**MATEMÁTICA 3 – 1° CUATRIMESTRE 2022**
**2° PARCIAL – 2° FECHA - TURNO MAÑANA**

**N° de alumno:** ............................................ **Carrera:**...........................

**Apellido y nombre:**................................................................................................

1) a) Sea $X_1, X_2,.., X_n$ una muestra aleatoria de una v.a. $X$ con densidad dada por $f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\theta}e^{\left(-x/\theta\right)} & \text{si } x>0 \\ 0 & \text{caso contrario} \end{cases}$
Hallar el EMV de $\theta$.
b) El estimador hallado en a) es insesgado?, es consistente?
c) Se mide la duración en meses de cierto tipo de motor eléctrico obteniédose los siguientes datos:
5.178 0.848 11.244 3.920 13.342 3.424 1.879 2.001 0.677 13.254 4.556
1.941 3.3143 12.074 12.817
Si la duración en meses es una v.a. con densidad como en el inciso a), obtener el EMV de $P(X \le 9)$,
y hallar la estimación de $P(X \le 9)$. (Sugerencia: $P(X \le 9) = 1 - e^{-\frac{9}{\theta}}$).

2) Se comparan dos procesos para fabricar cierto microchip. Se seleccionó una muestra de 400 chips de un proceso menos costoso, donde 62 estaban defectuosos. Se seleccionó una muestra de 100 chips de un proceso más costoso, pero 12 tenían defecto.
Determine un intervalo de confianza de 95% para la diferencia entre las proporciones de los chips defectuosos producidos por los dos procesos.

3) Los estudiantes pueden elegir entre un curso de física de tres meses sin laboratorio y un curso de cuatro meses con laboratorio. El examen final escrito es el mismo para cada curso. Si 12 estudiantes del curso con laboratorio tienen una calificación promedio en el examen de 84 con una desviación estándar de 4, y 18 estudiantes del curso sin laboratorio tienen una calificación promedio de 77 con una desviación estándar de 6:
a) Encuentre un intervalo de confianza de 99% para la diferencia entre las calificaciones medias para ambos cursos. Suponga que las poblaciones se distribuyen de forma normal con varianzas iguales.
b) Utilice el intervalo del inciso anterior para probar la hipótesis de que hay diferencia entre las calificaciones medias de ambos cursos. ¿Cuál es el nivel de la prueba?. Explique.

4) a) Decir si la siguiente afirmación es verdadera o falsa justificando la respuesta:
La distribución Student se puede utilizar para construir un test de hipótesis para la media de cualquier población, en tanto que el tamaño muestral sea pequeño.
b) Pruebe la hipótesis de que el contenido medio de los envases de un lubricante específico es de 10 litros, si los contenidos de una muestra aleatoria de 10 envases son 10.2, 9.7, 10.1, 10.3, 10.1, 9.8, 9.9, 10.4, 10.3 y 9.8 litros. Utilice un nivel de significancia de 0.01 y suponga que la distribución del contenido es normal.

5) Un fabricante de estaciones de trabajo de computadora está probando un nuevo proceso de ensamble automatizado. El proceso actual tiene una tasa de defectos de 5%. En una muestra de 400 estaciones de trabajo ensambladas con el nuevo proceso, 15 tenían defectos. ¿Se puede concluir que el nuevo proceso tiene una tasa menor de defectos?. Decida con el p-valor.

12/7/22

Matemática III
2do parcial 2da fecha

Hoja 1

1) a) $X_i \sim E\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$$f(x_i) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-x_i/\theta} & x_i > 0 \\ 0 & c.c \end{cases}$$

- $L(x_1 \dots x_m, \theta) = \frac{1}{\theta^m} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{m} x_i}$
- $\ln(L) = -\frac{1}{\theta} \sum x_i - m \ln(\theta)$
- $\frac{d}{d\theta} \ln(L) = \frac{1}{\theta^2} \sum x_i - \frac{m}{\theta} = 0 \quad \rightarrow \hat{\theta} = \overline{X}$

b) $E(\hat{\theta}) = E(\overline{X}) \underset{\uparrow}{=} E(X_i) = \theta$

linealidad — por ser exponencial

$V(\hat{\theta}) = V(\overline{X}) \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} V(X_i) = \frac{V(X_i)}{m} = \frac{\theta^2}{m}$

ind y prop de varianza

Teor.

- Si $\lim_{m \to +\infty} E(\hat{\theta}) = \theta$ ✓
- Si $\lim_{m \to +\infty} V(\hat{\theta}) = 0$ ✓

$\rightarrow \hat{\theta}$ es consistente

c) $X_i$ = "duración del motor eléctrico i" (meses) $i = 1, \dots, m$ $\quad m = 15$

$\hat{\theta} = \overline{X} = 6{,}031286667$

$\widehat{P(X \leq 9)} = \widehat{1 - e^{-9/\theta}} \underset{\uparrow}{=} 1 - e^{-9/\overline{X}}$ Estimador

prop de invarianza

$\widehat{P(X \leq 9)} = 1 - e^{-9/6{,}03} = 0{,}775$ Estimación

2) $X$ = "n° de chips menos costosos e/ 400"

$X \sim B(m_1, p_1) \quad m_1 = 400 \quad \hat{p}_1 = \frac{X}{m_1} = \frac{62}{400}$

$Y$ = "n° de chips más costosos e/ 100"

$Y \sim B(m_2, p_2) \quad m_2 = 100 \quad \hat{p}_2 = \frac{Y}{m_2} = \frac{12}{100}$

$1 - \alpha \approx 0{,}95$

$IC(p_1 - p_2) = \hat{p}_1 - \hat{p}_2 \mp z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m_2}}$

NOTA

$$IC(p) = \left[ \frac{62}{400} - \frac{12}{100} \mp 1{,}96 \sqrt{\frac{\frac{62}{400}\left(1-\frac{62}{400}\right)}{400} + \frac{\frac{12}{100}\left(1-\frac{12}{100}\right)}{100}} \right]$$

$$\underline{[-0{,}0379;\ 0{,}1079]}$$

3) a) $X_i$ = "calificación del i-ésimo alumno del curso con lab"

$i = 1, \dots, n_1 \qquad n_1 = 12 \qquad \bar{X} = 84 \qquad S_1 = 4 \qquad X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

$Y_j$ = " - - - - sin lab"

$j = 1, \dots, n_2 \qquad n_2 = 18 \qquad \bar{Y} = 77 \qquad S_2 = 6$

$X, Y$ m. indep. $\qquad Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$1 - \alpha = 0{,}99 \qquad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$

$$IC(\mu_1 - \mu_2) = \bar{X} - \bar{Y} \mp S_p \cdot t_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\boxed{[1{,}53689;\ 12{,}4631]}$$

C. Aux:

- $S_p = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}} = \sqrt{28{,}1428} = 5{,}304984$
- $t_{0{,}005}(28) = 2{,}76326$

b) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Rech $H_0$ si $0 \notin IC(\mu_1 - \mu_2)$

Nivel $\alpha = 0{,}01 \qquad 0 \notin [1{,}53;\ 12{,}46]$

Conclusión: Rech $H_0$ con $\alpha = 0{,}01$, puedo afirmar que las medias difieren con $\alpha = 0{,}01$

4) a) Falso: se usa student si las variables tienen distribución normal.

b) $X_i$ = contenido del envase i (litros)

$i = 1, \dots, n \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$\bar{X} = 10{,}06 \qquad S = 0{,}24585$

NOTA

$\alpha = 0{,}01$

$H_0: \mu = 10$ $\qquad$ $H_1: \mu \neq 10$ $\quad$ Test bilateral

· Est. de prueba: $T = \dfrac{\bar{X} - 10}{S/\sqrt{m}} \sim t_{n-1}$ bajo $H_0$

Rech $H_0$ si $|T| > t_{\alpha/2}(n-1)$

$0{,}77 \not> t_{0{,}005}(9) = 3{,}249$

Conclusión: No tengo evidencia suficiente para rechazar $H_0$ con $\alpha = 0{,}01$

No puedo afirmar que el contenido medio difiere de 1ol con $\alpha = 0{,}01$

5) X = "n° de estaciones de trabajo ensambladas con el nuevo proceso con defectos e/m"

$X \sim B(m, p)$ $\qquad$ $m = 400$ $\qquad$ $\hat{p} = \dfrac{X}{m} = \dfrac{15}{400}$

$H_0: p = 0{,}05$ $\qquad$ $H_1: p < 0{,}05$

Est de prueba: $Z = \dfrac{\hat{p} - 0{,}05}{\sqrt{\dfrac{0{,}05 \cdot 0{,}95}{m}}} \overset{TCL}{\approx} N(0,1)$ bajo $H_0$

· p-valor $= P(Z < -1{,}15) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{simetría}}}{=} P(Z > 1{,}15) \underset{TCL}{\approx} \boxed{0{,}125}$

Concl: No tengo evidencia suficiente para rechazar $H_0$ porque el p-valor $> 0{,}05$

No puedo afirmar que el nuevo proceso tiene una tasa menor de defectos.