EJERCICIO 8

1.

Sumatoria while:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ c=1\\ (2)\ c=2\\ (3)\ c=4\\ \dots\\ (k)\ c=2^{(k-1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l}2^{k-1}=n-1\\ k-1=\log_2(n-1)\\ k=\log_2(n-1)+1\end{array}$$

a. $T(n)=C_1+\sum_{c=1}^{\log_2(n-1)+1} C_2 = C_1+(\log_2(n+1)+1).cte_2 \therefore O(n^2)$

b. Existen constantes $c>0$ y n_0 tales que:

$$C_1+(\log_2(n-1)+1).C_2+C_2 \leq c.\log_2(n) \qquad n\in\mathbb{N}$$

PRIMER TÉRMINO

$C_1 \leq \log_2(n).C_1$

$C_1/C_1 \leq \log_2(n)$

$1 \leq \log_2(n)$

$n_1=2$

$c_1=1$

$(\log_2(n-1+1).cte_2 \leq cte_2.\log_2(n)$

$\log_2(n+1)+1 \leq \log_2(n)$

$n_2=2$

$c_2=1$

$\Rightarrow C_1+(\log_2(n-1)+1).C_2 \leq (C_1+C_2).\log_2(n)$

$$T(n) \leq (1+1).\log_2(n)$$

$$T(n) \leq 2\log_2(n)$$

$$T(n) \leq c.\log_2(n)$$

$T(n) \leq O(\log_2(n))$, con $c=2$ para todo $n \geq n_0$, con $n_0=2$. $\Rightarrow O(\log_2(n))$

GUAYMAS

2. a. Sumatoria while:

(1) $c = n$
(2) $c = n/2$
(3) $c = n/4$
...
(k) $c = n/(2^{k-1})$

$\rightarrow n/(2^{k-1}) = 1$

$n = 2^{k-1}$

$k-1 = \log_2 n \rightarrow \log_2(n)+1$ veces

. Si n es potencia de 2 se ejecuta el while $\log_2(n)$ veces, si no lo es, se ejecuta $\log_2(n)+1$ veces

$\rightarrow T(n) = cte_1 + \sum_{c=n}^{\log_2(n)} cte_2 = cte_1 + \log_2(n)\, cte_2 \therefore O(\log_2(n))$

b. Existen constantes $c>0$ y n_0 tales que:

$$C_1 + \log_2(n) C_2 \leq c \cdot \log_2(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

Primer término:	Segundo término:
$C_1 \leq C_1 \cdot \log_2(n)$	$\log_2(n) \cdot C_2 \leq C_2 \cdot \log_2(n)$
$1 \leq \log_2(n)$	$\log_2(n) \leq \log_2(n)$
$n_1 = 2$ $c_1 = 1$	$n_2 = 1$ $c_2 = 1$

$\rightarrow c_1 + \log_2(n) \cdot C_2 \leq (C_1 + C_2) \cdot \log_2(n)$

$T(n) \leq (1+1)\log_2(n)$

$T(n) \leq 2 \log_2(n)$

$T(n) \leq c \cdot \log_2(n)$

$T(n) \leq O(\log_2 n)$, con $C=2$ para todo $n \geq n_0$, con $n_0 = 2$

3. a.

Sumatoria externa:	Sumatoria interna:
(1) $i = 1$	Si $i=1$ se ejecuta una vez
(2) $i = 3$	Si $i=2$ se ejecuta dos veces
(3) $i = 5$	Si $i=n$ se ejecuta i veces
(K) $i = 2K-1$	
$2K-1 = n-1$	
$K = n/2$	

$T(n) = C_1 + \sum_{i=1}^{n/2} \sum_{j=1}^{i} C_2 = \sum_{i=1}^{n/2} i \cdot C_2 = C_1 + C_2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} i = C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{n/2(n/2+1)}{2} \right) = C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{n^2/4 + n/2}{2} \right)$

$= C_1 + C_2 \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{8} \right)$

$\therefore O(n^2)$

b. Existen constantes $c > 0$ y n_0 tales que:

$$c_1 + c_2 \cdot \left(\frac{n^2 + 2n}{8}\right) \leq c \cdot n^2 \quad n \in \mathbb{N}$$

PRIMER TÉRMINO:

$c_1 \leq c_1 \cdot n^2$

$1 \leq n^2$

$n_1 = 1$
$c_1 = 1$

SEGUNDO TÉRMINO:

$c_2 \left(\frac{n^2 + 2n}{8}\right) \leq c \cdot n^2$

$\frac{n^2 + 2n}{8} \leq n^2$

$n_1 = 1$
$c_1 = 1$

$\hookrightarrow c_1 + c_2 \left(\frac{n^2 + 2n}{8}\right) \leq (c_1 + c_2) \cdot n^2$

$T(n) = (1+1) \cdot n^2$

$T(n) = 2n^2$

$T(n) = c \cdot n^2$

$T(n) \leq O(n^2)$ con $c=2$ para todo $n \geq n_0$, con $n_0 = 1 \Rightarrow O(n^2)$