MATEMÁTICA 3 – 1° CUATRIMESTRE 2022
2° PARCIAL -1° FECHA - TURNO MAÑANA

Apellido y nombre:..
N° de alumno:..
Carrera:..

1) Se afirma que una nueva dieta reducirá en 4.5 kg. el peso de un individuo, en promedio, en un lapso de dos semanas. Los pesos de 7 mujeres que siguieron la dieta se registraron antes y después de un periodo de 2 semanas.

Mujer	1	2	3	4	5	6	7
Peso antes	58.5	60.3	61.7	69.0	64.0	62.6	56.7
Peso después	60.0	54.9	58.1	62.1	58.5	59.9	54.4

a) Calcule un intervalo de confianza de 95% para la diferencia media en el peso. Suponga que las diferencias de los pesos se distribuyen de forma normal.

b) Pruebe la hipótesis de que la dieta reduce el peso de un individuo en 4.5 kg., en promedio, contra la hipótesis alternativa de que la diferencia media en peso es menor que 4.5 kg. Decida con el p-valor.

2) En cierta universidad se estima que más de 25% de los estudiantes van en bicicleta a la escuela. ¿Ésta parece ser una estimación válida si, en una muestra aleatoria de 90 estudiantes universitarios, se encuentra que 28 van en bicicleta a la escuela?. Utilice un nivel de significancia de 0.05.

3) a) Calcule un intervalo de confianza de 98% para la proporción de artículos defectuosos en un proceso cuando se encuentra que una muestra de tamaño 100 da como resultado 12 defectuosos.

b) ¿Qué tan grande debe ser la muestra si deseamos tener una confianza de 98% de que nuestra proporción muestral esté dentro del 0.05 de la proporción real de defectuosos?

4) Interesa el contenido en litros de los envases de un lubricante específico. Se toma una muestra aleatoria de 10 envases y sus contenidos son: 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3, 9.8. Suponiendo que el contenido sigue una distribución normal, pruebe la hipótesis de que $\sigma^2 = 0.03$ contra la alternativa $\sigma^2 \neq 0.03$. Utilice $\alpha = 0.05$ y la relación entre intervalo de confianza y test de hipótesis.

5) Considere la distribución $P(X=x) = \dfrac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^x}{x!}$ $\quad x = 0,1,2,\ldots$

a) Encuentre el estimador de máxima verosimilitud de λ, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

b) Encuentre el estimador de λ por el método de los momentos, basado en una muestra aleatoria de tamaño n.

c) Los estimadores encontrados ¿son insesgados?, ¿son consistentes?. Explique.

Mate 3
2do parcial (1er r)

HOJA Nº 1

FECHA 5/7/22

1) X_i = peso de la mujer i (Kgs) antes de la dieta
Y_i = peso de la mujer i (Kgs después de la dieta
$i = 1, \dots, m$ $\quad m = 7$

$D_i = X_i - Y_i \sim N(\mu_d; \sigma_d^2)$ $\quad \bullet \bar{D} = 3{,}557 \quad \bullet s_d = 2{,}776$

a) $IC(\mu_d) = \left[\bar{D} - t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_d}{\sqrt{m}} ; \bar{D} + t_{\alpha/2}(n-1)\frac{S_d}{\sqrt{m}}\right]$

$\left(T = \frac{\bar{D} - \mu_d}{S_d/\sqrt{m}} \sim t_{n-1} \text{ Pivote}\right)$ $\quad 1-\alpha = 0{,}95 \quad t_{0{,}025}(6) = 2{,}447$

$IC(\mu_d) = [\ 0{,}9895 ; 6{,}1244]$

b) $H_0: \mu_d = 4{,}5$ $\quad H_1: \mu_d < 4{,}5$ $\quad$ Test unilateral

Est. de prueba: $T = \frac{\bar{D} - 4{,}5}{S_d/\sqrt{m}} \sim t_{n-1}$ bajo H_0

• p-valor $= P(T < t_{obs}) = P(T < \underbrace{-0{,}89}_{t_{obs}}) \underset{\text{por simetría}}{=}$
$= P(T > 0{,}89)$

$0{,}10 < \text{p-valor} < 0{,}25$ $\quad$ (se acota)

Concl: No Rech H_0 porque el p-valor es menor al 5%. No puedo afirmar que la diferencia media en peso es menor que 4,5 Kg.

2) X = "nº de estudiantes universitarios que van en bici a la escuela entre m"

$X \sim B(m, p)$ $\quad m = 90$ $\quad \alpha \approx 0{,}05$ $\quad \hat{p} = \frac{X}{m} = \frac{28}{90}$

$H_0: p = 0{,}25$ $\quad H_1: p > 0{,}25$

"Rech H_0 si $Z > z_\alpha$"

Est de prueba: $\quad Z = \frac{\hat{p} - 0{,}25}{\sqrt{\frac{0{,}25\ 0{,}75}{m}}} \overset{TCL}{\approx} N(0,1)$ bajo H_0

$z_{obs} = 1{,}338 \not> z_{0{,}05} = 1{,}645$

Concl:
No tengo evid. suf. para rech H_0 con $\alpha \approx 0{,}05$

NOTA

No puedo afirmar que más del 25% de los estudiantes van en bici a clase con $\alpha \approx 0{,}05$

3) a) X = "nº de artículos defectuosos e/m"

$$X \sim B(m, p) \qquad m = 100 \qquad \hat{p} = \frac{X}{m} = \frac{12}{100}$$

$$1-\alpha \approx 0{,}98 \qquad \text{Pivote: } Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{m}}} \overset{TCL}{\approx} N(0,1)$$

$z_{0,01} = 2{,}33$

$$IC(p) = \left[\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{m}} \, ; \, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{m}}\right]$$

$$IC(p) = [0{,}044 ; \; 0{,}1957]$$

b) ¿m? $\quad \varepsilon \leq 0{,}05$

$$z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{m}} \qquad 2{,}33 \sqrt{\frac{0{,}12 \cdot 0{,}88}{m}} \leq 0{,}05$$

$$\boxed{m \geq 230}$$

4) X_i = "contenido del envase i" (litros)

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \qquad \alpha = 0{,}05$$

$$H_0: \sigma^2 = 0{,}03 \qquad H_1: \sigma^2 \neq 0{,}03$$

Calculo $IC(\sigma^2)$ de nivel $1-\alpha = 0{,}95$.

$s = 0{,}245854518$

$$\text{Pivote: } V = \frac{(m-1)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$IC(\sigma^2) = \left[\frac{(m-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} \, ; \, \frac{(m-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}\right] = [0{,}0286 ; 0{,}20]$$

"Rech H_0 si $0{,}03 \notin IC(\sigma^2)$".

No tengo evid suf para rech H_0 con $\alpha = 0{,}05$

5) $X_i \sim P(3\lambda)$

a) $$L(x_1 \ldots x_m, \lambda) = \frac{e^{-3m\lambda} (3\lambda)^{\sum_{i=1}^{m} x_i}}{\prod_{i=1}^{m} x_i!}$$

$$\ln(L) = -3m\lambda + \sum_{i=1}^{m} x_i \ln(3\lambda) - \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i!)$$

$$\frac{d}{d\lambda}(\ln(L)) = -3m + \frac{\sum x_i}{\cancel{\gamma}\lambda}\cdot\cancel{\gamma} = 0$$

$$\frac{\sum x_i}{\lambda} = 3m \rightarrow \boxed{\hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{3}}$$

b) $E(X) = 3\lambda = \overline{X}$

$\rightarrow \hat{\lambda} = \frac{\overline{X}}{3}$ por método de momentos

c) $E(\hat{\lambda}) = E\left(\frac{\overline{X}}{3}\right) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{3m}\sum_{i=1}^{m} E(X_i) = \frac{1}{3m} m \cdot 3\lambda = \boxed{\lambda}$

linealidad

$V(\hat{\lambda}) = V\left(\frac{\overline{X}}{3}\right) \underset{\text{prop de varianza e indep.}}{=} \frac{1}{9m^2}\sum_{i=1}^{m} V(X_i) = \frac{1}{9m^2} m\, V(X_i) =$

$= \frac{1}{9m} 3\lambda = \boxed{\frac{\lambda}{3m}}$

Es consistente porque se cumple el teorema:

- $\lim_{m \to +\infty} E(\hat{\lambda}) = \lim_{m \to +\infty} \lambda = \lambda$ ✓
- $\lim_{m \to +\infty} V(\hat{\lambda}) = \lim_{m \to +\infty} \frac{\lambda}{3m} = 0$ ✓

$\therefore$ Son estimadores consistentes