MATEMATICA 3

2° FECHA

1°) A_i: "la memoria RAM proviene del fabricante i" $i=1,2$

$P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$

D: "falla antes de tiempo"

$P(D/A) = P(X\leq 1)$ $X\sim Exp(0.2)$

$P(D/B) = P(|Y|<2)$ $Y\sim N(4,4)$

a) $P(D) = ?$

$P(X\leq 1) = 1-e^{-0.2} = \boxed{0.181269}$

$P(|Y|<2) = \Phi\left(\frac{2-4}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-4}{2}\right) =$

$= \Phi(-1) - \Phi(-3) = \boxed{0.1573}$

$P(D) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) =$

$= (1-e^{-0.2})\frac{1}{2} + (0.1573)\frac{1}{2} = \boxed{0.1692846}$

b) $P(A/D) = \dfrac{P(D/A)P(A)}{P(D)} = \dfrac{(1-e^{-0.2})\frac{1}{2}}{0.1692846} = \boxed{0.5353979}$

X: "tiempo de vida del componente A en miles de horas"

$X \sim Exp\left(\frac{1}{5}\right) \qquad F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x}{5}} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$

Y: tiempo de vida del componente B"

$Y \sim Exp\left(\frac{1}{6000}\right)$

a) $P(X > 2) = e^{-\frac{2}{5}} = e^{-\frac{2}{5}} = 0.6703$

$P(Y > 2000) = e^{-\frac{2000}{6000}} = e^{-\frac{2}{6}} = 0.7165$

b) A: "la componente A funciona al menos 2000 h"

B: "la componente B funciona al menos 2000 h"

C: "el sistema es apto"

$C = A \cup B$ A y B son independientes

$P(C) = P(A \cup B) = 1 - P((A \cup B)^c) = 1 - P(A^c)P(B^c) =$

$= 1 - \left(1 - e^{-\frac{2}{5}}\right)\left(1 - e^{-\frac{2}{6}}\right) = \boxed{0.906546}$

4

a) X: "nº de clientes que llegan a 1 caja"

$X \sim P(\lambda t) \qquad \lambda t = 2 \times 4 = 8$

$P(X \geq 8) = 1 - F(7) = 1 - 0.453 = \boxed{0.547}$

$\downarrow$ tabla con $\lambda = 8$

---

b) Y: "tiempo en horas que se tarda en llegar un cliente"

$Y \sim Exp(\lambda) \qquad \lambda = 8$

$F(y) = 1 - e^{-8y} \qquad y \geq 0$

$P\left(Y > \frac{3}{60}\right) = e^{-8 \cdot \frac{3}{60}} = e^{-\frac{24}{60}} = e^{-\frac{2}{5}} = \boxed{0.6703}$

Otra forma:

Y: "tiempo en minutos que se tarda en llegar un cliente"

$Y \sim Exp(\lambda) \qquad \lambda = \frac{2}{15}$

$15 \longrightarrow \lambda = 2$

$1 \longrightarrow \lambda = \frac{2}{15}$

$F(y) = 1 - e^{-\frac{2}{15}y} \qquad y \geq 0$

$P(Y > 3) = e^{-\frac{6}{15}} = e^{-\frac{2}{5}}$

5) c) Z: "nº de cajas que realizan en x hora ≥ [illegible] clientes" (5)

$P(Z > 10) = ?$

$Z \sim B(50, p)$ $\quad p = P(X \geq [illegible]) = 0,547$

$P(Z > 10) = 1 - P(Z \leq 10) \cong$

$\cong 1 - \Phi\left(\dfrac{10,5 - 27,35}{\sqrt{12,38955}}\right) =$

$= 1 - \Phi(-4,[illegible]) = \boxed{1}$

$np = 50 \times 0,547 = 27,35$

$n(1-p) = 22,65$

$np(1-p) = 12,38955$

---

d) X_i: "cantidad de clientes en la caja i en x hora" $i = 1, \ldots, 50$

$X_i \sim \mathcal{P}(8)$ $\quad E(X_i) = \mu = 8$

$V(X_i) = \sigma^2 = 8$

$\overline{X} = \dfrac{1}{50} \displaystyle\sum_{i=1}^{50} X_i$ es el nº promedio de clientes por caja en x hora

$P(\overline{X} > 10) \overset{TCL}{\cong} 1 - \Phi\left(\dfrac{10 - 8}{\sqrt{\frac{8}{50}}}\right) =$ $\quad \overline{X} \approx N\left(8, \dfrac{8}{50}\right)$

$= 1 - \Phi(5) \cong 1 - [illegible] = \boxed{0,[illegible]}$

) X e Y v.a. tales que

$E(X^2) = 5 \quad V(X) = 4$

$V(X+Y) = 10 \quad cov(X,Y) = 2$

a) $E(X) = ?$

$V(Y) = ?$

$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \Rightarrow 4 = 5 - (E(X))^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E(X) = \sqrt{5-4} = \begin{cases} 1 \\ -1 \end{cases}$

$V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2cov(X,Y)$

$\therefore \quad 10 = 4 + V(Y) + 2(2) \Rightarrow$

$\Rightarrow V(Y) = 10 - 4 - 4 = \boxed{2}$

---

b) $Z = 5X - 3$

$E(Z) = ? \quad V(Z) = ?$

$E(Z) = 5E(X) - 3 = \begin{cases} 5 - 3 = \boxed{2} \\ 5(-1) - 3 = \boxed{-8} \end{cases}$

$V(Z) = V(5X-3) = 5^2 V(X) = 25 \times 4 = \boxed{100}$

X_i: "Longitud de la pieza i en dm"
$i = 1, 2$

$X_1 \sim N(54, 4^2)$

$X_2 \sim N(13, 3^2)$

X_1 y X_2 independientes

$Z = X_1 + X_2$: "Longitud del eje"

a) $P(55 \leq Z \leq 78)$ $\quad Z \sim N(67, \underbrace{4^2+3^2}_{25})$

$$P(55 \leq Z \leq 78) = \Phi\left(\frac{78-67}{\sqrt{25}}\right) - \Phi\left(\frac{55-67}{\sqrt{25}}\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{11}{5}\right) - \Phi\left(-\frac{12}{5}\right) = 0.977899$$

$\therefore$ $P(\text{eje defectuoso}) = 1 - 0.977899 =$
$= 0.022101$

$\therefore$ el porcentaje de ejes defectuosos es $\simeq 2.2\%$

---

b) Y: "nº de ejes defectuosos entre 5"

$Y \sim B(5, p)$ $\quad p = 0.022101$

$P(Y > 1) = 1 - P(Y \leq 1) =$

8

$1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] =$

$= 1 - \left[\binom{5}{0} 0.022101^0 (0.977899)^5 + \right.$

$\left. + \binom{5}{1} 0.022101 (0.977899)^4\right] =$

$= 1 - [0.894272 + 0.10105503] =$

$= \boxed{0.00467297}$

Otra forma: $np = 5 \times 0.022101 = 0.110505 <$

se utiliza aproximación Poisson:

$1 - [P(Y=0) + P(Y=1)] \approx$

$\approx 1 - \left[e^{-0.110505} + e^{-0.110505} \, 0.110505\right] =$

$= 0,005673$