MATEMATICA 3 – 2sº CUATRIMESTRE 2023
2º PARCIAL - 2º FECHA (12/12/2023)

1) La duración en minutos de un determinado viaje es una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida y desviación estándar igual a 3. En una muestra tomada al azar de diez realizaciones del viaje en cuestión se obtuvieron los siguientes tiempos: 10.1, 6.5, 5.5, 7.9, 8.2, 6.5, 7.0, 8.1, 6.9 y 7.7.

a) Realizar la estimación de máxima verosimilitud de la duración media del viaje.

b) Realizar la estimación de máxima verosimilitud de la probabilidad de que la duración de un viaje tomado al azar sea mayor que 8 minutos.

2) En un laboratorio se investiga el contenido (en %) en fibras de un determinado alimento. La distribución de los valores obtenidos se puede considerar normal. Por un estudio preliminar, se considera que la desviación estándar de los valores obtenidos se puede fijar en 1.2%.

a) En estas condiciones, ¿cuantas mediciones habría que repetir para conseguir, con una confianza del 95%, un intervalo de longitud menor que 2% a la hora de realizar un intervalo de confianza para el contenido medio real en fibras del alimento?

b) Por otra parte se quiere probar, con un nivel de significancia de 0.05 si el contenido medio en fibras es mayor de 15%. Plantear las hipótesis nula y alternativa adecuadas. Realice el test si una muestra de 10 mediciones da un contenido promedio en fibras de 15.8%.

3) Un estudio demostró que los tiempos de vida de cierta clase de baterías de automóvil se distribuye normalmente. Con el fin de estudiar su duración, se consideró una muestra formada por 10 baterías, obteniéndose las siguientes duraciones observadas:

1456, 1478, 1467, 1350, 1460, 1376, 1410, 1330, 1421, 1423

a) Obtener una estimación puntual y un intervalo de confianza al nivel de confianza del 90% para la media de la población.

b) El fabricante afirma que su duración en promedio es superior a 1400 horas. Con los datos que tenemos, ¿podemos probar dicha afirmación?. Decidir con el p-valor .

4) Sospechamos que nuestro cromatógrafo está estropeado, y queremos determinar si los resultados que nos proporciona son lo suficientemente precisos. Para ello, realizamos una serie de 8 mediciones del contenido de una solución de referencia ~~que, sabemos, contiene 90% de un determinado compuesto.~~ Los resultados que obtenemos son: 93.3, 86.8, 90.4, 90.1, 94.9, 91.6, 92.3, 96.5 La distribución de los valores obtenidos se puede considerar normal.

a) Construir un intervalo de confianza al nivel de 95% para la desviación estándar poblacional.

b) Se considera que las mediciones no son precisas si $\sigma^2 > 1$ ¿Qué conclusiones podemos realizar?. Utilice $\alpha = 0.05$

5) Un taller acaba de recibir una maquina nueva y busca ajustarla correctamente. Según el técnico vendedor de la máquina, ~~la maquina está ajustada para que no produzca más de 4% de piezas defectuosas~~.

a) Al tomar una muestra de 350 piezas producidas, encuentra 10 defectuosas, hallar el intervalo de confianza al nivel de 95% para la proporción poblacional de defectuosos.

b) La empresa no puede permitirse un nivel de defectuosos mayor de 5%. Razonar que tipo de test se debe realizar con el fin de determinar si la maquina se encuentra mal ajustada, y realizar dicho contraste. (tomar α = 0.05).

12/12/23

Matemática 3 (Recu)

1) X_i = "duración en minutos del viaje i" $\quad i = 1, \dots, m \quad m = 10$

$X_i \sim N(\mu; \sigma^2) \quad \sigma = 3$

a) $\hat{\mu} = ?$

• $f(x_1, \dots, x_m, \mu) = f(x_1, \mu) \dots f(x_m, \mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-\frac{(x_1-\mu)^2}{2 \cdot 9}} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} e^{-\frac{(x_m-\mu)^2}{18}}$

$$= \frac{1}{(\sqrt{2\pi} \cdot 3)^m} e^{-\frac{1}{18} \sum_{i=1}^{m} (x_i-\mu)^2}$$

• $\ln(f) = -\frac{1}{18} \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu)^2 - m \ln(\sqrt{2\pi} \cdot 3)$

• $\frac{d}{d\mu}(\ln(f)) = -\frac{1}{18} \cdot 2 \cdot \sum_{i=1}^{m} (x_i - \mu) \cdot (-1) = 0 \rightarrow \sum_{i=1}^{m} x_i - m\mu = 0$

Estimador: $\boxed{\hat{\mu} = \overline{X}}$

Estimación: $\boxed{\overline{x} = 7{,}44}$

b) • $P(X > 8) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} > \frac{8-\mu}{3}\right) = P\left(Z > \frac{8-\mu}{3}\right) =$

$= 1 - \Phi\left(\frac{8-\mu}{3}\right)$

• $\widehat{P(X>8)} = 1 - \widehat{\Phi\left(\frac{8-\mu}{3}\right)} \underset{\text{invarianza}}{=} 1 - \Phi\left(\frac{8-\hat{\mu}}{3}\right) =$

$= 1 - \Phi\left(\frac{8-7{,}44}{3}\right) = 1 - \Phi(0{,}19) \underset{\text{app}}{=} \underbrace{0{,}42465}_{\text{estimación}}$

---

2) X_i = "contenido en fibras del alimento en la medición i" (%) $\quad X_i \sim N(\mu; \sigma^2) \quad \sigma = 1{,}2$

a) $1 - \alpha = 0{,}95 \quad L < 2$

$2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{m}} < 2 \rightarrow \frac{1{,}96 \cdot 1{,}2}{\sqrt{m}} < 1$

$m > 5{,}53$

$\boxed{m \geq 6}$

b) $H_0: \mu = 15 \quad H_1: \mu > 15$

$m = 10 \quad \overline{x} = 15{,}8$

Est de prueba: $Z = \frac{\overline{X} - 15}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$ bajo H_0

$\alpha = 0,05$

Regla de decisión: "Rech H_0 si $Z > z_\alpha$"

$2,108 > 1,645$ ✓

$z_0 = \frac{(15,8 - 15)\sqrt{10}}{1,2} = 2,108$

∴ Rech H_0 con $\alpha = 0,05$. Puedo afirmar que el contenido medio es mayor a 15 con $\alpha = 0,05$

---

3) X_i = "tiempo de vida de batería i" (hs)

$X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$ $i = 1, \dots, n$ $n = 10$

caso 2.

a) $\hat{\mu} = \overline{X}$

$1 - \alpha = 0,90$

$IC(\mu) = \left[\overline{X} \mp t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right]$

$\overline{x} = 1417,1$ $S = 51,02385$

$t_{0,05;9} = 1,833$

$\boxed{IC(\mu) = [1387,5425; 1446,6757]}$

b) $H_0: \mu = 1400$ $H_1: \mu > 1400$

"Rech H_0 si p-valor $< 0,05$"

p-valor $= P(T > t_0) = P(T > 1,06) \underset{\text{app}}{=} \boxed{0,15838}$

$t_0 = \frac{\bar{x} - 1400}{S/\sqrt{10}} = 1,059797$

Conclusión: No tengo evid. suf para rech H_0, no puedo afirmar que la duración promedio es superior a 1400 hs.

---

4) X_i = "contenido de la solución en la medición i"

$X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$ $1 - \alpha = 0,95$ $S = 3,019$

a) $IC(\sigma) \underset{\text{caso 4}}{=} \left[\sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}}; \sqrt{\frac{(n-1) \cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}}\right]$ $n = 8$

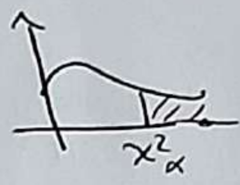
$\chi^2_{0,025;7} = 16,0127$ $\qquad$ $\chi^2_{0,975;7} = 1,68987$

$$\boxed{IC(\sigma) = [1,996 ; 6,14448]}$$

b) $H_0: \sigma^2 = 1$ $\qquad$ $H_1: \sigma^2 > 1$ $\qquad$ $\alpha = 0,05$.

Est. de prueba: $X = \dfrac{(n-1).S^2}{\sigma_0^2} \sim \chi^2_{n-1}$ bajo H_0

"Rech H_0 si $X > \chi^2_{\alpha, n-1}$"



$x_0 = 63,808 > \chi^2_{0,05;7} = 14,0671$

<u>conclusión</u>: Rech H_0 con $\alpha = 0,05$
Puedo afirmar que la varianza es mayor a 1, las mediciones <u>no</u> son precisas con $\alpha = 0,05$.

---

5) X = "n° de piezas defectuosas e/ n"

$X \sim B(n, p)$ $\qquad$ $n = 350$ $\qquad$ $p = ?$ $\qquad$ $\hat{p} = \dfrac{X}{n} = \dfrac{10}{350}$

a) $1 - \alpha \approx 0,95$ $\qquad$ $IC(p) = \hat{p} \mp z_{\alpha/2} \underbrace{\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}_{0,01745}$

caso 11

$$\boxed{IC(p) = [0,01111748 , 0,04602]}$$

b) $H_0: p \leq 0,05$. $\qquad$ $H_1: p < \underline{0,05}$

$\alpha \approx 0,05$

Est de prueba: $Z = \dfrac{\hat{p} - 0,05}{\sqrt{\dfrac{0,05 . 0,95}{n}}} \overset{TCL}{\approx} N(0,1)$ bajo H_0

"Rech H_0 si $Z < z_\alpha$"

$\underbrace{Z}_{-1,8394} < -1,645$

tengo evid. suf para decir que la máquina está ~~mal~~ bien ajustada con $\alpha \approx 0,05$