es 1).
- Números demasiado **grandes no**. Los enteros van desde -32768 hasta 32767, luego si el resultado es mayor que este número, tendremos un desbordamiento y el resultado será erróneo. ¿Qué es "demasiado grande"? Pues el factorial de 8 es cerca de 40.000, luego sólo podremos usar números del 1 al 7.

Diseño de Algoritmos Recursivos

Para que una función o procedimiento recursivo funcione se debe cumplir que:

- Existe una salida no recursiva del procedimiento o función y funciona correctamente en ese caso.
- Cada llamada al procedimiento o función se refiere a un caso más pequeño del mismo.
- Funciona correctamente todo el procedimiento o función.

Para poder construir cualquier rutina recursiva teniendo en cuenta lo anterior, podemos usar el siguiente método:

- Primero, obtener una definición exacta del problema.
- A continuación, determinar el tamaño del problema completo a resolver. Así se determinarán los valores de los parámetros en la llamada inicial al procedimiento o función.
- Tercero, resolver el caso base en el que problema puede expresarse no recursivamente. Esto asegurará que se cumple el punto 1 del test anterior.
- Por último, resolver correctamente el caso general, en términos de un caso más pequeño del mismo problema (una llamada recursiva). Esto asegurará cumplir con los puntos 2 y 3 del test.

Cuando el problema tiene una definición formal, posiblemente matemática, como el ejemplo del cálculo del factorial, el algoritmo deriva directamente y es fácilmente implementable en otros casos debemos encontrar la solución más conveniente.

Ejemplo

Cálculo del factorial para enteros no negativos

$$n! = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 0 \\ n * (n - 1) ! & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

Diagrama de Llaves:

Factorial(n)
- (*Pre: n >= 0*)
- n = 0 → Factorial ← 1 (*Caso base*)
- ⊕
- n = 0 → Factorial ← n * Factorial (n-1) (*Caso Gral*)
- (*Pos: Factorial = n!*)

Código Pascal:

```
function factorial(n: integer):integer;
begin
if n=0 then factorial = 1                          (* caso base *)
        else factorial = n * factorial(n-1)        (* caso general *)
end;
```

<u>Cómo funcionan los Algoritmos Recursivos</u>

Para entender cómo funciona la recursividad es necesario que tengamos presente las reglas y los tipos de pasaje de parámetros provistos por Pascal.

Si un procedimiento o función ***p*** invoca a otro ***q***, durante la ejecución de ***q*** se reservarán locaciones de memoria para todas las variables locales de ***q*** y para los parámetros pasados por valor. Al terminar la ejecución de ***q*** este espacio es desocupado. Ahora bien, si durante la ejecución de ***q*** se produce una llamada a sí mismo, tendremos una segunda "instancia" de ***q*** en ejecución, la primera instancia se suspende hasta que la instancia recursiva termine. Antes de iniciarse la ejecución recursiva de ***q***, se ocupan nuevas locaciones de memoria para las variables locales y parámetros por valor de ***q***. Cualquier referencia a estas variables accederá a estas locaciones. Las locaciones reservadas durante la ejecución inicial de ***q*** son inaccesibles para la 2da. instancia de ***q***.

Cuando la 2da. instancia de ***q*** termine, el control vuelve a la primera instancia de ***q***, exactamente al lugar siguiente a la llamada recursiva. Cualquier referencia a las variables locales o parámetros por valor de ***q*** accederá a las locaciones reservadas inicialmente, inaccesibles para la segunda instancia de ***q***.

Como vemos, no se conoce la cantidad de memoria que va a utilizarse al ejecutar un procedimiento o función recursivo sino que se produce una asignación dinámica de memoria, es decir, a medida que se producen instancias nuevas, se van "apilando" las que quedan pendientes: se ponen al menos tres elementos en la pila:

- una para la dirección de vuelta,
- otra para el/los parámetro/s formal/es y
- otra para el identificador de la función que en esencia es un parámetro pasado por variable.

Cuando la última instancia de la recursión - elige el caso base- se cumple, se "desapila" esa instancia y el control vuelve a la instancia anterior; así hasta "desapilar" todas las instancias.

Esta "pila" que se va generando en memoria es importante tenerla en cuenta por lo que debemos asegurarnos que el algoritmo recursivo no sea divergente.

Vamos a ver cómo funciona la recursión en algunos problemas vistos a través de una traza dónde iremos guardando los valores de los parámetros formales.

Recorrido del código de la función factorial:

```
function factorial(n: integer):integer;
begin
if n=0 then factorial = 1                    (* caso base *)
        else factorial = n * factorial(n-1)  (* caso general *)
end;
```

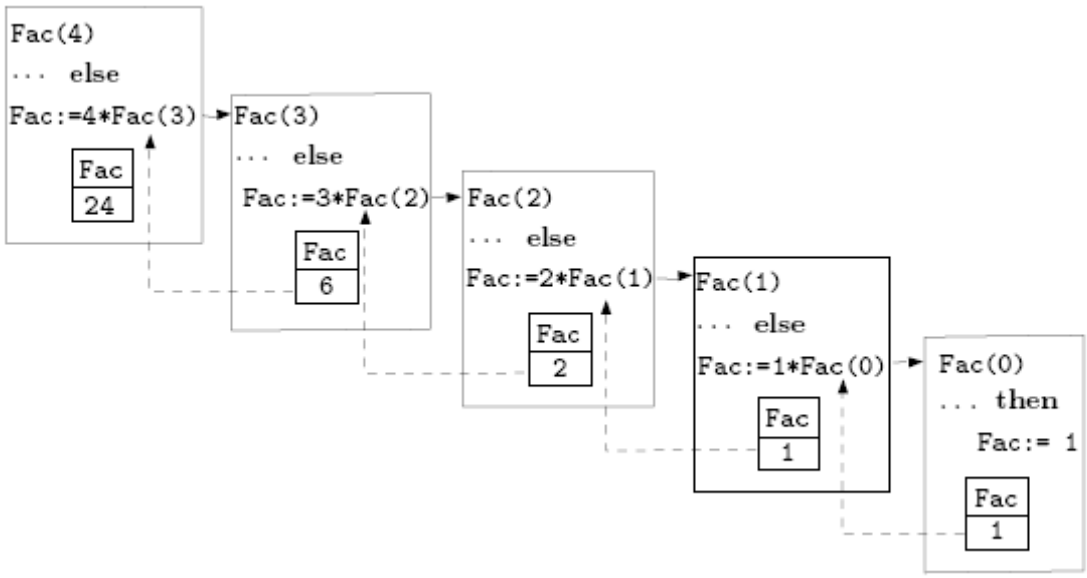
La llamada inicial es: write(factorial(5)).
La primera instancia se coloca en la pila, luego a medida que se va invocando la función, vamos apilando el valor del parámetro formal que se envía:

Como n=0 el algoritmo va por la rama del then llegando al caso base obteniendo factorial(0) = 1

0	Instancia 6
1	Instancia 5
2	Instancia 4
3	Instancia 3
4	Instancia 2
5	Instancia 1
N	

Ahora desapilamos y vamos reemplazando el resultado obtenido en la instancia posterior:

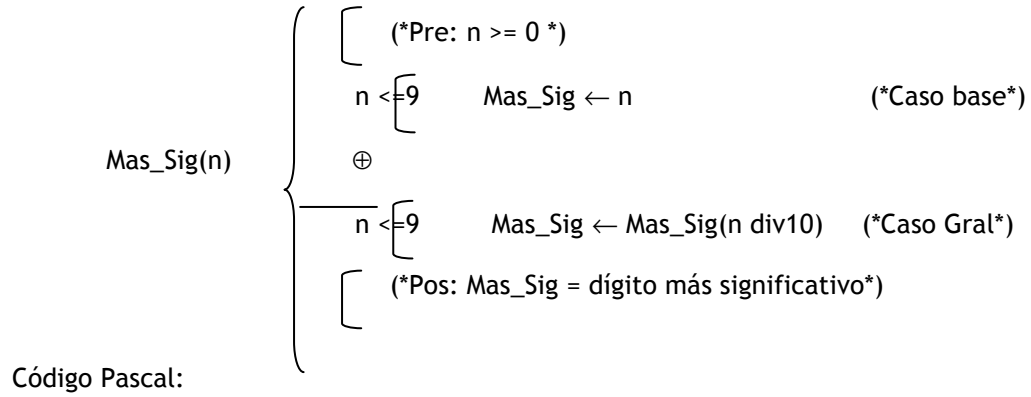
1- Desapilo Instancia 6	~~0~~	~~factorial(0)~~	1
2- Desapilo Instancia 5	~~1~~	~~1 * factorial(0)~~	1 * 1 = 1
3- Desapilo Instancia 4	~~2~~	~~2 * factorial(1)~~	2 * 1 = 2
4- Desapilo Instancia 3	~~3~~	~~3 * factorial(2)~~	3 * 2 = 6
5- Desapilo Instancia 2	~~4~~	~~4 * factorial(3)~~	4 * 6 = 24
6- Desapilo Instancia 1	~~5~~	~~5 * factorial(4)~~	5 * 24 = **120**
	N	n* factorial(n-1)	**factorial**



Ejemplo

Dado un número natural N, encontrar el dígito más significativo (el dígito más a la derecha).

Diagrama de Llaves:



Código Pascal:

```
function Mas_sig (N: integer):integer;
begin
if N <= 9 then Mas_sig := N
          else Mas_sig := Mas_sig (N div 10)
end;
```

Para N = 25743 es:

Como N <= 9 el algoritmo va por la rama del then llegando al caso base obteniendo Mas_sig = 2

2	Instancia 5
25	Instancia 4
257	Instancia 3
2574	Instancia 2
25743	Instancia 1
N	

Ahora desapilamos:

1- Desapilo Instancia 5	~~2~~		**2**
2- Desapilo Instancia 4	~~25~~	~~Mas_Sig(2)~~	
3- Desapilo Instancia 3	~~257~~	~~Mas_Sig (25)~~	
4- Desapilo Instancia 2	~~2574~~	~~Mas_Sig(257)~~	
5- Desapilo Instancia 1	~~25743~~	~~Mas_Sig (2574)~~	
	N	Mas_Sig(N div 10)	**Mas_Sig**

<u>Cuándo usar recursividad y cuándo iteración</u>

La potencia de la recursión reside en la posibilidad de definir un número infinito de objetos mediante un enunciado finito. De igual forma, un número infinito de operaciones de cálculo puede describirse mediante un programa recursivo finito, incluso si este programa no contiene repeticiones explícitas. Los algoritmos recursivos son apropiados principalmente cuando el problema a resolver, o la función a calcular, o la estructura de datos a procesar, están ya definidos recursivamente.

Hay varios factores a considerar en la decisión sobre si usar o no una solución recursiva en un problema. La solución recursiva puede necesitar un considerable gasto de memoria para las múltiples llamadas al procedimiento o función, puesto que deben almacenarse las direcciones de vueltas y copias de las variables locales y temporales. Si un programa debe ejecutarse frecuentemente (como un compilador) y/o debe ser muy eficiente, el uso de programación recursiva puede no ser una buena elección.

Sin embargo, para algunos problemas una solución recursiva es más natural y sencilla de escribir para el programador. Además la recursividad es una herramienta que puede ayudar a reducir la complejidad de un programa ocultando algunos detalles de la implementación. Conforme el costo del tiempo y el espacio de memoria de las computadoras disminuye y aumenta el costo del tiempo del programador, puede ser útil usar soluciones recursivas en estos casos.

En general, si la solución no recursiva no es mucho más larga que la versión recursiva, usar la no recursiva. De acuerdo a esta regla, los ejemplos que hemos visto no son buenos ejemplos de programación

recursiva aunque sirven para ilustrar cómo comprender y escribir procedimientos y funciones recursivas, sería más eficiente y sencillo escribirlas iterativamente.

La iteración y la recursividad cumplen con el mismo objetivo: ejecutar un bloque de sentencias ***n*** veces o que con una condición de fin adecuada lo termine. Es importante distinguir las diferentes instancias de la ejecución, los valores de las variables determinan la instancia particular que está siendo resuelta en ese momento. Es necesario que la ejecución del bloque termine, es decir, el mismo bloque debe contener la condición de corte que permita que cualquier instancia menor del problema pueda ser resuelta directamente. Entonces, cómo decir cuál alternativa es más adecuada?. A veces la definición del problema no induce ninguna estructura de control en particular, recién al plantear un método de resolución es posible elegir entre iteración y recursividad. Esta decisión tiene que ver con la costumbre que tenga el programador al plantear sus algoritmos y, una vez planteado un método de resolución, se busca cuál herramienta conviene más.

Hay problemas que aparecen más naturales para la iteración y para otros para la recursividad, por ejemplo, en problemas con contadores, sumatorias y productorias lo natural es la iteración, pero en problemas en los que distinguimos un caso base y uno general, como factorial, Fibonacci, MCD lo natural es la recursión. Pero existe otro factor muy importante a tener en cuenta: la eficiencia. Veamos el factorial sin recursión:

Diagrama de Llaves:

```
Fac(n)  (*Pre: n >= 0*)
        aux ← 1
        prod ← 1
        Repetir   prod ← prod * aux
        Hasta     aux ← aux + 1
        aux > n
        Fac ← prod
        (* Pos: Fac = n! *)
```

La cantidad de iteraciones o de llamadas recursivas respectivamente depende del tamaño de ***n***, el tiempo de ejecución de ambas no varía sustancialmente, pero la versión iterativa reserva tres lugares en memoria: para aux, prod y Fac, en cambio la recursión guarda memoria para cada instancia y, si ***n*** es grande, el espacio ocupado será mucho más grande.

Hay problemas altamente complejos en lo que es casi imposible aplicar iteración.

Ejemplo

La serie de Fibonacci es: 1,1,2,3,5,8,13,21,34,.... donde t_0= 1, t_1=1, t_2=2,..$t_i = t_{i-1}+t_{i-2}$...
Veamos ahora el cálculo del n-ésimo término de Fibonacci:

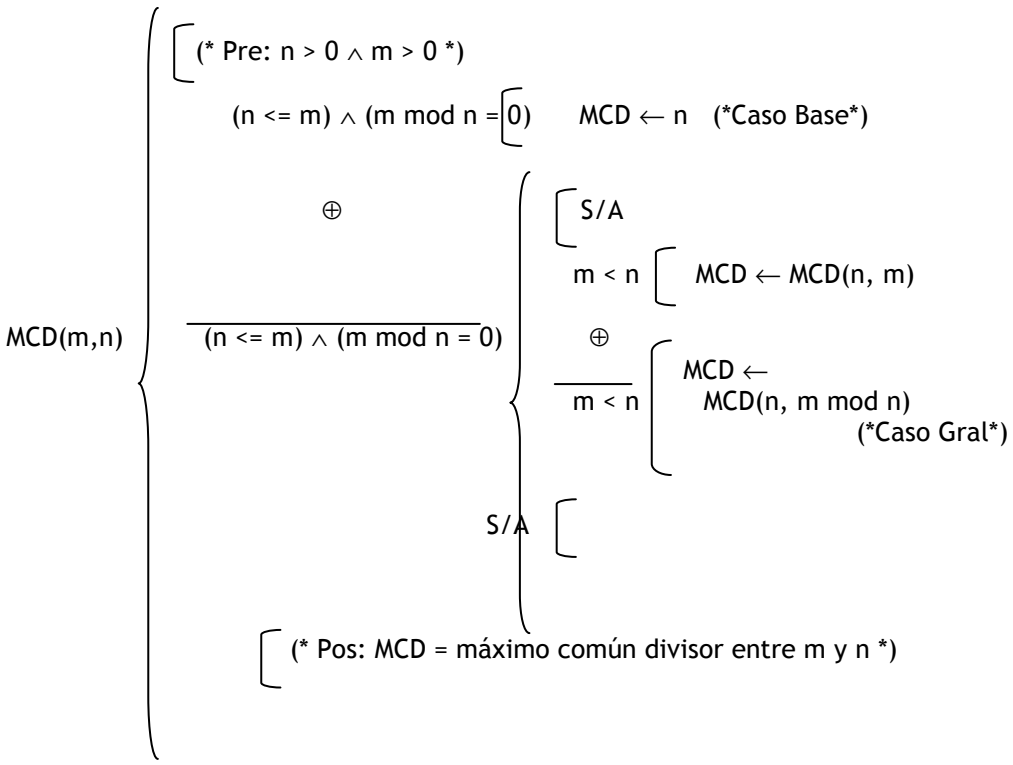
```
Fib(n)  (* Pre: n >= 0 *)
        (n=0) ∨ (n=1)   Fib ← 1                      (*Caso base*)
                ⊕
        ¬((n=0) ∨ (n=1)) Fib ← Fib(n-1)+Fib(n-2)     (*Caso Gral*)
        (* Pos: Fib = n-ésimo término *)
```

Ejemplo

El Máximo Común Divisor entre dos enteros A y B se define formalmente así:

```
MCD(M,N)  N  MCD(N,M)          si M < N
             si M es divisible por N: M mod N = 0
             MCD(N, M mod N)   en cualquier otro caso
```

Diagrama de Llaves



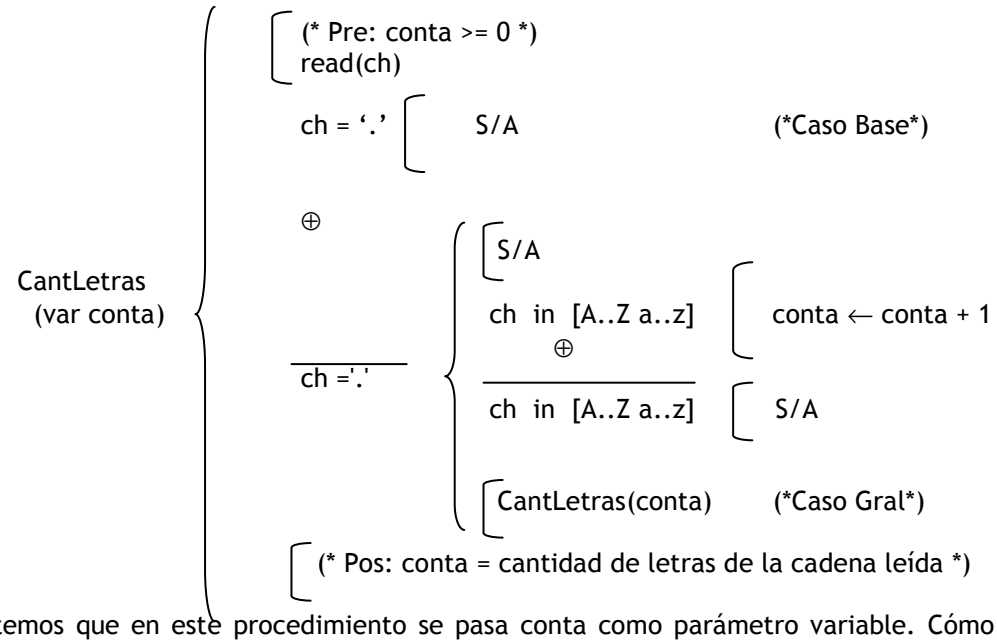
Ejemplo

Leer una cadena de caracteres terminada con un punto y contar la cantidad de letras.
No se deben utilizar otras estructuras como string o array.

Podemos expresarlo así: Contar la cantidad de letras que siguen al caracter actual y luego si este caracter es una letra incrementar el contador. Primero establezcamos una definición formal del problema

cantidad de letras
- conta = 0 si caracter = "."
- conta = conta + 1 si el caracter actual es una letra

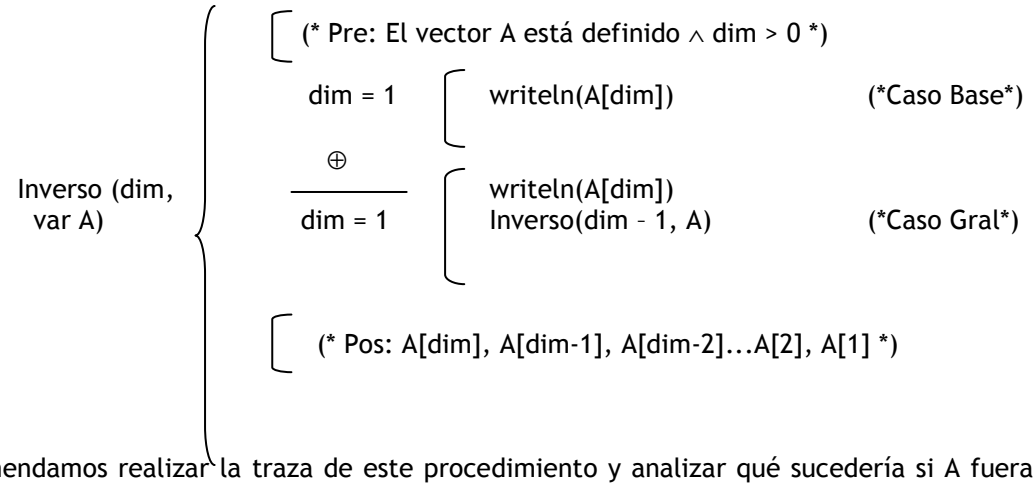
Diagrama de Llaves



Notemos que en este procedimiento se pasa conta como parámetro variable. Cómo queda la pila de recursión?

Ejemplo

Imprimir los elementos de un vector en orden inverso con un procedimiento recursivo.

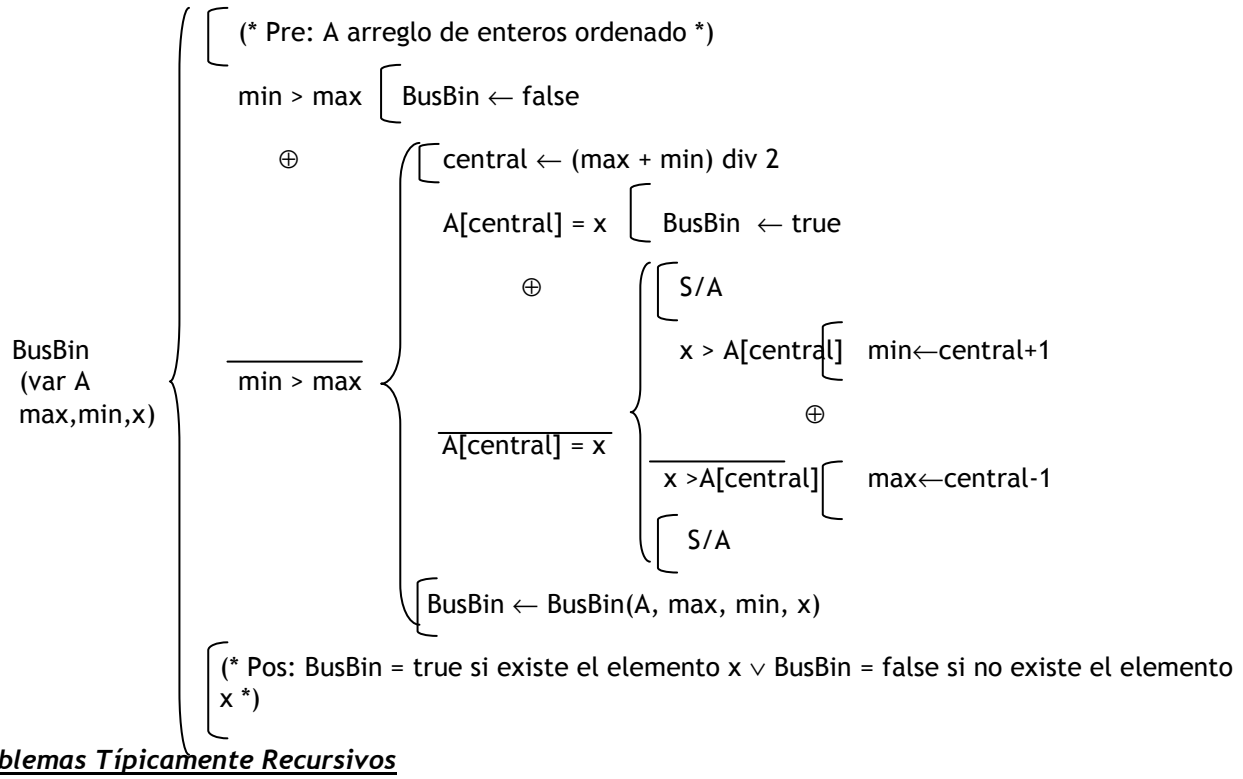


Recomendamos realizar la traza de este procedimiento y analizar qué sucedería si A fuera un parámetro valor.

Ejemplo

Dado un arreglo A de enteros ordenado de forma creciente, vamos a desarrollar el diagrama de llaves para la función de Búsqueda Binaria que realiza la búsqueda de un elemento clave en A de forma recursiva.

Diagrama de Llaves



Problemas Típicamente Recursivos

Se utilizan algoritmos recursivos generalmente en:

- recorrido de árboles
- análisis de gramáticas y lenguajes
- exploración y evaluación de expresiones aritméticas
- juegos en los que un movimiento se puede dar en función de otro de menor nivel o complicación.
- métodos de ordenamiento más eficientes
- Computación gráfica

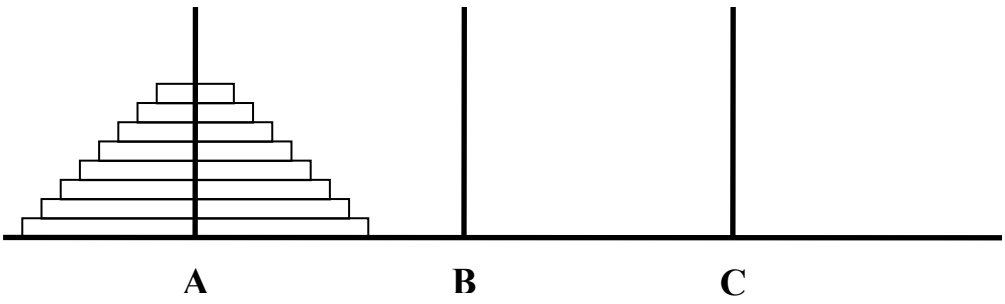
Ejemplo

Torres de Hanoi

Se dan tres barras verticales y *n* discos de diferentes tamaños. Los discos pueden apilarse en las barras formando "torres". Los discos aparecen inicialmente en la primer barra en orden decreciente y la tarea es mover los **n** discos de la primer barra a la tercera de manera que queden ordenados de la misma forma inicial. Las reglas a cumplir son:

En cada paso se mueve exactamente un disco desde una barra a otra.

En ningún momento pueden situarse un disco encima de otro más pequeño.



Vamos a intentar resolverlo probando con 1 ó 2 discos:

1 disco
Mover el disco 1 de A a C

2 discos
Mover el disco 1 de A a B
Mover el disco 2 de A a C
Mover el disco 1 de B a C

Veamos qué pasa con 3 y 4 discos:

3 discos
Mover el disco 1 de A a C
Mover el disco 2 de A a B
Mover el disco 1 de C a B
Mover el disco 3 de A a C
Mover el disco 1 de B a A
Mover el disco 2 de B a C
Mover el disco 1 de A a C

4 discos

Podemos, partir de los movimientos para 3 discos, resolver así: pasamos todos los discos de A a B menos el disco base usando la barra C como auxiliar. Luego movemos la base a C y volvemos a repetir los movimientos pasando los discos de la barra B a C usando A como auxiliar

Mover el disco 1 de A a B
Mover el disco 2 de A a C
Mover el disco 1 de B a C
Mover el disco 3 de A a B
Mover el disco 1 de C a A
Mover el disco 2 de C a B
Mover el disco 1 de A a B

Mover el disco a de A a C (Movemos el disco base)

Mover el disco 1 de B a C
Mover el disco 2 de B a A
Mover el disco 1 de C a A
Mover el disco 3 de B a C
Mover el disco 1 de A a B
Mover el disco 2 de A a C
Mover el disco 1 de B a C

Intentemos aplicar el mismo razonamiento para 8 discos. Podríamos mover 7 discos de A a B, pasar el disco 8 a C y luego mover los 7 discos de B a C. Para mover los 7 discos aplicamos lo mismo: mover 6 discos de B a A, pasar el disco 7 de C a B y luego mover los 6 discos de A a B. Podemos seguir reduciendo el problema hasta llegar a 1 que es trivial, esto es, el caso base es n=1 y el procedimiento Pascal recurisvo sería:

```
Procedure Hanoi ( n: tipodiscos; Torre_A, Torre_C, Torre_B: tipotorre);
begin
if n = 1 then MoverDiscoBase(Torre_A, Torre_C)
        else begin
             Hanoi(n-1, Torre_A, Torre_B, Torre_C);
             MoverDiscoBase(n, Torre_A, Torre_C);
             Hanoi(n-1, Torre_B, Torre_C, Torre_A)
             end
end;
```

El procedimiento resultante es sencillo y pensar el problema de manera iterativa no hubiese sido natural de acuerdo al razonamiento efectuado además de la complejidad de programación que originaría.

Ejercicios de ejemplo

{Este programa le calcula la serie Fibonacci en forma recursiva}

```
program fibon;
uses crt;
var f,i:integer;
   fin:char;

procedure presentacion;
begin
   writeln ('serie fibonacci');
   writeln ('ingrese un número');
end;

function fibo (n:integer):integer;
begin
    if (n=1) or (n=2) then fibo:=1
    else fibo:= fibo (n-1) + fibo (n-2);
end;

begin
clrscr;
        repeat
        presentacion;
        readln (f);
        writeln ('los primeros ',f,' números de fibonacci son');
        writeln;
        for i:=1 to f do
        write (fibo(i):5);
        writeln;
        writeln;
        writeln ('desea repetir el programa ? s/n');
        readln (fin);
        until (fin='n') or (fin='n');
end.
```

Ejercicios Propuestos

- Una función recursiva que halle el producto de dos números enteros.
- Una función recursiva que halle la potencia (a elevado a b), también recursiva.
- Una función recursiva para calcular el término n-ésimo de la secuencia de Lucas: 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, ...

2. Dado el programa

```
Program Invertir;
{Se lee una línea del input y se escribe invertida}

procedure InvertirRec;
var
c: char;
        begin
        Read(c);
        if c <> '.' then begin
        InvertirRec;
        Write(c)
        end
end; {fin InvertirRec}

begin {comienzo Invertir}
```

```
        WriteLn('Teclee una cadena de caracteres ("." para finalizar)');
        InvertirRec
end. {fin Invertir}
```

Analice su comportamiento y estudie qué resultado daría para la secuencia de entrada \aeiou.", escribiendo la evolución de la pila recursiva. Observa que el uso de esta pila recursiva nos permite recuperar los caracteres en orden inverso al de su lectura.

- Escribe una función recursiva para calcular el máximo común divisor de dos números enteros dados.
- Escribe una versión recursiva del cálculo del máximo común divisor de dos números enteros por el método de Euclides.