Matemática III 2do parcial - 1ra fecha 18/12/2020

- Escribir por lo menos con 4 decimales
- 2 opciones correctas

1) Sea $X_1, \dots, X_m$ m.a de una v.a. X donde X es continua con densidad $f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{x^{\theta+1}} & x>1, \theta>1 \\ 0 & c.c \end{cases}$

Método de los momentos.

$$E_\theta(X) = \overline{X}$$

$$\frac{\theta}{\theta-1} = \overline{X}$$

$$\theta = (\theta-1).\overline{X}$$

$$\theta = \theta.\overline{X} - \overline{X}$$

$$\theta - \theta\overline{X} = -\overline{X}$$

$$\theta(1-\overline{X}) = -\overline{X}$$

$$\theta = \frac{-\overline{X}}{1-\overline{X}}$$

$$\boxed{\hat{\theta} = \frac{\overline{X}}{\overline{X}-1}}$$

C. Auxiliares

- $E(X) = \int_1^{+\infty} x.\frac{\theta}{x^{\theta+1}}\,dx =$

$$= \theta\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\theta}\,dx = \theta\int_1^{+\infty} x^{-\theta}\,dx =$$

$$= \theta \lim_{b\to+\infty}\int_1^b x^{-\theta}\,dx =$$

$$= \theta \lim_{b\to+\infty}\left(\frac{x^{-\theta+1}}{-\theta+1}\Bigg|_1^b\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{\theta}{-\theta+1}\lim_{b\to+\infty}(\underbrace{b^{-\theta+1}}_{\to 0} - 1)}_{\to -1} = \boxed{\frac{\theta}{\theta-1}}$$

Método de máxima verosimilitud:

- $f(x_1, \dots, x_m, \theta) \underset{\text{indep}}{=} f(x_1) \dots f(x_m) \underset{x_i > 0 \;\forall i}{=} \theta^m \cdot \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{m} x_i^{\theta+1}}$

- $\ln(f(x_1, \dots, x_m, \theta)) = m \cdot \ln(\theta) - \ln\left(\prod_{i=1}^{m} x_i^{\theta+1}\right) =$

  $= m \cdot \ln(\theta) - (\theta + 1) \cdot \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i) =$

- $\dfrac{d[\ln(f)]}{d\theta} = \dfrac{m}{\theta} - \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i) = 0 \rightarrow \dfrac{m}{\theta} = \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i)$

$$\rightarrow \boxed{\hat{\theta} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m} \ln(x_i)}}$$

Las opciones correctas son:

- El EMV de θ es $\dfrac{m}{\sum_{i=1}^{m} \ln(x_i)}$

- El estimador de θ por método de los momentos es $\dfrac{\overline{X}}{\overline{X} - 1}$

10) El p-valor de un test es 0,02

- La hipótesis nula se rechaza a un nivel de 5%
- el resultado es estadísticamente significativo a un nivel de 5%

2) Se encuentra que la concentración promedio de zinc que se obtiene en una muestra de mediciones en 36 sitios diferentes de un río es de 2,6 gramos por mililitro con una desviación estándar de 0,3 gramos por mililitro

X_i = "concentración de zinc en la i-ésima medición" (gramos por mililitro)

$i = 1, \dots, n$ $\quad n = 36 \quad E(X_i) = \mu \quad dt(X_i) = \sigma$

$\overline{X} = 2{,}6 \quad S = 0{,}3$ $\quad$ Distribución desconocida

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{n}} \underset{TCL}{\approx} N(0,1) \qquad 1-\alpha \approx \text{(Nivel aproximado)}$$

Caso 3: $IC(\mu) = \left[\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}} \; ; \; \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

- Si $1-\alpha \approx 0{,}95 \rightarrow z_{0{,}025} = 1{,}96$

$$IC(\mu) = \left[2{,}6 - 1{,}96 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{36}} \; ; \; 2{,}6 + 1{,}96 \cdot \frac{0{,}3}{\sqrt{36}}\right]$$

$$IC(\mu) = [2{,}502 \; ; \; 2{,}698]$$

- Si $1-\alpha \approx 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = z_{0{,}005} = 2{,}576$

$$IC(\mu) = [2{,}4712 \; ; \; 2{,}7288]$$

Opciones correctas:

- El intervalo para la media de 0,95 de confianza aproximadamente es (2,50; 2,70)
- El intervalo de confianza para la media de 0,99 de confianza aproximadamente es (2,47; 2,73)

3) En un estudio para determinar la dureza de Rockwell en la cabeza de alfileres para costura se toma una muestra aleatoria de 12. Se obtiene un valor promedio de 48,50, con una desviación estándar muestral de 1,5. Suponga que las mediciones se distribuyen de manera normal y con base en esto se construye un intervalo de confianza para la dureza media de Rockwell.

X_i = "dureza de Rockwell del alfiler i"

$i = 1, \dots, m \qquad m = 12 \qquad X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$

$\overline{X} = 48,5 \qquad S = 1,5 \qquad T = \dfrac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{m}} \sim t(n-1)$

- Si $1-\alpha = 0,90$ $\qquad t_{\alpha/2; n-1} = t_{0,05; 11} = 1,796$

Caso 2:

$$IC(\mu) = \left[\overline{X} - t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{m}} ; \overline{X} + t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{m}}\right] =$$

$$\left[48,5 - 1,796 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} ; 48,5 + 1,796 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}}\right]$$

$$[47,7223 ; 49,2777]$$

- Si $1 - \alpha = 0,98$ $\rightarrow$ $t_{0,01; 11} = 2,71808$

$$IC(\mu) = \left[48,5 - 2,71808 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}} \; ; \; 48,5 + 2,71808 \cdot \frac{1,5}{\sqrt{12}}\right]$$

$$IC(\mu) = [47,32303 \; ; \; 49,67696]$$

Las opciones correctas son:

- El intervalo de confianza de 90% es $(47,7223 \, ; \, 49,2776)$
- El intervalo de confianza de 98% es $(47,3230 \, ; \, 49,6769)$

4) Una empresa de taxis trata de decidir si comprará neumáticos marca A o B para su flota de taxis. Para estimar la diferencia entre las 2 marcas realiza un experimento utilizando 12 neumáticos de cada marca. Se quiere calcular un $IC(\mu_A - \mu_B)$ suponiendo que las poblaciones se distribuyen de forma normal. Los resultados son:

Marca A: $\bar{X}_1 = 36300$ $\quad S_1 = 5000$ $\quad m_1 = 12$

$\bar{X}_2 = 38100$ $\quad S_2 = 6100$ $\quad m_2 = 12$

Caso 7:

$$\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \mp t_{\frac{\alpha}{2}, \nu} \cdot \sqrt{\frac{S_1^2}{m_1} + \frac{S_2^2}{m_2}}$$

$$\nu = \frac{\left(\frac{S_1^2}{m_1} + \frac{S_2^2}{m_2}\right)^2}{\frac{\left(\frac{S_1^2}{m_1}\right)^2}{m_1 - 1} + \frac{\left(\frac{S_2^2}{m_2}\right)^2}{m_2 - 1}} = 21,1839 \approx 21$$

• Si $1-\alpha \approx 0,95 \rightarrow t_{0,025;21} \overset{\uparrow}{=} 2,08$ ...
tabla

$$IC(\mu_A-\mu_B) = 36300 - 38100 \mp 2,08 \cdot \sqrt{\frac{5000^2}{12}+\frac{6100^2}{12}}$$

$$[-6535,90315;\ 2935,903152]$$

• Si $1-\alpha \approx 0,98 \rightarrow t_{0,01;21} \overset{\uparrow}{=} 2,518$
tabla

$$IC(\mu_A-\mu_B) = 36300-38100 \mp 2,518 \cdot \sqrt{\frac{5000^2}{12}+\frac{6100^2}{12}}$$

$$IC(\mu_A-\mu_B) = [-7533,175066;\ 3933,175066]$$

Las opciones correctas son:

- El intervalo del 95% es $(-6536;\ 2936)$
- El intervalo del 98% es $(-7533,18;\ 3933,18)$

5) Con referencia al ejercicio anterior, se quiere calcular un $IC(\mu_A-\mu_B)$ si se asignan al azar dos neumáticos de las dos marcas a las ruedas traseras izquierda y derecha de 8 taxis y supongamos que las diferencias se distribuyen de forma normal. Se registran las siguientes distancias (en km)

taxi	A	B	D = A − B
1	34400	36700	−2300
2	45500	46800	−1300
3	36700	37700	−1000
4	32000	31100	900
5	48400	47800	600
6	32800	36400	−3600
7	38100	38900	−800
8	30100	31500	−1400

Muestras apareadas

- $\bar{D} = -1112,5$
- $S_D = 1454,488128$

Caso 8. $IC(\mu_A-\mu_B)=\overline{D}-t_{\alpha/2;n-1}\frac{S_d}{\sqrt{m}};\overline{D}+t_{\alpha/2;n-1}\frac{S_d}{\sqrt{m}}$

- Si $1-\alpha=0{,}95$ $\qquad t_{0{,}025;7}=2{,}365$

$IC(\mu_A-\mu_B)=[-2328{,}67573;\ 103{,}6757]$

- Si $1-\alpha=0{,}99$ $\qquad t_{0{,}005;7}=3{,}499$

$IC(\mu_A-\mu_B)=[-2911{,}822993;\ 686{,}822993$

Las **opciones válidas** son:

- El intervalo de 95% es $(-2328{,}68;\ 103{,}676)$
- El intervalo de 99% es $(-2911{,}82;\ 686{,}823)$

6) se afirma que una aspiradora gasta un promedio de 46 Killowatts-hora al año. Si una muestra aleatoria de 12 hogares indica que las aspiradoras gastan un promedio de 42 con un desvío de 11,9, se quiere probar si las aspiradoras gastan en promedio menos de 46. suponga que la población de killowatts-hora es normal.

X_i = "gasto de Killowatts-hora en el hogar i" $\quad i=1,\dots,m \quad m=12$

$X_i \sim N(\mu;\sigma^2) \qquad \overline{X}=42 \qquad S=11{,}9$

$H_0: \mu = 46 \qquad H_1: \mu < 46$

$T = \dfrac{\bar{X} - 46}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$ bajo H_0

Rechazo H_0 si $T < -t_{\alpha, n-1}$

$t_0 = \dfrac{42-46}{11{,}9/\sqrt{12}} = \boxed{-1{,}1644}$

p-valor $= P(T < t_0) = P(T < -1{,}16) = P(T > 1{,}16)$

p-valor $= 0{,}1353$ — por simetría

app

$\boxed{0{,}10 < \text{p-valor} < 0{,}25}$

Acotando con la tabla

Las opciones correctas son:

- el estadístico de prueba del test toma el valor $-1{,}6$
- el p-valor es mayor que 0,1 y menor que 0,25.

(7) Se probaron 12 piezas del material 1 exponiendo cada pieza a una máquina para medir el desgaste. Se probaron 10 piezas del material 2 de manera similar. En cada caso se observó la profundidad del desgaste. Las muestras del material 1 revelaron un desgaste promedio de 85 con un desvío de 4. Las muestras del material 2 revelaron un promedio de 81 y un desvío de 5. Se quiere probar si el desgaste del material 1 excede al material 2 en más de 2 unidades. Suponga que las poblaciones son normales independientes y con varianzas iguales

X_i = "profundidad del desgaste del material 1 en la pieza i" $i = 1, \ldots, m_1$

$X_i \sim N(\mu_1; \sigma_1^2)$ $\quad m_1 = 12$

Y_j = "profundidad del desgaste del material 2 en la pieza j"

$j = 1, \ldots, m_2 \quad m_2 = 10$

$Y_j \sim N(\mu_2; \sigma_2^2)$

X e Y independientes

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$\overline{X} = 85 \quad S_1 = 4 \quad \overline{Y} = 81 \quad S_2 = 5$

$n_1 = 12 \quad n_2 = 10$

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 2$

$H_1: \mu_1 > \mu_2 + 2$

$\mu_1 - \mu_2 > 2$

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y} - 2}{S_p \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2) \text{ bajo } H_0$$

$$t_0 = \frac{85 - 81 - 2}{4{,}4777 \cdot \sqrt{\frac{1}{12} + \frac{1}{10}}} = \boxed{1{,}043}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

$S_p = 4{,}477722635$

p-valor $= P(T > t_0) = P(T > 1{,}04)$

$0{,}1 < \text{p-valor} < 0{,}25$ Acotado en tabla de student en 20 g.l.

Las opciones correctas son:

- el valor del estadístico de prueba es 1,04
- el p-valor del test es menor que 0,25 y mayor que 0,1.

8) Se considera que un medicamento que se prescribe comúnmente para aliviar la tensión nerviosa tiene una eficacia de tan solo 60%. Los resultados experimentales a una muestra de 100 adultos revelaron que 70 sintieron alivio. Se quiere ver si esta evidencia es suficiente para concluir que el nuevo medicamento es mejor que el que se prescribe comúnmente.

$X =$ "n° de adultos que aliviaron su tensión nerviosa con el nuevo medicamento entre 100"

$X \sim B(m, p)$ $m = 100$

$H_0: p = 0{,}6$ $H_1: p > 0{,}6$

$$\hat{p} = \frac{X}{m} = \frac{70}{100} = 0{,}7$$

$$Z = \frac{\hat{p} - 0{,}6}{\sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{m}}} \overset{TCL}{\approx} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

$$Z_0 = \frac{0{,}7 - 0{,}6}{\sqrt{\frac{0{,}6 \cdot 0{,}4}{100}}} = \boxed{2{,}04124}$$

Con $\alpha \approx 0,05$

Rechazo H_0 si $z > z_\alpha$

$2,04 > 1,645$

Conclusión: el nuevo fármaco es superior con 0,05 de significancia.

Las opciones correctas son:

- El valor del estadístico de prueba es 2,04
- Se concluye que el nuevo fármaco es superior con 0,05 de significancia

9) Se organizará una votación entre los residentes de una ciudad y el partido circundante para determinar si se aprueba una propuesta para la construcción de una planta química. Se realiza una encuesta para determinar si hay una diferencia significativa en la proporción de votantes de la ciudad y los votantes del partido que favorecen la propuesta.

Si 120 de 200 votantes de la ciudad favorecen la propuesta y 240 de 500 residentes del partido también lo hacen, se quiere probar si la proporción de votantes de la ciudad que favorecen la propuesta es mayor que la proporción de votantes del partido. Use $\alpha = 0,05$.

X = "nº de votantes de la ciudad a favor entre m_1"

$X \sim B(m_1; p_1)$ $\qquad \hat{p}_1 = \frac{X}{m_1} = \frac{120}{200}$

Y = "nº de votantes del partido a favor entre m_2"

$Y \sim B(m_2; p_2)$ $\qquad \hat{p}_2 = \frac{Y}{m_2} = \frac{240}{500}$

$H_0: \; p_1 = p_2$ $\qquad$ $H_1: \; p_1 > p_2$

$p_1 - p_2 = 0$ $\qquad$ $p_1 - p_2 > 0$

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}} \underset{TCL}{\approx} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

"Rechazo H_0 si $Z > z_\alpha$" $\qquad z_{0,05} = 1,645$

Zona de rechazo: $\boxed{Z > 1,645}$

$$\hat{p} = \frac{x+y}{m_1+m_2} = \frac{120+240}{200+500} = \frac{360}{700} = 0,514285714$$

$$z_0 = \frac{\left(\frac{120}{200}\right) - \left(\frac{240}{500}\right) - 0}{\sqrt{\frac{360}{700}\cdot\left(1-\frac{360}{700}\right)\cdot\left(\frac{1}{200}+\frac{1}{500}\right)}} = \frac{0,12}{0,041815923} = 2,8697$$

Conclusión: Rechazo H_0 con $\alpha \approx 0,05$

Las opciones correctas son:

- La zona de rechazo es $Z > 1,645$
- se concluye que la proporción de votantes de la ciudad que favorecen la propuesta es mayor que la proporción de votantes del partido que favorecen la propuesta.