9 15

Matemática II. Facultad de Informática. U.N.L.P.

Primer Parcial. Primera Fecha. 12 de octubre de 2023.

Apellido y Nombre:..Guaymas Matías.................................Comisión: 3C T6

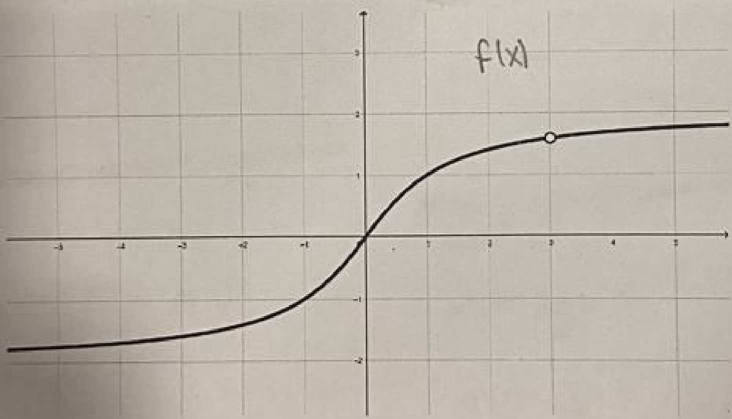
Confie en todo lo que sabe, usted es capaz, hay tiempo de sobra para hacer este examen, recuerde usar paréntesis donde haga falta y repase cada cuenta por simple que sea, deje todo por escrito.

Se tendrán en cuenta para la corrección los siguientes criterios:
Desarrollo y justificación de los pasos para llegar a la respuesta
Escritura clara y precisa de la respuesta
Claridad y órden en la escritura

8 1. Realice el estudio completo y gráfico de la función:

$$f(x) = \frac{x}{1-x} - x$$

8 2. Describir: el dominio, la continuidad, clasificar las discontinuidades, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento/decrecimiento y concavidad, máximos, mínimos y puntos de inflexión de la función que se presenta en la gráfica:



8 3. Hallar la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)$ en $x = 2$ siendo:

$$g(x) = \frac{2}{x} - e^{2-x}$$

3 4. Calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12}$$

Capítulo 5: Integrales

GUAYMAS

MATÍAS

HOJA 1

DNI: 46201342

4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+2x-15}{x^2+x-12} = \frac{\infty}{\infty}$ Tengo que salvar la indeterminada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{2x}{x^2}-\frac{15}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{12}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overset{\to 0}{\frac{2}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{15}{x^2}}}{1-\underset{\to 0}{\frac{1}{x}}-\underset{\to 0}{\frac{12}{x^2}}} = 1$$

✓

3) $g(x) = \frac{2}{x} - e^{2-x}$

La pendiente de la recta tangente es igual a la derivada de la función en el punto.

$\hookrightarrow m = g'(x)$

La fórmula para hallar la ecuación de la recta tangente a la función $g(x)$ en un punto 2

sería entonces: $y-(g(x_0)) = g'(x_0)(x-x_0)$ ✓

Mi recta tangente pasa por el punto $(2, g(2)) = (2,1)$

$g(2) = \frac{2}{2} - e^{2-2} = 1-\overset{1}{0} = 1$ 0 $e^0 = 1$

Ecuación de la recta tangente en $(2,1)$:

$y-g(x_0) = g'(x_0)(x-x_0)$

$y-g(2) = g'(2)(x-2)$ ☆

$y-1 = \frac{1}{2}(x-2)$

$y = \frac{1}{2}x - 1 + 1$

$$\boxed{y = \frac{1}{2}x}$$

Ecuación de la recta tangente a la función $g(x)$ en $x=2$

☆ Tengo que calcular la derivada de $g(x)$:

$g'(x) = \frac{-2}{x^2} - e^{2-x}\cdot(-1)$ ✓

$g'(x) = \frac{-2}{x^2} + e^{2-x}$

$g'(2) = \frac{-2}{2^2} + e^{2-2} = \frac{-1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$

TULO 5: Integrales

1) $f(x) = \frac{x}{1-x} - \frac{x}{1} = \frac{x - x(1-x)}{1-x} = \frac{x - x + x^2}{1-x} = \frac{x^2}{1-x}$ $\quad 1-x \neq 0 \quad x \neq 1$

• Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

• Continuidad: la función es racional ya que es cociente de polinomios, por ende es continua en todo su dominio. Los intervalos de continuidad son: $\rightarrow$

$\rightarrow (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

• Discontinuidad: $f(1)$ no existe

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{1-x} &= -\infty \\ \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{1-x} &= +\infty \end{aligned}\right] \nexists \lim_{x \to 1} f(x)$$

$f(x)$ tiene una discontinuidad en $x=1$ y es inevitable ya que no existe $\lim_{x \to 1} f(x)$. Según el límite analizado ~~analizado~~ anteriormente $\left(\lim_{x \to 1} f(x)\right)$ y la definición de asíntota vertical en un punto, hay una asíntota vertical en $x=1$.

• $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = +\infty$ ¿por qué $+\infty$ y no $-\infty$?

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{1-x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{x^2}{x^2}}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - \frac{x}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}} = -\infty$ ¿Por qué $-\infty$ y no $+\infty$?

No tiene asíntotas horizontales

• $f'(x) = \frac{2x \cdot (1-x) - x^2 \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{2x - 2x^2 + x^2}{(1-x)^2} = \frac{-x^2 + 2x}{(1-x)^2}$

SIGUE EN LA SIGUIENTE HOJA

tulo 5: Integrales

Busco los puntos críticos, igualando $f'(x)$ a 0

$-x^2+2x=0$

$x(-x+2)=0$

$-x+2=0$

$-x=-2$

$x=2$

Tengo dos puntos críticos: $\begin{cases} x=2 \\ x=0 \end{cases}$ y también tengo que contar $x=1$ ✓

GUAYMAS MATÍAS

HOJA 2

DNi: 46204342

Intervalo	$(-\infty,0)$	$(0,1)$	$(1,2)$	$(2,+\infty)$
Valor de prueba (VP)	-1	$1/2$	$3/2$	3
Signo de $f'(VP)$	$-$	$+$	$+$	$-$
Comportamiento	↘	↗	↗	↘

↘: Decrece

↗: Crece

✓

- Intervalos de crecimiento: $(0,1)\cup(1,2)$
- Intervalos de decrecimiento: $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$

- Mínimo relativo: $(0,f(0))=(0,0)$
- Máximo relativo: $(2,f(2))=(2,-4)$

$f(0)=\frac{0^2}{1-0}=0$

$f(2)=\frac{2^2}{1-2}=-4$

$f'(-1)=\frac{-(-1)^2+2.(-1)}{(1+1)^2}=\frac{-3}{4}$

$f'(1/2)=\frac{-(1/2)^2+2.(1/2)}{(1-1/2)^2}=3$

$f'(3/2)=\frac{-(3/2)^2+2.(3/2)}{(1-3/2)^2}=3$

$f'(3)=\frac{-(3)^2+2.3}{(1-3)^2}=\frac{-3}{4}$

- $f''(x)=\frac{(-2x+2).(1-x)^2-(-x^2+2x).[2.(1-x).(-1)]}{(1-x)^4}$ ✓

$f''(x)=\frac{(-2x+2).(1-2x+x^2)-(-x^2+2x).(-2+2x)}{(1-x)^4}$

→

$$f''(x) = \frac{-2x+4x^2-2x^3+2-4x+2x^2-(2x^2-2x^3-4x+4x^2)}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x+4x^2-2x^3+2-4x+2x^2-2x^2+2x^3+4x-4x^2}{(1-x)^4}$$

$$f''(x) = \frac{-2x+2}{(1-x)^4} \qquad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Igualo $f''(x)$ a 0 para buscar puntos de inflexión

$f''(x)=0$

$-2x+2=0 \qquad -x+1=0$

$x=1$ → No pertenece al Dominio, no lo cuento como candidato

$2(-x+1)=0$

No tengo punto de inflexión

Intervalo	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
VP ⊛	0	2
Signo $f''(x)$	+	−
Comportamiento	Cóncava hacia arriba	Cóncava hacia abajo

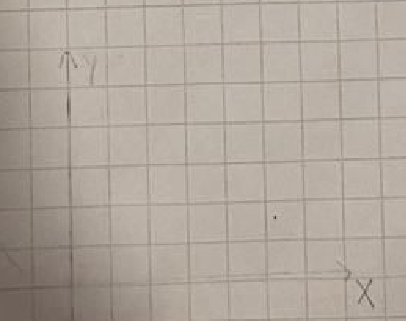
$$f''(2) = \frac{-2\cdot 2+2}{(1-2)^4} = -2$$

$$f''(0) = \frac{-2\cdot 0+2}{(1-0)^4} = 2$$

⊛ "valor de Prueba"

Intervalo de concavidad: — hacia arriba: $(-\infty,1)$

└ hacia abajo: $(1,+\infty)$

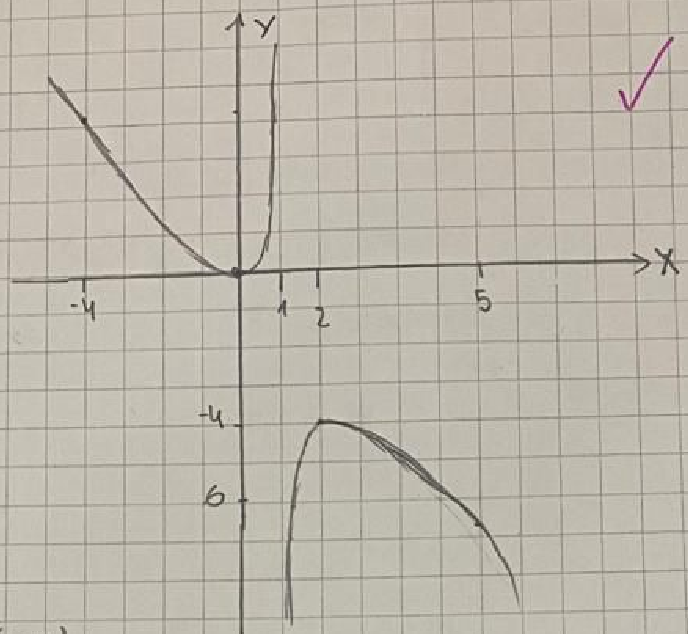


GUAYMAS
MATÍAS

HOJA 3

...i: 46201342

GRÁFICO:



(LLAMÉ f(x) AL GRÁFICO)

2). Dom $f(x) = \mathbb{R} - \{3\}$

• CONTINUIDAD: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$

• DISCONTINUIDAD: $f(3)$ = no existe $\lim_{x \to 3^-} f(x) = 2{,}6$

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = 2{,}6$

$\exists \lim_{x \to 3} f(x)$

• f(x) tiene una DISCONTINUIDAD en $x=3$ y es evitable ya que existe $\lim_{x \to 3} f(x)$ pero no coincide con $f(3)$, ya que no existe $f(3)$.

• Según el límite analizado anteriormente $\lim_{x \to 3} f(x)$ podemos afirmar que no hay asíntota vertical.

• $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$

• $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -2$

f(x) tiene DOS asíntotas horizontales en $y=2$; $y=-2$. (por definición de asíntota horizontal).

• Intervalos de crecimiento: $(-\infty,3) \cup (3,+\infty)$

$f(x)$ nunca decrece.

2. Intervalos de concavidad: — hacia arriba: $(-\infty,0)$

└ hacia abajo: $(0,+\infty)$ × $(0,3) \cup (3,+\infty)$

$f(x)$ no tiene ni máximos ni mínimos relativos.

• Punto de inflexión en $x=0$