Matemática 6to año – Guía teórico-práctica N°5

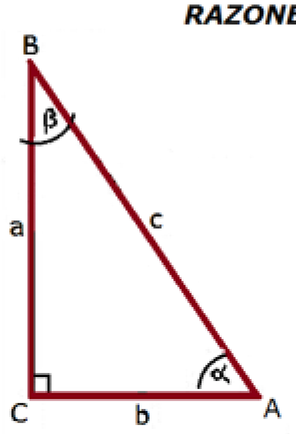
Tema: seno, coseno y tangente de ángulos ubicados en un sistema de coordenadas y sus inversas secante, cosecante y cotangente. Sistema radial.

Objetivo: conocer la definición de seno, coseno y tangente y sus inversas para ángulos cualesquiera y sus propiedades más importantes. Conocer el sistema radial de medición de ángulos y su relación con el sistema sexagesimal

---

Comenzaremos recordando ciertos temas aprendidos en Cuarto Año respecto de los triángulos rectángulos tales como los conceptos de: RAZONES TRIGONOMÉTRICAS, TEOREMA DE PITÁGORAS, RELACIÓN ENTRE LOS ÁNGULOS INTERIORES DE UN TRIÁNGULO.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS



Seno de α = sen α = $\dfrac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{a}{c}$

Coseno de α = cos α = $\dfrac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{c}$

Tangente de α = tg α = $\dfrac{\text{Cateto opuesto a } \alpha}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{a}{b}$

Cotangente de α = cotg α = $\dfrac{\text{Cateto adyacente a } \alpha}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \dfrac{b}{a}$

Secante de α = sec α = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto adyacente a } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

Cosecante de α = cosec α = $\dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{Cateto opuesto a } \alpha} = \dfrac{c}{a}$

Teorema de Pitágoras: (relaciona las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo)

"El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos"

$$\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{AC}^2 \qquad o\ bien \qquad c^2 = a^2 + b^2$$

Relación entre los ángulos interiores de un triángulo genérico:

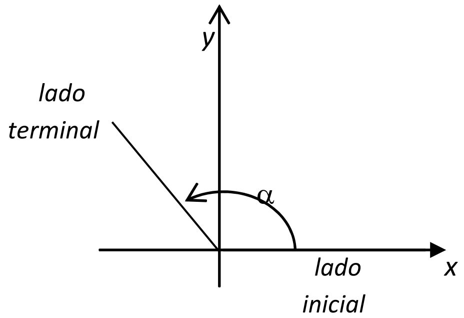
"La suma de los ángulos interiores de un triángulo es igual a 180º" $\boldsymbol{\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180º}$

En particular para los triángulos rectángulos podemos decir además que **"la suma de los dos ángulos agudos es igual a un ángulo recto"**

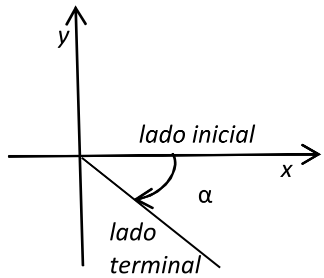
$$\boldsymbol{\hat{A} + \hat{B} = 90º}$$

Ahora sí iniciamos la explicación de nuevos temas tales como: ángulos orientados y ubicados en un sistema de coordenadas cartesianas:

El vértice está en el origen de coordenadas; el semieje positivo de las x es el lado inicial del ángulo; el ángulo es positivo si se supone que el lado inicial gira en el sentido contrario al de las agujas del reloj hasta superponerse con el lado terminal del ángulo; si se supone que el lado inicial gira en el sentido de las agujas del reloj hasta superponerse con el lado terminal del ángulo, el ángulo es negativo.
Según sea el cuadrante en el que se encuentra el lado terminal, hablaremos de ángulos del primero, segundo, tercero o cuarto cuadrante. Vean los siguientes ejemplos:



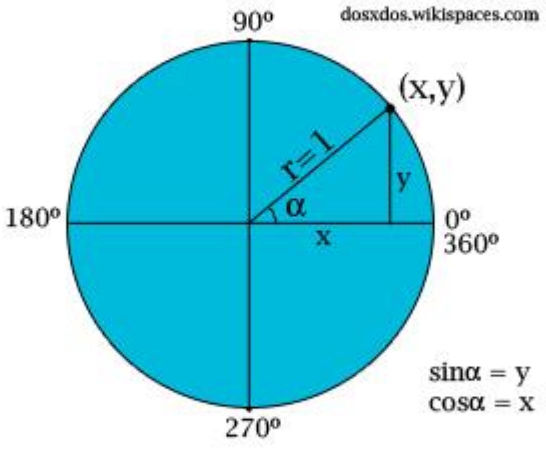
α es positivo y del segundo cuadrante



α es negativo y del cuarto cuadrante

Nótese que hay ángulos de más de un giro y que ángulos diferentes pueden tener el mismo lado terminal.

Circunferencia Trigonométrica:



Ahora analizaremos al triángulo rectángulo inscripto en una circunferencia. Esta circunferencia se encuentra en un plano que se divide en 4 regiones llamadas CUADRANTES. El extremo del triángulo coincide con un punto de la circunferencia P (x; y) donde asociamos la abscisa “ x “ con el cateto adyacente de un ángulo del triángulo rectángulo respecto del ángulo "α" y la ordenada " y " con el cateto opuesto a dicho ángulo del triángulo rectángulo. Como el cateto adyacente se asocia al coseno (dado que coseno(α) = $\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$) y el cateto opuesto se asocia al seno (dado que seno(α) = $\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$), terminamos concluyendo que asociamos **" x " a "coseno(α)" e " y " a "seno(α)"**.

El ángulo central "α" se genera a partir de un giro antihorario (contrario a las agujas del reloj). De 0 a 90° nos encontramos en el primer cuadrante, de 90° a 180° el segundo cuadrante, de 180° a 270° el tercer cuadrante y de 270° a 360°, el cuarto cuadrante.

En el primer cuadrante tanto las abscisas (eje x) como las ordenadas (eje y) son POSITIVAS. Por lo tanto, tanto seno(α) como coseno(α) son POSITIVOS (y también lo es la tangente, pues recordemos que tangente(α) = $\frac{sen(\alpha)}{coseno(\alpha)}$)

En el segundo cuadrante las abscisas son NEGATIVAS y las ordenadas son POSITIVAS. Por lo tanto el coseno(α) es negativo, el seno(α) es positivo y la tangente(α) es negativa (menos por más da menos)

En el tercer cuadrante tanto las abscisas como las ordenadas son negativas (tanto el seno(α) como el coseno(α) son negativos). Por lo tanto la tangente(α) es positiva (menos por menos es más)

En el cuarto cuadrante las abscisas son positivas (coseno(α) positivo) y las ordenadas son negativas (seno(α) negativo). La tangente(α) es negativa.

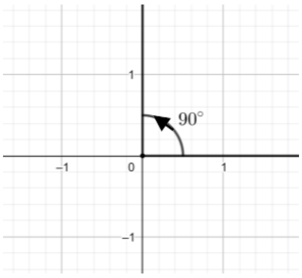
Cabe aclarar que la hipotenusa del triángulo rectángulo (radio de la circunferencia) se considera siempre POSITIVA, sin importar cuál sea el cuadrante.

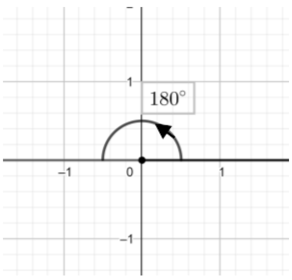
Siendo $P = (x, y) \neq (0,0)$ un punto <u>cualquiera</u> en el lado terminal de un ángulo α entonces, se definen:

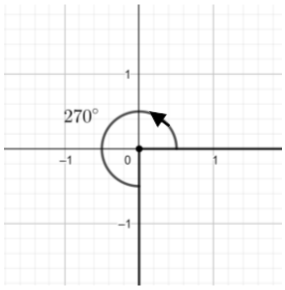
$$\boldsymbol{sen\ \alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad , \quad \boldsymbol{cos\ \alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}} \quad , \quad \boldsymbol{\tan\alpha = \frac{y}{x}} \quad \boldsymbol{si\ x \neq 0}$$

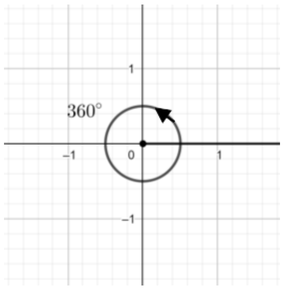
El valor del seno, coseno y tangente de algunos ángulos especiales puede calcularse de manera exacta y sencilla. Así, por ejemplo, de acuerdo a las definiciones es:

$sen 0° = 0$; $cos 0° = 1$; $\tan 0° = 0$
$sen 90° = 1$; $cos 90° = 0$
$sen\ 180° = 0$; $\cos 0° = -1$; $\tan 0° = 0$
$sen\ 270° = -1$; $\cos 270° = 0$
$sen\ 360° = 0$; $cos 360° = 1$; $\tan 360° = 0$









Además, de las definiciones se deduce que:

- Para todo α es: $-1 \leq sen\alpha \leq 1$ y $-1 \leq cos\ \alpha \leq 1$

- $sen\ \alpha > 0$ si $\boldsymbol{\alpha}$ es del primero o segundo cuadrante
  $sen\ \alpha < 0$ si $\boldsymbol{\alpha}$ es del tercer o cuarto cuadrante
  $cos\ \alpha > 0$ si $\boldsymbol{\alpha}$ es del primero o cuarto cuadrante
  $cos\ \alpha < 0$ si $\boldsymbol{\alpha}$ es del segundo o tercer cuadrante
  $tan\ \alpha > 0$ si $\boldsymbol{\alpha}$ es del primero o tercer cuadrante
  $tan\ \alpha < 0$ si $\boldsymbol{\alpha}$ es del segundo o cuarto cuadrante

- Si α y β tienen el mismo lado terminal entonces

$$sen\alpha = sen\beta \quad ; \quad cos\alpha = cos\beta \quad ; \quad tan\alpha = tan\beta$$

O dicho de otra manera:

CUADRO DE SIGNOS

FUNCIÓN TRIGON	CUADRANTE I	CUADRANTE II	CUADRANTE III	CUADRANTE IV
SENO/COSECANTE	+	+	-	-
COSENO/SECANTE	+	-	-	+
TANGENTE/COTANG	+	-	+	-

- Observando lo que representa el seno y coseno de un ángulo en la circunferencia trigonométrica, y teniendo en cuenta el teorema de Pitágoras, es fácil comprobar que:

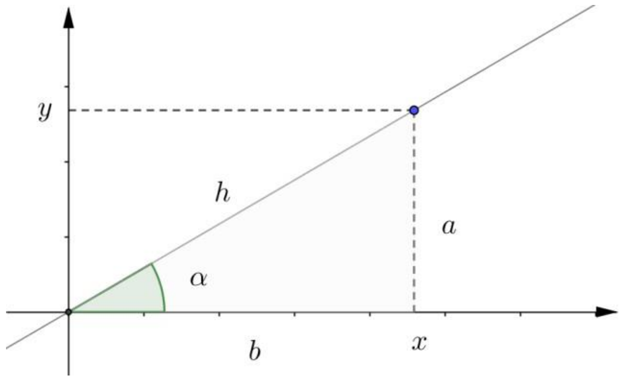
Para todo α es: $\boldsymbol{sen^2\alpha + cos^2\,\alpha = 1}$

Esta igualdad se conoce como **"Relación Pitagórica"**

Aclaración

En la figura supongamos que $0° < \alpha < 90°$, $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son positivos y se corresponden con

$\boldsymbol{b}$ y $\boldsymbol{a}$ respectivamente; además $h = \sqrt{x^2 + y^2}$



Luego:

$$\boldsymbol{sen\,\alpha = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{a}{h}\ ,\quad cos\,\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{b}{h}\ ,\quad \tan\alpha = \frac{y}{x} = \frac{a}{b}\quad si\,x\ \neq 0}$$

Estas son las razones trigonométricas para triángulos rectángulos. Las nuevas definiciones contienen como caso particular a las anteriores si superponemos adecuadamente el triángulo rectángulo en el primer cuadrante. En los otros cuadrantes no hay triángulos rectángulos para el ángulo α (alfa); esto no quita que utilicemos algunos triángulos rectángulos auxiliares que nos permitan comparar valores del seno, coseno y tangente de un ángulo cualquiera.

Otras razones trigonométricas de un ángulo son la **secante**, la **cosecante** y la **cotangente** que se definen de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{secante(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.adyacente}; cosecante(\alpha) = \frac{hipotenusa}{cat.opuesto}; cotangente(\alpha) = \frac{cat\ adyac}{cat\ op.}}$$

$$\boldsymbol{\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{h}{b} \qquad \mathrm{cosec}(\alpha) = \frac{1}{\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{h}{a} \qquad \mathrm{cotang}(\alpha) = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{b}{a}}$$

Se dice que:

- la $\boldsymbol{\sec\alpha}$ es la razón trigonométrica inversa del $\boldsymbol{\cos\alpha}$
- la $\boldsymbol{\mathrm{cosec}\,\alpha}$ es la razón trigonométrica inversa del $\boldsymbol{sen\ \alpha}$
- la $\boldsymbol{\mathrm{cotang}\,\alpha}$ es la razón trigonométrica inversa de la $\boldsymbol{\tan\alpha}$

Actividad 1

a) Calcula usando las definiciones $\mathrm{sen}\,\alpha$, $\cos\alpha$ y $\tan\alpha$, sabiendo que el punto $\left(-\sqrt{3}, 1\right)$ está en el lado terminal del ángulo α.

b) Halla los valores de todas las razones trigonométricas de un ángulo cuyo lado terminal pasa por el punto de coordenadas (2,5). ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo? Grafica.

c) El punto P de coordenadas (2,-3) está en el lado terminal del ángulo α. ¿A qué cuadrante pertenece el ángulo α? Grafica y calcula a partir de las definiciones todas las funciones trigonométricas.

Actividad 2

Completa el siguiente cuadro con valores exactos.

	0°	**30°**	**45°**	**60°**	**90°**
seno					

coseno					
tangente					

Dicho cuadro recibe el nombre de ***cuadro de ángulos notables***

Actividad 3

Grafica, ubicándolo en un sistema de coordenadas, un ángulo que mida 405° ¿Cuáles son los valores exactos del seno, coseno y tangente de ese ángulo?

A partir de la circunferencia trigonométrica podemos realizar diversos cálculos

Sabiendo que seno A = 3/5 y que A pertenece al II C halla el valor del resto de las funciones trigonométricas.

Primero recordemos que **sen^2 A + cos^2 A = 1** (identidad pitagórica)

Reemplazando sen A por 3/5 tenemos $(3/5)^2 + \cos^2 A = 1$

$$9/25 + \cos^2 A = 1$$

$$\cos^2 A = 16/25$$

cos A = $\sqrt{\frac{16}{25}} = \pm\frac{4}{5}$ pero, ¿cuál es el valor? El positivo o el negativo?

Como decimos que A es un ángulo que pertenece al II cuadrante, y el coseno en el segundo cuadrante es NEGATIVO. Entonces

$$\cos A = -\frac{4}{5}$$

Recordemos que tangente A= $\frac{seno\ A}{coseno\ A}$

Por lo tanto tangente A = $\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

Como cosecante A = $\frac{1}{seno\ A}$, entonces cosecante A = $\frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{5}{3}$

Como secante A = $\frac{1}{coseno\ A}$, entonces secante A = $\frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

Finalmente cotangente A = $\frac{1}{tangente\ A}$= $\frac{1}{-\frac{3}{4}}$ = - $\frac{4}{3}$

Actividad 4

Usando la relación Pitagórica, halla todas las razones trigonométricas en forma exacta:

a) sabiendo que es un ángulo del tercer cuadrante y que $\cos\alpha = -\frac{1}{5}$

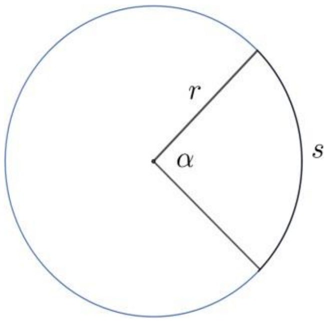
b) sabiendo que es un ángulo del cuarto cuadrante y que $\operatorname{sen}\alpha = -\frac{3}{10}$

c) Sabiendo que $tag\alpha = 1$ y $\alpha \in III$ cuadrante.

d) Sabiendo que $\sec\alpha = -\frac{25}{7}$ y $\alpha \in II$ cuadrante.

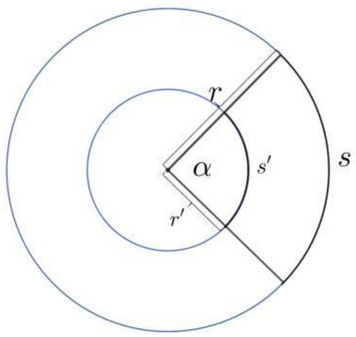
En las actividades anteriores hemos expresado las medidas de los ángulos en el ***sistema sexagesimal***, en el que la unidad de medida es el grado sexagesimal; estudiaremos ahora otro sistema de medición de ángulos denominado ***sistema radial*** **(o *circular*).**

Definición: Dado un ángulo central en una circunferencia de radio $\boldsymbol{r}$**,** su medida en el sistema radial es el cociente entre la longitud del arco de circunferencia abarcado por el ángulo y $\boldsymbol{r}$**.**



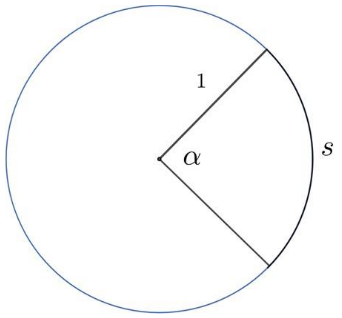
$$En\ el\ sistema\ radial: \quad \alpha = \frac{s}{r}$$

Nótese que: si se considera una circunferencia con otro radio el resultado del cociente entre la longitud delarco y el radio no cambia.



$$\frac{s}{r} = \frac{s'}{r'}$$

En particular, ubicado un ángulo como ángulo central en una circunferencia de radio 1, su medida en elsistema radial es igual a la longitud del arco que abarca en esa circunferencia.

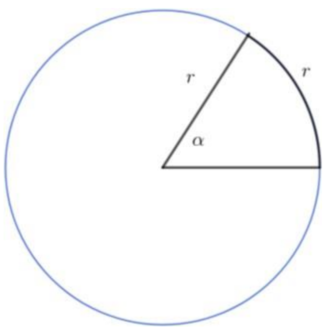


$En\ el\ sistema\ radial{:}\ \alpha = s$

De acuerdo a lo dicho, la medida en el sistema radial de un ángulo de un giro es igual a la longitud de la circunferencia de radio 1 (o sea, 2π). En el sistema sexagesimal un ángulo de un giro mide 360°. Se tiene entonces la siguiente equivalencia entre los dos sistemas de medida:

$Sistema\ sexagesimal$	$Sistema\ radial$
360°	2π

Si la medida de un ángulo en el sistema radial es 1, significa que, como ángulo central en una circunferenciade radio r abarca un arco de circunferencia de longitud igual a ese radio.



$En\ el\ sistema\ radial{:}\ \alpha$ = 1

A partir de la equivalencia anterior podemos obtenerla medida de ese ángulo en el sistema sexagesimal:

$2\pi \rightarrow 360°$

$1 \longrightarrow \frac{360º}{2\pi} = \frac{180º}{\pi} \cong 57º$

Actividad 5

Determina la medida en el sistema radial de un ángulo que, ubicado como ángulo central en una circunferencia de radio 5 abarca un arco de circunferencia de longitud 15. ¿Cuál es la longitud del arco que determina en una circunferencia de radio 2 ese mismo ángulo?

Actividad 6

Completa la siguiente tabla escribiendo la medida exacta correspondiente en el otro sistema:

Sistema sexagesimal	0°	30°		60°	90°	120°	150°		225°		315°	360°	
Sistema radial			$\frac{\pi}{4}$					π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	6π

Actividad 7

a) Cuál es el ángulo del tercer cuadrante cuyo seno vale $-\frac{\sqrt{3}}{2}$?

b) ¿Cuál es el ángulo del segundo cuadrante cuyo seno vale $\frac{\sqrt{2}}{2}$?

c) ¿Cuál es el ángulo del tercer cuadrante cuyo coseno vale $-\frac{1}{2}$?