MATEMATICA 3 - 1° CUATRIMESTRE 2022
2° PARCIAL - 2° FECHA – TURNO TARDE

1) Sea X_1, X_2, X_3 una muestra aleatoria de una v.a. X con media μ y varianza σ^2.
Sean los estimadores puntuales de μ

$$\hat{\mu}_1 = \bar{X} \qquad \hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_3}{3}$$

Obtener:
a) el sesgo de cada estimador
b) los errores cuadráticos medios de cada estimador.

2) En 20 días lectivos y a la misma hora se ha observado el número de terminales de una universidad conectados a Internet. Los resultados son los siguientes

1027 1023 1369 950 1436 957 634 821 882 942
904 984 1067 570 1063 1307 1212 1045 1047 1178

Asumiendo que los datos provienen de una población normal se pide:
a) Calcular el intervalo de confianza al 95% para el número medio de terminales conectados a Internet.
b) Calcular el intervalo de confianza al 95% para la varianza del número de terminales conectados a internet.

3) a) Se toma una muestra de estudiantes universitarios de informática y se les pregunta por su sistema operativo favorito, como resultado se obtiene que de 200 encuestados 30 prefieren el Microsoft. Si p es la proporción de preferencia del Microsoft entre los estudiantes de informática, calcule un intervalo de confianza al 99 % para p.
b) Queremos estimar la proporción de preferencia del Microsoft, y deseamos estar al menos 99 % seguros que el error es como mucho de 0.03. ¿Cuál debe ser el tamaño de la muestra?

4) En una multinacional que se dedica a la venta de baterías para portátiles, se consideran dos modelos. El departamento de ingeniería ha realizado pruebas de duración para los modelos bajo condiciones de uso y recarga similares, que se recogen a continuación
Modelo viejo: 8500 9500 9600 8400 9400 8300
Modelo nuevo: 10000 9800 10300 9900 10200
¿Puede concluirse al nivel $\alpha = 0.05$ que la duración media del modelo nuevo es 800 horas superior que para el modelo viejo? Utiliza el test adecuado para responder la pregunta anterior. Asume normalidad y que sus varianzas no difieren.

5) Se quiere comparar la rapidez de dos modelos de impresora A y B. Los de la compañía A sostienen que su modelo es más de 5 segundos más rápido que la impresora modelo B de los rivales, respecto a tiempos medios de impresión. Se mide el tiempo de impresión de los dos modelos sobre una serie de 8 plantillas estándar y los resultados aparecen en la tabla siguiente:

	Plantilla							
	1	2	3	4	5	6	7	8
Tiempo para A	20	25	22	23	19	21	18	20
Tiempo para B	26	29	27	28	29	30	25	26

Utilice el test adecuado para comprobar si este estudio confirma la afirmación de la compañía A. Utilice el p-valor. Suponga que la diferencia de los tiempos de las impresoras A y B sigue una distribución normal.

Matemática III   13/7/22 2^{do} parcial - 2^{da} fecha

1) a) $\bullet\ b(\hat{\mu}_1) = E(\hat{\mu}_1) - \mu = E(\overline{X}) - \mu = E\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{X_i}{m}\right) - \mu \underset{\uparrow}{=}$ linealidad

$= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} E(X_i) - \mu = \frac{1}{\cancel{m}} \cancel{m}\mu - \mu = \boxed{0}$

$\therefore b(\hat{\mu}_1) = 0 \rightarrow \hat{\mu}_1$ es insesgado para μ

$\bullet\ b(\hat{\mu}_2) = E\left(\frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_3}{3}\right) - \mu \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{2}\left(E(X_1) + E(X_2)\right) + \frac{1}{3}E(X_3) - \mu$

linealidad

$= \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2}\mu + \frac{1}{3}\mu - \mu = \cancel{\mu} + \frac{1}{3}\mu - \cancel{\mu} = \boxed{\frac{1}{3}\mu}$

$\therefore b(\hat{\mu}_2) = \frac{\mu}{3}$ $\therefore \hat{\mu}_2$ no es insesgado para μ

b) $ECM(\hat{\mu}_1) = V(\hat{\mu}_1) + [b(\hat{\mu}_1)]^2 = V(\overline{X}) + 0^2 = V\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{X_i}{m}\right)$

$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{m^2} \sum_{i=1}^{m} V(X_i) = \frac{m\,V(X_i)}{m^2} = \boxed{\frac{\sigma^2}{m}}$

prop de varianza e independencia

$\bullet\ ECM(\hat{\mu}_2) = V(\hat{\mu}_2) + [b(\hat{\mu}_2)]^2 = V\left(\frac{X_1 + X_2}{2} + \frac{X_3}{3}\right) + \left(\frac{\mu}{3}\right)^2 =$

$\underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}\left(V(X_1) + V(X_2)\right) + \frac{1}{9}V(X_3) + \frac{\mu^2}{9} = \frac{\cancel{2}\sigma^2}{\cancel{4}_2} + \frac{\sigma^2}{9} + \frac{\mu^2}{9} =$

independencia y prop de varianza

$= \frac{\sigma^2}{2} + \frac{\sigma^2}{9} + \frac{\mu^2}{9} = \boxed{\frac{11}{18}\sigma^2 + \frac{\mu^2}{9}}$

2) X_i: "nº de terminales de una universidad conectadas a internet en el día i" $i = 1, \dots, m$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\overline{X} = 1020{,}9$ $S = 215{,}7427562$

a) $1 - \alpha = 0{,}95$ $IC(\mu) = \overline{X} \mp t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{m}}$

$\boxed{T = \frac{\overline{X} - \mu}{S/\sqrt{m}} \sim t_{n-1}}$

$1020{,}9 \mp 2{,}093 \cdot \frac{215{,}7427}{\sqrt{20}}$

$[\ 919{,}93\ ;\ 1121{,}8695\ ]$

2) b) $1-\alpha = 0{,}95$ $IC(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2;n-1}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2;n-1}} \right]$

- $\chi^2_{0{,}025;19} = 32{,}852$

$IC(\sigma^2) = \left[\frac{19 \cdot 215{,}74^2}{32{,}852} ; \frac{19 \cdot 215{,}74^2}{8{,}9065} \right]$

- $\chi^2_{0{,}975;19} = 8{,}9065$

$IC(\sigma^2) = [26919{,}329 ; 99293{,}078]$

---

3) a) X = "nº de estudiantes que prefieren Microsoft c/m"

$X \sim B(n, p)$ $n = 200$ $\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{30}{200} = 0{,}15$

$1-\alpha \overset{TCL}{\approx} 0{,}99$ $Z = \frac{\hat{p} - p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \underset{TCL}{\approx} N(0,1)$

$IC(p) = \hat{p} \mp z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$

$IC(p) = 0{,}15 \mp 2{,}576 \sqrt{\frac{0{,}15 \cdot 0{,}85}{200}}$

$IC(p) = [0{,}0849 ; 0{,}215]$

b) $1-\alpha \approx 0{,}99$ $\varepsilon = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0{,}03$

n? $\hat{p} = \frac{30}{200}$ $\left(\frac{2{,}576 \sqrt{0{,}15 \cdot 0{,}85}}{0{,}03} \right)^2 \leq n$

$\boxed{n \geq 941}$

4) X_i = duración de la batería i del modelo viejo

$i = 1, \dots, n_1$ $n_1 = 6$ $X_i \sim N(\mu_1 ; \sigma_1^2)$

Y_j = "duración de la batería j del modelo nuevo"

$j = 1, \dots, n_2$ $n_2 = 5$ $Y_j \sim N(\mu_2 ; \sigma_2^2)$

$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$\alpha = 0{,}05$

$H_0: \mu_2 - \mu_1 = 800$ $H_1: \mu_2 > 800 + \mu_1$

$\mu_2 - \mu_1 > 800$

$(\mu_1 - \mu_2 < -800)$

Estadístico de prueba:

$$T = \frac{\overline{Y} - \overline{X} - 800}{S_p \sqrt{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}} \sim t_{m_1+m_2-2} \text{ bajo } H_0$$

- Regla de decisión

"Rech H_0 si $T > t_{\alpha; n_1+n_2-2}$"

$$t_{obs} = 1{,}009 \not> t_{0{,}05}(9) = 1{,}833$$

cuentas:

- $S_p = \sqrt{S_p^2} = \sqrt{\frac{(m_1-1)S_1^2 + (m_2-1)S_2^2}{m_1+m_2-2}} = \sqrt{225.222{,}2} = 474{,}5758$

- $\overline{X} = 8950$ - $S_1 = 609{,}0976933$

$S_1^2 = 371000$

- $\overline{Y} = 1040$ $S_2 = 207{,}3644135$

$S_2^2 = 43000$

Concl: No tengo evidencia suficiente para rech H_0 con $\alpha = 0{,}05$. No puedo afirmar que la duración media del modelo nuevo es 800 hs superior que para el modelo viejo con $\alpha = 0{,}05$

5) X_i = "tiempo de impresión con la impresora A de la plantilla i" (seg) $E(X_i) = \mu_1$ $E(Y_i) = \mu_2$

Y_i = " . . . B . . "

$\boxed{D_i = Y_i - X_i \sim N(\mu_d; \sigma_d^2)}$ $\mu_d = \mu_2 - \mu_1$

Muestras apareadas

$i = 1, \ldots, m$ $m = 8$

$D_i =$ 6 . 4 5 5 10 9 7 6

- $\overline{D} = 6{,}5$
- $S_d = 2{,}07019667$

$H_0: \mu_d = 5$

$H_1: \mu_2 > \mu_1 + 5$

↑ la impresora B es 5 segundos más lenta

$H_1: \mu_2 - \mu_1 > 5$

$H_1: \mu_d > 5$

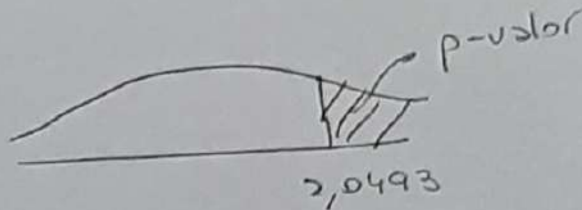
$$\boxed{T = \frac{\overline{D} - 5}{S_d/\sqrt{m}} \sim t_{n-1} \text{ bajo } H_0}$$

$H_0: \mu_d = 5$

$H_1: \mu_d > 5$

- p-valor $= P(T > t_{obs}) = P(T > 2{,}0493)$ Queda acotado

$t_{obs} = \dfrac{6{,}5 - 5}{2{,}07/\sqrt{8}} = 2{,}0493$



$\boxed{0{,}025 < \text{p-valor} < 0{,}05}$

Regla de dec: "Rech H_0 si p-valor $< 0{,}05$"

Conclusión: Rech H_0. Puedo afirmar que la impresora A que la impresora B es más de 5 segundos más rápida