

Programación Concurrente ATIC Redictado Programación Concurrente

Clase 10



Facultad de Informática
UNLP

Arquitecturas Paralelas

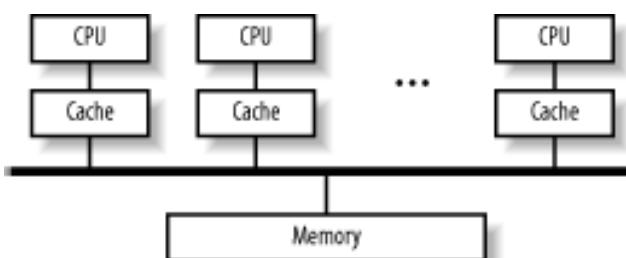
Clasificación por el Espacio de Direcciones

- Las arquitecturas paralelas se clasifican según su espacio de direcciones en:
 - Memoria Compartida.
 - Memoria Distribuida.
- Esta clasificación se relaciona con el modelo de comunicación a utilizar:
 - Accesos a Memoria Compartida (memoria compartida).
 - Intercambio de mensajes (principalmente memoria distribuida).
- En algunos casos también tenemos en la misma plataforma ambos mecanismos.

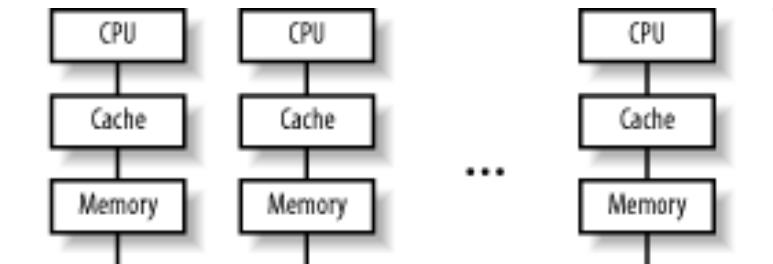
Clasificación por el Espacio de Direcciones

➤ Multiprocesadores de memoria compartida.

- Esquemas UMA con bus o crossbar switch (SMP, multiprocesadores simétricos). Problemas de sincronización y consistencia.
- Esquemas NUMA para mayor número de procesadores distribuidos.
- Problema de consistencia.



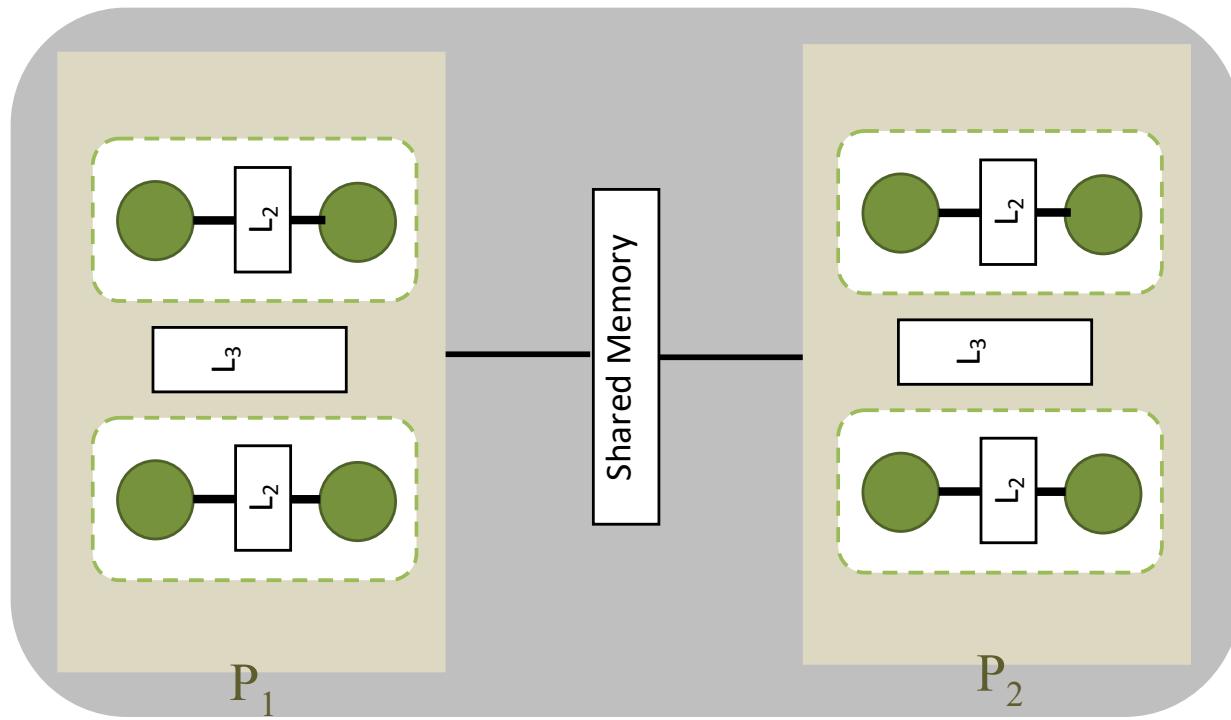
Esquema UMA



Esquema NUMA

Clasificación por el Espacio de Direcciones

- Ejemplo de multiprocesador de memoria compartida: multicore de 8 núcleos.



Clasificación por el Espacio de Direcciones

➤ Multiprocesadores con memoria distribuida.

- Procesadores conectados por una red.
- Memoria local (no hay problemas de consistencia).
- Interacción es sólo por pasaje de mensajes.
- Grado de acoplamiento de los procesadores:
 - Multicomputadores (máquinas fuertemente acopladas). Procesadores y red físicamente cerca. Pocas aplicaciones a la vez, cada una usando un conjunto de procesadores. Alto ancho de banda y velocidad.
 - Clusters.
 - Redes (multiprocesador débilmente acoplado).



Diseño de Algoritmos Paralelos

Diseño de Algoritmos Paralelos

- La mejor solución puede diferir totalmente de la sugerida por los algoritmos secuenciales existentes.
- Puede darse un enfoque metódico para maximizar el rango de opciones consideradas, brindar mecanismos para evaluar las alternativas, y reducir el costo de *backtracking* por malas elecciones.
- Aspectos independientes de la máquina tales como la concurrencia son considerados tempranamente, y los aspectos específicos de la máquina se demoran.

Diseño de Algoritmos Paralelos

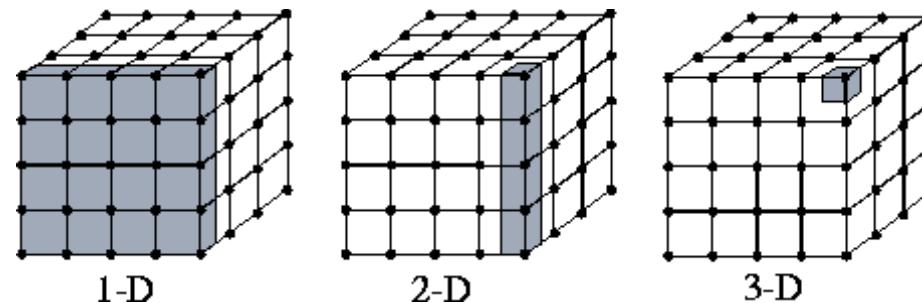
- Para diseñar un algoritmo paralelo se deben realizar alguno de los siguientes pasos:
 - Identificar porciones de trabajo (tareas) concurrentes.
 - Mapear tareas a procesos en distintos procesadores.
 - Distribuir datos de entrada, intermedios y de salida.
 - Manejo de acceso a datos compartidos.
 - Sincronizar procesos.
- Pasos Fundamentales: ***Descomposición en Tareas*** y ***Mapeo de Procesos a Procesadores***.

Descomposición en tareas

- Para desarrollar un algoritmo paralelo el primer punto es descomponer el problema en sus componentes funcionales concurrentes (procesos/tareas).
- Se trata de definir un gran número de pequeñas tareas para obtener una descomposición de grano fino, para brindar la mayor flexibilidad a los algoritmos paralelos potenciales → Posteriormente se puede hacer una etapa de aglomeración para incrementar su granularidad.
- Esta descomposición puede realizarse de muchos modos. Un primer concepto es pensar en tareas de igual código (normalmente ***parallelismo de datos o dominio***) pero también podemos tener diferente código (***parallelismo funcional***) o ambas cosas.

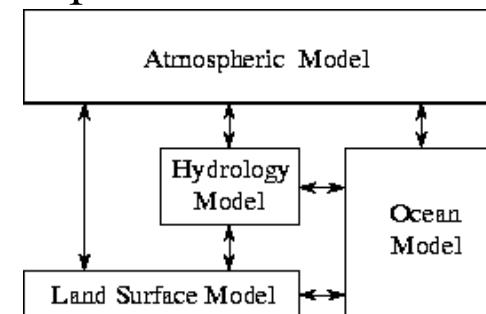
Descomposición en Tareas

- **Descomposición de datos:** determinar una división de los datos (en muchos casos, de igual tamaño) y luego asociarle el cómputo (típicamente, cada operación con los datos con que opera).
- Esto da un número de tareas, donde cada uno comprende algunos datos y un conjunto de operaciones sobre ellos. Una operación puede requerir datos de varias tareas, y esto llevará a la **comunicación**.
- Son posibles distintas particiones, basadas en diferentes estructuras de datos. Por ejemplo, diferentes formas de descomponer una estructura 3D de datos. Inicialmente la de grano más fino.



Descomposición en Tareas

- **Descomposición funcional:** primero descompone el cómputo en tareas disjuntas y luego trata los datos.
- Los requerimientos de datos pueden ser disjuntos (partición completa) o superponerse significativamente (necesidad de comunicación para evitar replicación de datos). En el segundo caso, probablemente convenga descomponer el dominio.
- Inicialmente se busca no replicar cómputo y datos. Esto puede revisarse luego para reducir costos.
- La descomposición funcional tiene un rol importante como técnica de estructuración del programa, para reducir la complejidad del diseño general. Modelos computacionales de sistemas complejos pueden estructurarse como conjuntos de modelos más simples conectados por interfaces.



Características de las Tareas

Una vez que tenemos el problema separado en tareas conceptualmente independientes, tenemos una serie de características de las mismas que impactarán en la performance alcanzable por el algoritmo paralelo:

- Generación de las tareas.
- El tamaño de las tareas.
- Conocimiento del tamaño de las tareas.
- El volumen de datos asociado con cada tarea.

Mapeo de tareas a procesadores

- Se especifica dónde ejecuta cada tarea.
- Este problema no existe en uniprocesadores o máquinas de memoria compartida con scheduling de tareas automático.
- **Objetivo:** minimizar tiempo de ejecución. Dos estrategias, que a veces conflictúan: ubicar tareas que pueden ejecutar concurrentemente en \neq procesadores para mejorar la concurrencia o poner tareas que se comunican con frecuencia en = procesador para incrementar la localidad.
- El problema es NP-completo: no existe un algoritmo de tiempo polinomial tratable computacionalmente para evaluar tradeoffs entre estrategias en el caso general. Existen heurísticas para clases de problema.

Mapeo de tareas a procesadores

- Normalmente tendremos más tareas que procesadores físicos.
- Los algoritmos paralelos (o el scheduler de ejecución) deben proveer un mecanismo de “mapping” entre tareas y procesadores físicos.
- Nuestro lenguaje de especificación de algoritmos paralelos debe poder indicar claramente las tareas que pueden ejecutarse concurrentemente y su precedencia/prioridad para el caso que no haya suficientes procesadores para atenderlas.
- La dependencia de tareas condicionará el balance de carga entre procesadores.
- La interacción entre tareas debe tender a minimizar la comunicación de datos entre procesadores físicos.
- DIFERENCIA ENTRE MAPPING Y SCHEDULING.

Mapeo de tareas a procesadores

El mapeo puede ser *estático* o *dinámico*.

➤ **Estático:** Las tareas se mapean a procesos a priori.

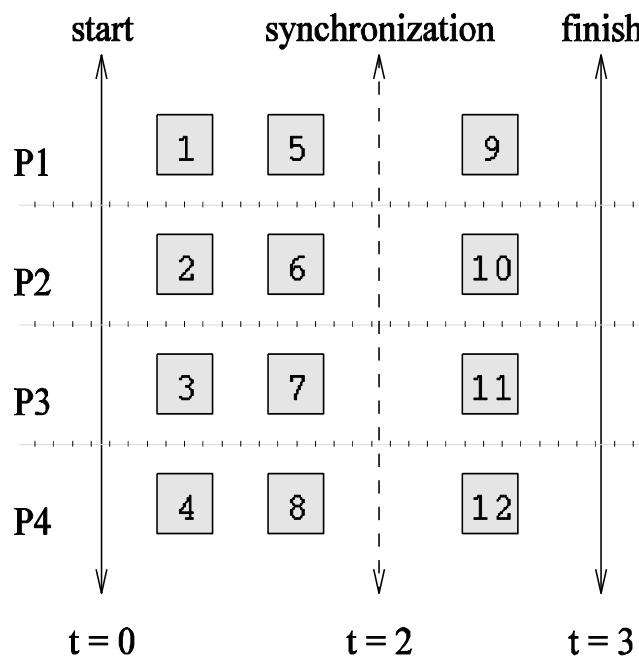
- ✓ Es necesario tener una buena estimación del tamaño de cada tarea.
- ✓ Problema NP completo en el caso general para tareas no uniformes.
- ✓ Heurísticas que brindan soluciones casi óptimas.
- ✓ Algoritmos más fáciles de diseñar y programar.
- ✓ Pueden generar más desbalance de trabajo o carga.

➤ **Dinámico:** Las tareas se mapean en ejecución (porque se generan dinámicamente o porque no se conoce su tamaño).

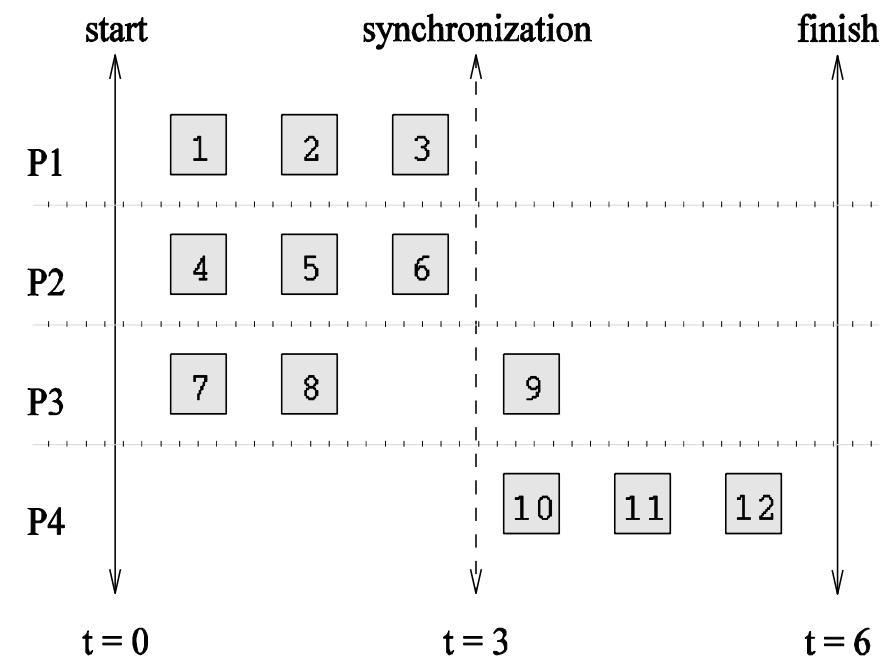
- ✓ Puede incluir migración de datos que agrega overhead.
- ✓ Algoritmos más complicados.
- ✓ Logran un mejor balance de trabajo o carga.
- ✓ Esquemas *centralizados* vs *distribuidos*

Mapeo de tareas a procesadores

Tener en cuenta que un mejor balance de carga, NO asegura un mejor mapeo (solución más rápida), además debe lograr que trabajen al mismo tiempo:



(a)



(b)

Métricas de Rendimiento

Métricas del paralelismo

- En el mundo serial la performance con frecuencia es medida teniendo en cuenta los requerimientos de tiempo y memoria de un programa.
- En un algoritmo paralelo para resolver un problema interesa saber cuál es la ganancia en performance.
- Hay otras medidas que deben tenerse en cuenta siempre que favorezcan a sistemas con mejor tiempo de ejecución.
- A falta de un modelo unificador de cómputo paralelo, el tiempo de ejecución depende del tamaño de la entrada y de la arquitectura y número de procesadores (*sistema paralelo = algoritmo + arquitectura sobre la que se implementa*).

Métricas del paralelismo

- La diversidad torna complejo el análisis de performance...
 - ¿Qué interesa medir?
 - ¿Qué indica que un sistema paralelo es mejor que otro?
 - ¿Qué sucede si agrego procesadores?
- En la medición de performance es usual elegir un problema y testear el tiempo variando el número de procesadores. Aquí subyacen las nociones de speedup y eficiencia, y la *ley de Amdahl*.
- Otro tema de interés es la *escalabilidad*, que da una medida de usar eficientemente un número creciente de procesadores.

Métricas del paralelismo

Speedup (S)

- S es el cociente entre el tiempo de ejecución del algoritmo serial conocido más rápido (T_s) y el tiempo de ejecución paralelo del algoritmo elegido (T_p):

$$S = \frac{T_s}{T_p}$$

- Speedup óptimo depende de la arquitectura (en homogénea P).

$$S_{óptimo} = \sum_{i=0}^P \frac{PotenciaCalculo(i)}{PotenciaCalculo(mejor)}$$

- Rango de valores: en general entre 0 y $S_{óptimo}$
- Speedup lineal o perfecto, sublineal y superlineal.

Métricas del paralelismo

Eficiencia (E)

- Cociente entre Speedup y Speedup Óptimo.

$$E = \frac{S}{S_{óptimo}}$$

- Mide la fracción de tiempo en que los procesadores son *útiles* para el cómputo.
- El valor está entre 0 y 1, dependiendo de la efectividad de uso de los procesadores. Cuando es 1 corresponde al speedup perfecto.

Escalabilidad de los Sistemas Paralelos

- Es muy difícil extrapolar la performance de un sistema paralelo, a partir de configuraciones con pocos procesadores y conjuntos de datos reducidos.
 - No sirven los estudios con 2, 4, 8 procesadores que proyectan el *Sp* alcanzable con 128 o 256 procesadores o el tiempo de procesamiento cuando tengamos 100 o 1000 veces más datos... ¿Por qué?
 - Básicamente porque los resultados con pequeños conjuntos de datos están afectados por la localidad en el manejo de la memoria, y los resultados con pocos procesadores porque las comunicaciones no computan los costos relacionados con la distancia entre procesadores y la disminución del ancho de banda efectivo.

Métricas del paralelismo

Factores que limitan el Speedup

- Alto porcentaje de código secuencial (*Ley de Amdahl*).
- Alto porcentaje de entrada/salida respecto de la computación.
- Algoritmo no adecuado (necesidad de rediseñar).
- Excesiva contención de memoria (rediseñar código para localidad de datos).
- Tamaño del problema (puede ser chico, o fijo y no crecer con p).
- Desbalance de carga (produciendo esperas ociosas en algunos procesadores).
- Overhead paralelo: ciclos adicionales de CPU para crear procesos, sincronizar, etc.

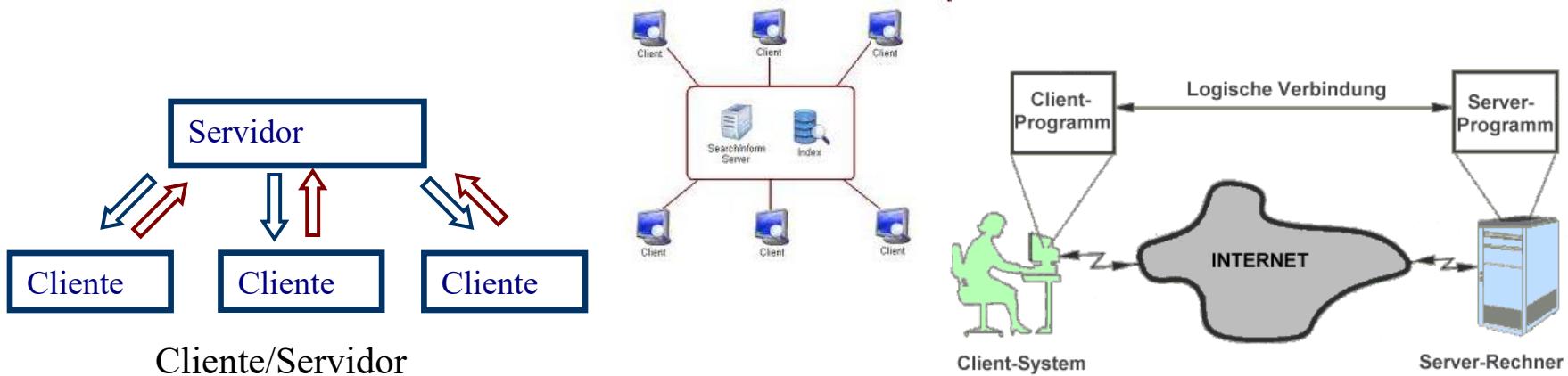
Paradigmas de Programación Paralela

Paradigmas de Programación Paralela

- ***Paradigma de programación:*** clase de algoritmos que resuelve distintos problemas, pero tienen la misma estructura de control.
- Para cada paradigma puede escribirse un esqueleto algorítmico que define la estructura de control común.
- Dentro de la programación paralela pueden encontrarse paradigmas que permiten encuadrar los problemas en alguno de ellos.
- En cada paradigma, los patrones de comunicación son muy similares en todos los casos.

Cliente / Servidor

- Cliente-servidor es el esquema dominante en las aplicaciones de procesamiento distribuido.
- Los servidores son procesos que esperan pedidos de servicios de múltiples clientes. Naturalmente unos y otros pueden ejecutarse en procesadores diferentes. Comunicación bidireccional. Atención de a un cliente a la vez, o a varios con multithreading.
- Mecanismos de invocación variados (rendezvous, RPC, monitores).
- El soporte distribuido puede ser simple (LAN) o extendido a la WEB.



Master/slave o master/worker

- Basado en organizaciones del mundo real.
- El master envía iterativamente datos a los workers y recibe resultados de éstos.
- Posible “cuello de botella” (por ejemplo, por tareas muy chicas o *slaves* muy rápidos) → elección del grano adecuado.
- Dos casos de acuerdo a las dependencias de las iteraciones:
 - ✓ Iteraciones dependientes: el master necesita los resultados de todos los workers para generar un nuevo conjunto de datos.
 - ✓ Entradas de datos independientes: los datos llegan al maestro, que no necesita resultados anteriores para generar un nuevo conjunto de datos

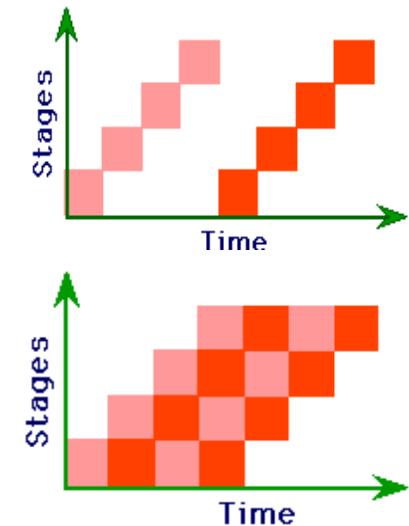


Master/slave o master/worker

- Dos opciones para la distribución de los datos:
 - ✓ Distribuir todos los disponibles, de acuerdo a alguna política (estático).
 - ✓ Bajo petición o demanda (dinámico).
- Existen variantes, pero básicamente un procesador es responsable de la coordinación y los otros de resolver los problemas asignados.
- Es una variación de SPMD donde hay dos programas en lugar de sólo uno.
- Casos:
 - ✓ Procesadores heterogéneos y con distintas velocidades → problemas con el balance de carga.
 - ✓ Trabajo que debe realizarse en “fases” → sincronización.
 - ✓ Generalización a modelo multi-nivel o jerárquico.

Pipeline y Algoritmos Sistólicos

- El problema se partitiona en una secuencia de pasos. El stream de datos pasa entre los procesos, y cada uno realiza una tarea sobre él.
- Ejemplo: filtrado, etiquetado y análisis de escena en imágenes.
- Mapeo natural a un arreglo lineal de procesadores.



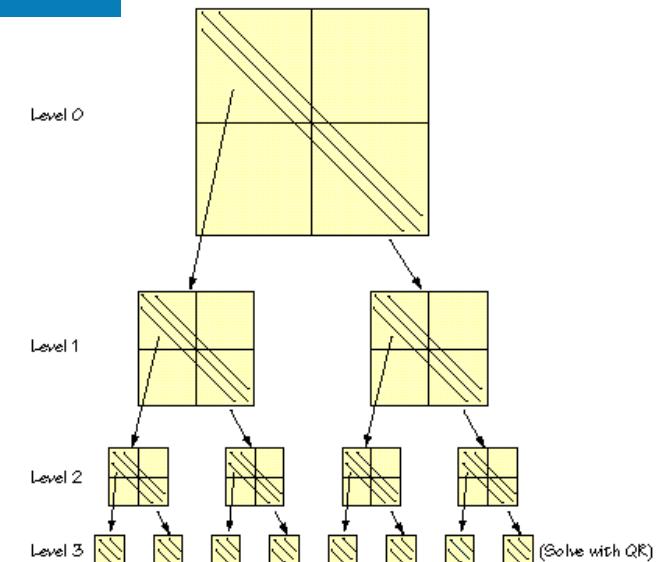
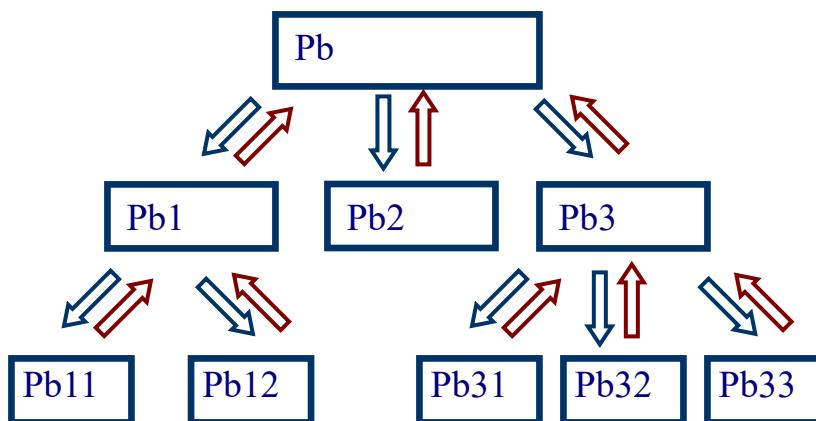
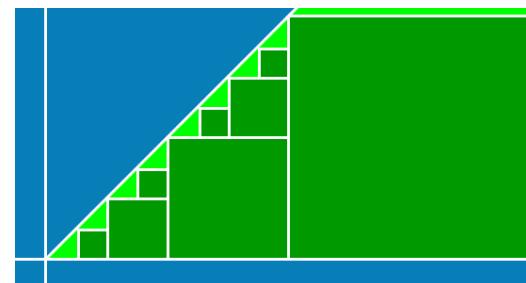
- Extensiones:
 - ✓ Procesadores especializados no iguales.
 - ✓ Más de un procesador para una tarea determinada.
 - ✓ El flujo puede no ser una línea simple (ejemplo: ensamble de autos con varias líneas que son combinadas) → procesamiento sistólico.

Dividir y Conquistar

- En general implica ***paralelismo recursivo*** donde el problema general (programa) puede descomponerse en procesos recursivos que trabajan sobre partes del conjunto total de datos (*dividir y conquistar*).
- División repetida de problemas y datos en subproblemas más chicos (fase de dividir); resolución independiente de éstos (conquistar), con frecuencia de manera recursiva. Las soluciones son combinadas en la solución global (fase de combinar).
- La subdivisión puede corresponderse con la descomposición entre procesadores. Cada subproblema puede mapearse a un procesador. Cada proceso recibe una fracción de datos: si puede los procesa; si no, crea un número de “hijos” y les distribuye los datos.

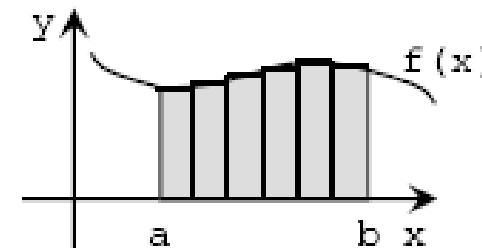
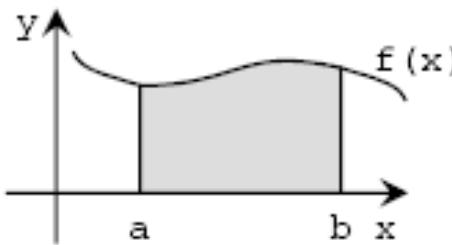
Dividir y Conquistar

- Ejemplos clásicos son el “sorting by merging”, el cálculo de raíces en funciones continuas, problema del viajante.



Dividir y Conquistar

Ejemplo el “Problema de la cuadratura”: calcular una aproximación de la integral de una función continua $f(x)$ en el intervalo de a a b

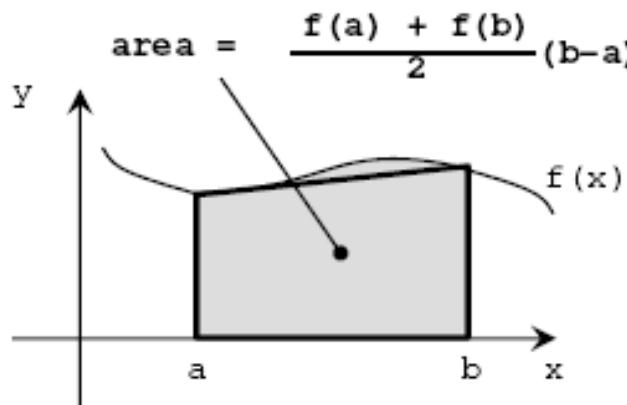


Solución secuencial iterativa (usando el método trapezoidal):

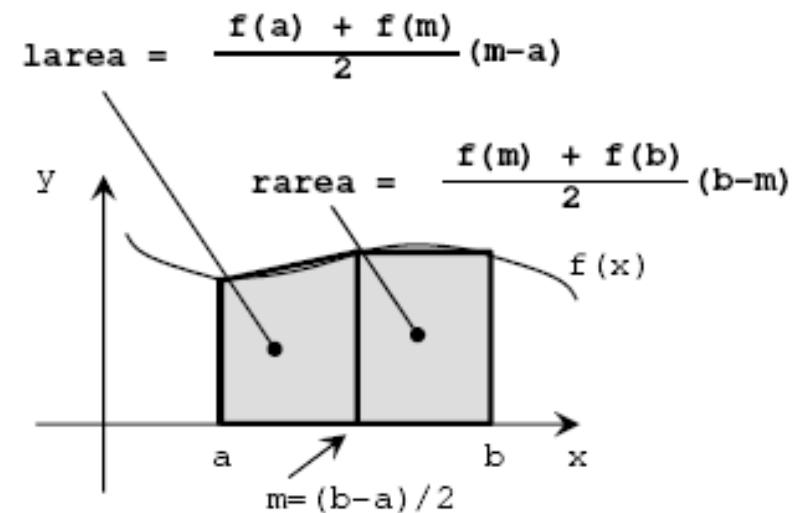
```
double fl = f(a), fr, area = 0.0;  
double dx = (b-a)/ni;  
for [x = (a+dx) to b by dx]  
{ fr = f(x);  
  area = area + (fl+fr) * dx / 2;  
  fl = fr;  
}
```

Dividir y Conquistar

Procedimiento recursivo adaptivo



(a) First approximation (area)



(b) Second approximation
(larea + rarea)

Si $\text{abs}(\text{larea} + \text{rarea}) - \text{area} > e$, repetir el cálculo para cada intervalo $[a,m]$ y $[m,b]$ de manera similar hasta que la diferencia entre aproximaciones consecutivas esté dentro de un dado e .

Dividir y Conquistar

Procedimiento secuencial

```
double quad(double l,r,f1,fr,area) {  
    double m = (l+r)/2;  
    double fm = f(m);  
    double larea = (f1+fm)*(m-l)/2;  
    double rarea = (fm+fr)*(r-m)/2;  
    if (abs((larea+rarea)-area) > e) {  
        larea = quad(l,m,f1,fm,larea);  
        rarea = quad(m,r,fm,fr,rarea);  
    }  
    return (larea+rarea);  
}
```

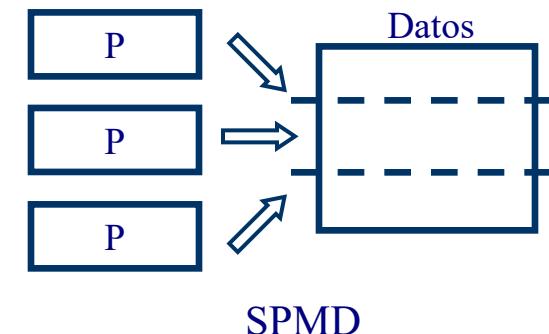
Procedimiento paralelo

```
double quad(double l,r,f1,fr,area) {  
    double m = (l+r)/2;  
    double fm = f(m);  
    double larea = (f1+fm)*(m-l)/2;  
    double rarea = (fm+fr)*(r-m)/2;  
    if (abs((larea+rarea)-area) > e) {  
        co larea = quad(l,m,f1,fm,larea);  
        || rarea = quad(m,r,fm,fr,rarea);  
        oc  
    }  
    return (larea+rarea);  
}
```

- Dos llamados recursivos son independientes y pueden ejecutarse en paralelo.
- Uso: $\text{area} = \text{quad} (a, b ,f(a), f(b), (f(a) + f(b)) * (b-a) /2)$

SPMD

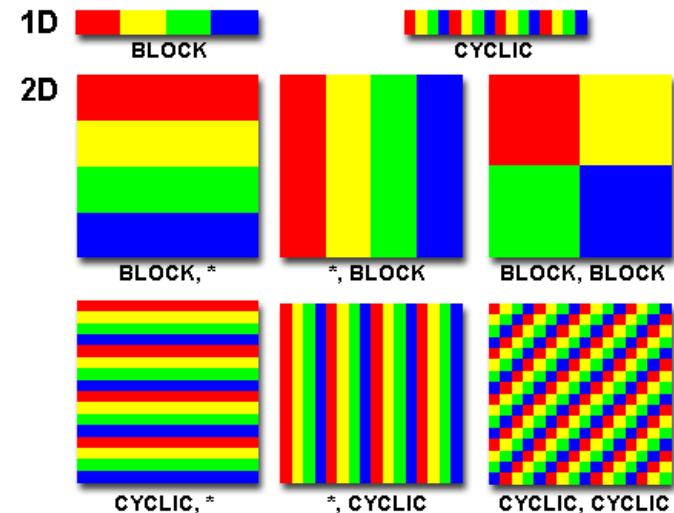
- El programador genera un programa único que ejecuta cada nodo sobre una porción del dominio de datos. La diferente evaluación de un predicado en sentencias condicionales permite que cada nodo tome distintos caminos del programa
- Dos fases: 1) elección de la distribución de datos y 2) generación del programa paralelo
 - 1) Determina el lugar que ocuparán los datos en los nodos. La carga es proporcional al número de datos asignado a cada nodo. Dificultades en computaciones irregulares y máquinas heterogéneas.
 - 2) Convierte al programa secuencial en SPMD. En la mayoría de los lenguajes, depende de la distribución de datos.



SPMD

- Suele implicar **paralelismo iterativo** donde un programa consta de un conjunto de procesos los cuales tiene 1 o más *loops*. Cada proceso es un programa iterativo.
- Generalmente, el dominio de datos se divide entre los procesos siguiendo diferentes patrones.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$



SPMD

Ejemplo de SPMD: multiplicación de matrices.

Solución secuencial:

```
double a[n,n], b[n,n], c[n,n];
for [i = 1 to n]
    { for [j = 1 to n]
        { c[i,j] = 0;
            for [k = 1 to n]
                c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
        }
    }
```

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

.....

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

- El loop interno calcula el producto interno de la fila i de la matriz a por la columna j de la matriz b y obtiene $c[i,j]$.
- El cómputo de cada producto interno es independiente. Aplicación *embarrassingly parallel* (muchas operaciones en paralelas).
- Diferentes acciones paralelas posibles.

SPMD

Solución paralela por fila:

```

double a[n,n], b[n,n], c[n,n];
co [i = 1 to n]
{ for [j = 1 to n]
  { c[i,j] = 0;
    for [k = 1 to n]
      c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
  }
}

```

Solución paralela por columna:

```

double a[n,n], b[n,n], c[n,n];
co [j = 1 to n]
{ for [i = 1 to n]
  { c[i,j] = 0;
    for [k = 1 to n]
      c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
  }
}

```

En paralelo { Proc 1
 Proc 2
 ⋮
 Proc n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix}$$

En paralelo { Proc 1
 Proc 2
 ...
 Proc n

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & \cdots & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c & \cdots & c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddots & a_{r1} & \cdots & a_{rn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddots & b_{s1} & \cdots & b_{sn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ddots & c_{r1} & \cdots & c_{rn} \end{bmatrix}$$

SPMD

Solución paralela por celda (opción 1):

```
double a[n,n], b[n,n], c[n,n];
co [i = 1 to n , j= 1 to n]
{ c[i,j] = 0;
  for [k = 1 to n]
    c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
}
```

Solución paralela por celda (opción 2):

```
double a[n,n], b[n,n], c[n,n];
co [i = 1 to n]
{ co [j = 1 to n]
  { c[i,j] = 0;
    for [k = 1 to n]
      c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
  }
}
```

En paralelo

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Proc 1,1} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \text{Proc 1,2} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \text{Proc 2,1} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \\ \vdots \\ \text{Proc n,n} \quad \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \end{array} \right.$$

SPMD

Solución paralela por fila con process:

```
process fila [i = 1 to n]
  { for [j = 1 to n]
    { c[i,j] = 0;
      for [k = 1 to n]
        c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
    }
  }
```

¿Qué sucede si hay menos de n procesadores?

- Se puede dividir la matriz resultado en *strips* (subconjuntos de filas o columnas) y usar un proceso *worker* por strip.
- El tamaño del strip óptimo es un problema interesante para balancear costo de procesamiento con costo de comunicaciones.

SPMD

Solución paralela por *strips de filas*:
(*P* procesadores con *P*<*n*)

```
process worker [ w = 1 to P]
{ int primera = (w-1)*(n/P) + 1;
  int ultima = primera + (n/P) - 1;
  for [i = primera to ultima]
    { for [j = 1 to n]
      { c[i,j] = 0;
        for [k = 1 to n]
          c[i,j] = c[i,j] + (a[i,k]*b[k,j]);
      }
    }
  }
}
```

En paralelo

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right]$$

n/P filas

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array} \right] \times \left[\begin{array}{cccc} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cccc} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{array} \right]$$

n/P filas

- Ejercicio:** 1) Si $P=8$ y $n=200$. ¿Cuántas asignaciones, sumas y productos hace cada procesador?.
- 2) Suponga que $P_1=P_2$ y los tiempos de asignación son 1, de suma 2 y de producto 3; y si $P_3=\dots=P_8$ y son 2 veces más lento. Determinar:
- Tiempo secuencial del algoritmo.
 - Tiempo paralelo del algoritmo.
 - Speedup y eficiencia.
 - ¿Como puede mejorarse el speedup? ¿Y la eficiencia?.