Matemática 3 - Resultados

Práctica 5

1. a) 0,20 b) 0,40

c)

x	129	130	131
$f_X(x)$	0,20	0,70	0,10

y	15	16
$f_Y(y)$	0,60	0,40

d) E(X) = 129,9 V(X) = 0,29 E(Y) = 15,4 V(Y) = 0,24

2.

y	15	16
P(Y=y|X = 130)	0,60	0,40

X e Y son independientes.

3. a)

x	1	2	3
$f_X(x)$	0,35	0,45	0,20

y	1	2	3
$f_Y(y)$	0,30	0,35	0,35

b) E(X) = 1,85 V(X)=0,5275 E(Y) = 2,05 V(Y) = 0,6475
c) 0,1075
d) X e Y no son independientes.

4. a) E(X+Y) = 3,90 b) V(X+Y) = 1,39 $\sigma_{X+Y} = 1{,}170$ c)0,35 d_1) 595ms d_2) 188,348ms

5. a) 0,2575 b) 0,2925

6. a) 0,3996 b) E(X) = 1 E(Y) = 1 c) 2

7. a) 0,7088 b) 0,0485

8. a) $\mu = 45{,}36$ $\sigma^2 = 1{,}2860$ b) 0,5478

9. a) 0,0571 0,0571

10. ≈ 0,0681

11. a) K = 1/10 $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{5}} & si\ x > 0 \end{cases}$

b) P(2 ≤ X ≤ 10) = 0,535 P(X >24) = 0,0082 E(X) = 5 V(X) = 25
c) ≈ 1

12. a) 0,8905 b) No se puede usar TCL

13. a) P(X=0) ≈ 0,0505 P(X > 5) ≈ 0,0708 P(1 ≤ X ≤ 3) ≈ 0,5433
b) P(X=0) = 0,0476 P(X > 5) = 0,0808 P(1 ≤ X ≤ 3) = 0,5997

14. a) 0,0241 b) ≈ 0,1611

PRÁCTICA 5

1) X = longitud de la bandeja $f_{xy}(x,y) = P(X=x, Y=y)$

Y = ancho de la bandeja

a) $P(X=129) = \sum_{y \in R_Y} f_{xy}(129,y) = f_{xy}(129,15) + f_{xy}(129,16) = 0{,}12 + 0{,}08 = \boxed{0{,}2}$

b) $P(Y=16) = \sum_{x \in R_X} f_{xy}(x,16) = f_{xy}(129,16) + f_{xy}(130,16) + f_{xy}(131,16) = 0{,}08 + 0{,}28 + 0{,}04 = \boxed{0{,}4}$

c)

$y \backslash x$	129	130	131	$f_y(y)$
15	0,12	0,42	0,06	0,6
16	0,08	0,28	0,04	0,4
$f_x(x)$	0,2	0,7	0,1	1

D) $E(X) = 129 \cdot 0{,}2 + 130 \cdot 0{,}7 + 131 \cdot 0{,}1 = \boxed{129{,}9}$

$E(Y) = 15 \cdot 0{,}6 + 16 \cdot 0{,}4 = \boxed{15{,}4}$

$V(X) = \boxed{0{,}29}$

$E(X^2) = 129^2 \cdot 0{,}2 + 130^2 \cdot 0{,}7 + 131^2 \cdot 0{,}1 = \ldots$

$V(Y) = E(Y^2) - (EY)^2 = 237{,}4 - (15{,}4)^2 = \boxed{0{,}24}$

$E(Y^2) = 15^2 \cdot 0{,}6 + 16^2 \cdot 0{,}4 = 237{,}4$

Si X e Y son indep $\rightarrow$ $cov(X,Y) = 0$

$\neq$

Si $cov(X,Y) \neq 0 \rightarrow$ X e Y no son indep

e) $cov(X,Y) = E(X \cdot Y) - E(X) \cdot E(Y) = 2000{,}46 - 129{,}9 \cdot 15{,}4 = \boxed{0}$

$E(X \cdot Y) = \sum_{x \in R_X} \sum_{y \in R_Y} x \cdot y \cdot f_{xy}(x,y) = 129 \cdot 15 \cdot 0{,}12 + 130 \cdot 15 \cdot 0{,}42 + 131 \cdot 15 \cdot 0{,}06 +$
$129 \cdot 16 \cdot 0{,}08 + 130 \cdot 16 \cdot 0{,}28 + 131 \cdot 16 \cdot 0{,}04 = \boxed{2000{,}46}$

2) ¿X e Y son independientes?

Si $f_{xy}(x,y) = f_x(x) \cdot f_y(y) \; \forall_{x,y \in \mathbb{R}}$

- probar todas las combinaciones x, y $\rightarrow$ son indep
- encontrar un (x,y) donde no valga $\Rightarrow$ no son indep. Si hay un 0, probar ese caso.

$f_{xy}(129,15) = 0{,}12$ $f_x(129) \cdot f_y(15) = 0{,}2 \cdot 0{,}6 = 0{,}12$

$f_{xy}(129,16) = 0{,}08$ $f_x(129) \cdot f_y(16) = 0{,}2 \cdot 0{,}4 = 0{,}08$

$f_{XY}(130,15)=0,42$ $f_X(130)\cdot f_Y(15)=0,7\cdot 0,6=0,42$

$f_{XY}(130,16)=0,28$ $f_X(130)\cdot f_Y(16)=0,7\cdot 0,4=0,28$

$f_{XY}(131,15)=0,06$ $f_X(131)\cdot f_Y(15)=0,1\cdot 0,6=0,06$

$f_{XY}(131,16)=0,04$ $f_X(131)\cdot f_Y(16)=0,1\cdot 0,4=0,04$

$\therefore$ X e Y son independientes

y	15	16
$P(Y=y \mid X=130)$	0,6	0,4

3) a)

X \ Y	1	2	3	$f_X(x)$
1	0,15	0,10	0,10	0,35
2	0,10	0,20	0,15	0,45
3	0,05	0,05	0,10	0,20
$f_Y(y)$	0,30	0,35	0,35	1

b) $E(X)=1\cdot 0,35+2\cdot 0,45+3\cdot 0,20=\boxed{1,85}$

$E(Y)=1\cdot 0,30+2\cdot 0,35+3\cdot 0,35=\boxed{2,05}$

$V(X)=E(X^2)-(EX)^2=3,95-1,85^2=\boxed{0,5275}$

$E(X^2)=1^2\cdot 0,35+2^2\cdot 0,45+3^2\cdot 0,20=3,95$

$V(Y)=E(Y^2)-(EY)^2=4,85-2,05^2=\boxed{0,6475}$

$E(Y^2)=1^2\cdot 0,30+2^2\cdot 0,35+3^2\cdot 0,35=4,85$

c) $\mathrm{cov}(X,Y)=E(X\cdot Y)-E(X)\cdot E(Y)=3,9-1,85\cdot 2,05=\boxed{0,1075}$

$E(X,Y)=1\cdot 1\cdot 0,15+2\cdot 1\cdot 0,10+3\cdot 1\cdot 0,10+1\cdot 2\cdot 0,10+2\cdot 2\cdot 0,20+3\cdot 2\cdot 0,15+$
$1\cdot 3\cdot 0,05+2\cdot 3\cdot 0,05+3\cdot 3\cdot 0,10=0,15+0,20+0,30+0,20+0,8+0,9$
$+0,15+0,3+0,9=3,9$

d) $f_{YX}(1,1)=0,15$ $f_Y(1)\cdot f_X(1)=0,30\cdot 0,35=0,105$

No vale, no son independientes.

4) a) $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$

$E(X+Y)=1,85+2,05=\boxed{3,9}$

b) $V(X+Y)=V(X)+V(Y)+2\,\mathrm{cov}(X,Y)$

$V(X+Y) = 0{,}5275 + 0{,}6475 + 2 \cdot 0{,}1075 = \boxed{1{,}39}$

$\sigma_{X+Y} = \sqrt{V(X+Y)} = \sqrt{1{,}39} = \boxed{1{,}179}$

c) $P(X+Y=4) = P(X=1, Y=3) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=1)$

$= 0{,}10 + 0{,}20 + 0{,}05 = \boxed{0{,}35}$

D) D1) $E(100X + 200Y) = 100\, E(X) + 200\, E(Y)$

$= 100 \cdot 1{,}85 + 200 \cdot 2{,}05$

$= 185 + 410 = \boxed{595 ms}$

D2) $V(100X + 200Y) = V(100X) + V(200Y) + 2\,Cov(100X, 200Y)$

Prop De la varianza y covarianza $\curvearrowright$ $= 100^2 V(X) + 200^2 V(Y) + 2 \cdot 100 \cdot 200 \cdot Cov(X,Y)$

$= 10000 \cdot 0{,}5275 + 40000 \cdot 0{,}6475 + 40000 \cdot 0{,}1075$

$= 5275 + 25900 + 4300 = 35475$

$DE(100X + 200Y) = \sqrt{35475} = \boxed{188{,}348 ms}$

5) a) $P(X=Y) = P(X=0, Y=0) + P(X=1, Y=1) + P(X=2, Y=2) + P(X=3, Y=3)$

$P(X=Y) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}25 \cdot 0{,}20 + 0{,}30 \cdot 0{,}40 + 0{,}20 \cdot 0{,}25$

$P(X=Y) = 0{,}0375 + 0{,}05 + 0{,}12 + 0{,}05$

$\boxed{P(X=Y) = 0{,}2575}$

b) $P(X>Y) = P(X=1, Y=0) + P(X=2, Y=0) + P(X=3, Y=0) + P(X=2, Y=1) +$
$P(X=3, Y=1) + P(X=3, Y=2)$

$P(X>Y) = 0{,}25 \cdot 0{,}15 + 0{,}30 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}15 + 0{,}30 \cdot 0{,}20 + 0{,}20 \cdot 0{,}20 +$
$0{,}20 \cdot 0{,}40$

$P(X>Y) = 0{,}0375 + 0{,}045 + 0{,}06 + 0{,}03 + 0{,}04 + 0{,}08$

$\boxed{P(X>Y) = 0{,}2925}$

6) a) $X \sim Exp(\lambda = 1)$; $Y \sim Exp(\lambda=1)$

b) $P(X \leq 1 \cap Y \leq 1) = P(X \leq 1) \cdot P(Y \leq 1) = F(1) \cdot F(1) = 0{,}6321^2 = \boxed{0{,}3996}$

$\uparrow$ V.a. independientes $\uparrow$ App

b) $E(X) = \frac{1}{\lambda} = 1/1 = \boxed{1}$ $E(Y) = \frac{1}{\lambda} = 1/1 = \boxed{1}$

c) $E(X+Y) = E(X) + E(Y) = 1+1 = \boxed{2}$

7) X: "Duración (en horas) del foco A"
Y: "Duración (en horas) del foco B"

a) W: "Diferencia de duración (en horas) con el foco B versus con el foco A"

$X \sim N(800, 100^2)$ $Y \sim N(900, 150^2)$ $W = Y - X \sim N(900-800, \underbrace{100^2 + 150^2}_{\text{independencia}}) \rightarrow W \sim N(100, 32500)$

$P(W>0) \overset{\text{complemento}}{=} 1 - P(W \leq 0)$

$P(W>0) = 1 - P\left(\frac{W-100}{\sqrt{32500}} \leq \frac{0-100}{\sqrt{32500}}\right)$

$P(W>0) = 1 - P(Z \leq -0{,}555)$

$P(W>0) = 1 - \Phi(-0{,}555) \overset{\text{App}}{=} 1 - 0{,}2894 = \boxed{0{,}7106}$

b) V: "Duración (en horas) de ambos focos"

$V = X+Y \sim N(900+800, 100^2 + 150^2) \rightarrow V \sim N(1700, 32500)$

$P(V > 2000) \overset{\text{complemento}}{=} 1 - P(V \leq 2000)$

$P(V>2000) = 1 - P\left(\frac{V-1700}{\sqrt{32500}} \leq \frac{2000-1700}{\sqrt{32500}}\right)$

$P(V>2000) = 1 - P(Z \leq 1{,}6641)$

$P(V>2000) = 1 - \Phi(1{,}6641) \overset{\text{App}}{=} 1 - 0{,}9519 = \boxed{0{,}0481}$

8) X_i = "peso, en grs, del iésimo caramelo" $i=1,\dots,16$ $\quad X_i \sim N(2{,}835, 0.2835^2)$
Independientes

$Y = \sum_{i=1}^{16} X_i$ = peso, en grs del paquete

a) $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right) = \sum_{i=1}^{16} E(X_i) = 16 \cdot 2{,}835 = \boxed{45{,}36}$

linealidad

$V(Y) = V\left(\sum_{i=1}^{16} X_i\right) = \sum_{i=1}^{16} V(X_i) = 16 \cdot 0{,}2835^2 = \boxed{1{,}285956 \text{ gr}}$

indep

b) $P(Y < 45{,}5) = P\left(\frac{Y - 45{,}36}{\sqrt{1{,}285956}}\right) = \Phi(0{,}12) = \boxed{0{,}5478}$

App

$\sum_{i=1}^{16} X_i \sim N(45{,}36,\ 1{,}285956) =$

por combinación lineal de v.a N e indep

9) X_i: "tiempo (en segundos) para que el sistema localice la iésima pieza" $i = 1, 2, \dots, 10$

Y: "tiempo (en segundos) promedio para localizar una pieza en n piezas"

W: "suma del tiempo (en segundos) para localizar n piezas"

$X_i \sim N(45, 30^2 = 900)$, $i = 1, 2, \dots 100$

$Y = \frac{1}{n}\sum^{10} X_i \sim N(45, \underbrace{900/10 = 90}_{\sigma^2/n}) \rightsquigarrow$ son indep.

$W = \sum_{1}^{10} X_i \sim N(\overbrace{450}^{n.\mu}, \overbrace{9000}^{\sigma^2.n})$

a) $P(Y > 60) \overset{complemento}{=} 1 - P(Y \le 60)$

$= 1 - P\left(\frac{Y - 45}{30/\sqrt{10}} \le \frac{60 - 45}{30/\sqrt{10}}\right)$

$= 1 - P(Z \le 1{,}581)$

$= 1 - \Phi(1{,}581) = 1 - 0{,}9429 = \boxed{0{,}0571}$

App

$P(W > 600) \overset{comp}{=} 1 - P(W \le 600) = 1 - P\left(\frac{W - n.\mu}{\sqrt{n}\sigma} \le \frac{600 - 10.45}{\sqrt{10}.30}\right) = 1 - P(W \le 1{,}58) =$

$= 1 - \Phi(1{,}58) = 1 - 0{,}9429 = \boxed{0{,}0571}$

b) "Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1 \dots n$,

entonces, $\overline{X} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \sim N\left(\mu, \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$"

"Si $X_1, \dots, X_n$ son n variables aleatorias independientes donde $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, $i = 1, \dots, n$,

entonces, $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim N(n.\mu, n.\sigma^2)$"

10) X_i: "cantidad de memoria ocupada por la página i", $i = 1, 2, \dots, 500$

$\mu = E(X_i) = 1{,}3 \quad \sigma^2 = V(X) = 0{,}3^2 = 0{,}09 \quad X_1, X_2, X_{500}$ son iid $\quad n = 500 \geq 30$

Y: "suma de cantidad de memoria ocupada por las 500 páginas"

$Y = \sum_{1}^{500} X_i \overset{\sim}{\approx} N(n.\mu = 650, n.\sigma^2 = 45)$, por TCL

$P(Y > 660) \overset{\text{comp}}{=} 1 - P(Y \leq 660)$

$P(Y > 660) = 1 - P\left(\dfrac{Y - n\mu}{\sqrt{n}.\sigma} \leq \dfrac{660 - 500 . 1{,}3}{\sqrt{500} . 0{,}3}\right)$

$P(Y > 660) = 1 - P\left(Z \leq \dfrac{10}{6{,}708}\right)$ por TCL $\overset{\sim}{\approx} N(0,1)$

$P(Y > 660) \approx 1 - \Phi(1{,}49)$

$P(Y > 660) \approx 1 - 0{,}9319$

$\boxed{P(Y > 660) \approx 0{,}0681}$

11) X = "tiempo de vida (en horas) de un componente electrónico"

$$f(x) = \begin{cases} 2Ke^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

a) $f(x) \geq 0 \quad \forall x \to x > 0$

$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

$\int_{0}^{\infty} 2ke^{-x/5}\,dx = 2k\int_{0}^{\infty} e^{-x/5}\,dx = 2K . e^{-x/5}\Big|_{0}^{\infty} = 1 = 2K . 5 = 1$

$\boxed{K = 1/10}$

$$f(x) = \begin{cases} 1/5\, e^{-x/5} & x > 0 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases} \qquad F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x/5} & x > 0 \end{cases}$$

$X \sim Exp(\lambda = 1/5)$

Scanned with CamScanner

b) $P(2 \leq X \leq 10) = P(X \leq 10) P(X < 2)$

$P(2 \leq X \leq 10) = F(10) - F(2)$

$P(2 \leq X \leq 10) = 1 - e^{-10/5} - (1 - e^{-2/5})$

$P(2 \leq X \leq 10) = 0{,}8647 - 1 + e^{-2/5} = \boxed{0{,}535}$

$P(X > 24) \overset{\text{ocomp}}{=} 1 - P(X \leq 24)$

$P(X > 24) = 1 - F(24)$

$P(X > 24) = 1 - (1 - e^{-24/5})$

$P(X > 24) \underset{\text{App}}{=} 1 - 0{,}9918 = \boxed{0{,}0082}$

$E(X) = 1/(1/5) = \boxed{5}$ $\quad V(X) = 1/(1/5)^2 = \boxed{25}$

c) X_i = "Duración (en horas) del componente electrónico i", $i = 1, 2, \ldots, 40$

$\bar{X}$: "Duración (en horas) promedio de un componente electrónico de una muestra de n componentes electrónicos"

$\bar{X} \approx N\left(\mu_{\bar{X}} = \mu = 5, \sigma^2_{\bar{X}} = \frac{\sigma^2}{n} = \frac{5}{8}\right)$, por TCL pues $n = 40 \geq 30$ (es suf. grande) y las variables $X_1, X_2, \ldots, X_{40}$ son independientes e idénticamente distribuidas

$\bar{X} = \frac{1}{40} \sum_{i=1}^{40} X_i$

$P(2 \leq \bar{X} \leq 10) = P(\bar{X} \leq 10) - P(\bar{X} < 2)$

$P(2 \leq \bar{X} \leq 10) = P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - 5}{5 \cdot \sqrt{40}}}_{Z \underset{TCL}{\approx} N(0,1)} \leq \frac{10 - 5}{5 \cdot \sqrt{40}}\right) - P\left(\underbrace{\frac{\bar{X} - 5}{5 \cdot \sqrt{40}}}_{Z \underset{TCL}{\approx} N(0,1)} < \frac{2 - 5}{5 \cdot \sqrt{40}}\right)$

estandarizo

$P(2 \leq \bar{X} < 10) = P(Z \leq 6{,}32) - P(Z < -3{,}79)$

$P(2 \leq \bar{X} \leq 10) \underset{TCL}{\approx} \Phi(6{,}32) - \Phi(-3{,}79)$

$\boxed{P(2 \leq \bar{X} \leq 10) \approx 1}$

12) X_i: "resistencia, en lb/pulg², a la ruptura del iésimo remache" $i=1,\dots,40$

. $E(X_i)=10000$. $V(X_i)=500^2$

$\bar{X} \sim N\left(\mu_{\bar{x}}=\mu=10000,\ \sigma_{\bar{x}}^2=\frac{\sigma^2}{n}=6250\right)$ por TCL, pues $n=40\geq 30$ (es suf. grande) y las variables $X_1, X_2, \dots, X_{40}$ son idep. e idénticamente distribuidas.

a) $P(9900 \leq \bar{X} \leq 10200) = P(\bar{X} \leq 10200) - P(\bar{X} < 9900)$

$$P(9900 \leq \bar{X} \leq 10000) \underset{\text{estandarizo}}{=} P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X}-10000}{500/\sqrt{40}}}_{Z \underset{TCL}{\approx} N(0,1)} \leq \frac{10200-10000}{500/\sqrt{40}}\Bigg) - P\Bigg(\underbrace{\frac{\bar{X}-10000}{500/\sqrt{40}}}_{Z \underset{TCL}{\approx} N(0,1)} < \frac{9900-10000}{500/\sqrt{40}}\Bigg)$$

$$P(9900 \leq \bar{X} \leq 10000) = P(Z \leq 2{,}53) - P(Z < -1{,}26)$$

$$P(9900 \leq \bar{X} \leq 1000 \underset{TCL}{\approx} \Phi(2{,}53) - \Phi(-1{,}26)$$

$$\boxed{P(9900 \leq \bar{X} \leq 10000) \approx 0{,}8903}$$

b) No se puede usar TCL porque $n<30$.

13) X: "número de válvulas defectuosas"

$X \sim B(100, 0{,}3)$

$np = 3 < 10$ y $n(1-p) = 97 > 10$ (no es efectivo)

a) i) $P(X=0) \approx P(X=0+0{,}5)$ corrección por continuidad

$P(X=0) \approx P(X=0{,}5)$

$$P(X=0) \approx P\Bigg(\underbrace{\frac{X-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}}_{Z \underset{TCL}{\approx} N(0,1)} = \frac{0{,}5-100\cdot 0{,}03}{\sqrt{100\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97}}\Bigg)$$

$P(X=0) = P(Z=-1{,}47)$

$P(X=0) \underset{TCL}{\approx} \Phi(-1{,}47)$

$\boxed{P(X=0) \approx 0}$

ii) $P(X>5) \overset{\text{comp}}{=} 1 - P(X \leq 5)$

$$P(X>5) \overset{\text{corrección x continuidad}}{\approx} 1 - P(X \leq 5{,}5) = 1 - P\Bigg(\overbrace{\frac{X-np}{\sqrt{np\cdot(1-p)}}}^{Z \underset{TCL}{\approx} N(0,1)} \leq \frac{5{,}5-100\cdot 0{,}3}{\sqrt{100\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97}}\Bigg) =$$

$P(X>5) \approx 1 - \Phi(1{,}47) \approx \boxed{0{,}0708}$

iii) $\boxed{P(1 \leq X \leq 3) \approx 0{,}5433}$

b) i) $\boxed{0{,}0475}$

ii) $1 - P(X \leq 5 = \boxed{0{,}0808}$

iii) $P(X \leq 3) - P(X < 1) = \boxed{0{,}5897}$

Scanned with CamScanner