Matemática 3 - Resultados

Práctica 2

1. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{3}{11}$

2. a) $\frac{1}{4}$ b) $\frac{1}{7}$

3. $\frac{25}{41}$ *si se considera con repetición*

   $\frac{5}{8}$ *si se considera sin repetición*

4. $P(A/B) = \frac{3}{4}$ $P(B/A) = \frac{1}{2}$ $P(A \cup B) = \frac{7}{12}$ $P(A^C/B^C) = \frac{5}{8}$ $P(B^C/A^C) = \frac{5}{6}$

5. $\frac{11}{28}$

6. a) $\frac{17}{50}$ b) $\frac{7}{8}$

7. a)0,0016 b) 0,9984

8. a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{3}{10}$ c) $\frac{3}{5}$

9. a)0,85 b) 0,9412

10. a) $\left(\frac{5}{6}\right)^5$ b) $5 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4$ c) 1-$\left(\frac{5}{6}\right)^5$

11. a) No b) Sí

12. a) 0,21 b) 0,455 c) 0,2637 d) regla de la multiplicación, Teorema de Probabilidad Total y Teorema de Bayes.

13. a) T="el chip fue producido por la empresa pirata", D="el chip es defectuoso"

    b) 0,095 c) 0,5263

14. a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{1}{60}$ c) $\frac{2}{5}$ d) $\frac{198}{295} = 0,6712$

PRÁCTICA 2

13) a) F = "El chip fue producido por la empresa pirata"

D = "El chip es defectuoso"

$P(F) = 0{,}10 \quad P(F^C) = 1 - P(F) = 0{,}90$

$P(D|F) = 0{,}50 \quad P(D|F^C) = 0{,}05$

b) ¿$P(D)$ = ?

$P(D) = P(D|F) \cdot P(F) + P(D|F^C) \cdot P(F^C)$

$\underset{\text{Teorema Probabilidad Total}}{=} 0{,}50 \cdot 0{,}10 + 0{,}05 \cdot 0{,}90 = \underline{0{,}095}$

- $F \cup F^C = S$
- $F \cap F^C = \emptyset$
- $P(F) > 0 \quad P(F^C) > 0$

c) ¿$P(F|D)$ = ?

$$P(F|D) \underset{\text{def}}{=} \frac{P(F \cap D)}{P(D)} \overset{\text{regla de la multiplicación}}{=} \frac{P(D|F) \cdot P(F)}{P(D)} = \frac{0{,}50 \cdot 0{,}10}{0{,}095} =$$

$A_k, \dots, A_n$ partición de S, $B \subset S$ $P(A_i) \neq 0$, $P(B) \neq 0$

$$P(A_k|B) = \frac{P(B|A_k) \cdot P(A_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(B|A_i) \cdot P(A_i)}$$

Teorema de Bayes

1) a) A = 'La suma de los dos números es 10'. $S = \{(x,y) \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x,y \leq 6\}$

B = 'Aparece un 5 en el primer dado'

C = 'Aparece un 5 en uno de los dados'

$P(B) = \frac{1}{6}$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2/36}{1/6} = \frac{1}{3}$$

$P(C) = \frac{11}{36}$

$$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{3/36}{11/36} = \frac{3}{11}$$

2) A = "Todas las monedas son caras"

B = "Primera es cara"

C = "Al menos una es cara"

$P(B) = 1/2 \quad P(C) = 7/8 = 1 - P(\text{Todas secas}) \quad P(A) = 1/8$

a) $$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \underset{\text{A es subconjunto de B}}{=} \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{1/8}{1/2} = \frac{1}{4}$$

b) $$P(A|C) = \frac{P(A \cap C)}{P(C)} = \frac{1/8}{7/8} = 1/7$$

3) A= 'La suma de los dos digitos es par'

B= 'Ambos numeros son impares'

$P(A) = 41/81$

$P(B) = 25/81$

B es un subconjunto de A

$P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{P(B)}{P(A)} = \dfrac{25/81}{41/81} = \dfrac{25}{41}$

4) $P(A) = 1/2$ $\quad P(B) 1/3$ $\quad P(A \cap B) = 1/4$

a) $P(A|B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$= \dfrac{1/4}{1/3} = \underline{3/4}$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$

$= \dfrac{1/4}{1/2} = \underline{1/2}$

c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= 1/2 + 1/3 - 1/4 = \underline{7/12}$

D) $P(A^c | B^c) = \dfrac{P(A \cup B)^c}{P(B^c)}$

$= \dfrac{1-(A \cup B)}{1-P(B)}$

$= \dfrac{1-7/12}{1-1/3} = \dfrac{5}{8}$

e) $P(B^c | A^c) = \dfrac{P(A \cup B)^c}{P(A^c)}$

$= \dfrac{1-7/12}{1-1/2} = 5/6$

5) P(A) = 'Todos hombres'

$\binom{16}{3} = 560 \qquad \binom{12}{3} = 220$

$P(A) = \dfrac{220}{560} = \dfrac{11}{28}$

A_i = "el i-esimo estudiante elegido es un niño", $i = 1,2,3$

$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2)$

$= \dfrac{12}{16} \cdot \dfrac{11}{15} \cdot \dfrac{10}{14}$

$= \dfrac{11}{28}$

6) A = 'La segunda bola es roja'.
B = "primera bola roja"

$P(B) = \dfrac{3}{10} \qquad P(A|B) = \dfrac{2}{10}$

$P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c)$

$= \dfrac{2}{10} \cdot \dfrac{3}{10} + \dfrac{4}{10} \cdot \dfrac{7}{10} = \dfrac{17}{5}$

7) A_i = "el i-ésimo carro de bombero está disponible"

$P(A) = 0,96$

a) $P(A_1^c \cap A_2^c) \overset{\text{son independientes}}{=} P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) = (1-0,96) \cdot (1-0,96) = 0,04^2 = 0,0016$

b) $P(A_1 \cup A_2) = 1 - P(A_1^c \cap A_2^c) = 1 - 0,0016 = 0,9984$

8) A: "Ambos caramelos son de coco" son indep. { C_1: "el caramelo sacado de la primera caja es de coco"
C_2: "el caramelo sacado de la segunda caja es de coco"

a) $P(A) = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \cdot P(C_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{5}$

b) $P(C_1^c \cap C_2^c) = \left(1 - \frac{2}{5}\right) \cdot \left(1 - \frac{3}{6}\right) = \frac{3}{10}$

c) CH_1: "el caramelo sacado de la primera caja es de chocolate".
CH_2: "el caramelo sacado de la segunda caja es de chocolate".

$$P\left[(C_1 \cap C_2^c) \cup (CH_1 \cap CH_2^c)\right] = P(C_1 \cap C_2^c) + P(CH_1 \cap CH_2^c)$$
$$= P(C_1) \cdot P(C_2^c) + P(CH_1) \cdot P(CH_2^c)$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} + \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{6} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

12) NN: "El cliente pide nafta normal sin plomo" $P(NN) = 0,40$
NE: "El cliente pide nafta extra sin plomo" $P(NE) = 0,35$
NP: "El cliente pide nafta premium" $P(NP) = 0,25$
TL: "El cliente llena el tanque" $P(TL|NE) = 0,60$
$P(TL|NN) = 0,30$
$P(TL|NP) = 0,50$

a) $P(NE \cap TL) = P(TL|NE) \cdot P(NE)$

$P(NE \cap TL) = 0,60 \cdot 0,35 = \underline{0,21}$

b) $P(TL) = P(TL|NN) \cdot P(NN) + P(TL|NE) \cdot P(NE) + P(TL|NP) \cdot P(NP)$

$P(TL) = 0,30 \cdot 0,40 + 0,60 \cdot 0,35 + 0,50 \cdot 0,25$

$P(TL) = 0,12 + 0,21 + 0,125 = \underline{0,455}$

c) $P(NN|TL) = \frac{P(NN \cap TL)}{P(TL)}$

$P(NN|TL) \overset{\text{Teorema de la multiplicación}}{=} \frac{P(TL|NN) \cdot P(NN)}{P(TL)}$

$P(NN|TL) = \frac{0,30 \cdot 0,40}{0,455}$

$P(NN|TL) \cong \underline{0,264}$

D) Las propiedades utilizadas son: El teorema de la probabilidad total, teorema de la multiplicación y el teorema de Bayes.

14) a) L_1: "La bolsa de azúcar proviene de la línea 1"
L_2: "La bolsa de azúcar proviene de la línea 2"

$P(L_1) + P(L_2) = 1$

$P(L_1) + 1/2\, P(L_1) = 1$

$\frac{3}{2} P(L_1) = 1$

$P(L_1) = 1 : \frac{3}{2}$

$\boxed{P(L_1) = 2/3}$

b) D: "La bolsa está defectuosa"

$P(D) = P(D|L_1) \cdot P(L_1) + P(D|L_2) \cdot P(L_2)$

$P(D) = 0{,}01 \cdot 2/3 + 0{,}03 \cdot 1/3$

$\boxed{P(D) = 1/60}$

. $P(L_1) + P(L_2) = 1$

$2/3 + P(L_2) = 1$

$P(L_2) = 1/3$

. $P(D|L_1) = 0{,}01$

. $P(D|L_2) = 0{,}03$

c) $P(L_1|D) = \frac{P(L_1 | D)}{P(D)}$

$P(L_1|D) = \frac{P(D|L_1) \cdot P(L_1)}{P(D)}$ → Teorema de la multiplicación

$P(L_1|D) = \frac{0{,}01 \cdot 2/3}{1/60}$

$P(L_1|D) = \frac{1/150}{1/60}$

$\boxed{P(L_1|D) = 2/5}$

D) $P(L_1|D^c) = \frac{P(L_1|D^c)}{P(D^c)}$

. $P(D^c) = 1 - P(D)$
$P(D^c) = 1 - 1/60$
$P(D^c) = 59/60$

$P(L_1|D^c) = \frac{P(D^c|L_1) \cdot P(L_1)}{P(D^c)}$ → Teorema multiplicación

$P(L_1|D^c) = \frac{[1 - P(D|L_1)] \cdot P(L_1)}{59/60}$

$P(L_1|D^c) = \frac{[1 - (1/100)] \cdot 2/3}{59/60}$

$P(L_1|D^c) = \frac{(99/100) \cdot (2/3)}{59/60}$

$\boxed{P(L_1|D^c) = 198/295}$

9) A: "El estudiante responde correctamente la pregunta"
B: "El estudiante sabe la respuesta"

$\left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \begin{matrix} P(B)=0{,}80 \\ P(B^c)=1-0{,}80=0{,}20 \end{matrix}$

a) $P(A) = P(A|B).P(B) + P(A|B^c).P(B^c)$ ① Def. de independencia de eventos

$P(A) \overset{①}{=} 1.P(B) + 0{,}25.P(B^c)$

$P(A) = 1.0{,}80 + 0{,}25.0{,}20$

$\boxed{P(A) = 0{,}85}$

b) $P(B|A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ② Teorema de la multiplicación

$P(B|A) \overset{②}{=} \dfrac{P(A|B).P(B)}{P(A)}$

$P(B|A) = \dfrac{1.0{,}80}{0{,}85}$

$\boxed{P(B|A) \cong 0{,}9412}$

10) a) A_i: "sale el n° 1 en el tiro i" $i=1,2,3,4,5$

B = "en ninguna tirada sale el n° 1"

$B = A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c$

$P(B) = P(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) = P(A_1^c).P(A_2^c).P(A_3^c).P(A_4^c).P(A_5^c)$

$\boxed{= \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cong 0{,}402}$

b) $P((A_1 \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2 \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3 \cap A_4^c \cap A_5^c)$
$\cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4 \cap A_5^c) \cup (A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c \cap A_4^c \cap A_5)) =$

$P(A_1).P(A_2^c).P(A_3^c).P(A_4^c).P(A_5^c) + P(A_1^c).P(A_2).P(A_3^c).P(A_4^c).P(A_5^c) + P(A_1^c).P(A_2^c).$
$P(A_3).P(A_4^c).P(A_5^c) + P(A_1^c).P(A_2^c).P(A_3^c).P(A_4).P(A_5^c) + P(A_1^c).P(A_2^c).P(A_3^c).$
$P(A_4^c).P(A_5) = \frac{1}{6}.\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 + \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4$

... $= 5.\frac{1}{6}.\left(\frac{5}{6}\right)^4$

... $\boxed{= \left(\frac{5}{6}\right)^5 \cong 0{,}4019}$

c) B: "salga al menos una vez el 1"

$P(B) = 1 - P(A_1^C \cap A_2^C \cap A_3^C \cap A_4^C \cap A_5^C)$

$P(B) = 1 - P(A_1^C) \cdot P(A_2^C) \cdot P(A_3^C) \cdot P(A_4^C) \cdot P(A_5^C)$

$P(B) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5$

$\boxed{P(B) \cong 0,598}$

11) a) $P(A|B) = 0,4 \quad P(B) = 0,8 \quad P(A) = 0,6$

Para que los eventos A y B sean independientes se debe cumplir que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

teorema de la multiplicación

$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$

$P(A \cap B) = 0,4 \cdot 0,6$

$P(A \cap B) = 0,32$

$P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,6 = 0,48$

$\boxed{P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)}$

∴ los eventos A y B no son independientes

b) $P(A|B) = 0,3 \quad P(B) = 0,8 \quad P(A) = 0,3$

Para que los eventos A^c y B sean independientes se debe cumplir que $P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$

$P(A^c) = 1 - P(A)$
$= 1 - 0,3$
$= 0,7$

$P(A^c \cap B) = P(A^c|B) \cdot P(B)$

$P(A^c \cap B) = (1 - P(A|B)) \cdot 0,8$

$P(A^c \cap B) = (1 - 0,3) \cdot 0,8$

$P(A^c \cap B) = 0,7 \cdot 0,8$

$P(A^c \cap B) = 0,56$

$P(A^c) \cdot P(B) = 0,7 \cdot 0,8 = 0,56$

$\boxed{P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)}$

∴ los eventos A^c y B son independientes.