Matemática III 14/12/21

1) Sea $X_1, \ldots, X_n$ muestra aleatoria de una v.a. X continua con densidad

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}x} & x > 0 \\ 0 & c.c. \end{cases}$$

$X_i \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$

- [ ] El E.M.V. de θ, es $\frac{1}{\bar{X}}$ — Opción 1
- [ ] El E.M.V. de θ, es $\frac{1}{2\bar{X}}$ — Opción 2
- [x] El E.M.V. de θ, es $\bar{X}$ — Opción 3
- [x] La duracion en meses de un motor electrico es una v.a. X con la densidad dada. Se mide la duracion en meses de 15 motores: 5.178, 0.848, 11.244, 3.920, 13.342, 3.424, 1.879, 2.001, 0.677, 13.254, 4.556, 1.941, 3.314, 12.074, 12.817La estimacion de maxima verosimilitud de $P(X < 9)$, para esta muestra es 0,775127 — Opción 4
- [ ] La duracion en meses de un motor electrico es una v.a. X con la densidad dada. Se mide la duracion en meses de 15 motores 5.178, 0.848, 11,244, 3.920, 13.342, 3.424, 1.879, 2.001, 0 677, 13 254, 4 556, 1 941, 3 314, 12.074, 12.817. La estimacion de maxima verosimilitud de$P(X < 9)$, para esta muestra es 0.5534 — Opción 5

$$L(x_1, \ldots, x_n, \theta) = \frac{1}{\theta^n} e^{-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln(L) = -\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i - n\ln(\theta)$$

$$\frac{d(\ln(L))}{d\theta} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta^2} - \frac{n}{\theta} = 0$$

$$\frac{1}{\theta}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} - n\right) = 0 \rightarrow \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{\theta} = n$$

$$\hat{\theta} = \bar{X}$$

X_i: "duración (meses) de un motor eléctrico"
$i = 1, \ldots, n$ $n = 15$

$\hat{\theta} = \bar{X} = 6{,}03126$

$X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ $\widehat{P(X<9)} = 1 - e^{-9/6{,}03126} = 0{,}775127$

2) Un intensivo monitoreo de un sistema de tiempo compartido de computadoras sugiere que el tiempo de respuesta a un comando de edición particular está normalmente distribuido con desviación estándar de 25 milisegundos. Se instaló un nuevo sistema operativo y se desea estimar el tiempo de respuesta promedio verdadero en el nuevo entorno. Suponiendo que los tiempos de respuesta siguen estando normalmente distribuidos con σ = 25, el tamaño de muestra necesario para asegurarse de que : *

- [ ] el intervalo de confianza de 95% resultante tenga un ancho de (cuando mucho) 10 es 100
- [x] el intervalo de confianza de 95% resultante tenga un ancho de (cuando mucho) 10 es 97
- [ ] el intervalo de confianza de 99% resultante tenga un ancho de (cuando mucho) 10 es 18
- [x] el intervalo de confianza de 99% resultante tenga un ancho de (cuando mucho) 10 es 166
- [ ] el intervalo de confianza de 99% resultante tenga un ancho de (cuando mucho) 10 es 20

X_i: "tiempo de respuesta de la computadora i" (milisegundos)
$i = 1, \ldots, n$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ $\sigma = 25$

$$IC(\mu) = \bar{X} \mp z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$L = 2 \cdot z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2 \cdot z_{\alpha/2} \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 10$$

- Si $1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow z_{0{,}025} = 1{,}96 \rightarrow L = 2 \cdot 1{,}96 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 10 \rightarrow n \simeq 96{,}04$ $\boxed{n = 97}$
- Si $1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow z_{0{,}005} = 2{,}5758 \rightarrow L = 2 \cdot 2{,}5758 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} = 10 \rightarrow n \simeq 165{,}86$ $\boxed{n = 166}$

3) Los datos adjuntos son voltajes de ruptura de circuitos eléctricamente sobrecargados . El voltaje de ruptura está distribuido en forma normal : 1470 1510 1690 1740 1900 2000 2030 2100 2190 2200 2290 2380 2390 2480 2500 2580 2700 . *

- [x] El intervalo de confianza para la varianza de 95% es (76 172.3 , 318 064.4)
- [x] El intervalo de confianza de 95% para la desviación estándar es (276.0 , 564.0)
- [ ] El intervalo de confianza para la varianza de 90% es (76 172.3 , 318 064.4)
- [ ] El intervalo de confianza de 90% para la desviación estándar es (276.0 , 564.0)
- [ ] El intervalo de confianza para la varianza de 99% es (76 172.3 , 318 064.4)

X_i = "voltaje de ruptura en el circuito i"

$i = 1, -, m \qquad m = 17 \qquad X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$S = 370{,}5728872$

$$IC(\sigma^2) = \left[\frac{(m-1)S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}} ; \frac{(m-1).S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}} \right]$$

$$IC(\sigma) = \left[\sqrt{\frac{(m-1).S^2}{\chi^2_{\alpha/2, n-1}}} ; \sqrt{\frac{(m-1).S^2}{\chi^2_{1-\alpha/2, n-1}}} \right]$$

Si $1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \chi^2_{0{,}025;16} = 28{,}8453$ (app)

$\chi^2_{0{,}975;16} = 6{,}9$ (app)

- $IC(\sigma^2) = [76171{,}49; 318079{,}96]$ (varía levemente)
- $IC(\sigma) = [275{,}99; 563{,}985]$ (varía levemente)
- Si $1-\alpha = 0{,}90 \qquad \chi^2_{0{,}05;16} = 26{,}2962 \qquad \chi^2_{0{,}95;16} = 7{,}961$

$IC(\sigma^2) = [83555{,}351; 275971{,}46]$ • $IC(\sigma) = [289{,}059; 525{,}32986]$

- Si $1-\alpha = 0{,}99 \qquad \chi^2_{0{,}005;16} = 34{,}2671 \qquad \chi^2_{0{,}995;16} = 5{,}14221$
- $IC(\sigma^2) = [64119{,}49; 427284{,}8]$

4) Es importante que las máscaras utilizadas por bomberos sean capaces de soportar altas temperaturas porque los bomberos comúnmente trabajan en temperaturas de 200-500°F. En una prueba de un tipo de máscara, a 11 de 55 máscaras se les desprendió la mica a 250°. Un intervalo de confianza para la proporción de máscaras verdadera de este tipo cuya mica se desprendería a 250° es *

- [ ] (0.105375 ; 0.294425) con nivel 95%
- [x] (0.111283 ; 0.288717) con nivel 90%
- [ ] (0.130878 ; 0.269122) con nivel 99%
- [x] (0.0610701 ; 0.33893) con nivel 99%
- [ ] (0.0610701 ; 0.33893) con nivel 90%

X = "n° de máscaras que se desprende la mica entre m" $\qquad X \sim B(m, p)$

$m = 55$

$$IC(p) = \hat{p} \mp z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{m}} \qquad \hat{p} = \frac{11}{55}$$

si $1-\alpha \approx 0{,}95$

$IC(p) = [0{,}094285; 0{,}3057]$

- Si $1-\alpha \approx 0{,}9 \qquad IC(p) = [0{,}111275; 0{,}28872]$
- Si $1-\alpha \approx 0{,}99 \qquad IC(p) = [0{,}06106; 0{,}3389]$

5)

Una muestra de diez camiones diesel fue operada tanto caliente como fría para calcular la diferencia en el ahorro de combustible. Los resultados, en milla/galón, se presentan en la tabla siguiente. Suponiendo que la diferencia de los millajes es normal, un intervalo de confianza para la diferencia en la media del millaje de combustible entre motores calientes y fríos es *

Camion	*Caliente*	*Frio*
1	4.56	4.26
2	4.46	4.08
3	6.49	5.83
4	5.37	4.96
5	6.25	5.87
6	5.90	5.32
7	4.12	3.92
8	3.85	3.69
9	4.15	3.74
10	4.69	4.19

- [ ] (0.258983 ; 0.537017) con nivel 90%
- [x] (0.258983 ; 0.537017) con nivel 98%
- [ ] (0.283179 ; 0.512821) con nivel 99%
- [ ] (0.301413 ; 0.494587) con nivel 95%
- [x] (0.28653 ; 0.50947) con nivel 95%

D_i = "diferencia de millaje entre motores en el camión i"

$D_i \sim N(\mu_d; \sigma_d^2)$ $\qquad \overline{D} = 0{,}398$

$S_d = 0{,}15583467$

$$IC(\mu_d) = \overline{D} \mp t_{\alpha/2, n-1} \cdot \frac{S_d}{\sqrt{m}}$$

- Si $1-\alpha = 0{,}9$ $\qquad t_{0,05;9} = 1{,}83311$

$IC(\mu_d) = [0{,}307 ; 0{,}488]$

- Si $1-\alpha = 0{,}98$ $\qquad t_{0,01;9} = 2{,}82144$

$IC(\mu_d) = [0{,}25896 ; 0{,}537038]$

- Si $1-\alpha = 0{,}99$ $\qquad t_{0,005;9} = 3{,}24984$

$IC(\mu_d) = [0{,}23785 ; 0{,}558149]$

- Si $1-\alpha = 0{,}95$ $\quad t_{0,025;9} = 2{,}26216$ $\quad IC(\mu_d) = [0{,}28653 ; 0{,}50946]$

6)

Antes de que una sustancia se pueda considerar segura para enterrarse como residuo se deben caracterizar sus propiedades químicas. En una de seis muestras de lodo de una planta de tratamiento de agua residual, la media del pH era 6.68 con desviación estándar de 0.20. Suponga que los datos provienen de una población normal. Se quiere probar que la media del pH es menor de 7.0 *

- [ ] el p-valor es aproximadamente cero
- [x] el valor del estadístico de prueba es - 3.919
- [x] el p-valor es mayor que 0.005 y menor que 0.01
- [ ] el p-valor es mayor que 0.02
- [ ] el estadistico de prueba toma el valor - 2.34

X_i = "ph en la medición i del lodo"

$i = 1, \dots, m$ $\qquad X_i \sim N(\mu; \sigma^2)$

$H_0: \mu = 7$ $\qquad H_1: \mu < 7$

$$T = \frac{\overline{X} - 7}{S/\sqrt{m}} \sim t_{n-1} \text{ bajo } H_0$$

- p-valor $= P(T < t_0) = P(T < -3{,}919) \underset{\text{app}}{=} 0{,}0056$

- $t_0 = \dfrac{6{,}68 - 7}{0{,}2/\sqrt{6}} = -3{,}919$

7) Se compara las propiedades de soldaduras hechas con dióxido de carbono como gas de protección con respecto a las de soldaduras hechas mediante una mezcla de argón y dióxido de carbono. Una propiedad estudiada era el diámetro de inclusiones, que son partículas incrustadas en la soldadura. Una muestra de 544 inclusiones en soldaduras hechas al usar argón como protección tiene un diámetro promedio de 0.37 mm, con desviación estándar de 0.25 mm. Una muestra de 581 inclusiones en soldaduras hechas al emplear dióxido de carbono como protección tiene diámetro promedio de 0.40 mm, con desviación estándar de 0.26 mm. Suponga que las poblaciones son independientes. Se quiere probar que las medias de los diámetros de las inclusiones son diferentes entre los dos gases de protección *

- [ ] el test es unilateral a derecha
- [ ] el test es unilateral a izquierda
- [x] el estadístico de prueba toma el valor - 1.97
- [ ] el p-valor es mayor que 0.005 y menor que 0.01 y se acepta H0
- [x] el p-valor es 0.0488 y por lo tanto se rechaza H0

X_{1i} = "diámetro de inclusión en la soldadura i hecha con argón"

X_{2j} = "diámetro de inclusión en la soldadura j hecha con dióxido de carbono"

X_1, X_2 independientes.

Distribuciones desconocidas

$E(X_{1i}) = \mu_1 \quad E(X_{2j}) = \mu_2$

$n_1 = 544 \quad \bar{x}_1 = 0,37 \quad s_1 = 0,25$

$n_2 = 581 \quad \bar{x}_2 = 0,4 \quad s_2 = 0,26$

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$

$\mu_1 - \mu_2 \neq 0$

Bilateral

$$Z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2 - 0}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}}} \overset{TCL}{\approx} N(0,1) \text{ bajo } H_0$$

- $z_0 = -1,9728$
- p-valor $= P(|Z| > |z_0|) \underset{\uparrow TCL}{\approx} 0,04884$

Rech H_0.

8) Se han desarrollado dos métodos para determinar el contenido de niquel del acero. En una muestra de cinco reproducciones del primer método sobre cierta clase de acero, la medición promedio (en porcentaje) fue 3.16 y la desviación estándar 0.042. El promedio de las siete reproducciones del segundo método fue 3.24, y la desviación estándar, 0.048. Suponga que se conoce que las varianzas poblacionales son iguales y las poblaciones son normales e independientes. Se quiere probar que hay diferencia en las mediciones promedio entre los dos métodos *

- [ ] el estadístico de prueba toma el valor - 4.65
- [x] el estadístico de prueba toma el valor 2.990
- [x] el p-valor es mayor que 0.01 y menor que 0.02
- [ ] el test es unilateral
- [ ] el p-valor es mayor que 0.005 y menor que 0.01

X_{1i} = "resultado de la medición i con el método 1" $\quad X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

X_{2j} = "resultado de la medición j con el método 2" $\quad X_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$n_1 = 5 \quad \bar{x}_1 = 3,16 \quad s_1 = 0,042$

$n_2 = 7 \quad \bar{x}_2 = 3,24 \quad s_2 = 0,048$

X_1, X_2 independientes $\quad \sigma_1^2 = \sigma_2^2$

$H_0: \mu_1 = \mu_2 \quad H_1: \mu_1 \neq \mu_2$ Bilateral

$$T = \frac{\bar{X}_2 - \bar{X}_1 - 0}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t_{n_1 + n_2 - 2} \text{ bajo } H_0$$

$s_p = 0,04569$

- $t_0 = +2,989979$
- p-valor $= P(|T| > |t_0|) = 2 \cdot P(T > 2,989) = 0,01358$

9) En una serie de experimentos para determinar la tasa de absorción de ciertos pesticidas en la piel se aplicaron cantidades medidas de dos pesticidas a algunos especímenes de piel. Después de un tiempo se midieron las cantidades absorbidas (en mg). Para el pesticida A la varianza de las cantidades absorbidas en seis muestras fue de 2.3, mientras que para el B, la varianza de las cantidades absorbidas en diez especímenes fue de 0.6. Suponga que para cada pesticida las cantidades absorbidas constituyen una muestra aleatoria simple de una población normal y que las poblaciones son independientes. Se quiere probar que la varianza en la cantidad absorbida es mayor para el pesticida A que para el B *

- [x] Opción 1: Si σ_A^2 es la varianza para el pesticida A y σ_B^2 es la varianza para el pesticida B, la hipotesis nula es $H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \leqslant 1$
- [x] Opción 2: el estadistico de prueba toma el valor 3.83 y se rechaza H_0 con significancia 0.05
- [ ] Opción 3: Si σ_A^2 es la varianza para el pesticida A y σ_B^2 es la varianza para el pesticida B, la hipotesis nula es $H_0 : \frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2} \geqslant 1$
- [ ] Opción 4: el estadistico de prueba toma el valor 3.83 y se rechaza H_0 con significancia 0.01
- [ ] Opción 5: el estadistico de prueba toma el valor 6.43

X_{1i} = cantidad absorbida en el especimen i del pesticida A $\quad X_{1i} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$

X_{2j} = cantidad absorbida en el especimen j del pesticida B $\quad X_{2j} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$

$m_1 = 6 \quad s_1^2 = 2,3 \quad m_2 = 10 \quad s_2^2 = 0,6$

$H_0 : \sigma_1^2 \leq \sigma_2^2 \qquad H_1 : \sigma_1^2 > \sigma_2^2$

$H_0 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \leq 1 \qquad H_1 : \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} > 1$

$F = \frac{S_1^2}{S_2^2} \sim F_{n_1-1; n_2-1}$ bajo $H_0 \qquad \boxed{F_0 = 3,8\overline{3}}$

Rech H_0 si $F_0 > f_{\alpha, n_1-1, n_2-1}$

- si $\alpha = 0,05 \rightarrow 3,8\overline{3} > 3,48166$ Rech H_0
- si $\alpha = 0,01 \rightarrow 3,8\overline{3} \not> 6,056$ No rech H_0

10) Un fabricante de baterías para automóvil afirma que la duración de sus baterías se distribuye de forma normal con una desviación estándar igual a 0.9 años. Si una muestra aleatoria de 10 de tales baterías tiene una desviación estándar de 1.2 años, se quiere probar que σ > 0.9 años. Utilizando un nivel de significancia de 0.05: * 10 pu

- [x] la región critica corresponde a los valores mayores a 16.919
- [x] el estadístico de prueba toma el valor 16.0 y se acepta H0
- [ ] el estadístico de prueba toma el valor 27.8
- [ ] la región critica corresponde a los valores mayores a 19.022 y menores que 2.7003
- [ ] el test es bilateral

X_i = duración de batería i (años) $\quad i = 1, \dots, m \quad m = 10 \quad s = 1,2$

$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$

$H_0 : \sigma = 0,9 \qquad H_1 : \sigma > 0,9 \qquad \alpha = 0,05$

$V = \frac{(m-1)S^2}{0,9^2} \sim \chi^2_{n-1}$ bajo H_0

- Región crítica o zona de rechazo:

Rechazo H_0 si $V > \chi^2_{\alpha; 9}$

$V_0 = \frac{9 \cdot 1,2^2}{0,9^2} = 16$

$16 \not> 16,9189$

Acepto H_0.