

Nº de alumno:

Apellido y nombre:.....

- 1) El número de discos duros defectuosos, fabricados diariamente por una línea de producción, puede modelarse como una distribución de Poisson. Los conteos para 15 días son:

7 3 1 2 4 1 2 3 1 2 4 2 6 5 3

- a) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud del parámetro de la distribución.
b) Obtenga el estimador de máxima verosimilitud y la estimación de la probabilidad de a lo sumo 1 defecto en un día.

- 2) Sea X_1, X_2, \dots, X_n una muestra aleatoria de una v.a. con f.d.p. dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\theta}{2^\theta} x^{\theta-1} & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{c.c} \end{cases}$$

- a) Hallar el EMV de θ
b) Hallar un estimador de θ por el método de los momentos

- 3) Para un fármaco, la variabilidad en la efectividad o potencia de una dosis es un valor muy importante a considerar y debe ser pequeña, en caso contrario la dosis podría ser insuficiente o excesiva. Un laboratorio farmacéutico está interesado en determinar la variabilidad en la efectividad de una versión mejorada de cierto fármaco. Se supone que la efectividad del fármaco se distribuye según una normal. Se toma una muestra de 8 dosis del fármaco y se obtienen las siguientes observaciones para la efectividad de esas dosis, una vez que se aplican a los pacientes de la enfermedad para la que es utilizado el fármaco:

13.002 13.009 12.998 13.011 12.995 13.010 13.006 12.989

- a) Hallar un intervalo de confianza para la varianza de la efectividad del fármaco de nivel 99%
b) Hacer un test para las hipótesis $H_0: \sigma^2 = 0.0005$ $H_1: \sigma^2 < 0.0005$ Usar $\alpha = 0.05$

- 4) La pintura para autopista se surte en dos colores: blanco y amarillo. El interés se centra en el tiempo de secado de la pintura; se sospecha que la pintura de color amarillo se seca más rápidamente que la blanca. Se obtienen mediciones de ambos tipos de pintura. Los tiempos de secado (en minutos) son los siguientes

Blanca: 120 132 123 122 140 110 120 107

Amarilla: 126 124 116 125 109 130 125 117 129 120

- a) Encuentre un intervalo de confianza del 95% para la diferencia entre los tiempos de secado medio, suponiendo que las desviaciones estándar de éstos son iguales. Suponga que el tiempo de secado está distribuido de manera normal.
b) ¿Existe alguna evidencia que indique que la pintura amarilla se seca más rápidamente que la blanca? Plantear las hipótesis adecuadas y decidir con el p-valor.

- 5) En una muestra aleatoria de 40 individuos con cabello castaño, 22 indicaron que se teñían el cabello. En otra muestra aleatoria de 40 individuos rubios, 26 indicaron que se teñían el cabello.

- a) Hallar un intervalo de confianza de nivel 92% para estimar la diferencia en las proporciones poblacionales de castaños y rubios que tiñen su cabello.
b) ¿Hay evidencia que la proporción de rubios que se tiñen el cabello es mayor que la de los de cabello castaño? Plantear las hipótesis adecuadas y usar un nivel de significancia de 0.05.

1) $X_i = n^{\circ}$ de discos duros defectuosos fabricados el día i
 $i = 1, \dots, m$ $m = 15$ $X_i \sim P(\lambda)$

a) EHV de λ

$$f(x_i) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x_i}}{x_i!}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_m, \lambda) = \prod_{i=1}^m f(x_i, \lambda) = \frac{e^{-m\lambda} \lambda^{\sum_{i=1}^m x_i}}{\prod_{i=1}^m x_i!}$$

indep

$$\ln(f) = -m\lambda + \sum_{i=1}^m x_i \ln(\lambda) + \sum_{i=1}^m \ln(x_i!)$$

$$\frac{d}{d\lambda} \ln(f) = -m + \frac{\sum_{i=1}^m x_i}{\lambda} = 0 \rightarrow \hat{\lambda} = \bar{X}$$

Estimador.

b) $P(X_1 \leq 1) = P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1) = e^{-\lambda} (1 + \lambda)$

$$P(X_1 \leq 1) = e^{-\lambda} (1 + \lambda) =$$

$$e^{-\bar{X}} (1 + \bar{X})$$

Estimador.

$$P(X_1 \leq 1) = e^{-3,06} (1 + 3,06) = 0,1894$$

estimación

$$\bar{x} = 3,06$$

2) a) EHV de θ

$$f(x_1, \dots, x_m, \theta) = \prod_{i=1}^m f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^m \frac{\theta}{2^\theta} \cdot x_i^{\theta-1} = \frac{\theta^m}{2^{m\theta}} \cdot \prod_{i=1}^m x_i^{\theta-1}$$

$0 < x_i < 2 \forall i$

$$\ln(f) = m \ln(\theta) - m\theta \ln(2) + (\theta-1) \sum_{i=1}^m \ln(x_i)$$

$$\frac{d}{d\theta} \ln(f) = \frac{m}{\theta} - m \ln(2) + \sum_{i=1}^m \ln(x_i) = 0$$

$$\rightarrow \frac{m}{\theta} = m \ln(2) - \sum_{i=1}^m \ln(x_i)$$

$$\hat{\theta} = \frac{m}{m \ln(2) - \sum_{i=1}^m \ln(x_i)}$$

b) $E(X) = \int_0^2 x \cdot \frac{\theta}{2^\theta} x^{\theta-1} dx = \frac{\theta}{2^\theta} \int_0^2 x^\theta dx = \frac{\theta}{2^\theta} \left(\frac{x^{\theta+1}}{\theta+1} \right) \Big|_0^2 =$

$$= \frac{\theta}{2^\theta} \cdot \frac{2^{\theta+1}}{\theta+1} = \frac{\theta \cdot 2}{\theta+1}$$

Método de momentos:

$$E(X) = \bar{X} \rightarrow \text{despejo } \theta$$

$$\frac{\theta \cdot 2}{\theta+1} = \bar{X}$$

$$\theta \cdot 2 = \bar{X} \cdot (\theta+1)$$

$$\theta \cdot 2 = \bar{X} \cdot \theta + \bar{X}$$

$$\theta \cdot 2 - \bar{X} \theta = \bar{X}$$

$$\theta(2 - \bar{X}) = \bar{X}$$

$$\hat{\theta} = \frac{\bar{X}}{2 - \bar{X}} \quad \bar{X} \neq 2$$

3) X_i : "efectividad del fármaco en la dosis i " $i=1, \dots, 8$
 $m=8$ $X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$

a) $IC(\sigma^2) = ?$ $1 - \alpha = 0,99$

Caso 9)

$$S = 7,946 \cdot 10^{-3}$$

$$IC(\sigma^2) = \left[\frac{(m-1) \cdot S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} ; \frac{(m-1) \cdot S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \right] = \left[2,179 \cdot 10^{-5} ; 4,467 \cdot 10^{-4} \right]$$

$$= \left[0,00002179 ; 0,0004467 \right]$$

$$\chi^2_{0,005; 7} = 20,2777$$

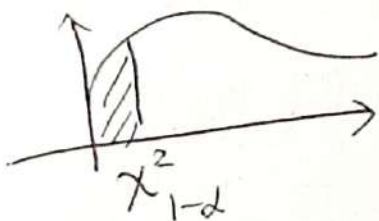
$$\chi^2_{0,995; 7} = 0,98926$$

b) $H_0: \sigma^2 = 0,0005$

$$H_1: \sigma^2 < 0,0005 \quad \alpha = 0,05$$

Est de prueba:

$$X = \frac{(m-1) \cdot S^2}{0,0005} \sim \chi^2_{n-1} \text{ bajo } H_0$$



Zona de rechazo: Rech H_0 si $X_0 < \chi^2_{1-\alpha}$

$$X_0 = \frac{7 \cdot (7,946 \cdot 10^{-3})^2}{0,0005} = 0,884$$

$$\chi^2_{0,95; 7} = 2,167$$

concl: ~~No~~ tengo evidencia suficiente para rech H_0 , ~~no~~ puedo afirmar que la varianza sea menor a 0,0005. con $\alpha = 0,05$

4) X_i = "tiempo de secado (en minutos) de la pintura blanca"
 $i = 1, \dots, m_1$ $m_1 = 8$
 Y_j = " " " " amarilla " " $j = 1, \dots, m_2$ $m_2 = 10$

a) $1 - \alpha = 0,95$

$$X_i \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \quad Y_j \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2) = \bar{X} - \bar{Y} \pm t_{\alpha/2, n_1+n_2-2} \cdot S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}$$

caso 6

Datos: $\bar{X} = 121,75$ $S_1 = 10,70046728$ $\bar{Y} = 122,1$ $S_2 = 6,5396$

$$S_p = \sqrt{S_p^2} = \sqrt{\frac{7 \cdot S_1^2 + 9 \cdot S_2^2}{16}} = 8,611039$$

$$S_p^2 = 74,15 \quad t_{0,025,16} = 2,1199$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2) = (121,75 - 122,1) \pm (2,1199 \cdot 8,611039 \cdot \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}})$$

$$IC(\mu_1 - \mu_2) = [-9,0088893 ; 8,308889]$$

~~[-8,488841~~

b) $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_2 < \mu_1$ seca más rápido,
tarda menos

$\mu_1 - \mu_2 > 0$

Test unilateral

• $p\text{-valor} = P(T > t_{obs}) = P(T > -0,0856) = 0,5335$

$$T = \frac{\bar{X} - \bar{Y} - 0}{S_p \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}} \sim t_{n_1+n_2-2} \text{ bajo } H_0$$

Criterio:

"Rech H_0 si $p\text{-valor} < 0,05$ "

$$t_{obs} = \frac{121,75 - 122,1}{8,611039 \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{10}}} = -0,0856$$

concl: No rech H_0 . No tengo evidencia de que la pintura amarilla seque más rápido que la blanca

5) $X =$ "n- de personas cast. que se tienen e/40" $X \sim B(m_1, p_1)$
 $\hat{p}_1 = \frac{X}{m_1} = \frac{22}{40} = 0,55$ $m_1 = 40$

$Y =$ "n- de personas rubias que se tienen e/40" $Y \sim B(m_2, p_2)$
 $\hat{p}_2 = \frac{Y}{m_2} = \frac{26}{40} = 0,65$ $m_2 = 40$
 X e Y independientes

a) $1 - \alpha \approx 0,92$ $IC(p_1 - p_2) =$ \uparrow caso 12

$$\left[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}_1(1-\hat{p}_1)}{m_1} + \frac{\hat{p}_2(1-\hat{p}_2)}{m_2}} \right]$$

$$-0,1 \pm 1,75 \cdot \sqrt{\frac{0,55 \cdot 0,45}{40} + \frac{0,65 \cdot 0,35}{40}}$$

$z_{0,04} = 1,75$

$$[-0,2907; 0,0907]$$

b) $H_0: p_1 - p_2 = 0$

$H_1: p_2 > p_1$

$H_2: p_1 - p_2 < 0$

Test unilateral

• Est. de prueba:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2 - 0}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}} \stackrel{TCL}{\sim} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

$\alpha \approx 0,05$ Nivel de significancia

• Zona de rechazo:

$$Z < -Z_\alpha$$

$$-0,91 < -1,645$$

$$Z_{obs} = \frac{0,55 - 0,65}{\sqrt{0,6 \cdot 0,4 \cdot \frac{2}{40}}} = -0,91$$

$\hat{p} = \frac{22+26}{80} = 0,6$
concl: No tengo evid. suficiente para rech. H_0
 con $\alpha \approx 0,05$. No puedo afirmar que la
 proporción de rubias que se tienen el ca-
 bello es mayor que la de los de cabello cas-
 tano con $\alpha \approx 0,05$