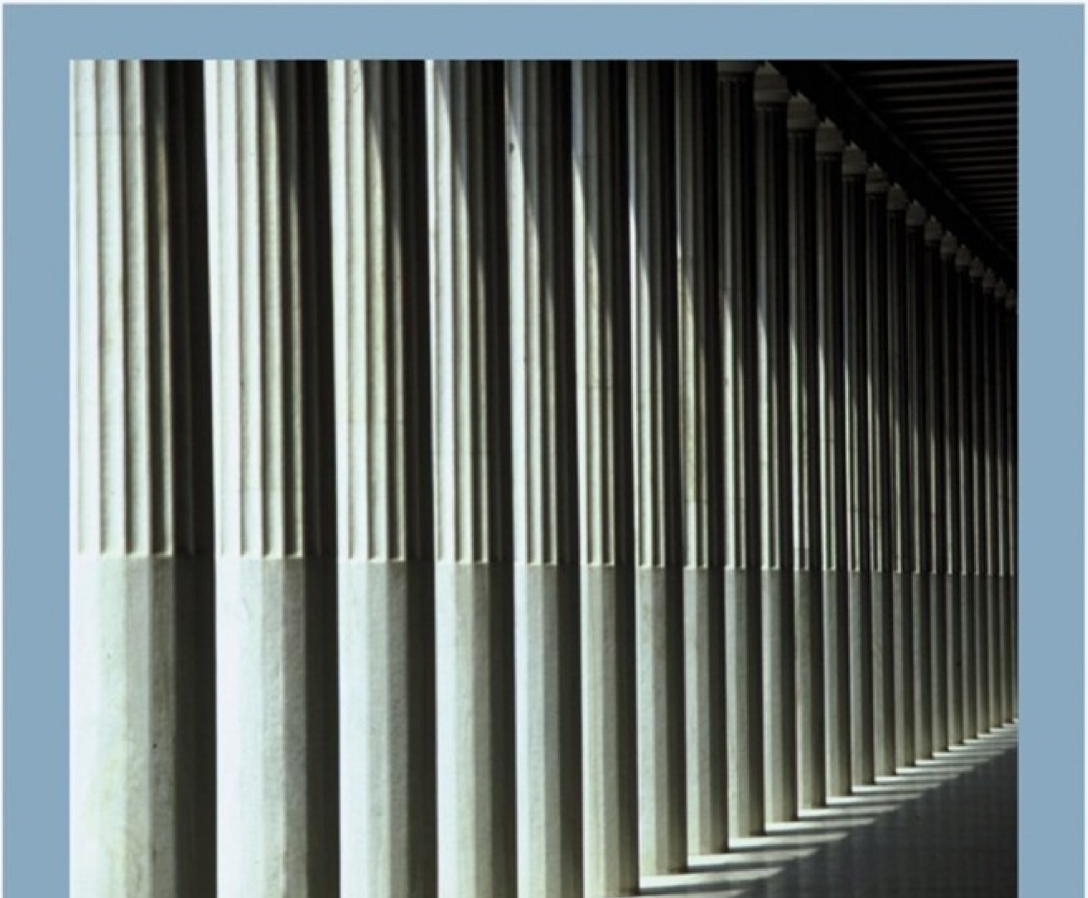
El teorema de Gödel

Ernst Nagel
James R. Newman



El «teorema de Gödel» es una de las más sensacionales conquistas científicas del siglo XX. Su autor —que sólo contaba veinticinco años cuando lo publicó, en 1931— revolucionó con él los cimientos de la lógica y de la matemática como Heisenberg los de la física con sus ecuaciones de incertidumbre.

Muchos de los más interesantes desarrollos de la informática se cuentan entre los frutos cosechados por este legendario teorema, del que, por otra parte, se ha valido el físico Roger Penrose para cuestionar los supuestos de la inteligencia artificial.

El teorema de Gödel, ha escrito Hofstadter, es como una perla en una ostra. Su secreto no se percibe escrutando la perla, sino el aparato demostrativo oculto en la ostra que la aloja. Este libro de Nagel y Newman, dedicado por sus autores a Bertrand Russell, es el único existente que permite a un lector sin base matemática obtener un conocimiento del teorema, de su prueba y de su contexto histórico, suficiente para poder formarse juicio propio sobre las consecuencias que comporta para nuestro concepto de la mente y de la cultura humana.

Ernest Nagel & James R. Newman

El teorema de Gödel

ePub r1.6
Titivillus 10.08.2019

Título original: *Gödel’s Proof*
Ernest Nagel & James R. Newman, 1958
Traducción: Adolfo Martín

Editor digital: Titivillus
ePub base r2.1

a Bertrand Russell

I

Introducción

En 1931 apareció en una publicación científica alemana un trabajo, relativamente corto, que llevaba el impresionante título de «Sobre las proposiciones formalmente indecidibles de los *Principia Mathematica* y sistemas conexos». Su autor era Kurt Gödel, a la sazón un joven matemático de veinticinco años de la Universidad de Viena y, desde 1938, miembro permanente del Instituto de Estudios Avanzados de Princeton. Dicho trabajo constituye una piedra miliaria en la historia de la lógica y las matemáticas. Cuando la Universidad de Harvard le invistió como doctor *honoris causa* en 1952, la mención describió la obra como uno de los más importantes avances que en el campo de la lógica se han realizado en los tiempos modernos.

En la época de su publicación, sin embargo, ni el título del trabajo de Gödel ni su contenido eran inteligibles para la mayoría de los matemáticos. Los *Principia Mathematica* mencionados en el título son el monumental tratado en tres volúmenes debido a Alfred North Whitehead y Bertrand Russell sobre la lógica matemática y los fundamentos de las matemáticas, y el conocimiento de esa obra no es un requisito indispensable para la realización de una fructuosa investigación en la mayoría de las ramas de la ciencia matemática. Además, el trabajo de Gödel versa sobre una serie de cuestiones que nunca han atraído mas que a un grupo relativamente reducido de estudiosos. El razonamiento del teorema era tan nuevo en el momento de su publicación, que solo quienes se hallaban pertrechados con un profundo conocimiento de la literatura técnica sumamente especializada podían seguir y comprender plenamente la línea argumentativa del mismo. Actualmente, sin embargo, las conclusiones establecidas por Gödel son por todos reconocidas como verdaderamente revolucionarias por su honda significación filosófica. La finalidad del presente ensayo es hacer accesibles a los no especialistas el núcleo esencial de los hallazgos de Gödel y las líneas generales de su teorema.

El famoso trabajo de Gödel se centró sobre un importante problema radicado en el fundamento mismo de las matemáticas. Antes de entrar de lleno en su exposición, será conveniente dar una breve explicación del terreno en que se desenvuelve dicho problema. Todo el que haya estudiado geometría elemental recordará, sin duda, que esta es enseñada como una disciplina *deductiva*. No se la presenta como una ciencia experimental, cuyos teoremas deban ser aceptados por hallarse de acuerdo con lo que enseña la observación. Esta idea de que una proposición puede ser establecida como conclusión de una *prueba lógica* explícita se remonta a los antiguos griegos, los cuales descubrieron lo que se conoce con el nombre de «método axiomático» y lo utilizaron para obtener un desarrollo sistemático de la geometría. El método axiomático consiste en aceptar *sin* prueba ciertas proposiciones como axiomas o postulados (por ejemplo, el axioma de que entre dos puntos sólo puede trazarse una línea recta), y en derivar luego de esos axiomas todas las demás proposiciones del sistema, en calidad ya de teoremas. Los axiomas constituyen los «cimientos» del sistema; los teoremas son la «superestructura», y se obtienen a partir de los axiomas sirviéndose, exclusivamente, de los principios de la lógica.

El desarrollo axiomático de la geometría produjo una poderosa impresión en los pensadores de todos los tiempos, ya que el relativamente pequeño número de axiomas soporta el peso de las infinitamente numerosas proposiciones que de ellos podían derivarse. Además, si puede demostrarse de alguna manera la verdad de los axiomas —y, en efecto, durante cerca de dos mil años la mayoría de los estudiosos han creído sin discusión que son absolutamente ciertos—, quedan automáticamente garantizadas tanto la verdad como la consistencia mutua de todos los teoremas. Por estas razones la forma axiomática de la geometría se presentó a muchas generaciones de destacados pensadores como el más excelente modelo de conocimiento científico. Era natural preguntar, por tanto, si era posible asentar sobre un sólido cimiento axiomático otras ramas de pensamiento además de la geometría. No obstante, aunque en la antigüedad se dio una formulación axiomática a ciertas partes de la física (por Arquímedes), hasta los tiempos modernos la geometría era la única rama de las matemáticas dotada de lo que la mayoría de los estudiosos consideraban una adecuada base axiomática.

Pero durante los dos últimos siglos el método axiomático ha ido adquiriendo fuerza y vigor crecientes. Nuevas y viejas ramas de las matemáticas, incluyendo la familiar aritmética de los números cardinales (o «enteros»), fueron provistas de lo que parecían ser unos adecuados conjuntos de axiomas. Nació así un estado de opinión en el que se admitía tácitamente que todos los sectores del pensamiento matemático podían ser dotados de unos conjuntos de axiomas susceptibles de desarrollar sistemáticamente la infinita totalidad de proposiciones verdaderas suscitadas en el campo sujeto a investigación.

El trabajo de Gödel demostró que esta suposición es insostenible. Puso frente a los matemáticos la asombrosa y melancólica conclusión de que el método axiomático posee ciertas limitaciones intrínsecas que excluyen la posibilidad de que ni siquiera la aritmética ordinaria de los números enteros pueda llegar a ser plenamente axiomatizada. Y aún más, demostró que es imposible establecer la consistencia lógica interna de una amplia clase de sistemas deductivos —la aritmética elemental, por ejemplo—, a menos que se adopten principios tan complejos de razonamiento que su consistencia interna quede tan sujeta a la duda como la de los propios sistemas. A la luz de estas conclusiones, resulta inalcanzable una completa sistematización final de muchas y muy importantes zonas de las matemáticas y no puede darse ninguna garantía absolutamente impecable de que muchas de las más significativas ramas del pensamiento matemático se hallen enteramente libres de toda contradicción interna.

Los descubrimientos de Gödel socavaron, así, prejuicios profundamente arraigados y demolieron las antiguas esperanzas que estaban siendo nuevamente alimentadas por la investigación en torno a los fundamentos de las matemáticas. Pero su estudio no era totalmente negativo. Introdujo en el examen de las cuestiones planteadas en torno al fundamento de las matemáticas una nueva técnica de análisis, comparable por su naturaleza y su fecundidad al método algebraico que René Descartes introdujo en la geometría. Esta técnica sugería y planteaba nuevos problemas para la investigación lógica y matemática. Provocó una nueva valoración, todavía en trance de desarrollo, de una extendida filosofía de la matemática y de la filosofía del conocimiento en general.

Sin una considerable formación matemática es demasiado difícil seguir los detalles de las demostraciones dadas por Gödel en su ya histórico trabajo. Pero la estructura básica de sus razonamientos y el aspecto esencial de sus conclusiones pueden ser hechos accesibles a los lectores que se hallen dotados de una limitada preparación lógica y matemática. Para lograr esta comprensión puede que le sea útil al lector una breve exposición de ciertos progresos relevantes realizados en la historia de las matemáticas y de la moderna lógica formal. Los cuatro capítulos siguientes de este ensayo se hallan consagrados a dicha exposición.

II

El problema de la consistencia

El siglo XIX presenció una prodigiosa expansión e intensificación de la investigación matemática. Fueron resueltos muchos problemas fundamentales que durante largo tiempo habían resistido a los esfuerzos de los pensadores anteriores: se crearon nuevos sectores de estudio matemático y se establecieron nuevos cimientos en diversas ramas de la disciplina o se reformaron por completo los antiguos con la ayuda de técnicas analíticas más precisas. Sirva de ejemplo lo siguiente. Los griegos habían propuesto tres problemas de geometría elemental: con regla y compás, dividir en tres partes iguales un ángulo cualquiera, construir un cubo de doble volumen que el volumen de un cubo dado y construir un cuadrado de área igual a la de un círculo dado. Durante más de dos mil años se hicieron infructuosos esfuerzos por resolver estos problemas. Y, finalmente, en el siglo XIX, se demostró que tales construcciones son lógicamente imposibles. Se obtuvo, además, un valioso resultado secundario de esos trabajos. Puesto que las soluciones dependen esencialmente de determinar la clase de raíces que satisfacen a ciertas ecuaciones, el interés suscitado por los famosos ejercicios planteados en la antigüedad estimula la realización de profundas investigaciones acerca de la naturaleza de los números y sobre la estructura del continuo numérico. Los números negativos, complejos e irracionales fueron definidos con rigurosa precisión; se construyó una base lógica para el sistema de números reales y se fundó una nueva rama de las matemáticas: la teoría de los números transfinitos.

Pero el progreso más importante por sus repercusiones sobre la subsiguiente evolución de la ciencia matemática fue, quizá, la solución de otro problema que los griegos habían planteado sin darle una respuesta. Uno de los axiomas que Euclides utilizó para sistematizar la geometría se refiere a las paralelas. El axioma que adoptó es lógicamente equivalente (aunque no idéntico) a la hipótesis de que por un punto exterior a una línea dada solamente puede trazarse una paralela a esa línea. Por varias razones, este axioma no pareció «evidente por sí mismo» a los antiguos. Trataron, por tanto, de deducirlo de otros axiomas euclidianos que consideraban claramente autoevidentes**[1]**. ¿Puede hallarse una demostración del axioma de las paralelas? Generaciones enteras de matemáticos forcejearon sin resultado con esta cuestión. Pero el reiterado fracaso en el intento de construir una prueba no significa que no pueda ser encontrada ninguna en absoluto, del mismo modo que el reiterado fracaso en el intento de hallar un remedio para el resfriado común no demuestra de forma indudable que la Humanidad haya de sufrir eternamente sus molestias. Fue solamente en el siglo XIX, principalmente por la obra de Gauss, Bolyai, Lobachevsky y Riemann, cuando se demostró la *imposibilidad* de deducir de los otros axiomas el axioma de las paralelas. Este resultado tuvo una importancia intelectual extraordinaria. En primer lugar, llamó clamorosamente la atención hacia el hecho de que puede demostrarse la *imposibilidad de demostrar* ciertas proposiciones dentro de un determinado sistema. Como veremos, el trabajo de Gödel es una demostración de la imposibilidad de demostrar ciertas proposiciones importantes de la aritmética. En segundo lugar, la resolución de la cuestión planteada por el axioma de las paralelas obligó a admitir que Euclides no había dicho la última palabra acerca de la geometría, ya que pueden construirse nuevos sistemas de geometría utilizando cierto número de axiomas distintos de los adoptados por Euclides e incompatibles con ellos. En particular, como es bien sabido, se obtienen resultados extraordinariamente interesantes y fructíferos cuando se sustituye el axioma de las paralelas de Euclides por la hipótesis de que, por un punto dado, puede trazarse más de una paralela a una línea determinada, o, alternativamente, por la hipótesis de que no puede trazarse ninguna paralela. La creencia tradicional de que los axiomas de la geometría (o, lo que es lo mismo, los axiomas de cualquier disciplina) pueden ser establecidos como tales por su aparente autoevidencia fue así destruida en su misma base. Además, fue haciéndose cada vez más claro que la tarea propia del matemático puro es *deducir teoremas a partir de hipótesis postuladas*, y que, en cuanto tal matemático, no le atañe la cuestión de decidir si los axiomas que acepta son realmente verdaderos. Y, finalmente, estas modificaciones de la geometría ortodoxa estimularon la revisión y perfección de las bases axiomáticas de otros muchos sistemas matemáticos. Se dio un fundamento axiomático a campos de investigación que hasta entonces habían sido cultivados de una forma más o menos intuitiva[2].

La conclusión dominante desprendida de estos estudios críticos de los fundamentos de las matemáticas es que la antigua concepción de las matemáticas como «ciencia de la cantidad» es equivocada, además de engañosa. Pues se hizo evidente que la matemática es, simplemente, la disciplina por excelencia que extrae las conclusiones lógicamente implicadas en cualquier conjunto dado de axiomas o postulados. Llegó, de hecho, a reconocerse que la validez de una deducción matemática no depende en absoluto de ningún significado especial que pueda estar asociado con los términos o expresiones contenidos en los postulados. Se admitió así que las matemáticas eran algo mucho más abstracto y formal de lo que tradicionalmente se había supuesto; más abstracto, porque las afirmaciones matemáticas pueden ser hechas en principio sobre cualquier objeto, sin estar esencialmente circunscritas a un determinado conjunto de objetos o de propiedades de objeto, y más formal, porque la validez de las demostraciones matemáticas se asienta en la estructura de las afirmaciones más que en la naturaleza especial de su contenido. Los postulados de cualquier rama de la matemática demostrativa nunca versan intrínsecamente sobre el espacio, la cantidad, manzanas, ángulos o presupuestos financieros; y ningún significado especial que pueda asociarse con los términos (o «predicados descriptivos») contenidos en los postulados desempeña papel esencial alguno en el proceso de deducir teoremas. Repetimos que la única cuestión a la que se enfrenta el matemático puro (en cuanto diferente del científico que hace uso de las matemáticas en la investigación de un determinado objeto de estudio) no es si los postulados de que parte o las conclusiones que de ellos deduce son verdaderos, sino si las conclusiones obtenidas son realmente las *consecuencias lógicas necesarias* de las hipótesis iniciales.

Consideremos un ejemplo. Entre los términos no definidos (o «primitivos») empleados por el destacado matemático alemán David Hilbert en su famosa axiomatización de la geometría (publicada en 1899) se hallan «punto», «línea», «estar situado en» y «entre». Podemos admitir que los significados habituales relacionados con estas expresiones desempeñan un papel en el proceso de descubrir y aprender teoremas. Puesto que los significados nos son familiares nos damos cuenta de que comprendemos sus diversas relaciones mutuas y ellos también motivan la formulación y selección de axiomas; además, sugieren y facilitan la formulación de las afirmaciones que esperamos demostrar como teoremas. Sin embargo, como paladinamente declara Hilbert, mientras estemos interesados en la fundamental labor matemática de explorar las relaciones estrictamente lógicas de dependencia entre afirmaciones debemos prescindir de las connotaciones familiares de los términos primitivos, y los únicos «significados» que se deben asociar con ellos son los que se hallan determinados por los axiomas en que están contenidos[3]. A esto es a lo que se refiere el famoso epigrama de Russell: *la matemática pura es la ciencia en la que no sabemos de qué estamos hablando ni si lo que estamos diciendo es verdadero*.

No es fácil, desde luego, adentrarse en un terreno de rigurosa abstracción, carente de toda clase de mojones señaladores. Pero ofrece compensaciones importantes en forma de una nueva libertad de movimientos y de renovadas perspectivas. La acentuada formalización de las matemáticas emancipó la mente de los hombres de las restricciones que la habitual interpretación de las expresiones establecía para la construcción de nuevos sistemas de postulados. Surgieron nuevas especies de álgebras y de geometrías que señalaron importantes desviaciones respecto de las matemáticas tradicionales. Al hacerse más generales los significados de ciertos términos se hizo más amplia su utilización y menos limitadas las deducciones que podían extraerse de ellos. La formalización condujo a una gran variedad de sistemas de considerable interés matemático y de un valor extraordinario. Preciso es admitir que algunos de estos sistemas no se prestaban a interpretaciones tan evidentemente intuitivas (esto es, conformes al sentido común) como las de la geometría euclídea o de la aritmética, pero este hecho no causó ninguna alarma. La intuición, en realidad, es una facultad elástica; nuestros hijos no encontrarán, probablemente, dificultad alguna en aceptar como intuitivamente evidentes las paradojas de la relatividad, del mismo modo que nosotros no retrocedemos ante ideas que eran consideradas completamente no intuitivas hace un par de generaciones. Además, como todos sabemos, la intuición no es una guía segura: no puede ser utilizada adecuadamente como criterio de verdad ni de fecundidad en las exploraciones científicas.

La creciente abstracción de las matemáticas planteó, empero, un problema más serio. Suscitó la cuestión de si un determinado conjunto de postulados erigidos como bases de un sistema es internamente consistente, de tal modo que no puedan deducirse teoremas mutuamente contradictorios a partir de esos postulados. El problema no parece apremiante cuando se considera un conjunto de axiomas que versan sobre una especie concreta y conocida de objetos, ya que entonces no solo es significativo preguntar, sino que puede ser posible asegurarse de ello, si los axiomas son verdaderos referidos a tales objetos. Como quiera que se daba generalmente por supuesto que los axiomas euclidianos eran afirmaciones verdaderas respecto al espacio (o a los objetos en el espacio), ningún matemático anterior al siglo XIX se detuvo siquiera a considerar la cuestión de si podría deducirse algún día de tales axiomas un par de teoremas contradictorios. El fundamento de esta confianza en la consistencia de la geometría euclidiana es el recto principio de que no pueden ser simultáneamente verdaderas afirmaciones lógicamente incompatibles; por consiguiente, si es verdadero un conjunto de afirmaciones (que es lo que se daba por supuesto respecto de los axiomas euclidianos), esas afirmaciones son mutuamente consistentes.

Las geometrías no euclidianas pertenecían a una categoría diferente. Sus axiomas fueron considerados inicialmente como siendo claramente falsos respecto del espacio y, por este motivo, dudosamente verdaderos respecto de cualquier otra cosa; por ello fue considerado notablemente arduo, a la par que decisivo, el problema de establecer la consistencia interna de los sistemas no euclidianos. En la geometría riemanniana, por ejemplo, el postulado de las paralelas de Euclides es sustituido por la hipótesis de que por un punto dado exterior a una línea no puede trazarse *ninguna* paralela a ella. Planteémonos ahora la cuestión de si es consistente el conjunto riemanniano de postulados. Aparentemente, los postulados no son verdaderos referidos al espacio de la experiencia ordinaria. ¿Cómo puede entonces mostrarse su consistencia? ¿Cómo puede demostrarse que no conducirán a teoremas contradictorios? Evidentemente, la cuestión no queda resuelta por el hecho de que los teoremas ya deducidos no se contradicen entre sí, toda vez que subsiste la posibilidad de que el próximo teorema que se deduzca introduzca la discordia en el sistema. Pero hasta que se resuelva esa cuestión no puede haber certeza de que la geometría riemanniana constituya una verdadera alternativa al sistema euclidiano, esto es, que sea igualmente válida matemáticamente. La posibilidad misma de la existencia de geometrías no euclidianas paso así a depender de la resolución de este problema.

Se ideó un método general para su resolución. La idea básica consiste en encontrar un «modelo» (o «interpretación») para los postulados abstractos de un sistema, de tal modo que cada postulado se convierta en una afirmación verdadera respecto del modelo. En el caso de la geometría euclidiana, como hemos visto, el modelo era el espacio ordinario. Se utilizó el método para encontrar otros modelos cuyos elementos pudiesen servir de puntos de apoyo para determinar la consistencia de postulados abstractos. El procedimiento viene a ser el siguiente. Designemos con la palabra «clase» un conjunto o colección de elementos distintos, cada uno de los cuales recibe la denominación de miembro de la clase. Así, la clase de números primos menores de 10 es el conjunto cuyos miembros son 2, 3, 5 y 7. Consideremos la siguiente serie de postulados concernientes a dos clases, *K* y *L*, cuya naturaleza concreta se deja indeterminada excepto en lo que resulta «implícitamente» definido por los postulados:

1. Dos miembros cualesquiera de *K* se hallan contenidos en un solo miembro de *L*.
2. Ningún miembro de *K* se halla contenido en más de dos miembros de *L*.
3. No todos los miembros de *K* se hallan contenidos en un único miembro de *L*.
4. Dos miembros cualesquiera de *L* contienen a un solo miembro de *K*.
5. Ningún miembro de *L* contiene a más de dos miembros de *K*.

De este pequeño conjunto podemos derivar, aplicando las reglas corrientes de deducción, cierto número de teoremas. Puede demostrarse, por ejemplo, que *K* contiene tres miembros solamente. Pero ¿se halla dotado este conjunto de consistencia, hasta el punto de que nunca puedan deducirse de él teoremas mutuamente contradictorios? Puede responderse prontamente a la cuestión con ayuda del modelo siguiente:

> Sea *K* la clase de puntos que componen los vértices de un triángulo, y *L* la clase de líneas que forman sus lados. Entendamos la frase «un miembro de *K* se halla contenido en un miembro de *L*» en el sentido de que un punto que es un vértice está situado en una línea que es un lado. Cada uno de los cinco postulados abstractos se convierte entonces en una afirmación verdadera. Por ejemplo, el primer postulado afirma que dos puntos cualesquiera que sean vértices del triángulo radican solamente en una misma línea que sea un lado (fig. 1). De esta forma queda demostrada la consistencia del conjunto de postulados.

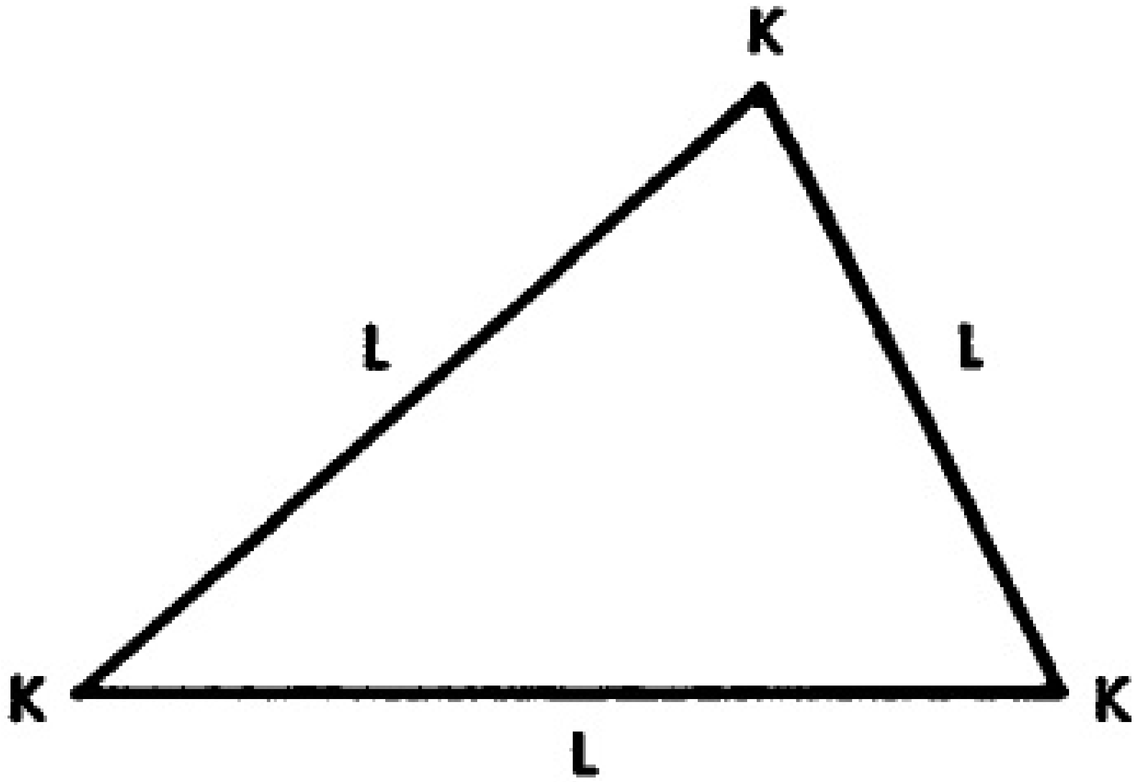


FIGURA 1. *El modelo para un grupo de postulados acerca de dos clases* K *y* L, *es un triángulo cuyos vértices son miembros de* K *y cuyos lados son miembros de* L. *El modelo geométrico muestra que los postulados son consistentes*.

La consistencia de la geometría plana riemanniana puede también demostrarse ostensiblemente mediante un modelo en que encarnen los postulados. Podemos interpretar la expresión «plano» de los axiomas riemannianos como (significativa de) una esfera euclidiana, la expresión «punto» como un punto de esta superficie, la expresión «línea recta» como el arco de un círculo máximo de esta superficie, es decir, de la esfera, y así sucesivamente. Cada postulado riemanniano se traduce entonces por un teorema de Euclides. Así, por ejemplo, según esta interpretación el postulado riemanniano de las paralelas presenta el siguiente enunciado: por un punto de la superficie de una esfera no puede trazarse ningún arco de círculo máximo paralelo a un arco dado de círculo máximo (fig. 2).

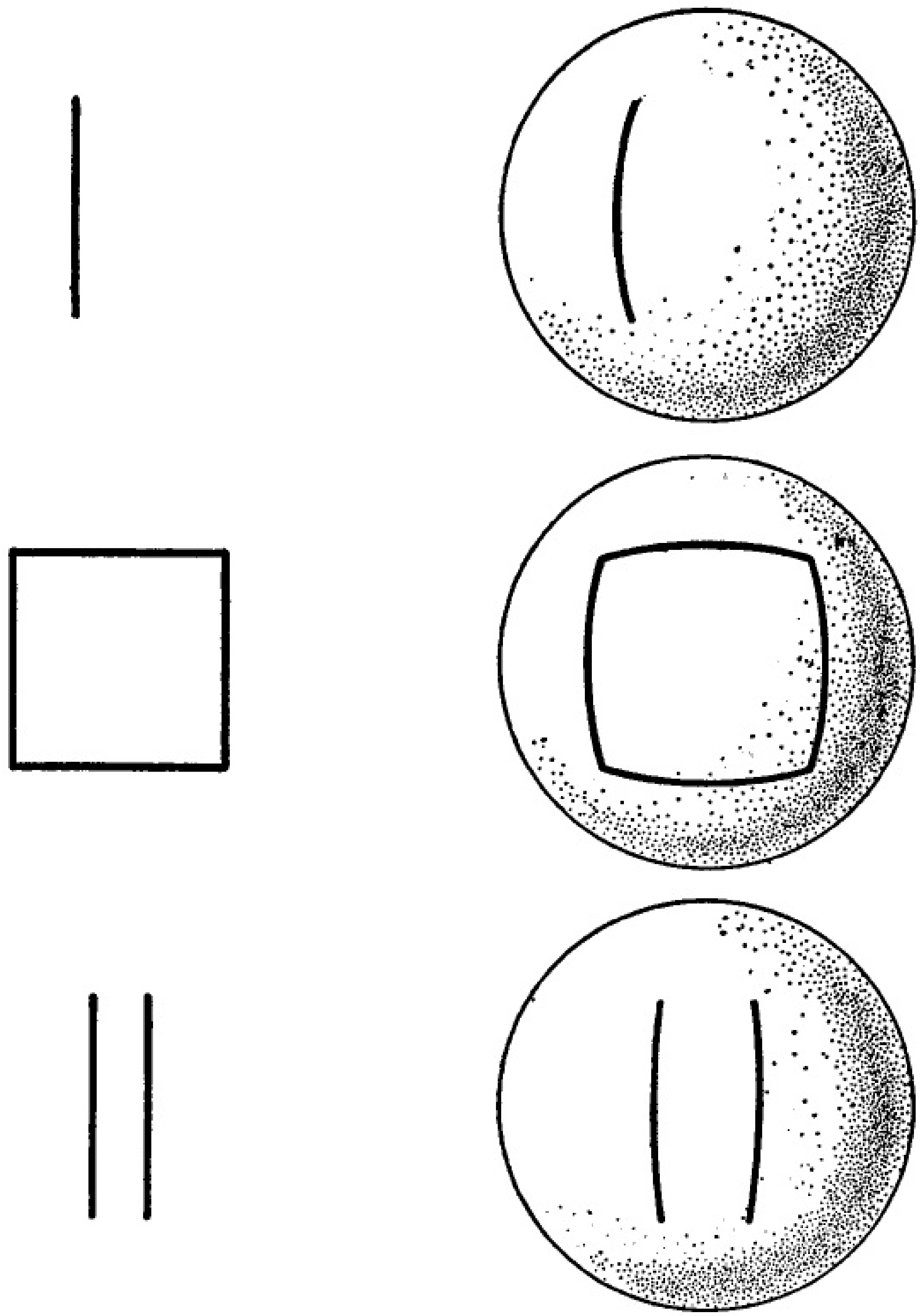


FIGURA 2. *La geometría no-euclidiana de Bernhard Riemann puede ser representada con un modelo euclidiano. El plano riemanniano se convierte en la superficie de una esfera euclidiana, los puntos en el plano se convierten en círculos máximos. Así, una porción del plano riemanniano limitada por segmentos de líneas rectas queda representada por una porción de una esfera limitada por partes de círculos máximos (centro). Dos segmentos lineales en el plano riemanniano son dos segmentos de un círculo máximo en la esfera euclidiana (abajo), y estos se intersectan si se prolongan, contradiciendo de esta manera el postulado.*

A primera vista puede parecer concluyente esta prueba de la consistencia de la geometría riemanniana. Pero si se examina más atentamente surge el desconcierto, pues se descubriría entonces que el problema no ha sido resuelto, sino simplemente desplazado a otro terreno. Se intenta demostrar la consistencia de la geometría riemanniana apelando a la consistencia de la geometría euclidiana. Lo que se desprende entonces es solamente que la geometría riemanniana es consistente si es consistente la geometría euclidiana. Resulta así que se invoca la autoridad de Euclides para demostrar la consistencia de un sistema que discute la validez exclusiva de Euclides. La insoslayable cuestión es: ¿son consistentes por sí mismos los axiomas del sistema euclidiano?

Una respuesta a esta cuestión, consagrada, como hemos visto, por una larga tradición, es que los axiomas euclidianos son verdaderos y, por tanto, consistentes. Esta respuesta no se consideraba ya aceptable. Volveremos luego sobre ella y explicaremos por qué no es satisfactoria. Otra contestación es que los axiomas están de acuerdo con nuestra actual, aunque limitada, experiencia del espacio y que se halla perfectamente justificado hacer una extrapolación de lo particular a lo universal. Pero, por muchas pruebas inductivas que puedan aducirse en apoyo de esta postura, nuestra mejor demostración sería lógicamente incompleta, pues aun cuando todos los hechos observados mantengan su concordancia con los axiomas, subsiste la posibilidad de que un hecho hasta ahora inobservado pueda contradecirlos y destruir así su pretensión de universalidad. Lo más que pueden mostrar las consideraciones inductivas es que los axiomas son plausibles, o probablemente verdaderos.

Hilbert hizo un ensayo en otra dirección. La idea básica del mismo se apoya en la geometría de coordenadas cartesianas. En su interpretación, los axiomas de Euclides se transformaban simplemente en verdades algebraicas. Así, por ejemplo, tomando los axiomas de la geometría plana, hace que la expresión «punto» signifique un par de números, la expresión «línea recta» la relación (lineal) entre números expresada por una ecuación de primer grado con dos incógnitas, la expresión «círculo» la relación entre números expresada por una ecuación de segundo grado de cierta forma, y así sucesivamente. La afirmación geométrica de que dos puntos distintos determinan solamente una línea recta se transforma entonces en la verdad algebraica de que dos pares distintos de números determinan solamente una relación lineal; el teorema geométrico de que una línea recta corta a un círculo en dos puntos como máximo, en el teorema algebraico de que un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas (una de las cuales es lineal y la otra de segundo grado de cierto tipo) determinan dos pares de números reales como máximo, y así sucesivamente. En resumen, la consistencia de los postulados euclidianos se demuestra haciendo ver que satisfacen a un modelo algebraico. Este método de demostrar la consistencia es válido y eficaz. Sin embargo, es también vulnerable a la objeción ya expuesta, pues también aquí se resuelve el problema planteado en un terreno desplazándolo a otro. La argumentación de Hilbert en favor de la consistencia de sus postulados geométricos demuestra que si el álgebra es consistente también lo es su sistema geométrico. La prueba se halla en una clara dependencia de la supuesta consistencia de otro sistema y no es una prueba «absoluta».

En los diversos intentos realizados para resolver el problema de la consistencia late siempre una permanente fuente de dificultad, la cual radica en el hecho de que los axiomas son interpretados por modelos compuestos de un número infinito de elementos. Esto hace imposible encerrar los modelos en un número finito de observaciones; de ahí que la verdad de los axiomas sea objeto de duda. En la argumentación inductiva en favor de la verdad de la geometría euclidiana un número finito de hechos observados acerca del espacio se hallan presumiblemente de acuerdo con los axiomas. Pero la conclusión que se trata de demostrar implica una extrapolación de una serie finita de datos a otra infinita. ¿Cómo podemos justificar este salto? Por otra parte, la dificultad queda minimizada, si no completamente eliminada, allá donde pueda idearse un modelo que contenga solamente un número limitado de elementos. El triángulo modelo utilizado para demostrar la consistencia de los cinco postulados abstractos referidos a las clases K y L es finito; y es relativamente sencillo determinar por medio de una inspección si todos los elementos del modelo satisfacen realmente los postulados y, por consiguiente, si son verdaderos (y, por tanto, consistentes). Por ejemplo: examinando sucesivamente todos los vértices del triángulo modelo puede verse si se cumple el enunciado de que dos cualesquiera de ellos radican únicamente en un solo lado, con lo que queda demostrado como verdadero el primer postulado. Puesto que todos los elementos del modelo, así como las relaciones relevantes existentes entre ellos, se prestan a una directa y exhaustiva inspección, y puesto que es prácticamente nula la probabilidad de que se produzcan errores al inspeccionarlos, la consistencia de los postulados no suscita en este caso duda alguna.

Desafortunadamente, la mayoría de los sistemas de postulados que constituyen los fundamentos de numerosas e importantes ramas de las matemáticas no pueden ser reflejados en modelos finitos. Considérese el postulado de la aritmética elemental que afirma que todo número entero tiene un inmediato sucesor, distinto de todo otro número anterior. Resulta evidente que el modelo necesario para comprobar el conjunto a que pertenece este postulado no puede ser finito, sino que debe contener una infinidad de elementos. De ello se desprende que la verdad (y, por tanto, la consistencia) del conjunto no puede demostrarse mediante una inspección exhaustiva de un número limitado de elementos. Hemos llegado, al parecer, a un callejón sin salida. Los modelos finitos bastan, en principio, para demostrar la consistencia de ciertos conjuntos de postulados, pero éstos tienen una muy escasa importancia matemática. Los modelos no finitos, necesarios para la interpretación de la mayoría de los sistemas de postulados matemáticamente importantes, solo pueden ser descritos en términos generales; y no podemos dar por sentado que las descripciones se hallen exentas de ocultas contradicciones.

Al llegar a este punto se siente uno tentado a sugerir que podemos estar seguros de la consistencia de las formulaciones en que se describen los modelos no finitos si las nociones básicas empleadas son transparentemente «claras» y «distintas». Pero la historia del pensamiento no ha solido admitir la doctrina de las ideas claras y distintas ni la teoría del conocimiento intuitivo implícita en la sugerencia. En ciertas zonas de la investigación matemática en que las hipótesis acerca de los conjuntos infinitos desempeñan un importante papel han surgido contradicciones radicales, pese a la intuitiva claridad de las nociones implicadas en las hipótesis y pese al carácter aparentemente consistente de las construcciones intelectuales realizadas. Contradicciones de estas (denominadas técnicamente «antinomias») han aparecido en la teoría de los números transfinitos, desarrollada por Georg Cantor en el siglo XIX; y la presencia de estas contradicciones ha hecho evidente que la aparente claridad de ni siquiera una noción tan elemental como la de *clase* (o *conjunto*) garantiza la consistencia de cualquier sistema concreto que se edifique sobre ella. Puesto que la teoría matemática de las clases, que versa sobre las propiedades y relaciones de los agregados o colecciones de elementos, es frecuentemente adoptada como fundamento para otras ramas de las matemáticas, y, en particular, para la aritmética elemental, es oportuno plantearse la cuestión de si no se hallarán afectadas las formulaciones de otras partes de las matemáticas de contradicciones similares a las encontradas en la teoría de las clases infinitas.

A este respecto, Bertrand Russell construyó una contradicción dentro del sistema mismo de la lógica elemental, que es precisamente análoga a la contradicción primeramente desarrollada en la teoría cantoriana de las clases infinitas. La antinomia de Russell puede ser enunciada del modo siguiente. Las clases parecen ser de dos tipos: las que no se contienen a sí mismas como miembros y las que sí se contienen. Una clase será llamada «normal» si, y solamente si, no se contiene a sí misma como miembro; en otro caso se la llamará «no normal». Un ejemplo de clase normal es la clase de los matemáticos, ya que, evidentemente, la clase misma no es un matemático y, por tanto, no es un miembro de sí misma. Un ejemplo de clase no normal es la clase de todas las cosas pensables, ya que la clase de todas las cosas pensables es, a su vez, pensable y, por consiguiente, un miembro de sí misma. Sea *«N»*, por definición, la clase de *todas* las clases normales. Preguntamos si *N* mismo es una clase normal. Si *N* es normal, es un miembro de sí misma (pues, por definición, *N* contiene a todas las clases normales); pero, en ese caso, *N* es no normal, porque, por definición, una clase que se contiene a sí misma es no normal. Por otra parte, si *N* es no normal, es un miembro de sí misma (por la definición de no normal); pero, en ese caso, *N* es normal, porque, por definición, los miembros de *N* son las clases normales. En resumen, *N* es normal si, y solamente si, *N* es no normal. De lo que se desprende que la afirmación «*N* es normal» es verdadera y falsa a la vez. Esta fatal contradicción se produce como consecuencia de utilizar sin espíritu crítico una noción aparentemente diáfana de clase. Posteriormente fueron encontrándose otras paradojas, construidas todas por medio de familiares y aparentemente convincentes modos de razonamiento. Los matemáticos acabaron comprendiendo que, en la tarea de desarrollar sistemas consistentes, la familiaridad y la claridad intuitiva son soportes harto débiles en que apoyarse.

Hemos visto la importancia del problema de la consistencia y hemos trabado conocimiento con el método clásico de resolverlo con ayuda de modelos. Se ha mostrado que, en la mayoría de los casos, el problema requiere el uso de un modelo no finito, cuya descripción puede contener ella misma inconsistencias. Debemos concluir que, si bien el método del modelo constituye una valiosa herramienta matemática, no suministra una respuesta definitiva al problema que trataba de resolver.

III

Pruebas absolutas de consistencia

Las limitaciones inherentes a la utilización de modelos para demostrar la consistencia y la creciente aprensión de que las formulaciones clásicas de muchos sistemas matemáticos pudiesen albergar contradicciones internas condujeron a nuevas formas de abordar el problema. Hilbert propuso una alternativa a las pruebas relativas de consistencia. Trató de construir pruebas «absolutas» con las que pudiera demostrarse la consistencia de los sistemas sin necesidad de dar por supuesta la consistencia de algún otro sistema. Explicaremos brevemente este método con el fin de que pueda comprenderse mejor la realización de Gödel.

El primer paso en la construcción de una prueba absoluta, tal como concibió Hilbert la cuestión, es la *completa formalización* de un sistema deductivo. Esto implica la extracción de todo significado de las expresiones existentes dentro del sistema: se las debe considerar, simplemente, como signos vacíos. La forma en que se deben manipular y combinar estos signos ha de ser plasmada en un conjunto de reglas enunciadas con toda precisión. La finalidad de este procedimiento estriba en construir un sistema de signos (llamado un «cálculo») que no oculte nada y que solamente contenga lo que expresamente se haya puesto en él. Los postulados y los teoremas de un sistema completamente formalizado son «hileras» (o sucesiones de longitud finita) de signos carentes de significado construidas conforme a las reglas establecidas para combinar los signos elementales del sistema hasta formar conjuntos más amplios. Además, cuando un sistema ha sido completamente formalizado, la derivación de teoremas a partir de los postulados se limita, simplemente, a la transformación (siguiendo las reglas) de un conjunto de estas «hileras» en otro conjunto de «hileras». De esta manera se elimina el peligro de utilizar cualesquiera reglas no declaradas de razonamiento. La formalización es difícil y exige un buen número de tretas, pero sirve a una valiosa finalidad. Revela con desnuda claridad la estructura y la función, del mismo modo que el nítido modelo de una máquina. Cuando ha sido formalizado un sistema, quedan a la vista las relaciones lógicas existentes entre las proposiciones matemáticas; pueden verse los módulos estructurales de las diversas «hileras» de signos «carentes de significado», cómo permanecen unidas, cómo se combinan, cómo se alojan una en otra, etcétera.

Una página entera cubierta con los signos «carentes de significado» de este tipo de matemáticas formalizadas no *afirma* nada; es, simplemente, el diseño abstracto de un mosaico que posee una determinada estructura. Sin embargo, es perfectamente posible describir las configuraciones de un sistema así y formular declaraciones acerca de las configuraciones y de sus diversas relaciones mutuas. Puede uno decir que una «hilera» es bonita, o que se parece a otra «hilera», o que una «hilera» parece estar hecha de otras tres distintas, etcétera. Estas declaraciones poseen, evidentemente, significado y pueden suministrar información importante acerca del sistema formal. Es preciso observar, no obstante, que tales declaraciones significativas acerca de un sistema matemático carente de significado (o formalizado) no pertenecen plenamente a dicho sistema. Pertenecen a lo que Hilbert denominó «metamatemáticas», al lenguaje que se formula *acerca* de las matemáticas. Las declaraciones metamatemáticas son declaraciones acerca de los signos existentes dentro de un sistema matemático formalizado (es decir, un cálculo), acerca de las especies y disposición de tales signos cuando se combinan para formar hileras más largas de signos llamadas «fórmulas», o acerca de las relaciones entre fórmulas que pueden obtenerse como consecuencia de las reglas de manipulación establecidas para ellas.

Unos cuantos ejemplos ayudarán a comprender la distinción de Hilbert entre matemáticas (es decir, un sistema de signos carentes de significado) y metamatemáticas (declaraciones significativas acerca de las matemáticas, los signos introducidos en el cálculo, su ordenación y sus relaciones). Consideremos la expresión:

$$2 + 3 = 5$$

Esta expresión pertenece a las matemáticas (aritmética) y está formada exclusivamente de signos aritméticos elementales. Por otra parte, la *proposición*

‘2 + 3 = 5’ es una fórmula aritmética

afirma algo acerca de la expresión indicada. La proposición no expresa un hecho aritmético ni pertenece al lenguaje formal de la aritmética; pertenece a la metamatemática porque caracteriza como fórmula a una determinada hilera de signos aritméticos. Pertenece también a la metamatemática la siguiente proposición:

> Si se usa el signo ‘=’ en una fórmula aritmética, el signo debe hallarse flanqueado a derecha e izquierda por expresiones numéricas.

Esta proposición establece una condición necesaria para utilizar un determinado signo aritmético en fórmulas aritméticas: la estructura que debe poseer una fórmula aritmética si ha de incluir dicho signo.

Consideremos ahora las tres fórmulas siguientes:

$$x = x$$
$$0 = 0$$
$$0 \neq 0$$

Cada una de estas fórmulas pertenece a las matemáticas (aritmética), porque cada una de ellas está formada exclusivamente de signos aritméticos. Pero la afirmación

‘*x*’ es una variable

pertenece a las metamatemáticas, toda vez que caracteriza a un determinado signo aritmético como perteneciente a una clase específica de signos (esto es, a la clase de las variables). Igualmente pertenece a las metamatemáticas la siguiente afirmación:

> La fórmula ‘0 = 0’ puede derivarse de la fórmula ‘*x* = *x*’ sustituyendo por la cifra ‘0’ la variable ‘*x*’.

Aquí se especifica de qué modo puede obtenerse una fórmula aritmética a partir de otra fórmula, con lo que se describe la forma en que se encuentran relacionadas entre sí dos fórmulas. De modo semejante, la afirmación

‘0 ≠ 0’ no es un teorema

pertenece a las metamatemáticas, ya que dice que cierta fórmula no es derivable de los axiomas de la aritmética y afirma, por tanto, que no existe una determinada relación entre las dos fórmulas indicadas del sistema. Finalmente, la siguiente afirmación pertenece a las metamatemáticas:

La aritmética es consistente

(esto es, no es posible derivar de los axiomas de la aritmética dos fórmulas formalmente contradictorias, como, por ejemplo, las fórmulas ‘0 = 0’ y ‘0 ≠ 0’). Esto se halla referido a la aritmética, y afirma que pares de fórmulas de cierto tipo no se hallan en una específica relación con las fórmulas que constituyen los axiomas de la aritmética[4].

Puede que el lector encuentre intimidante la palabra «metamatemáticas» y un tanto confuso su concepto. No vamos a decir que la palabra sea bonita, pero la idea en sí no resultaría oscura para nadie si hacemos notar que se utiliza en relación a un caso concreto de una conocida distinción, la que hace referencia a la diferencia existente entre un objeto determinado que constituye materia de estudio y un raciocinio acerca de dicho objeto. La afirmación «entre los falaropos son los machos los que incuban los huevos» concierne al objeto investigado por los zoólogos y pertenece a la zoología; pero si decimos que esta afirmación acerca de los falaropos demuestra que la zoología es irracional, nuestra declaración no se refiere a los falaropos, sino a la afirmación enunciada y a la disciplina en que tiene lugar, y es ya metazoología. Si decimos que el *id* es más poderoso que el *ego*, nuestras palabras pertenecen al psicoanálisis ortodoxo; pero si criticamos esa declaración como absurda e indemostrable, nuestra crítica pertenece al metapsicoanálisis. Y lo mismo ocurre en el caso de la matemática y la metamatemática. Los sistemas formales que construyen los matemáticos pertenecen al grupo denominado «matemáticas»; la descripción, discusión y teorización realizadas en torno a los sistemas pertenecen al grupo que lleva el epígrafe de «metamatemáticas».

Nunca se recalcará bastante la importancia que para el objeto que nos ocupa tiene el que se llegue a apreciar la distinción entre matemáticas y metamatemáticas. El fracaso en este sentido ha dado lugar a numerosas paradojas y a una extraordinaria confusión. La comprensión de su significado ha hecho posible mostrar con toda claridad la estructura lógica del razonamiento matemático. El valor de la distinción radica en que da origen a una minuciosa codificación de los diversos signos que entran en la composición de un cálculo formal, libre de engañosas suposiciones y de irrelevantes asociaciones de ideas. Exige, además, disponer de definiciones exactas de las operaciones y de las reglas lógicas de la construcción y la deducción matemática, muchas de las cuales habían estado siendo aplicadas por los matemáticos sin que estos se hallaran plenamente conscientes de qué era lo que estaban utilizando.

Hilbert captó el núcleo de la cuestión y basó su intento de construir pruebas «absolutas» de consistencia en la distinción entre un cálculo formal y su descripción. Concretamente, trató de desarrollar un método que produjera demostraciones de consistencia tan ajenas a una auténtica duda lógica como el uso de modelos finitos para demostrar la consistencia de ciertos conjuntos de postulados, y ello mediante el análisis de un número finito de características estructurales de las expresiones contenidas en cálculos completamente formalizados. El análisis consiste en anotar los diversos tipos de signos que se dan en un cálculo, indicar cómo combinarlos en fórmulas, prescribir cómo pueden obtenerse nuevas fórmulas a partir de otras y determinar si fórmulas de una determinada clase pueden derivarse de otras mediante reglas operativas explícitamente enunciadas. Hilbert creía posible presentar cualquier cálculo matemático como una especie de esquema «geométrico» de fórmulas, en el que las fórmulas se relacionaran mutuamente en número finito de relaciones estructurales. Esperaba, por consiguiente, demostrar, examinando exhaustivamente estas propiedades estructurales de las expresiones encerradas en un sistema, que no pueden obtenerse fórmulas formalmente contradictorias a partir de los axiomas de cálculos dados. Requisito esencial del programa de Hilbert en su primitiva concepción era que las demostraciones de consistencia implicaran únicamente procedimientos que no hicieran referencia ni a un número infinito de propiedades estructurales de fórmulas ni a un número infinito de operaciones con fórmulas. Tales procedimientos son denominados «finitistas», y una prueba de consistencia que se halle en adecuación a dicho requisito recibe el nombre de «absoluta». Una prueba «absoluta» logra sus objetivos utilizando un mínimo de principios de deducción y no presupone la consistencia de ningún otro conjunto de axiomas. Una prueba absoluta de la consistencia de la aritmética, si pudiera construirse alguna, demostraría, pues, mediante un procedimiento metamatemático finitista, que dos fórmulas contradictorias, tales como ‘0 = 0’ y su negación formal ‘¬(0 = 0)’ —en la que el signo ‘¬’ significa «no»—, no pueden derivarse de los axiomas (o fórmulas iniciales) mediante reglas explícitamente enunciadas[5].

Puede resultar útil, por vía de ejemplo, comparar las metamatemáticas como teoría de la demostración con la teoría del ajedrez. El ajedrez se juega con 32 piezas de una forma determinada sobre un tablero cuadrado que contiene 64 subdivisiones cuadradas, en el que se pueden mover las piezas conforme a unas reglas establecidas. Evidentemente, el juego puede desarrollarse sin atribuir ninguna «interpretación» a las piezas ni a sus diversas posiciones sobre el tablero, si bien podría introducirse tal interpretación si así se deseara. Podemos estipular, por ejemplo, que un determinado peón representa a cierto regimiento de un ejército, que un escaque determinado figura ser una cierta región geográfica, etc. Pero semejantes estipulaciones (o interpretaciones) no son habituales, y ni las piezas, ni los escaques, ni las posiciones de las piezas sobre el tablero significan nada *ajeno* al juego. En este sentido, las piezas y su configuración sobre el tablero son «carentes de significado». El juego es, pues, análogo a un cálculo matemático formalizado. Las piezas y los cuadrados del tablero corresponden a los signos elementales del cálculo; las posiciones permitidas de las piezas sobre el tablero, a las fórmulas del cálculo; las posiciones iniciales de las piezas sobre el tablero, a los axiomas, o fórmulas iniciales, del cálculo; las subsiguientes posiciones de las piezas sobre el tablero, a las fórmulas derivadas de los axiomas (esto es, a los teoremas), y las reglas del juego, a las reglas de deducción (o derivación) establecidas para el cálculo. El paralelismo continúa. Aunque las respectivas situaciones de las piezas en el tablero, como las fórmulas del cálculo, sean «carentes de significado», las declaraciones acerca de estas situaciones, como las declaraciones metamatemáticas acerca de las fórmulas, se hallan plenamente dotadas de significado. Una declaración «metaajedrecística» puede afirmar que hay veinte movimientos posibles de apertura para las piezas blancas, o que, dada una determinada configuración de las piezas sobre el tablero, y correspondiéndoles mover a las blancas, estas dan mate a las negras en tres jugadas. Además, pueden establecerse teoremas «metaajedrecísticos» generales cuya demostración requiere solamente un número finito de configuraciones permisibles sobre el tablero. De este modo puede establecerse el teorema «metaajedrecístico» acerca del número de posibles movimientos de apertura de que disponen las blancas; y también el teorema metaajedrecístico de que si las blancas tienen solo dos caballos y el rey, y las negras solo su rey, a aquellas les es totalmente imposible dar mate a éstas. Éstos y otros teoremas «metaajedrecísticos» pueden, en otras palabras, ser demostrados mediante métodos finitistas de razonamiento, esto es, examinando sucesivamente cada una de las configuraciones que, en número finito, pueden darse bajo las condiciones previstas. De modo análogo, el propósito de la teoría de prueba de Hilbert era demostrar con esos métodos finitistas la imposibilidad de derivar ciertas fórmulas contradictorias en un cálculo matemático dado.

IV

La codificación sistemática de la lógica formal

Quedan dos puentes más por cruzar antes de llegar al teorema de Gödel propiamente dicho. Debemos indicar cómo y por qué surgieron a la luz los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell; y debemos presentar una breve ilustración de la formalización de un sistema deductivo —tomaremos un fragmento de los *Principia*— y explicar cómo puede demostrarse su absoluta consistencia.

Corrientemente, aun cuando las demostraciones matemáticas se hallen conformes con los niveles admitidos de rigor profesional, adolecen de una importante omisión. Incorporan principios (o reglas) de deducción no formulados explícitamente que, frecuentemente, pasan inadvertidos a los matemáticos. Tomemos el teorema de Euclides de que no existe ningún número que sea el número primo mayor de todos los posibles (un número es primo si no es divisible sin resto más que por sí mismo y por 1). La argumentación, desarrollada en la forma de una *reductio ad absurdum*, es la siguiente:

Supongamos, en contradicción con lo que el teorema trata de demostrar, que existe un número primo máximo. Lo llamamos ‘x’. Entonces:

1. x es el número primo máximo.
2. Fórmese el producto de todos los números primos menores o iguales que x y añádase 1 al producto. Esto da un nuevo número, y, donde

$$y = (2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot x) + 1$$

3. Si y es primo, entonces x no es el mayor número primo, ya que y es evidentemente mayor que x.
4. Si y es compuesto (es decir, no primo), entonces tampoco x es el mayor número primo. Porque si y es compuesto, tiene que haber un divisor primo z, y z tiene que ser distinto de cada uno de los números primos 2, 3, 5, 7,…, x, menores o igual a x; por consiguiente, z tiene que ser un número primo mayor que x.
5. Pero y, o es primo o es compuesto.
6. Por consiguiente, x no es el mayor número primo.
7. No existe ningún número primo que sea el mayor de todos.

Hemos manifestado solamente los eslabones principales de la demostración. Puede hacerse ver, no obstante, que para forjar la cadena completa se requiere un gran número de reglas de deducción tácitamente aceptadas, así como teoremas de la lógica. Algunas de ellas pertenecen a la parte más elemental de la lógica formal, otras a ramas más avanzadas; por ejemplo, se incorporan reglas y teoremas que pertenecen a la «teoría de la cuantificación». Ésta hace referencia a las relaciones entre proposiciones que contienen partículas «cuantificadoras» tales como «todos», «algunos» y sus sinónimos. Mostraremos un teorema elemental de la lógica y una regla de deducción, cada uno de los cuales es partícipe necesario pero silencioso en la demostración.

Obsérvese el punto número 5 de la argumentación. ¿De dónde procede? La respuesta es: del teorema lógico (o verdad necesaria), «o *p* o no *p*», en el que se denomina '*p*' a una variable proposicional. Pero ¿cómo obtenemos el punto número 5 de este teorema? La respuesta es: utilizando la regla de deducción conocida como «Regla de sustitución para variables proposicionales», según la cual una proposición puede derivarse de cualquiera otra que contenga variables de ese tipo, sustituyendo por cualquier proposición (en este caso, '*y* es primo') cada presentación de una variable distinta (en este caso, la variable '*p*'). El uso de estas reglas y de estos teoremas lógicos es frecuentemente, como hemos dicho, una acción casi por completo inconsciente. Y el análisis que los revela, aun en demostraciones tan relativamente sencillas como la de Euclides, se apoya en los progresos hechos en la teoría lógica durante los últimos cien años[6]. Como el señor Jourdain, de Molière, que hablaba en prosa sin saberlo, los matemáticos han estado razonando durante dos milenios por lo menos sin darse cuenta de todos los principios que subyacían bajo lo que estaban haciendo. Solo en tiempos recientes se ha hecho evidente la naturaleza de las herramientas de su oficio.

Durante casi dos mil años la codificación de Aristóteles de las formas válidas de deducción fue universalmente considerada como completa e incapaz de mejora esencial. En 1787, el filósofo alemán Emmanuel Kant pudo decir que desde Aristóteles la lógica formal «no ha sido capaz de avanzar un solo paso, y, según todas las apariencias, es un cuerpo de doctrina cerrado y completo». Lo cierto es que la lógica tradicional es gravemente incompleta e incluso deja de dar una explicación a muchos principios de deducción empleados en razonamientos matemáticos totalmente elementales[7]. Con la publicación en 1847 de *The Mathematical Analysis of Logic*, de George Boole, comenzó en los tiempos modernos un renacimiento de los estudios lógicos. El objetivo primordial de Boole y de sus sucesores inmediatos era desarrollar un álgebra de la lógica que suministrase una notación precisa para manejar tipos más generales y variados de deducción que los abarcados por los principios lógicos tradicionales. Supóngase que se observa que en una determinada escuela quienes obtienen mención honorífica en su examen de grado son precisamente los muchachos que destacan en matemáticas y las muchachas que no destacan en esta materia. ¿Cómo se forma la clase de destacados en matemáticas en relación a las otras clases de estudiantes? La respuesta no surge pronta si uno se sirve únicamente de la lógica tradicional. Pero con ayuda del álgebra de Boole puede demostrarse fácilmente que la clase de los destacados en matemáticas se compone exactamente de muchachos graduados con mención honorífica y de muchachas graduadas sin tal mención.

Todos los caballeros son educados.
Ningún banquero es educado.
Ningún caballero es banquero.

$$\frac{\begin{array}{c} c \subset e \\ b \subset \bar{e} \end{array}}{\mathrm{c} \subset \bar{b}}$$

$$\frac{\begin{array}{c} c\bar{e} = 0 \\ be = 0 \end{array}}{cb = 0}$$

La lógica simbólica fue inventada a mediados del siglo XIX por el matemático inglés George Boole. En este ejemplo se traduce un silogismo por su notación de dos maneras distintas. En el grupo superior de fórmulas el símbolo '$\subset$' significa 'está contenido en'. Así, '$c \subset e$' quiere decir que la clase de los caballeros está incluida en la clase de las personas educadas. En el grupo inferior de fórmulas dos letras juntas significan la clase de las cosas que poseen ambas características. Por ejemplo '*be*' significa la clase de individuos que son banqueros y educados; y la ecuación '$be = 0$' indica que esta clase no tiene ningún miembro. Una línea colocada sobre una letra significa 'no' ('$\bar{e}$', por ejemplo, significa ineducado).

Otra línea de investigación, estrechamente relacionada con los trabajos de los matemáticos del siglo XIX sobre los fundamentos del análisis, vino más tarde a asociarse al programa de Boole. Este nuevo desarrollo trato de mostrar la matemática pura como un capítulo de la lógica formal, y quedó encarnado en los *Principia Mathematica* de Whitehead y Russell en 1910. Los matemáticos del siglo XIX consiguieron «aritmetizar» el álgebra y lo que solía llamarse el «cálculo infinitesimal», demostrando que las diversas nociones empleadas en el análisis matemático son definibles en términos exclusivamente aritméticos (esto es, con números enteros y con operaciones aritméticas realizadas con ellos). Por ejemplo, en vez de aceptar el número imaginario $\sqrt{-1}$ como una «entidad» un tanto misteriosa fue definido como un par ordenado de números enteros (0,1) sobre el que se realizan ciertas operaciones de «adición» y «multiplicación». Análogamente, el número irracional $\sqrt{2}$ fue definido como una cierta clase de números racionales, la clase de números racionales cuyo cuadrado es menor de 2. Lo que Russell (y, antes que él, el matemático alemán Gottlob Frege) trataba de demostrar era que *todas las nociones aritméticas* pueden ser definidas en ideas estrictamente lógicas y que todos los axiomas de la aritmética pueden ser deducidos de un pequeño número de proposiciones básicas certificables como verdades estrictamente lógicas.

Así, por ejemplo, la noción de *clase* pertenece a la lógica general. Dos clases son definidas como «semejantes» si existe una correspondencia biunívoca entre sus miembros, pudiéndose explicar la noción de tal correspondencia acudiendo a otras ideas lógicas. De una clase que tiene un solo miembro se dice que es una «clase unidad» (la clase de satélites del planeta Tierra); y el número cardinal 1 puede ser definido como la clase de todas las clases semejantes a una clase unidad. Definiciones análogas pueden darse de los otros números cardinales, y las diversas operaciones aritméticas, tales como la adición y la multiplicación, pueden ser definidas en términos de la lógica formal. Una proposición aritmética, como ‘1 + 1 = 2’, puede entonces ser mostrada como la transcripción condensada de una proposición que contenga expresiones pertenecientes únicamente a la lógica general; y puede demostrarse que tales proposiciones estrictamente lógicas pueden ser deducidas de ciertos axiomas lógicos.

Principia Mathematica pareció así adelantar la solución final del problema de la consistencia de los sistemas matemáticos, y en particular de la aritmética, mediante el expediente de reducir el problema al de la consistencia de la lógica formal misma. Porque, si los axiomas de la aritmética son simples transcripciones de teoremas de la lógica, la cuestión de si dichos axiomas son consistentes es equivalente a la cuestión de si son consistentes los axiomas fundamentales de la lógica.

La tesis Frege-Russell de que las matemáticas son únicamente un capítulo de la lógica no ha obtenido, por diversas razones de detalle, aceptación universal por parte de los matemáticos. Por otra parte, como ya hemos hecho notar, las antinomias de la teoría cantoriana de los números transfinitos pueden resultar reproducidas dentro de la lógica misma, a no ser que se tomen especiales precauciones para impedir tal resultado. Pero ¿son adecuadas para excluir *todas* las formas de construcciones autocontradictorias las medidas adoptadas en *Principia Mathematica* para soslayar las antinomias? No puede asegurarse concluyentemente. Por eso la reducción de la aritmética a la lógica practicada por Frege y Russell no proporciona una respuesta final al problema de la consistencia; en realidad, el problema surge simplemente en una forma más general. Mas, prescindiendo de la validez de la tesis Frege-Russell, existen en *Principia* dos elementos que poseen un valor inestimable para el ulterior estudio de la cuestión de la consistencia. *Principia* suministra un sistema notablemente comprensivo de notación, con ayuda del cual se pueden codificar todas las proposiciones de la matemática pura (y en particular de la aritmética), al tiempo que revela de un modo explícito la mayoría de las reglas de deducción formal utilizadas en las demostraciones matemáticas (reglas que, finalmente, fueron completadas y dotadas de una mayor precisión). *Principia*, en suma, creó el instrumento esencial para investigar todo el sistema de la aritmética como un cálculo no interpretado, esto es, como un sistema de signos carentes de significado, cuyas fórmulas (o «hileras») se combinan y transforman de acuerdo con reglas operativas expresas.

V

Un ejemplo de prueba absoluta de consistencia

Debemos abordar ahora la segunda tarea mencionada al principio del capítulo anterior y familiarizarnos con un importante aunque fácilmente comprensible ejemplo de una prueba absoluta de consistencia. Una vez conocida la prueba, el lector se encontraría en condiciones de apreciar la significación del trabajo realizado por Gödel en 1931.

Pondremos de relieve cómo puede ser formalizada una pequeña porción de los *Principia*: la lógica elemental de las proposiciones. Esto supone la conversión del sistema fragmentario en un cálculo de signos no interpretados. Desarrollaremos entonces una prueba absoluta de consistencia.

La formalización se lleva a cabo en cuatro fases. Primero se prepara un catálogo completo de los signos que se han de usar en el cálculo. Son su vocabulario. En segundo lugar se establecen las «reglas de formación». Éstas declaran qué combinaciones de los signos del vocabulario pueden ser aceptadas como «fórmulas» (en realidad, como proposiciones). Las reglas pueden ser consideradas como constitutivas de la gramática del sistema. En tercer lugar se expresan las «reglas de transformación», que describen la estructura precisa de las fórmulas de las cuales pueden derivarse otras fórmulas de estructura determinada. Estas reglas son, en efecto, las reglas de deducción. Finalmente se seleccionan ciertas fórmulas como axiomas (o «fórmulas primitivas»). Éstas sirven de fundamento a todo el sistema. Emplearemos la expresión «teorema del sistema» para designar cualquier fórmula que pueda ser derivada de los axiomas aplicando sucesivamente las reglas de transformación. Por «prueba» (o «demostración») formal designaremos una serie finita de fórmulas, cada una de las cuales o es un axioma o puede ser derivada de otras fórmulas anteriores de la serie mediante las reglas de transformación[8].

Para la lógica de las proposiciones (frecuentemente llamada el cálculo sentencial), el vocabulario (o lista de «signos elementales») es extremadamente sencillo. Se compone de variables y de signos constantes. Las variables pueden ser sustituidas por sentencias y reciben por ello el nombre de «variables sentenciales». Son las letras

$$p, q, r, \ldots$$

Los signos constantes son o «enlaces sentenciales» o signos de puntuación. Los enlaces sentenciales son:

- ‘¬’ que quiere decir ‘no’ (y se llama la «tilde»).
- ‘∨’ que quiere decir ‘o’.

- '$\rightarrow$' que quiere decir 'si… entonces…'.
- '$\wedge$' que quiere decir 'y'.

Los signos de puntuación son los paréntesis de apertura y de cierre, '(' y ')', respectivamente.

Las reglas de formación están diseñadas de modo que las combinaciones de signos elementales, que normalmente tendrían forma de proposiciones, se llamen fórmulas. Igualmente, cada variable sentencial vale como una fórmula. Además, si la letra S representa una fórmula, su negación formal, es decir, $\neg(S)$, es también una fórmula. Análogamente, si S_1, S_2 son fórmulas, también lo son $(S_1 \wedge S_2)$, $(S_1 \rightarrow S_2)$ y $(S_1 \vee S_2)$. Cada una de las siguientes expresiones es una fórmula: 'p', '$\neg(p)$', '$(p \rightarrow q)$', '$((q \vee r) \rightarrow p)$'. Pero ni '$(p)(\neg q)$' ni '$((p) \rightarrow (q)) \wedge$' son una fórmula; no lo es la primera expresión porque si bien 'p' y '$\neg(p)$' son fórmulas, no existe ningún enlace sentencial entre ellas; y no lo es la segunda porque el enlace '$\wedge$' no está flanqueado a derecha e izquierda por una fórmula, como exigen las reglas[9].

Se adoptan dos reglas de transformación. Una de ellas, la *regla de sustitución* (para variables sentenciales), dice que de una fórmula que contenga variables sentenciales puede siempre derivarse otra fórmula sustituyendo uniformemente con fórmulas las variables. Queda entendido que cuando se sustituye una variable en una fórmula debe hacerse la misma sustitución en todos los lugares en que este presente dicha variable. Por ejemplo, suponiendo que ha quedado establecido ya que '$p \rightarrow p$', podemos sustituir la variable 'p' con la fórmula 'q' para obtener '$q \rightarrow q$'; o podemos sustituirla con la fórmula '$p \wedge q$' para obtener '$(p \wedge q) \rightarrow (p \wedge q)$'. O bien, si sustituimos 'p' por frases reales podemos obtener cualquiera de las siguientes expresiones a partir de '$p \rightarrow p$': 'las ranas son ruidosas → las ranas son ruidosas'; '(los murciélagos son ciegos y los murciélagos comen ratones) → (los murciélagos son ciegos y los murciélagos comen ratones)'[10]. La segunda regla de transformación es la *regla de separación* (o *modus ponens*). Esta regla dice que de dos fórmulas que tengan la forma S_1 y $S_1 \rightarrow S_2$ se puede derivar siempre la fórmula S_2. Por ejemplo, de las dos fórmulas '$p \vee (\neg p)$' y '$(p \vee (\neg p)) \rightarrow (p \rightarrow p)$' podemos derivar '$p \rightarrow p$'.

Finalmente, los axiomas del cálculo (esencialmente los de *Principia*) son las cuatro fórmulas siguientes:

$(p \vee p) \rightarrow p$ o, en español, si p o p entonces p	Si (Enrique VIII era un patán o Enrique VIII era un patán) entonces Enrique VIII era un patán
$p \rightarrow (p \vee q)$ esto es, si p entonces p o q	Si el psicoanálisis está de moda, entonces (o el psicoanálisis está de moda o los polvos para el dolor de cabeza son baratos).
$(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$ esto es, si o p o q entonces o q o p	Si (o Emmanuel Kant era puntual o Hollywood es pecaminoso), entonces (o Hollywood es pecaminoso o Emmanuel Kant era puntual)
$(p \rightarrow q) \rightarrow ((r \vee p) \rightarrow (r \vee q))$	Si (si los patos anadean entonces 5 es un número primo), entonces (si (o Churchill bebe coñac o los patos

esto es, si (si *p*, entonces *q*), entonces (si (o *r* o *p*) entonces (o *r* o *q*))	anadean) entonces (o Churchill bebe coñac o 5 es un número primo)).

En la columna de la izquierda hemos expresado los axiomas con su correspondiente traducción. En la columna de la derecha hemos dado un ejemplo para cada axioma. La tosquedad de las traducciones, especialmente en el caso del último axioma, ayudara tal vez al lector a comprender las ventajas de utilizar un simbolismo especial en la lógica formal. Es importante también observar que las disparatadas ilustraciones utilizadas como ejemplos de sustitución de los axiomas y el hecho de que los consiguientes no guarden relación con los antecedentes en manera alguna afectan a la validez de las conexiones lógicas establecidas en los ejemplos.

Cada uno de estos axiomas puede parecer «evidente» y trivial. Sin embargo, con ayuda de las reglas de transformación expresadas es posible derivar de ellos una clase infinitamente grande de teoremas que están lejos de ser evidentes o triviales. Por ejemplo, la fórmula

$$((p \to q) \to ((r \to s) \to t)) \to ((u \to ((r \to s) \to t)) \to ((p \to u) \to (s \to t)))$$

puede ser derivada como teorema. No nos interesa, empero, por el momento derivar teoremas de los axiomas. Nuestro propósito es demostrar que este conjunto de axiomas no es contradictorio, es decir, demostrar «absolutamente» que, utilizando las reglas de transformación, es *imposible* derivar de los axiomas una fórmula *S* juntamente con su negación formal ¬(*S*).

Ahora bien, ocurre que ‘$p \to (\neg(p) \to q)$’ (en palabras: ‘si *p*, entonces si no *p* entonces *q*’) es un teorema del cálculo. (Aceptaremos esto como un hecho sin exponer la derivación.) Supongamos ahora que pudiera deducirse de los axiomas alguna fórmula *S* juntamente con su contradictoria ¬(*S*). Sustituyendo la variable ‘*p*’ por *S* en el teorema (como lo permite la regla de sustitución) y aplicando por dos veces la regla de separación, sería deducible la fórmula ‘*q*’. Pero si la fórmula que se compone de la variable[11] ‘*q*’ es demostrable, se sigue inmediatamente que, sustituyendo ‘*q*’ por *una fórmula cualquiera, cualquier fórmula es deducible de los axiomas*. Resulta así claro que, si tanto una fórmula *S* como su contradictoria ¬(*S*) fuesen deducibles de los axiomas, sería también deducible cualquier fórmula. En resumen, si el cálculo no es consistente, toda fórmula es un teorema, lo que equivale a decir que de un conjunto contradictorio de axiomas puede ser derivada cualquier fórmula. Pero esto tiene una contrapartida: si no toda fórmula es un teorema (es decir, si existe por lo menos una fórmula que no sea derivable de los axiomas), entonces el cálculo es consistente. *Lo que hace falta, por consiguiente, es demostrar que existe por lo menos una fórmula que no puede ser derivada de los axiomas*.

La forma de hacerlo es emplear un razonamiento metamatemático sobre el sistema que tenemos delante. El procedimiento no carece de elegancia. Consiste en encontrar una característica o propiedad estructural de las fórmulas que satisfaga las tres condiciones siguientes:

1. La propiedad debe ser común a todos los axiomas. (Una propiedad de este tipo es la de no contener más de 25 signos elementales; esta propiedad, sin embargo, no satisface la condición siguiente.)
2. La propiedad debe ser «hereditaria», según las reglas de transformación, esto es, si todos los axiomas poseen la propiedad, cualquier fórmula adecuadamente derivada de ellos mediante las reglas de transformación debe poseerla también. Puesto que cualquier fórmula así derivada es por definición un teorema, esta condición estipula en esencia que todo teorema debe poseer esa propiedad.
3. La propiedad no debe pertenecer a toda fórmula que pueda construirse de acuerdo con las reglas de formación del sistema; esto es, debemos tratar de mostrar una fórmula por lo menos que no posea esa propiedad.

Si logramos éxito en esta triple tarea habremos conseguido una prueba absoluta de consistencia. El razonamiento viene a ser el siguiente: la propiedad hereditaria se transmite desde los axiomas a todos los teoremas; pero si puede encontrarse un conjunto de signos que sea adecuado a las exigencias de ser una fórmula del sistema y que, sin embargo, no posea esa determinada propiedad hereditaria, tal fórmula no puede ser un teorema. (Lo que es lo mismo, si un hijo dudoso [fórmula] carece de un rasgo invariablemente hereditario de los antepasados [axioma], no puede ser realmente su descendiente [teorema].) Pero si descubrimos una fórmula que no es un teorema, hemos demostrado la consistencia del sistema, ya que, como hemos hecho notar hace un momento, si el sistema *no* fuese consistente *todas* las fórmulas podrían ser derivadas de los axiomas (esto es, toda fórmula sería un teorema). En resumen, lo que se necesita es mostrar una sola fórmula que carezca de la propiedad hereditaria.

Identifiquemos una propiedad de la clase requerida. La que elegimos es la propiedad de ser una «tautología». En el lenguaje corriente, se dice que una expresión es tautológica si contiene una redundancia y manifiesta dos veces la misma cosa con diferentes palabras, como, por ejemplo, «Juan es el padre de Carlos, y Carlos es hijo de Juan». Pero en lógica se define la tautología como una proposición que no excluye ninguna posibilidad lógica, por ejemplo, «o está lloviendo o no está lloviendo». Otra forma de expresar esto mismo es decir que una tautología es «verdadera en todos los mundos posibles». Nadie dudaría que, independientemente del estado real del tiempo (esto es, prescindiendo de si la afirmación de que está lloviendo es verdadera o falsa), la proposición «o está lloviendo o no está lloviendo» es *necesariamente verdadera*.

Hacemos aplicación de esta idea para definir una tautología en nuestro sistema. Obsérvese primero que toda fórmula se halla construida de componentes elementales, ‘*p*’, ‘*q*’, ‘*r*’, etc. Una fórmula es una tautología si es invariablemente verdadera, independientemente de que sus componentes elementales sean verdaderos o falsos.

Así, en el primer axioma, ‘$(p \vee p) \rightarrow p$’, el único componente elemental es ‘p’; pero no importa en absoluto que se suponga que ‘p’ es verdadero o que se suponga que es falso; el primer axioma es verdadero en cualquiera de ambos casos. Puede darse una mayor evidencia a esto si sustituimos ‘p’ por la proposición ‘el monte Rainier tiene veinte mil pies de altura’; de este modo obtenemos como ejemplo del primer axioma la proposición ‘si el monte Rainier tiene veinte mil pies de altura o el monte Rainier tiene veinte mil pies de altura, entonces el monte Rainier tiene veinte mil pies de altura’. El lector no encontrara ninguna dificultad para admitir que esta declaración es verdadera, aun cuando ignore si lo es la proposición constitutiva ‘el monte Rainier tiene veinte mil pies de altura’. Evidentemente, pues, el primer axioma es una tautología, es decir, «verdadero en todos los mundos posibles». Puede demostrarse fácilmente que cada uno de los demás axiomas son también una tautología.

Después, es posible demostrar que la propiedad de ser una tautología es hereditaria por las reglas de transformación, aunque no nos detendremos a dar la demostración[12]. De aquí se desprende que toda fórmula correctamente derivada de los axiomas (esto es, todo teorema) debe ser una tautología.

Se ha demostrado ya que la propiedad de ser tautología satisface dos de las tres condiciones anteriormente mencionadas, con lo que estamos ya en situación de dar el tercer paso. Debemos buscar una fórmula que pertenezca al sistema (esto es, que se halle formada con los signos mencionados en el vocabulario, de conformidad con las reglas de formación) y que, no obstante, por no poseer la propiedad de ser una tautología, no pueda ser un teorema (es decir, que no pueda ser derivada de los axiomas). No se necesita buscar mucho; es fácil mostrar una fórmula de esta clase. Por ejemplo, ‘$p \vee q$’ se ajusta a los requisitos. ‘Quiere ser ansarón, pero no pasa de pato’ no pertenece a la familia; es una *fórmula*, pero *no es un teorema*. Evidentemente, no es una tautología. Cualquier ejemplo de sustitución (o interpretación) lo demuestra en seguida. Sustituyendo las variables de ‘$p \vee q$’ podemos obtener la proposición ‘Napoleón murió de cáncer o a Bismarck le gustaba el café’. Esto no es una verdad de la lógica, ya que sería falsa si fuesen falsas las dos cláusulas presentes en ella; y, aun cuando se tratase de una proposición verdadera, no lo es independientemente de la verdad o falsedad de sus proposiciones constitutivas.

Hemos alcanzado nuestro objetivo. Hemos encontrado una fórmula por lo menos que no es un teorema. Tal fórmula no podría existir si los axiomas fuesen contradictorios. Por consiguiente, no es posible derivar de los axiomas del cálculo sentencial tanto una fórmula como su negación. En resumidas cuentas, hemos mostrado una prueba absoluta de la consistencia del sistema[13].

Antes de abandonar el cálculo sentencial debemos mencionar una última cuestión. Puesto que todo teorema de este cálculo es una tautología, una verdad de la lógica, es natural preguntar si, inversamente, toda verdad lógica susceptible de ser expresada en el vocabulario del cálculo (es decir, toda tautología) es también un teorema (esto es, derivable de los axiomas). La respuesta es afirmativa, aunque su demostración es demasiado larga para presentarla aquí. La cuestión que aquí nos interesa, sin embargo, no depende del conocimiento de la demostración. La cuestión es que, a la luz de esta conclusión, los axiomas son suficientes para engendrar *todas* las fórmulas tautológicas, *todas* las verdades lógicas susceptibles de ser expresadas en el sistema. De tales axiomas se dice que son «completos».

Ahora bien, frecuentemente ofrece un interés extraordinario determinar si un sistema axiomatizado es completo. En efecto, un poderoso motivo para la axiomatización de diversas ramas de las matemáticas ha sido el deseo de establecer un conjunto de presunciones iniciales, a partir de las cuales puedan deducirse todas las declaraciones verdaderas de algún campo de investigación. Cuando Euclides axiomatizó la geometría elemental, seleccionó, aparentemente, sus axiomas de modo que fuese posible derivar de ellos todas las verdades geométricas; esto es, las que ya habían sido establecidas, así como cualesquiera otras que pudieran descubrirse en el futuro[14]. Hasta tiempos muy recientes se admitía como algo incontrovertiblemente cierto la posibilidad de reunir un conjunto completo de axiomas para cualquier rama de las matemáticas. Los matemáticos creían en particular que el conjunto propuesto en el pasado para la aritmética era realmente completo, o, en todo caso, podía completarse mediante el sencillo expediente de agregar un número finito de axiomas a la lista original. El descubrimiento de que esto no surtiría efecto es uno de los más importantes logros de Gödel.

VI

La idea de representación y su empleo en las matemáticas

El cálculo proposicional constituye un ejemplo de un sistema matemático en el que se alcanzan plenamente los objetivos de la teoría de la demostración de Hilbert. Ciertamente, este cálculo codifica solamente un fragmento de la lógica formal, y su vocabulario y su aparato formal no son suficientes para desarrollar ni siquiera la aritmética elemental, pero el programa de Hilbert no es tan limitado. Puede ser aplicado con éxito a sistemas más amplios, cuyo carácter, a la vez consistente y completo, puede ser demostrado mediante un razonamiento metamatemático. Una prueba absoluta de consistencia, por ejemplo, se ha logrado para un sistema de aritmética que permita la *adición* de números cardinales, aunque no la multiplicación. Pero ¿es el método finitista de Hilbert lo suficientemente potente como para demostrar la consistencia de un sistema como *Principia*, cuyo vocabulario y cuyo aparato lógico son adecuados para expresar toda la aritmética y no simplemente un fragmento de ella? Los repetidos intentos de construir una prueba de este tipo resultaron infructuosos; y la publicación en 1931 del trabajo de Gödel demostró finalmente que no podían por menos de fracasar todos los esfuerzos que se desenvolvieran dentro de los estrictos límites del primitivo programa de Hilbert.

¿Qué es lo que estableció Gödel y cómo demostró sus resultados? Sus principales conclusiones son dos. En primer lugar (aunque no sea este el puesto que ocupa en el razonamiento de Gödel) demostró que es imposible presentar una prueba metamatemática de la consistencia de un sistema lo bastante comprensivo como para contener toda la aritmética, a menos que se empleen en la prueba reglas de deducción que difieran en ciertos aspectos esenciales de las reglas de transformación utilizadas para derivar teoremas dentro del sistema. Indudablemente, una prueba así posee gran valor e importancia. Sin embargo, si el razonamiento se basa en reglas de deducción mucho más potentes que las reglas del cálculo aritmético, de tal modo que la consistencia de las hipótesis contenidas en el razonamiento esté tan sujeta a la duda como lo está la consistencia de la aritmética, la prueba no produciría sino un especioso triunfo; sería matar un dragón solamente para crear otro. En cualquier caso, si la prueba no es finitista, no cubre los objetivos del programa original de Hilbert; y la argumentación de Gödel hace que sea improbable el que pueda darse una prueba finitista de la consistencia de la aritmética.

La segunda importante conclusión de Gödel es aún más sorprendente y revolucionaria, porque demuestra la existencia de una fundamental limitación en la potencia del método axiomático. Gödel demostró que los *Principia*, o cualquier otro sistema dentro del cual pueda desarrollarse la aritmética, es *esencialmente incompleto*. En otras palabras: dado *cualquier* conjunto consistente de axiomas aritméticos, existen proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser derivadas de dicho conjunto. Este decisivo punto merece ser ilustrado con un ejemplo. Las matemáticas abundan en proposiciones generales a las que no se ha encontrado ninguna excepción que hasta ahora haya frustrado todo intento de prueba. Un ejemplo clásico es el conocido como «teorema de Goldbach», el cual afirma que todo número par es la suma de dos números primos. Jamás se ha encontrado ningún número par que no sea la suma dos números primos; sin embargo, nadie ha logrado encontrar una prueba de que la conjetura de Goldbach se aplique sin excepción a todos los números pares. Tenemos, pues, aquí un ejemplo de una proposición aritmética que puede ser verdadera, pero que puede no ser derivable de los axiomas de la aritmética. Supongamos ahora que la conjetura de Goldbach fuese, en efecto, universalmente verdadera, aunque no derivable de los axiomas. ¿Qué decir ante la sugerencia de que, en este caso, los axiomas podrían ser modificados o aumentados hasta hacer que las proposiciones hasta el momento indemostrables (tal como la de Goldbach en nuestra hipótesis) fuesen derivables en el sistema ampliado? Los resultados obtenidos por Gödel demuestran que, aunque la hipótesis fuese correcta, la sugerencia no suministraría remedio definitivo a la dificultad. Es decir, que aun cuando los axiomas de la aritmética sean ampliados con un número indefinido de otros axiomas verdaderos, siempre quedaran verdades aritméticas que no son formalmente derivables del conjunto ampliado**[15]**.

¿Cómo demostró Gödel estas conclusiones? Hasta cierto punto, la estructura de su argumentación está moldeada, como él mismo hizo notar, sobre el razonamiento implicado en una de las antinomias lógicas conocida como la «paradoja richardiana», propuesta por el matemático francés Jules Richard en 1905. Explicaremos en que consiste esta paradoja.

Considérese un lenguaje (por ejemplo, el español) en el que se puedan formular y definir las propiedades puramente aritméticas de los números cardinales. Examinemos las definiciones que pueden ser expresadas en dicho lenguaje. Resulta claro que, so pena de caer en círculo vicioso o regreso al infinito, no pueden definirse explícitamente algunos términos que hacen referencia a propiedades aritméticas —ya que no podemos definirlo todo y debemos empezar en alguna parte—, aunque, presumiblemente, pueden ser comprendidos de alguna otra manera. Para el objeto que nos ocupa, es indiferente cuáles sean los términos no definidos o «primitivos»; podemos, por ejemplo, dar por supuesto que comprendemos lo que se quiere decir con «un número entero es divisible por otro», etc. La propiedad de ser un número primo puede ser definida como «no divisible por ningún otro número entero más que por sí mismo y la unidad»; la propiedad de ser un cuadrado perfecto puede ser definida como «ser el producto de algún número entero por sí mismo», etc.

Fácilmente podemos ver que cada una de tales definiciones contendrá solamente un número finito de palabras y, por consiguiente, solo un número finito de letras del alfabeto. Siendo esto así, las definiciones pueden ser ordenadas en una serie: una definición precederá a otra si el número de letras de la primera es menor que el número de letras de la segunda; y si dos definiciones tienen el mismo número de letras, una de ellas precederá a la otra atendiendo al orden alfabético de las letras contenidas en cada una. Sobre la base de este orden, a cada definición corresponderá un único número entero, que representará el lugar que ocupa la definición en la serie. De este modo, la definición que menos letras tenga corresponderá al número 1, la siguiente definición de la serie corresponderá al 2, y así sucesivamente.

Dado que cada definición está asociada a un único número entero, puede ocurrir en algunos casos que un número entero posea la misma propiedad expresada por la definición con la cual está asociado[16]. Supongamos, por ejemplo, que la expresión definidora «no divisible por ningún número entero más que por sí mismo y por la unidad» se halla en correlación con el número de orden 17; evidentemente, el 17 tiene la propiedad designada por esa expresión. Por otra parte, supongamos que la expresión definidora «ser el producto de algún número entero por sí mismo» se halla en correlación con el número de orden 15; esta claro que 15 no posee la propiedad designada por la expresión. Describiremos la situación existente en el segundo ejemplo diciendo que el número 15 tiene la propiedad de ser *richardiano*, y la del primer ejemplo, diciendo que el número 17 no tiene la propiedad de ser *richardiano*. Hablando en términos más generales, definimos «*x* es richardiano» como una forma abreviada de declarar «*x* no tiene la propiedad designada por la expresión definidora con la que se halla relacionado en la serie ordenada de definiciones».

Llegamos ahora a un punto curioso, pero característico, de la proposición en que consiste la paradoja richardiana. La expresión definidora de la propiedad de ser richardiano describe ostensiblemente una propiedad numérica de los enteros. La expresión misma pertenece, por tanto, a la serie de definiciones ya enunciadas antes. De aquí se desprende que la expresión está relacionada con un número entero determinador de su posición. Supongamos que este número es *n*. Y ahora planteamos la cuestión, con ciertas reminiscencias de la antinomia de Russell: ¿Es *n* richardiano? El lector puede, sin duda alguna, anticipar la fatal contradicción que amenaza ahora. Porque *n* es richardiano si, y solamente si, *n* carece de la propiedad designada por la expresión (definidora) con la que está relacionado (esto es, si carece de la propiedad de ser richardiano). En resumen, *n* es richardiano si, y solamente si, *n* no es richardiano; de modo que la declaración «*n* es richardiano» es verdadera y falsa a la vez.

Debemos hacer notar ahora que la contradicción es, en cierto sentido, una consecuencia derivada de no jugar del todo limpio. Se ha deslizado, por ser útil, una esencial pero tácita hipótesis subyacente bajo la ordenación sucesiva de las definiciones. Se había acordado considerar las definiciones de las propiedades *estrictamente aritméticas* de los números enteros, es decir, propiedades que pueden formularse con ayuda de nociones tales como las de adición aritmética, multiplicación, etc. Pero entonces, sin previo aviso, se nos invita a que metamos dentro de la serie una definición que se refiere a la *notación* utilizada para formular las propiedades aritméticas. Más concretamente, la definición de la propiedad de ser richardiano no pertenece a la serie inicialmente proyectada, porque esta definición implica nociones metamatemáticas tales como el número de letras (o signos) que se dan en las expresiones. Podemos soslayar la paradoja de Richard distinguiendo cuidadosamente entre las proposiciones que se producen *dentro* de la aritmética (que no hacen ninguna referencia a sistema alguno de notación) y las proposiciones acerca de algún sistema de notación en el que se codifica la aritmética.

Existe una evidente falacia en el razonamiento empleado para la construcción de la paradoja de Richard. La construcción sugiere, no obstante, la idea de que cabe la posibilidad de «representar» o «reflejar» declaraciones metamatemáticas acerca de un sistema formal suficientemente amplio dentro del sistema mismo. La idea de la «representación» es sobradamente conocida y desempeña un papel fundamental en muchas ramas de las matemáticas. Se utiliza para la construcción de los mapas ordinarios, en la que las formas existentes en la superficie de una esfera se proyectan sobre un plano, de tal modo que las relaciones entre las figuras del plano reflejan las relaciones entre las figuras de la superficie esférica. Se utiliza en la geometría de coordenadas, que traduce la geometría al álgebra de modo que las relaciones geométricas quedan representadas por otras algebraicas. (El lector recordara la exposición realizada en el capítulo segundo, en el que se explicaba cómo empleó Hilbert el álgebra para demostrar la consistencia de sus axiomas aplicados a la geometría. Lo que en realidad hizo Hilbert fue representar la geometría en el álgebra.) La representación desempeña también un importante papel en la física matemática, donde, por ejemplo, las relaciones entre las propiedades de las corrientes eléctricas se plasman en el lenguaje de la hidrodinámica. Y existe también representación cuando se construye una maqueta antes de abordar la realización de la máquina a su tamaño natural, cuando se somete a observación una pequeña superficie del ala de un avión en un túnel de viento con objeto de apreciar sus propiedades aerodinámicas, o cuando se utiliza un equipo de laboratorio hecho de circuitos eléctricos para estudiar las relaciones entre masas de gran tamaño en movimiento. Presentamos un sugestivo ejemplo visual en la figura 3, que ilustra una especie de proyección, que se efectúa en una rama de las matemáticas conocida como geometría proyectiva.

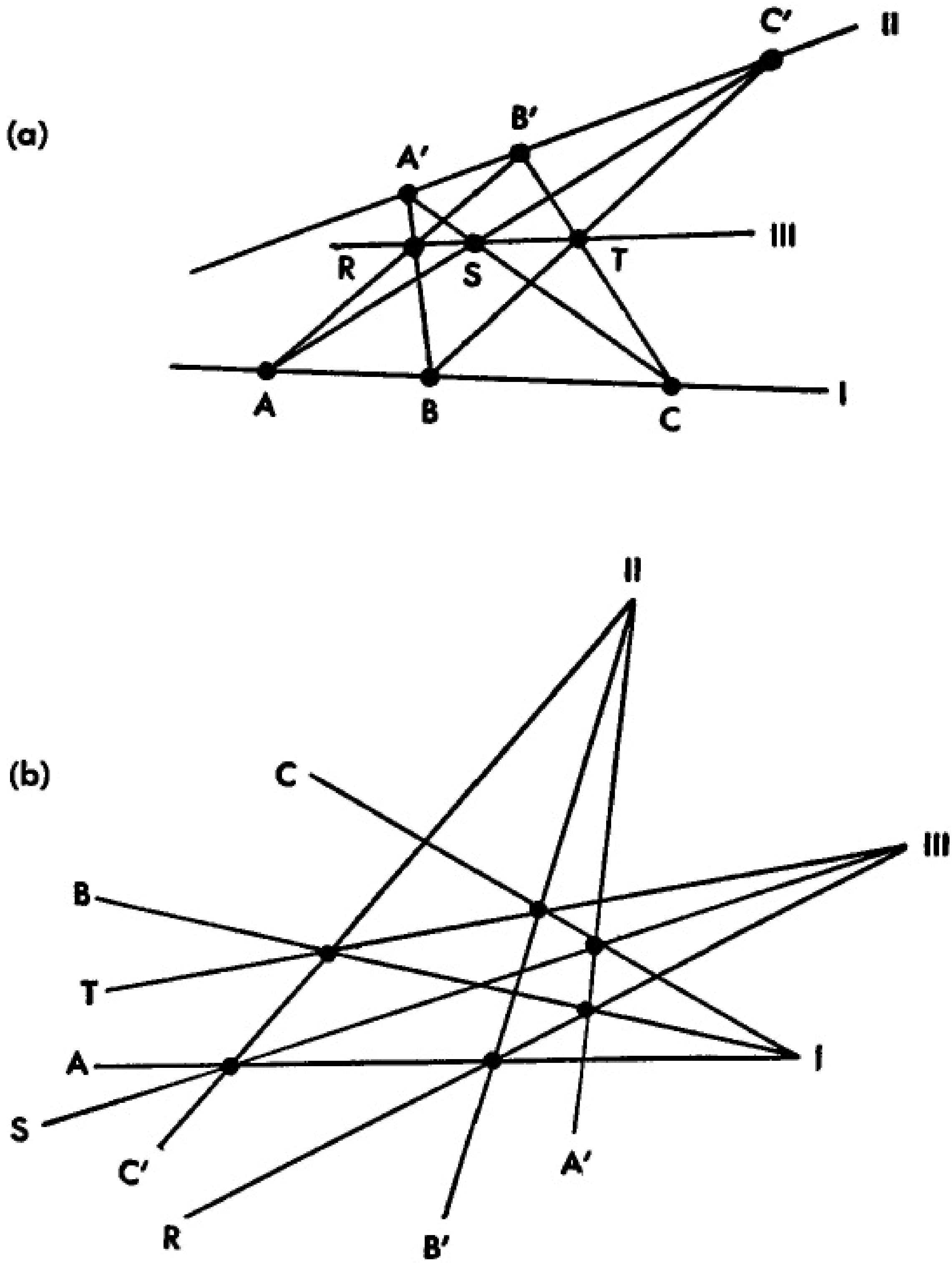


FIGURA 3. *La figura 3(a) ilustra el teorema de Pappus: Si A, B, C son tres* puntos *distintos cualesquiera de una* línea *I, y A', B', C' tres* puntos *cualesquiera de otra* línea *II, los tres* puntos *R, S, T determinados por los pares de* líneas *AB' y A'B, BC' y B'C, CA' y C'A, respectivamente, son* colineales *(esto es, están en la* línea *III).*

La figura 3(b) ilustra el «duplicado» del teorema anterior: Si A, B, C son tres líneas *distintas cualesquiera en un* punto *I, y A', B', C' tres* líneas *distintas cualesquiera en otro* punto *II, las tres* líneas *R, S, T determinadas por los pares de* puntos *AB' y A'B, BC' y B'C, CA' y C'A, respectivamente, son* copuntuales *(esto es, tienen el* punto *III).*

Las dos figuras tienen la misma estructura abstracta*, aunque sean en apariencia notablemente distintas. La figura 3(a) está referida a la figura 3(b) de tal modo que los* puntos *de la primera corresponden a* líneas *de la segunda, mientras que la* líneas *de la primera corresponden a* líneas *de la segunda. De hecho, (b) es una proyección de (a): un punto de (b) representa (o es la" imagen reflejo" de) una línea de (a), mientras que una línea de (b) representa un punto de (a).*

La característica fundamental de la representación es que puede demostrarse que una estructura abstracta de relaciones existente en un campo de «objetos» existe también entre «objetos» (generalmente de un tipo distinto que los del primer grupo) pertenecientes a otro campo diferente. Esta característica es lo que impulsó a Gödel a construir sus pruebas. Si, como él esperaba, unas complicadas proposiciones metamatemáticas acerca de un sistema formalizado de aritmética pudiesen ser traducidas a (o reflejadas por) proposiciones aritméticas contenidas dentro del propio sistema, se habrá dado un gran paso en el camino de facilitar las demostraciones metamatemáticas. Porque, así como es más fácil manejar las fórmulas algebraicas que representan (o reflejan) intrincadas relaciones geométricas entre curvas y superficies en el espacio que manejar las propias relaciones geométricas, del mismo modo manejar las contrapartidas aritméticas (o «imágenes reflejadas») de complejas relaciones lógicas es más fácil que manejar las relaciones lógicas mismas.

La explotación de la idea de la representación es la clave de la argumentación del famoso trabajo de Gödel. Siguiendo el estilo de la paradoja richardiana, pero evitando cuidadosamente la falacia involucrada en su construcción, Gödel demostró que las proposiciones metamatemáticas *acerca* de un cálculo aritmético formalizado pueden efectivamente ser representadas por fórmulas aritméticas *dentro* del cálculo. Como con más detalle explicaremos en el capítulo siguiente, ideó un método de representación tal, que ni la fórmula aritmética correspondiente a una determinada proposición metamatemática verdadera acerca de la fórmula ni la fórmula aritmética correspondiente a la negación de la proposición son demostrables dentro del cálculo. Como quiera que una de estas fórmulas aritméticas debe codificar una verdad aritmética, ninguna de las cuales es, sin embargo, derivable de los axiomas, los axiomas son incompletos. El método de representación de Gödel le permitió también construir una fórmula aritmética correspondiente a la proposición metamatemática «el cálculo es consistente» y demostrar que esta fórmula no es demostrable dentro del cálculo. De ahí se desprende que la proposición metamatemática no puede ser demostrada a no ser que se utilicen reglas de deducción que no puedan ser representadas dentro del cálculo, de tal modo que, al demostrar la proposición, se deben emplear reglas cuya propia consistencia pueda ser tan discutible como la consistencia de la misma aritmética. Gödel demostró y estableció estas importantes conclusiones utilizando una forma sumamente ingeniosa de representación.

VII

Las pruebas de Gödel

El estudio realizado por Gödel es sumamente complejo. Antes de llegar a los resultados principales es necesario comprender y dominar perfectamente cuarenta y seis definiciones preliminares, juntamente con varios e importantes teoremas preliminares. Nosotros seguiremos un camino mucho más fácil; en él, sin embargo, podrá el lector tener varios atisbos del ascenso y de la estructura final de la cumbre.

La numeración de Gödel

Gödel describió un cálculo formalizado dentro del cual pueden expresarse todas las acostumbradas notaciones aritméticas y establecer las relaciones aritméticas ya conocidas[17]. Las fórmulas del cálculo están construidas con una clase de signos elementales que constituyen el vocabulario fundamental. Los cimientos están formados por un conjunto de fórmulas primitivas (o axiomas), y los teoremas del cálculo son fórmulas que pueden derivarse de los axiomas con ayuda de una serie de reglas de transformación (o reglas de deducción) cuidadosamente especificadas.

Gödel demostró en primer lugar que es posible asignar un *único número* a cada signo elemental, a cada fórmula (o sucesión de signos) y a cada prueba (o sucesión finita de fórmulas). Este número, que sirve de rótulo distintivo, recibe el nombre de «número Gödel» del signo, fórmula o prueba[18].

Los signos elementales pertenecientes al vocabulario fundamental son de dos clases: los signos constantes y las variables. Supondremos que hay exactamente diez signos constantes[19], a los que se asocian, como números Gödel, los números enteros que van del 1 al 10. La mayoría de estos signos son ya conocidos del lector: ‘¬’(que quiere decir ‘no’); ‘∨’ (que quiere decir ‘o’); ‘→’ (que quiere decir ‘si… entonces…’); ‘=’(que quiere decir ‘igual a’); ‘0’ (el numeral para el número cero); y tres signos de puntuación, el paréntesis de apertura, ‘(’, el paréntesis de cierre ‘)’, y la coma, ‘,’. Se utilizarán además otros dos signos: la letra invertida ‘∃’, que puede leerse como ‘existe’ y que se da en los «cuantificadores existenciales», y la minúscula ‘*s*’, que se agrega a las expresiones numéricas para designar el inmediato sucesor de un número. Por ejemplo, la fórmula ‘$(\exists x)(x = s0)$’ puede leerse ‘existe un *x* tal que *x* es el sucesor inmediato de 0’. La tabla que insertamos a continuación muestra los diez signos constantes, expresa el número Gödel asociado con cada uno de ellos e indica los significados usuales de los signos.

Signos constantes	Número Gödel	Significado
¬	1	no
∨	2	o
→	3	si… entonces…
∃	4	existe un…
=	5	igual
0	6	cero
s	7	sucesor
(	8	signo de puntuación
)	9	signo de puntuación
,	10	signo de puntuación

Además de los signos elementales constantes, aparecen tres clases de variables en el vocabulario fundamental del cálculo: las *variables numéricas*, ‘*x*’, ‘*y*’, ‘*z*’, etc., con las que se puede sustituir a los numerales y expresiones numéricas; las *variables sentenciales*, ‘*p*’, ‘*q*’, ‘*r*’, etc., con las que se puede sustituir a las fórmulas (sentencias), y las *variables predicativas*, ‘*P*’, ‘*Q*’, ‘*R*’, etc., con las que se pueden sustituir los predicados tales como ‘primo’ o ‘mayor que’. A las variables se asignan números Gödel de acuerdo con las siguientes reglas:

1. Asociar a cada variable numérica un número primo distinto mayor de 10.
2. A cada variable sentencial el cuadrado de un número primo mayor de 10.
3. A cada variable predicativa el cubo de un número primo mayor de 10.

Consideremos ahora una fórmula del sistema, por ejemplo, ‘(∃*x*)(*x* = *sy*)’. (Traducida literalmente, dice: ‘Existe un *x* tal que *x* es el sucesor inmediato de *y*’, lo que quiere decir, en realidad, que todo número tiene un sucesor inmediato.) Los números asociados a sus diez signos elementales constitutivos son, respectivamente, 8, 4, 11, 9, 8, 11, 5, 7, 13, 9. A continuación mostramos esto mismo esquemáticamente:

$$\begin{array}{cccccccccc} (& \exists & x &) & (& x & = & s & y &) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 4 & 11 & 9 & 8 & 11 & 5 & 7 & 13 & 9 \end{array}$$

Es deseable, sin embargo, asignar a la fórmula un solo número en vez de un conjunto de números. Esto puede hacerse fácilmente. Convenimos en asociar a la fórmula el único número que es el producto de los diez primeros números primos en orden de magnitud, estando cada uno de ellos elevado a una potencia igual al número Gödel del correspondiente signo elemental. De acuerdo con esto, la fórmula anterior queda asociada con el número

$$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

Llamemos m a este número. De manera similar, se puede asignar a toda sucesión finita de signos elementales y, en particular, a toda fórmula, un único número, el producto de tantos números primos como signos haya (estando elevado cada número primo a una potencia igual al número Gödel del signo correspondiente)[20].

Consideremos, finalmente, una sucesión de fórmulas tal como puede presentarse en alguna demostración. Así, por ejemplo,

$$(\exists x)(x = sy) \ (\exists x)(x = s0)$$

La segunda fórmula, una vez traducida, dice: '0 tiene un sucesor inmediato'; es derivable de la primera sustituyendo la variable numérica '*y*' por el numeral '0'[21]. Ya hemos determinado el número Gödel de la primera fórmula; es m; y supongamos que n es el número Gödel de la segunda fórmula. Igual que antes, es conveniente disponer de un solo número que sirva de rótulo a la sucesión. Convenimos, por tanto, en asociarla con el número que es el producto de los dos primeros números primos en orden de magnitud (esto es, los números primos 2 y 3), estando elevado cada uno de los números primos a una potencia igual al número Gödel de la fórmula correspondiente. Si llamamos k a este número podemos escribir $k = 2^m \cdot 3^n$. Por este procedimiento de condensación podemos obtener un número para cada serie de fórmulas. En resumen, toda expresión contenida en el sistema, sea un signo elemental, una sucesión de signos o una sucesión de sucesiones, puede llevar asignado un único número Gödel.

Lo que se ha hecho hasta aquí es establecer un método para «aritmetizar» completamente el cálculo formal. El método consiste esencialmente en un conjunto de reglas para establecer una correspondencia biunívoca entre las expresiones del cálculo y una cierta subclase de los números enteros[22]. Dada una expresión, puede calcularse unívocamente el número Gödel que corresponde a ella. Pero esto es sólo la mitad de la historia. Dado un número, podemos determinar si es un número Gödel, y, si lo es, la expresión que representa puede ser exactamente analizada o «restablecida». Si un número dado es igual o menor que 10, es el número Gödel de un signo constante elemental. El signo puede ser identificado. Si el número es mayor de 10, puede ser descompuesto en sus factores primos de una manera precisa (como sabemos por un famoso teorema de la aritmética)[23]. Si es un número primo mayor de 10, o la segunda o tercera potencia de un número primo que reúna esa cualidad, es el número Gödel de una variable identificable. Si es el producto de números primos sucesivos, elevados cada uno de ellos a alguna potencia, puede ser el número Gödel o de una fórmula o de una sucesión de fórmulas. En tal caso, puede determinarse exactamente la expresión a que corresponde. Siguiendo este método podemos desmontar cualquier número dado como si fuese una máquina, descubrir cómo está construido y averiguar qué elementos lo integran; y, puesto que cada uno de sus elementos corresponde a un elemento de la expresión que representa, podemos reconstituir la expresión, analizar su estructura, etc. La siguiente tabla muestra como podemos averiguar, en relación a un número determinado, si es un número Gödel y, en caso afirmativo, cuál es la expresión que simboliza.

A	243 000 000		
B	64 · 243 · 15 625		
C	$2^6 \cdot 3^5 \cdot 5^6$		
	6	5	6
D	↓	↓	↓
	0	=	0
E	0 = 0		

La fórmula aritmética ‘cero igual a cero’ tiene el número Gödel 243 000 000. Leyendo en sentido descendente desde A hasta E, la ilustración muestra cómo se transforma el número en la expresión que representa; haciéndolo en sentido inverso, cómo se obtiene el número correspondiente a la fórmula.

La aritmetización de la metamatemática

El paso siguiente de Gödel es una ingeniosa aplicación de la idea de la representación. Demostró que todas las proposiciones metamatemáticas acerca de las propiedades estructurales de las expresiones contenidas en el cálculo pueden ser adecuadamente *reflejadas* dentro del cálculo mismo. La idea básica subyacente en su procedimiento es la siguiente: puesto que toda expresión del cálculo está asociada a un número (Gödel), puede construirse una proposición metamatemática acerca de las expresiones y de sus recíprocas relaciones como una proposición acerca de los correspondientes números (Gödel) y de sus recíprocas relaciones aritméticas. De esta manera queda completamente «aritmetizada» la metamatemática. Valga como analogía el siguiente ejemplo: En un supermercado muy concurrido se suele dar a los clientes, en el momento de entrar, unas fichas numeradas, cuyo orden determina el orden en que habrán de ser atendidos los clientes. Observando los números es fácil decir cuántas personas han sido servidas, cuántas están esperando, quién precede a quién y por cuántos clientes, etc. Si, por ejemplo, la señora Smith tiene el número 37 y la señora Brown el número 53, en vez de explicar a la señora Brown que tiene que aguardar su turno después de la señora Smith, basta con indicarle que 37 es menor que 53.

Lo mismo que en el supermercado ocurre en la metamatemática. Cada proposición metamatemática se halla representada por una única fórmula dentro de la aritmética; y las relaciones de dependencia lógica entre las proposiciones metamatemáticas se reflejan plenamente en las relaciones numéricas de dependencia entre sus correspondientes fórmulas aritméticas. Una vez más, la representación facilita una investigación de la estructura. La exploración de las cuestiones metamatemáticas puede ser desarrollada investigando las propiedades aritméticas y las relaciones de ciertos números enteros.

Ilustraremos estas observaciones generales con un ejemplo elemental. Consideremos el primer axioma del cálculo proposicional, que es, además, un axioma del sistema formal sujeto a examen: ‘$(p \vee p) \rightarrow p$’. Su número Gödel es $2^8 \cdot 3^{11^2} \cdot 5^2 \cdot 7^{11^2} \cdot 11^9 \cdot 13^3 \cdot 17^{11^2}$, que designaremos con la letra ‘*a*’. Consideremos también la fórmula ‘$(p \vee p)$’ cuyo número Gödel es $2^8 \cdot 3^{11^2} \cdot 5^2 \cdot 7^{11^2} \cdot 11^9$; la designaremos con la letra ‘*b*’. Enunciamos ahora la proposición metamatemática de que la fórmula ‘$p \vee p$’ es una parte inicial del axioma. ¿A qué fórmula aritmética del sistema formal corresponde esta proposición? Es evidente que la fórmula más pequeña ‘$(p \vee p)$’ puede ser una parte inicial de la fórmula mayor, que es el axioma, si, y solamente si, el número ‘*b*’, que representa a la primera, es un factor del número ‘*a*’, que representa a la segunda. Supuesto que la expresión ‘factor de’ esté convencionalmente definida en el sistema aritmético formalizado, la única fórmula aritmética que corresponde a la declaración metamatemática antes enunciada es: ‘b es un factor de a’. Además, si esta fórmula es verdadera, esto es, si ‘*b*’ es un factor de ‘*a*’, entonces es cierto que ‘$(p \vee p)$’ es una parte inicial de ‘$(p \vee p) \rightarrow p$’.

Fijemos nuestra atención en la proposición metamatemática: «La sucesión de fórmulas con número Gödel *x* es una prueba de la fórmula con número Gödel *z*.» Esta declaración está representada (reflejada) por una fórmula definida del cálculo aritmético que expresa una *relación estrictamente aritmética* entre *x* y *z*. (Podemos hacernos cierta idea de la complejidad de esta relación recordando el ejemplo empleado anteriormente, en el cual se asignaba el número Gödel $k = 2^m \cdot 3^n$ a la (fragmento de) prueba cuya conclusión tiene el número Gödel *n*. Una pequeña reflexión hace ver que existe aquí una relación aritmética definida, aunque en manera alguna sencilla, entre *k*, el número Gödel de la prueba, y *n*, el número Gödel de la conclusión). Escribimos esta relación entre *x* y *z* con la fórmula ‘$Dem(x, z)$’, para tener presente la proposición metamatemática a que corresponde (esto es, la proposición metamatemática ‘La sucesión de fórmulas con número Gödel *x* es una prueba (o demostración) de la fórmula con número Gödel *z*’)**[24]**. Rogamos ahora al lector que observe que una proposición metamatemática que dice que una cierta sucesión de fórmulas constituye una prueba de una fórmula dada es verdadera si, y solamente si, el número Gödel de la pretendida prueba está con el número Gödel de la conclusión en la relación aritmética aquí designada como ‘*Dem*’. Por consiguiente, para establecer la verdad o la falsedad de la proposición metamatemática sujeta a examen solo nos interesa la cuestión de si la relación ‘*Dem*’ se mantiene entre dos números. Inversamente, podemos establecer que la relación aritmética se cumple entre un par de números demostrando que es verdadera la declaración metamatemática reflejada por dicha relación entre dos números. Análogamente, la proposición metamatemática: ‘La sucesión de fórmulas con el número Gödel *x* no es una prueba para la fórmula con número Gödel *z*’ se representa en el sistema aritmético formalizado con una fórmula definida. Tal fórmula es la contradictoria formal de ‘*Dem*(x, z)’, o sea, ‘$\neg$*Dem*(x, z)’.

Es necesario agregar un poco más de esta notación especial para exponer el punto clave del argumento de Gödel. Comencemos por un ejemplo. La fórmula ‘$(\exists x)(x = sy)$’ tiene como número Gödel m, mientras que el número Gödel de la variable ‘y’ es 13. En dicha fórmula sustitúyase la variable de número Gödel 13 (o sea, ‘y’) por el numeral de m. El resultado es la fórmula ‘$(\exists x)(x = sm)$’, que dice literalmente que existe un número x tal que x es el sucesor inmediato de m. Esta última fórmula tiene también un número Gödel, que puede calcularse muy fácilmente. Pero, en vez de hacer el cálculo, podemos identificar el número mediante una inequívoca caracterización metamatemática: es el número Gödel de la fórmula que se obtiene a partir de la fórmula de número Gödel m, sustituyendo la variable de número Gödel 13 por el numeral de m. Esta caracterización metamatemática determina unívocamente un número definido, que es una cierta función aritmética de los números m y 13, en la que puede ser expresada la función misma dentro del sistema formalizado[25]. El número puede, por consiguiente, ser designado dentro del cálculo. Esta designación será escrita como ‘*sust*(m, 13, m)’ siendo la finalidad de esta forma recordar la caracterización metamatemática que representa, es decir, ‘el número Gödel de la fórmula obtenida a partir de la fórmula de número Gödel m, sustituyendo la variable de número Gödel 13 por el numeral de m’. Podemos ahora dejar a un lado el ejemplo y generalizar. El lector se dará cuenta en seguida de que la expresión ‘*sust*(y, 13, y)’ es la imagen reflejada *dentro* del cálculo aritmético formalizado de la caracterización metamatemática ‘el número Gödel de la fórmula que se obtiene a partir de la fórmula de número Gödel y, sustituyendo la variable de número Gödel 13 por el numeral de y’. Se observará también que cuando se sustituye ‘y’ por un numeral definido en ‘*sust*(y, 13, y)’ —por ejemplo, el numeral de m o el numeral de doscientos cuarenta y tres millones— la expresión resultante designa un número entero definido, que es el número Gödel de una determinada fórmula[26].

El núcleo de la argumentación de Gödel

Nos encontramos preparados, por fin, para seguir en líneas generales la argumentación principal de Gödel. Comenzaremos enumerando de forma genérica los pasos fundamentales para que el lector pueda captar una vista panorámica de la secuencia del argumento.

Gödel mostró (i) cómo construir una fórmula aritmética G que represente la declaración metamatemática ‘La fórmula G no es demostrable’. Esta fórmula G dice, así, ostensiblemente *de sí misma* que no es demostrable. Hasta cierto punto, G está construida de forma análoga a la paradoja de Richard. En esa paradoja la expresión ‘richardiano’ se asocia a cierto número n, y queda construida la oración ‘n es richardiano’. En la argumentación de Gödel, la fórmula G se asocia también a un cierto número *h* y está construida de modo que corresponda a la declaración ‘la fórmula que tiene el número asociado *h* no es demostrable’. Pero (ii) Gödel mostró también que *G* es demostrable si, y solamente si, es demostrable su negación formal ¬*G*. Este paso de la argumentación es también análogo al paso de la paradoja de Richard en el que se demostró que *n* es richardiano si, y solamente si, *n* no es richardiano. De cualquier modo, si una fórmula y su negación son ambas formalmente demostrables, el cálculo aritmético no es consistente. Por consiguiente, si el cálculo es consistente, ni *G* ni ¬*G* son formalmente derivables de los axiomas de la aritmética. Por tanto, si la aritmética es consistente, *G* es una fórmula formalmente indecidible. Gödel demostró luego (iii) que, aunque *G* no sea formalmente demostrable, es, sin embargo, una fórmula aritmética *verdadera*. Es verdadera en el sentido de que afirma que todo número entero posee una cierta propiedad aritmética que puede ser exactamente definida y presentada en cualquier número entero que se examine. (iv) Puesto que *G* es al mismo tiempo verdadera y formalmente indecidible, los axiomas de la aritmética son *incompletos*. En otras palabras: no podemos deducir todas las verdades aritméticas de los axiomas. Gödel demostró además que la aritmética es *esencialmente* incompleta: aun cuando se admitiesen nuevos axiomas, de tal modo que la fórmula verdadera *G* pudiera ser formalmente derivada de la incrementada serie de los mismos, todavía podría construirse otra fórmula verdadera pero formalmente indecidible. (v) Gödel describió después como construir una fórmula aritmética *A* que represente a la proposición metamatemática ‘la aritmética es consistente’, y demostró que la fórmula ‘$A \rightarrow G$’ es formalmente demostrable. Y, finalmente, demostró que la fórmula *A* no es demostrable. De aquí se desprende que la consistencia de la aritmética no puede ser establecida por un argumento que pueda hallarse representado en el cálculo aritmético formal.

Exponemos a continuación detalladamente la sustancia de la argumentación:

I. Ya ha sido identificada la fórmula ‘¬*Dem*(*x*, *z*)’. Representa, dentro de la aritmética formalizada, la proposición metamatemática ‘la sucesión de fórmulas con número Gödel *x* no es una prueba de la fórmula con número Gödel *z*’. Ahora se introduce el prefijo ‘(*x*)’ en la fórmula *Dem*. Este prefijo realiza en el sistema formalizado la misma función que la frase ‘para todo *x*’. Anteponiendo este prefijo obtenemos una nueva fórmula, ‘(*x*)¬*Dem*(*x*, *z*)’, que representa, dentro de la aritmética, a la proposición metamatemática ‘para todo x, la sucesión de fórmulas con número Gödel *x* no es una prueba de la fórmula con número Gödel *z*’. La nueva fórmula es, por tanto, la paráfrasis formal (estrictamente hablando, es la única representativa), dentro del cálculo, de la proposición metamatemática ‘la fórmula con número Gödel *z* no es demostrable’, o, por decirlo de otra manera, ‘no puede aducirse ninguna prueba para la fórmula con número Gödel *z*’.

Lo que Gödel demostró es que un determinado caso especial de esta fórmula no es formalmente demostrable. Para construir este caso especial empecemos con la fórmula señalada como línea (1):

$$(x)\neg Dem(x, sust(y, 13, y)) \tag{1}$$

Esta fórmula pertenece al cálculo aritmético, pero representa una proposición metamatemática. La cuestión es: ¿cuál? El lector debe recordar ante todo que la expresión ‘$sust(y, 13, y)$’ designa un número. Este número es el número Gödel de la fórmula obtenida a partir de la fórmula de número Gödel y, sustituyendo la variable de número Gödel 13 por el numeral[27] de y. Resulta entonces evidente que la fórmula de la línea (1) representa a la proposición metamatemática ‘la fórmula de número Gödel $sust(y, 13, y)$ no es demostrable’[28].

Pero, dado que la fórmula de la línea (1) pertenece al cálculo aritmético, tiene un número Gödel que puede ser efectivamente calculado. Supongamos que el número es n. Sustituimos ahora la variable de número Gödel 13 (esto es, la variable ‘y’) de la fórmula de la línea (1) por el numeral de n. Se obtiene así una nueva fórmula, que llamaremos ‘G’ (de Gödel), rotulándola con esa letra:

$$(x)\neg Dem(x, sust(n, 13, n)) \tag{G}$$

La fórmula G es el caso especial que habíamos prometido construir.

Ahora bien: esta fórmula se produce dentro del cálculo aritmético y debe, por consiguiente, tener un número Gödel. ¿Cuál es el número? Una breve reflexión nos hace ver que es $sust(n, 13, n)$. Para comprenderlo debemos recordar que $sust(n, 13, n)$ es el número Gödel de la fórmula que se obtiene a partir de la fórmula de número Gödel n, sustituyendo la variable de número Gödel 13 (o sea, la variable ‘y’) por el numeral de n. Pero la fórmula G ha sido obtenida a partir de la fórmula de número Gödel n (o sea, de la fórmula de la línea (1)), sustituyendo la variable ‘y’ existente en ella por el numeral de n. En consecuencia, el número Gödel de G es, en efecto, $sust(n, 13, n)$.

Pero debemos recordar también que la fórmula G es la imagen reflejada *dentro* del cálculo aritmético de la proposición metamatemática: ‘La fórmula de número Gödel $sust(n, 13, n)$ no es demostrable’. De donde se sigue que la *fórmula aritmética* ‘$(x)\neg Dem(x, sust(n, 13, n))$’ *representa* en el cálculo la *proposición metamatemática*: ‘La fórmula ‘$(x)\neg Dem(x, sust(n, 13, n))$’ no es demostrable’. En cierto sentido, por tanto, esta fórmula aritmética G puede ser construida como afirmando de sí misma que no es demostrable.

II. Llegamos ahora al paso siguiente: la prueba de que G no es formalmente demostrable. La demostración de Gödel se asemeja al desarrollo de la paradoja de Richard, pero se mantiene libre de su falaz razonamiento[29]. La argumentación es relativamente sencilla. Se desenvuelve haciendo ver que si la fórmula G fuese demostrable, entonces su contradictoria formal [a saber: la fórmula ‘¬(*x*)¬*Dem*(*x*, *sust*(*n*, 13, *n*))’] también sería demostrable; e, inversamente, que si la contradictoria formal de *G* fuese demostrable, entonces también la propia *G* sería demostrable. Tenemos, pues, *G* es demostrable si, y solo si, ¬*G* es demostrable[30]. Pero, como hemos hecho notar anteriormente, si de un conjunto de axiomas pueden ser derivadas tanto una fórmula como su negación formal, esos axiomas no son consistentes. De lo que se deduce que si los axiomas del sistema formalizado de la aritmética son consistentes, ni la fórmula *G* ni su negación son demostrables. En resumen, si los axiomas son consistentes, *G* es formalmente indecidible, en el preciso sentido técnico de que ni *G* ni su contradictoria pueden ser formalmente deducidas de los axiomas.

III. Puede que a primera vista esta conclusión no parezca de capital importancia. ¿Por qué es tan digno de mención, podría preguntarse, que pueda construirse dentro de la aritmética una fórmula que sea indecidible? Queda por revelar algo que ilumina las hondas implicaciones de este resultado. Porque, aunque la fórmula *G* es indecidible, si los axiomas del sistema son consistentes, puede, no obstante, demostrarse mediante un razonamiento metamatemático que *G* es verdadera. Es decir, puede demostrarse que *G* formula una compleja pero definida propiedad numérica que se da necesariamente en todos los números enteros, del mismo modo que la fórmula ‘(*x*)¬(*x* + 3 = 2)’ (que, interpretada en la forma habitual dice que ningún número cardinal al que se añada 3 da una suma igual a 2) expresa otra propiedad igualmente necesaria (aunque mucho más sencilla) de todos los números enteros. El razonamiento que da validez a la verdad de la fórmula indecidible *G* es impecable. Primero, bajo la hipótesis de que la aritmética es consistente se ha demostrado la verdad de la proposición metamatemática ‘La fórmula ‘(*x*)¬*Dem*(*x*, *sust*(*n*, 13, *n*))’ no es demostrable’. Segundo, esta proposición se halla representada dentro de la aritmética por la misma fórmula mencionada en la proposición. Tercero, recordemos que las proposiciones metamatemáticas han sido representadas en el formalismo aritmético de tal modo que las proposiciones metamatemáticas verdaderas correspondan a fórmulas aritméticas verdaderas. (En realidad, el establecimiento de tal correspondencia es la *raison d’étre* de la representación; al igual que ocurre, por ejemplo, en la geometría analítica, en la que, por virtud de este proceso, las proposiciones geométricas verdaderas corresponden siempre a proposiciones algebraicas verdaderas.) De ahí se desprende que la fórmula *G*, que corresponde a una proposición metamatemática verdadera, debe ser también verdadera. Ha de hacerse notar, no obstante, que hemos establecido una verdad aritmética, no deduciéndola formalmente de los axiomas de la aritmética, sino por un argumento metamatemático.

IV. Recordamos ahora al lector la noción de la «completitud» introducida en la exposición del cálculo proposicional. Se explicó allí que los axiomas de un sistema deductivo son «completos» si todas las proposiciones verdaderas que pueden expresarse en el sistema son formalmente deducibles de los axiomas. Si no es este el caso, es decir, si no toda proposición expresable en el sistema es deducible, los axiomas son «incompletos». Pero, dado que acabamos de demostrar que *G* es una fórmula verdadera de la aritmética no deducible formalmente dentro de ella, se deduce que los axiomas de la aritmética son incompletos, sobre la hipótesis, naturalmente, de que sean consistentes. Son, además, *esencialmente* incompletos; aun cuando fuera introducida *G* como un nuevo axioma, el conjunto así aumentado sería todavía insuficiente para producir todas las verdades aritméticas. Porque, si los axiomas iniciales fuesen ampliados de la manera indicada, aún podría construirse otra fórmula aritmética verdadera, pero indecidible dentro del sistema ensanchado; tal fórmula podría ser construida limitándose a repetir en el nuevo sistema el procedimiento empleado originariamente para hallar una fórmula verdadera, pero indecidible en el sistema inicial. Esta importante conclusión se mantiene con independencia de las veces que se amplía el sistema inicial. Nos vemos, pues, obligados a admitir una fundamental limitación en la eficacia del método axiomático. En contra de previas suposiciones, el vasto continente de la verdad aritmética no puede ser reducido a un orden sistemático sentando de una vez para siempre un conjunto de axiomas del que pueda derivarse formalmente *toda* proposición aritmética verdadera.

V. Y llegamos a la coda de la asombrosa sinfonía intelectual de Gödel. Hemos seguido los pasos por los que él llegó a establecer la proposición metamatemática: «Si la aritmética es consistente, es incompleta.» Pero puede demostrarse también que esta proposición condicional, *tomada como un todo*, está representada por una fórmula *demostrable* dentro de la aritmética formalizada.

Esta fórmula crucial puede ser fácilmente construida. Como ya hemos explicado en el capítulo quinto, la proposición metamatemática ‘la aritmética es consistente’ es equivalente a la proposición ‘existe por lo menos una fórmula de la aritmética que no es demostrable’. En el cálculo formal se representa a esta con la siguiente fórmula, que denominaremos ‘*A*’:

$$(\exists y)(x)\neg Dem(x, y) \qquad (A)$$

Traducida, dice: ‘Existe por lo menos un número *y* tal que, para todo número *x*, *x* no se mantiene en la relación *Dem* a *y*’. Interpretada metamatemáticamente, la fórmula afirma: ‘Existe por lo menos una fórmula de la aritmética para la cual ninguna sucesión de fórmulas constituye una prueba’. La fórmula *A*, por tanto, representa la cláusula antecedente de la proposición metamatemática ‘si la aritmética es consistente, es incompleta’. Por otra parte, la cláusula consiguiente de esta proposición —es decir, ‘(la aritmética) es incompleta’— procede directamente de ‘existe una proposición aritmética verdadera que no es formalmente demostrable en la aritmética’ ; y ésta, como advertirá el lector, se halla representada en el cálculo aritmético por una vieja conocida, la fórmula *G*. En consecuencia, la proposición metamatemática condicional ‘si la aritmética es consistente, es incompleta’ está representada por la fórmula

$$(\exists y)(x)\neg Dem(x, y) \rightarrow (x)\neg Dem(x, sust(n, 13, n))$$

que, en aras de la brevedad, simbolizaremos por ‘$A \rightarrow G$’. (Puede probarse que esta fórmula es formalmente demostrable, pero prescindiremos de hacerlo en estas páginas.)

Vamos a demostrar ahora que la fórmula *A* no es demostrable. Supongamos que lo fuese. Entonces, puesto que $A \rightarrow G$ es demostrable, aplicando la regla de separación sería demostrable la fórmula *G*. Pero, salvo que el cálculo sea inconsistente, *G* es formalmente indecidible, esto es, no demostrable. Por consiguiente, si la aritmética es consistente, la fórmula *A* no es demostrable.

¿Qué significa esto? La fórmula *A* representa la proposición metamatemática ‘la aritmética es consistente’. Si, por consiguiente, esta proposición pudiera ser demostrada con una argumentación susceptible de ser plasmada en una sucesión de fórmulas, que constituye una prueba en el cálculo aritmético, sería demostrable la propia fórmula *A*. Pero, como hemos visto, esto es imposible si la aritmética es consistente. Y el gran paso final está ya ante nosotros: debemos concluir que si la aritmética es consistente, su consistencia no puede ser demostrada por ningún razonamiento metamatemático susceptible de ser representado dentro del formalismo de la aritmética.

Es preciso evitar una errónea interpretación de este importante resultado del análisis de Gödel: no excluye una prueba metamatemática de la consistencia de la aritmética. Lo que excluye es la posibilidad de que una prueba de consistencia sea reflejada sobre las deducciones formales de la aritmética[31]. De hecho, se han construido pruebas metamatemáticas de la consistencia de la aritmética, en particular por Gerhard Gentzen, miembro de la escuela de Hilbert, en 1936, y por otros estudiosos posteriores[32]. Estas pruebas poseen una gran importancia lógica, entre otras razones porque proponen nuevas formas de construcciones metamatemáticas y porque, en consecuencia, iluminan la cuestión de cómo es preciso ampliar la clase de reglas de deducción para demostrar la consistencia de la aritmética. Pero estas pruebas no pueden ser representadas dentro del cálculo aritmético; y, como no son finitistas, no alcanzan los anunciados objetivos del primitivo programa de Hilbert.

VIII

Reflexiones finales

La importancia de las conclusiones de Gödel es de una trascendencia que todavía no ha sido plenamente explorada. Estas conclusiones señalan que la perspectiva de encontrar para todo sistema deductivo (y, en particular, para un sistema en que pueda expresarse toda la aritmética) una prueba absoluta de consistencia que satisfaga los requisitos finitistas propuestos en el programa de Hilbert es, aunque no lógicamente imposible, sumamente improbable[33]. Señalan también que existe un número infinito de proposiciones aritméticas verdaderas que no pueden ser deducidas formalmente de ningún conjunto dado de axiomas mediante un conjunto cerrado de reglas de deducción. De donde resulta que un tratamiento axiomático de la teoría de los números, por ejemplo, no puede agotar el campo de la verdad aritmética. Resulta también que lo que entendemos por proceso de la prueba matemática no coincide con la explotación de un método axiomático formalizado. Un procedimiento axiomático formalizado se basa en un conjunto, inicialmente fijo y determinado, de axiomas y de reglas de transformación. Como la propia argumentación de Gödel señala, no es posible trazar ningún límite previo a la inventiva de los matemáticos en la ideación de nuevas reglas de prueba. Por consiguiente, no puede darse ninguna descripción definitiva de la forma lógica precisa de las demostraciones matemáticas válidas. Teniendo en cuenta estas circunstancias, la cuestión de si puede enunciarse una omnicomprensiva definición de la verdad lógica o matemática, y si, como el propio Gödel parece creer, solo un absoluto «realismo» filosófico del viejo tipo platónico puede suministrar una definición adecuada, constituye un conjunto de problemas aún no resueltos y demasiado complejos para examinarlos aquí[34].

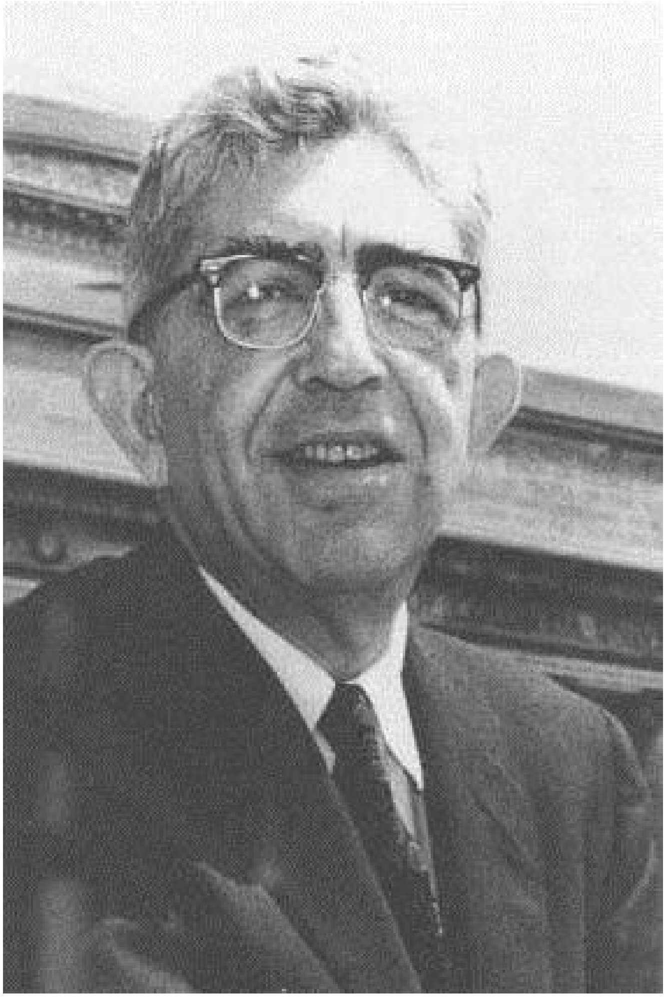
Las conclusiones de Gödel conducen a la cuestión de si podría construirse una máquina calculadora que llegara a equipararse en inteligencia matemática al cerebro humano. Las calculadoras actuales poseen en su interior un conjunto de directivas o instrucciones; estas instrucciones corresponden a las reglas fijas de deducción del procedimiento axiomático formalizado. Las máquinas contestan, pues, a los problemas operando por pasos medidos, cada uno de los cuales se halla controlado por las directivas introducidas en ellas. Pero, como demostró Gödel en su teorema de la ausencia de completitud, existen muchos problemas de la teoría elemental de los números que caen fuera del ámbito de un método axiomático fijo y que tales máquinas son incapaces de resolver por intrincados e ingeniosos que puedan ser sus mecanismos y por rápidas que sean sus operaciones. Dado un determinado problema, podría construirse una máquina de este tipo que lo resolviese; pero no puede construirse una máquina que resuelva todos los problemas. El cerebro humano puede, indudablemente, hallarse afectado de limitaciones inherentes al mismo, y pueden darse problemas matemáticos que sea incapaz de resolver. Pero, aun así, el cerebro parece incorporar una estructura de reglas de operación mucho más poderosa que la estructura de las máquinas artificiales. No hay nada que permita suponer una próxima sustitución de la mente humana por *robots*.

No debe considerarse el teorema de Gödel como una invitación a la desesperanza ni como una excusa para la alusión al misterio. El descubrimiento de que existen verdades aritméticas que no pueden ser demostradas formalmente no significa que existan verdades que hayan de permanecer en una eterna imposibilidad de ser conocidas ni que una intuición «mística» (de especie y autoridad radicalmente distintas de la habitualmente operativa en los progresos intelectuales) deba reemplazar a la prueba convincente. No significa, como ha pretendido recientemente un autor, que existan «límites ineluctables a la razón humana». Significa que los recursos del intelecto humano no han sido, ni pueden ser, plenamente formalizados, y que subsiste la posibilidad de descubrir nuevos principios de demostración. Hemos visto que las proposiciones matemáticas que no pueden ser demostradas por deducción formal a partir de un conjunto dado de axiomas pueden, sin embargo, ser demostradas mediante un razonamiento metamatemático «informal». Sería irresponsable pretender que estas verdades formalmente indemostrables establecidas por argumentos metamatemáticos no se basan en nada más que en la pura intuición.

Y las inherentes limitaciones de las máquinas calculadoras tampoco implican que no podamos esperar llegar a una explicación de la materia viva y de la razón humana en términos físicos y químicos. La posibilidad de tales explicaciones no se halla excluida ni afirmada por el teorema de incompletitud de Gödel. El teorema indica que la estructura y la potencia de la mente humana son mucho más complejas y sutiles que cualquier máquina inerte existente hasta el momento. La misma obra de Gödel constituye un notable ejemplo de esa sutileza y complejidad. Es un motivo no para el desaliento, sino para una renovada apreciación de los poderes de la razón creadora.

Bibliografía

- Carnap, Rudolf: *Logical Syntax of Language*, Nueva York, 1937.
- Findlay, J.: «Goedelian sentences: a non-numerical approach», *Mind*, Vol. 51 (1942), pags. 259-265.
- Gödel, Kurt: «Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I», *Monatshefte für Mathematik und Physik*, Vol. 38 (1931), pags. 173-198.
- Kleene, S. C.: *Introduction to Metamathematics*, Nueva York, 1952.
- Ladrière, Jean: *Limitaciones internas de los formalismos*, Madrid, Ed. Tecnos, 1969.
- Mostowsky, A.: *Sentences Undecidable in Formalized Arithmetic*, Amsterdam, 1952.
- Quine, W. V. O.: *Methods of Logic*, Nueva York, 1950.
- Rosser, Barkley: «An informal exposition of proofs of Gödel's theorems and Church's theorem», *Journal of Symbolic Logic*, Vol. 4 (1939), pags. 53-60.
- Turing, A. M.: «Computing machinery and intelligence», *Mind*, Vol. 59 (1950), pags. 433-460.
- Weyl, Hermann: *Philosophy of Mathematics and Natural Science*, Princeton, 1949.
- Wilder, R. L.: *Introduction to the Foundations of Mathematics*, Nueva York, 1952.



ERNEST NAGEL (Nove Mesto, 1901 - Nueva York, 1985). Filósofo estadounidense de origen checoslovaco. Profesor en Columbia (Nueva York) e influido por el positivismo lógico, es autor, entre otras obras, de *Introducción a la lógica y al método científico* (con M. R. Cohen, 1934), *La lógica sin metafísica* (1944) y *La estructura de la ciencia* (1961).

JAMES ROY NEWMAN (1907-1966) fue un matemático e historiador matemático estadounidense. También fue abogado en el estado de Nueva York de 1929 a 1941. Durante y después de la Segunda Guerra Mundial, ocupó diversos cargos en el gobierno de Estados Unidos, incluyendo el de jefe de inteligencia de la embajada de EE. UU. en Londres, Asistente Especial del Subsecretario de la Guerra, y asesor del Comité del Senado de EE. UU. de Energía Atómica. En esta institución, ayudó a redactar la Ley de Energía Atómica de 1946. Se convirtió en miembro del consejo editorial de la revista *Scientific American* a comienzos de 1948.

Notas

[1] La razón principal de esta supuesta falta de autoevidencia parece haber sido el hecho de que el axioma de las paralelas formula una afirmación acerca de regiones *infinitamente remotas* del espacio. Euclides define las líneas paralelas como líneas rectas situadas en un plano que «prolongándose indefinidamente en ambas direcciones» no se encuentran. Por consiguiente, decir que dos líneas son paralelas es sentar la afirmación de que esas dos líneas no se encontraran ni siquiera «en el infinito». Pero los antiguos conocían líneas que, aunque no se cortan en ninguna región finita del plano, se encuentran «en el infinito». De tales líneas se dice que son «asintóticas». Así, una hipérbola es asintótica respecto a sus ejes. A los geómetras antiguos no les resultaba intuitivamente evidente, por tanto, que desde un punto exterior a una línea recta dada solamente pudiera trazarse una línea recta que no se encontrara con aquella ni siquiera en el infinito. <<

[2] La aritmética de los números cardinales no fue axiomatizada hasta 1899 por el matemático italiano Guiseppe Peano. Sus axiomas son cinco. Se formulan con ayuda de tres términos no definidos, el conocimiento del último de los cuales se da por supuesto. Los términos son: ‘*número*’, ‘*cero*’ y ‘*sucesor inmediato de*’. Los axiomas de Peano pueden expresarse del modo siguiente:

1. Cero es un número.
2. El sucesor inmediato de un número es un número.
3. Cero no es el sucesor inmediato de un número.
4. No hay dos números que tengan el mismo sucesor inmediato.
5. Cualquier propiedad que pertenezca a cero y también al sucesor inmediato de todo número que tenga esa propiedad pertenece a todos los números.

El último axioma formula lo que suele denominarse el «principio de inducción matemática». <<

[3] Dicho en un lenguaje más técnico, los términos primitivos quedan «implícitamente» definidos por los axiomas, y todo lo que no se halla comprendido por las definiciones implícitas es irrelevante para la demostración de los teoremas. <<

[4] Debe hacerse notar que las proposiciones metamatemáticas presentadas en el texto no contienen como partes constitutivas ninguno de los *signos y fórmulas matemáticos* que aparecen en los ejemplos. A primera vista esta afirmación parece palpablemente falsa, ya que son claramente visibles los signos y las fórmulas. Pero, si se analizan las proposiciones con espíritu analítico, veremos que lo dicho es cierto. Las proposiciones metamatemáticas contienen los *nombres* de ciertas expresiones aritméticas, pero no las expresiones aritméticas mismas. La distinción es sutil, pero válida e importante. Proviene de la circunstancia de que las reglas de la gramática exigen que ninguna oración contenga literalmente el objeto a que pueda referirse la misma, sino solamente los *nombres* de tales objetos. Evidentemente, cuando hablamos de una ciudad no introducimos la ciudad misma en una oración, sino solamente el nombre de la ciudad; y, análogamente, si queremos decir algo acerca de una palabra (u otro signo lingüístico) no es la palabra misma (o el signo) lo que puede aparecer en la oración, sino solamente el nombre de la palabra (o signo). De acuerdo con una convención establecida, construimos un nombre para una expresión lingüística colocándola entre comillas. Nuestro texto se adhiere a esta convención. Es correcto escribir:

Chicago es una ciudad populosa.

Pero es incorrecto escribir:

Chicago es trisílaba.

Para expresar lo que se quiere decir con esta oración, se debe escribir:

‘Chicago’ es trisílaba.

Igualmente, es incorrecto escribir:

$x = 5$ es una ecuación.

En vez de ello, debemos formular nuestra idea escribiendo:

‘$x = 5$’ es una ecuación. <<

[5] Hilbert no dio una explicación precisa de qué procedimientos metamatemáticos deben considerarse finitistas. En la versión original de su programa, los requisitos para una prueba absoluta de congruencia eran más estrictos que en las posteriores exposiciones del programa llevadas a cabo por los miembros de su escuela. <<

[6] Es muy posible que le interese al lector disponer de una explicación más completa que la suministrada en el texto en torno a los teoremas lógicos y reglas de deducción tácitamente empleados incluso en demostraciones matemáticas elementales. Analizaremos primeramente el razonamiento que da lugar a la línea 6 del teorema de Euclides a partir de las líneas 3, 4 y 5.

Designamos como «variables proposicionales» a las letras ‘*p*’, ‘*q*’ y ‘*r*’ porque pueden ser sustituidas por las proposiciones o sentencias. Asimismo, para economizar espacio, escribimos las proposiciones condicionales del tipo de ‘si *p* entonces *q*’ como ‘$p \rightarrow q$’; y denominamos a la expresión situada a la izquierda del signo con forma → el «antecedente» y a la expresión situada a la derecha el «consecuente». Análogamente escribimos ‘$p \vee q$’ como abreviatura de la forma alternativa ‘o *p* o *q*’.

Existe un teorema de la lógica elemental que dice:

$$(p \rightarrow r) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)]$$

Puede demostrarse que este teorema formula una *verdad necesaria*. El lector advertirá que esta fórmula declara más brevemente lo mismo que la siguiente proposición, mucho más larga:

> Si (si *p* entonces *r*), entonces [si (si *q* entonces *r*) entonces (si o *p* o *q*) entonces *r*)]

Tal como se ha indicado en el texto, existe en la lógica una regla de deducción llamada la regla de sustitución de variables proposicionales. De conformidad con esta regla, una proposición S_2, procede lógicamente de una proposición S_1, que contiene variables proposicionales, si la primera se obtiene a partir de la segunda sustituyendo uniformemente las variables por proposiciones. Si aplicamos esta regla al teorema que acabamos de mencionar, sustituyendo ‘*y* es primo’ en lugar de ‘*p*’, ‘*y* es compuesto’ en lugar de ‘*q*’ e ‘*y* no es el mayor número primo’ en lugar de ‘*r*’, obtenemos lo siguiente:

> (*y* es primo → *y* no es el mayor número primo) → [(*y* es compuesto → *x* no es el mayor número primo) → ((*y* es primo ∨ *y* es compuesto) → *y* no es el mayor número primo)]

El lector se daría cuenta en seguida de que la proposición condicional incluida dentro del primer par de paréntesis (presente en la primera línea de este ejemplo del teorema) se limita a repetir la línea 3 de la prueba de Euclides. Igualmente, la proposición condicional incluida dentro del primer par de paréntesis comprendidos entre los corchetes (segunda línea del ejemplo del teorema) repite la línea 4 de la prueba. También la proposición alternativa que está dentro de los corchetes repite la línea 5 de la prueba.

Utilizamos ahora otra regla de deducción, conocida como regla de separación (o *modus ponens*). Esta regla nos permite deducir una proposición S_2 a partir de otras dos proposiciones, una de las cuales es S_1 y la otra $S_1 \rightarrow S_2$. Aplicamos tres veces esta regla: primero, utilizando la línea 3 de la prueba de Euclides y el ejemplo anterior del teorema lógico; después, el resultado obtenido mediante esta aplicación y la línea 4 de la demostración; y, finalmente, este último resultado de la aplicación y la línea 5 de la demostración. El resultado es la línea 6 de la demostración.

La derivación de la línea 6 a partir de las líneas 3, 4 y 5 implica, por tanto, el uso tácito de dos reglas de deducción y de un teorema de la lógica. El teorema y las reglas pertenecen a la parte elemental de la teoría lógica: el cálculo proposicional. Éste versa sobre las relaciones lógicas existentes entre proposiciones formadas de otras proposiciones mediante la ayuda de enlaces proposicionales, ejemplo de los cuales son ‘$\rightarrow$’ y ‘$\vee$’. Otro enlace de este tipo es la conjunción ‘*y*’, que se representa por $\wedge$; la proposición copulativa ‘p y q’ se escribe, pues, ‘$p \wedge q$’. El signo ‘$\neg$’ representa la partícula negativa ‘no’; así, ‘no p’ se escribe ‘$\neg p$’.

Examinemos la transición que en la demostración de Euclides se verifica de la línea 6 a la 7. Este paso no puede ser analizado con la sola ayuda del cálculo proposicional. Se necesita una regla de deducción que pertenece a una parte más avanzada de la teoría lógica, la que tiene en cuenta la complejidad interna de las proposiciones que contienen expresiones tales como ‘todo’, ‘cada uno’, ‘alguno’ y sus sinónimos. Reciben tradicionalmente el nombre de *cuantificadores*, y la rama de la teoría lógica que estudia la función que realizan es la teoría de la cuantificación.

Como preliminar al análisis de la transición que nos ocupa es necesario explicar, siquiera sea sumariamente, la notación empleada en este sector más avanzado de la lógica. Además de las variables proposicionales, en lugar de las cuales pueden ser colocadas las proposiciones, debemos considerar la categoría de las «variables individuales», tales como ‘x’, ‘y’, ‘z’, etc., en lugar de las cuales pueden ser colocados los nombres de los individuos. Utilizando estas variables, la proposición universal ‘todos los números primos mayores de 2 son impares’ puede ser traducida como ‘para todo x, si x es un número primo mayor de 2, entonces x es impar’. La expresión ‘para todo x’ recibe el nombre de *cuantificador universal* y en la acostumbrada notación lógica se representa abreviadamente con el signo ‘(x)’. Dicha proposición universal puede, por consiguiente, escribirse:

$$(x)(x \text{ es un número primo mayor de } 2 \rightarrow x \text{ es impar})$$

Por otra parte, la proposición «particular» (o «existencial») ‘algunos números enteros son compuestos’ puede ser traducida por ‘existe por lo menos un x tal que x es un número entero y x es compuesto’. La expresión ‘existe por lo menos un x’ recibe el nombre de *cuantificador existencial* y suele representarse abreviadamente por la notación ‘$(\exists x)$’. La proposición existencial mencionada puede, pues, transcribirse:

$$(\exists x)(x \text{ es un número entero} \wedge x \text{ es compuesto})$$

Debe hacerse notar que muchas proposiciones utilizan implícitamente más de un cuantificador, de modo que al mostrarse su verdadera estructura tienen que aparecer varios cuantificadores. Antes de ilustrar este punto adoptemos ciertas abreviaturas, para las que suelen denominarse expresiones predicadas o, más sencillamente, predicados. Emplearemos ‘$Pr(x)$’ para designar ‘x es un número primo’, y ‘$Gr(x, z)$’ para designar ‘x es mayor que z’. Consideremos la proposición: ‘x es el mayor número primo’; su significado puede ser hecho más explícito por medio de la frase siguiente: ‘x es un número primo y para todo z que es un número primo pero diferente de x, x es mayor que z’. Recurriendo a nuestras diversas abreviaturas, la proposición ‘x es el mayor número primo’ puede escribirse:

$$Pr(x) \wedge (z)[(Pr(z) \wedge \neg(x = z)) \rightarrow Gr(x, z)]$$

Literalmente, esto dice: ‘x es un número primo, y para todo z, si z es un número primo y z no es igual a x, entonces x es mayor que z’. En esta secuencia simbólica advertimos una versión formal y laboriosamente explícita de la línea 1 de la demostración de Euclides.

Consideremos ahora la cuestión de cómo expresar en nuestra notación la proposición ‘x no es el mayor número primo’ que aparece en la línea 6 de la demostración. Puede transcribirse así:

$$Pr(x) \wedge (\exists z)[Pr(z) \wedge Gr(z, x)]$$

Literalmente, dice: ‘x es un número primo y existe por lo menos un z tal que z es un número primo y z es mayor que x’.

Finalmente, la conclusión de la demostración de Euclides, línea 7, que afirma que no existe ningún número primo que sea el mayor de todos, se transcribe simbólicamente por

$$(x)[Pr(x) \rightarrow (\exists z)(Pr(z) \wedge Gr(z, x))]$$

que dice: ‘para todo x, si x es un número primo, existe por lo menos un z tal que z es un número primo y z es mayor que x’. El lector observará que la conclusión de Euclides implica implícitamente el uso de más de un cuantificador.

Y estamos ya preparados para examinar el paso de la línea 6 de Euclides a la 7. Existe un teorema de la lógica que dice:

$$(p \wedge q) \rightarrow (p \rightarrow q)$$

o, una vez traducido, 'si a la vez p y q, entonces (si p entonces q)'. Utilizando la regla de sustitución y sustituyendo 'p' por '$Pr(x)$' y 'q' por '$(\exists z)[Pr(z) \wedge Gr(z, x)]$', obtenemos:

$$(Pr(x) \wedge (\exists z)[Pr(z) \wedge Gr(z, x)]) \rightarrow (Pr(x) \rightarrow (\exists z)[Pr(z) \wedge Gr(z, x)])$$

El antecedente (primera línea) de este ejemplo del teorema se limita a repetir la línea 6 de la demostración de Euclides; si aplicamos la regla de separación obtenemos:

$$(Pr(x) \rightarrow (\exists z)[Pr(z) \wedge Gr(z, x)])$$

Conforme a la regla de deducción de la teoría lógica de la cuantificación, una proposición S_2 que tenga la forma '$(x)(\ldots x \ldots)$' puede siempre deducirse de una proposición S_1 que tenga la forma '$(\ldots x \ldots)$'. En otras palabras: la proposición que tenga como prefijo el cuantificador '(x)' puede ser derivada de la proposición que no contenga ese prefijo pero que sea semejante a ella en otros aspectos. Aplicando esta regla a la última proposición mostrada, tenemos la línea 7 de la demostración de Euclides.

La lección que se extrae de todo esto es que la demostración del teorema de Euclides implica tácitamente el uso no sólo de teoremas y reglas de deducción que pertenecen al cálculo proposicional, sino también de una regla de deducción de la teoría de la cuantificación. <<

[7] Así, por ejemplo, de los principios implicados en la deducción: 5 es mayor que 3; por consiguiente, el cuadrado de 5 es mayor que el cuadrado de 3. <<

[8] De donde se sigue inmediatamente que los axiomas deben ser contados entre los teoremas. <<

[9] Donde no haya posibilidad de confusión puede prescindirse de los signos de puntuación (esto es, de los paréntesis). Así, en vez de escribir ‘$\neg(p)$’ es suficiente escribir ‘$\neg p$’, y en vez de escribir ‘$(p \rightarrow q)$’, simplemente ‘$p \rightarrow q$’. <<

[10] Supongamos, por otra parte, que se ha establecido ya la fórmula ‘$(p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$’ y que decidimos sustituir la variable ‘p’ por ‘r’ y la variable ‘q’ por ‘$p \vee r$’. Mediante esta sustitución no podemos obtener la fórmula ‘$(r \to (p \vee r)) \to (\neg q \to \neg r)$’, porque no hemos realizado la misma sustitución a cada presencia de la variable ‘q’. La sustitución correcta es ‘$(r \to (p \vee r)) \to (\neg(p \vee r) \to \neg r)$’. <<

[11] Sustituyendo ‘*p*’ por S obtenemos en primer lugar $S \rightarrow (\neg S \rightarrow q)$. A partir de aquí, juntamente con S, que se supone es demostrable, obtenemos por la regla de separación $\neg S \rightarrow q$. Finalmente, puesto que se supone que también $\neg S$ es demostrable, y utilizando una vez más la regla de separación, obtenemos q. <<

[12] Cabe que el lector minucioso presente objeciones en este punto. Sus reservas pueden ser algo parecido a lo siguiente. La propiedad de ser una tautología ha sido definida en ideas de verdad y falsedad. Sin embargo, estas ideas implican evidentemente una referencia a algo *exterior* al cálculo formal. Por consiguiente, el procedimiento mencionado en el texto ofrece en realidad una *interpretación* del cálculo, suministrando un modelo para el sistema. Siendo esto así, los autores no han cumplido lo que habían prometido, a saber: definir una propiedad de las fórmulas atendiendo a las características estrictamente estructurales de las fórmulas mismas. Parece que, después de todo, no se ha logrado salvar la dificultad apuntada en el capítulo segundo del texto de que las pruebas de consistencia que se basan en modelos y discurren desde la verdad de los axiomas hasta su consistencia no hacen sino desplazar la localización del problema. ¿Por qué, entonces, llamar a la prueba «absoluta» en vez de relativa?

La objeción está justificada si va dirigida contra la exposición seguida en el texto. Pero hemos adoptado esta forma para no abrumar al lector poco acostumbrado a una presentación sumamente abstracta que descansa en una prueba intuitivamente incomprensible. Como puede haber lectores más arriesgados que deseen enfrentarse con las cosas tal cual son para ver una definición sin adornos que no se halle sujeta a las críticas expuestas, la presentaremos.

Recuérdese que una fórmula del cálculo es o una de las letras utilizadas como variables proposicionales (a las de este tipo las denominaremos fórmulas elementales), o una combinación de estas letras, de los signos empleados como enlaces proposicionales y de los paréntesis. Convenimos en colocar cada fórmula elemental en una de dos clases, mutuamente excluyentes y exhaustivas, K_1 y K_2. Las fórmulas que no son elementales se colocan en estas clases siguiendo las siguientes convenciones:

1. La fórmula que tenga la forma $S_1 \vee S_2$ va colocada en la clase K_2 si tanto S_1 como S_2 están en K_2; en otro caso, se la coloca en K_1.
2. La fórmula que tenga la forma $S_1 \rightarrow S_2$ va colocada en K_2 si S_1 está en K_1 y S_2 está en K_2; en otro caso, se la coloca en K_1.
3. La fórmula que tenga la forma $S_1 \wedge S_2$ va colocada en K_1 si tanto S_1 como S_2 están en K_1; en otro caso, se la coloca en K_2.
4. La fórmula que tenga la forma $\neg S$ va colocada en K_2 si S está en K_1; en otro caso, se la coloca en K_2.

Definimos ahora la propiedad de ser tautológica: Una fórmula es una tautología si, y solamente si, encaja en la clase K_1 independientemente de cuál de las dos clases sea aquella en la que estén situados sus constituyentes elementales. Es evidente que la propiedad de ser una tautología ha sido definida ahora sin utilizar ningún modelo de interpretación del sistema. Podemos averiguar si una fórmula es o no una tautología comprobando, simplemente, su estructura conforme a las convenciones indicadas.

Un examen de este tipo hace ver que cada uno de los cuatro axiomas es una tautología. Es un procedimiento conveniente el de construir una tabla que contenga todas las formas posibles en que los constituyentes elementales de una fórmula dada pueden ser colocados en las dos clases. Valiéndonos de esta lista, podemos determinar, para cada posibilidad, a qué clase pertenecen las fórmulas componentes no elementales de la fórmula dada y a que clase pertenece la fórmula completa. Tomemos el primer axioma. Su tabla consta de tres columnas, cada una de las cuales se halla encabezada por una de las fórmulas componentes elementales o no elementales del axioma, así como por el axioma mismo. Debajo de cada cabecera se indica la clase a que pertenece el concepto de que se trate para cada una de las posibles asignaciones de los constituyentes elementales a las dos clases. La tabla reviste la forma siguiente:

p	$p \vee p$	$(p \vee p) \rightarrow p$
K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_1

La primera columna menciona las formas posibles de clasificar el único constituyente elemental del axioma. La segunda columna asigna el indicado componente no elemental a una clase sobre la base de la convención (1). La última columna asigna el axioma mismo a una clase sobre la base de la convención (2). La columna final muestra que el axioma encaja en la clase K_1; prescindiendo de la clase en que va situado su único constituyente elemental. El axioma, por tanto, es una tautología.

Para el segundo axioma, la tabla es:

p	q	$(p \vee q)$	$p \rightarrow (p \vee q)$
K_1	K_1	K_1	K_1
K_1	K_2	K_1	K_1
K_2	K_1	K_1	K_1
K_2	K_2	K_2	K_1

Las dos primeras columnas contienen las cuatro formas posibles de clasificar los dos constituyentes elementales del axioma. La tercera columna asigna el componente no elemental a una clase sobre la base de la convención (1). La última columna hace lo mismo para el axioma sobre la base de la convención (2). La columna final muestra también que el axioma encaja en la clase K_1 para cada una de las cuatro formas posibles en que pueden ser clasificados los constituyentes elementales. El axioma, por tanto, es una tautología. De manera análoga puede demostrarse que los dos axiomas restantes son también tautologías.

Vamos a demostrar también que la propiedad de ser una tautología es hereditaria bajo la regla de separación. (Dejaremos al lector la tarea de demostrar que es hereditaria bajo la regla de sustitución.) Supongamos que son tautologías dos fórmulas cualesquiera S_1 y $S_1 \rightarrow S_2$; debemos demostrar que en tal caso S_2 es una tautología. Supongamos que S_2 no fuese una tautología. Entonces, por una clasificación al menos de sus constituyentes elementales, S_2 encajara en K_2. Pero, por hipótesis, S_1 es una tautología, de modo que encajara en K_1 para todas las clasificaciones de sus constituyentes elementales, y, en particular, para la clasificación que exige la colocación de S_2 en K_2. Consiguientemente, para esta última clasificación, $S_1 \rightarrow S_2$ debe encajar en K_2 debido a la segunda convención. Esto contradice, sin embargo, la hipótesis de que $S_1 \rightarrow S_2$ es una tautología. En consecuencia, S_2 tiene que ser una tautología, so pena de permitir esta contradicción. La propiedad de ser una tautología se ve así transferida por la regla de separación desde las premisas hasta la conclusión derivable de ellas por esta regla.

Un comentario final a la definición de tautología dada en el texto. Las dos clases K_1 y K_2 utilizadas en la presente explicación pueden ser construidas como las clases de las proposiciones verdaderas y falsas, respectivamente. Pero la explicación no depende en manera alguna, como acabamos de ver, de una tal interpretación, si bien se comprende mucho más fácilmente la exposición cuando se entiende de esa manera a las clases. <<

[13] El lector puede encontrar de utilidad la siguiente recapitulación del camino seguido hasta aquí:

1. Todo axioma del sistema es una tautología.
2. El ser tautología es una propiedad hereditaria.
3. Toda fórmula correctamente derivada de los axiomas (esto es, todo teorema) es también una tautología.
4. Por ello, cualquier fórmula que no sea una tautología no es un teorema.
5. Se ha encontrado una fórmula ($p \vee q$) que no es una tautología.
6. Esta fórmula, por tanto, no es un teorema.
7. Pero si los axiomas fuesen inconsistentes, toda fórmula sería un teorema.
8. Por consiguiente, los axiomas son consistentes. <<

[14] Euclides demostró una notable perspicacia al tratar su famoso axioma de las paralelas como una hipótesis lógicamente independiente de sus demás axiomas. Porque, como se probó posteriormente, este axioma no puede ser derivado de las otras hipótesis, de modo que sin él sería incompleto el grupo de axiomas. <<

[15] Como veremos, tales verdades pueden ser demostradas mediante alguna forma de razonamiento metamatemático acerca de un sistema aritmético. Pero este procedimiento no se ajusta al requisito de que el cálculo debe ser, por así decirlo, autosuficiente y de que las verdades de que se trata deben ser mostradas como las consecuencias formales de los axiomas especificados dentro del sistema. Existe, pues, una limitación *intrínseca* en el método axiomático considerado como un medio de sistematizar todo el conjunto de la aritmética. <<

[16] Es lo mismo que ocurriría si apareciese la palabra ‘corta’ en una lista de palabras y caracterizáramos cada palabra de la lista con los rótulos descriptivos ‘corta’ o ‘larga’. La palabra ‘corta’ ostentaría entonces el rótulo ‘corta’. <<

[17] Utilizó una adaptación del sistema desarrollado en *Principia Mathematica*. Pero cualquier cálculo dentro del que pudiera construirse el sistema de los números cardinales habría servido a su finalidad. <<

[18] Hay muchas formas diferentes de asignar números Gödel, y es indiferente para el nudo de la argumentación cuál de ellas se adopte. Damos un ejemplo concreto de cómo pueden asignarse los números para ayudar al lector a seguir la exposición. El método de numeración utilizado en el texto fue empleado por Gödel en su estudio de 1931. <<

[19] El número de signos constantes depende de cómo se construya el cálculo formal. Gödel utilizó en su estudio solamente siete signos constantes. El texto utiliza diez para evitar ciertas complejidades en la exposición. <<

[20] Se pueden presentar en el cálculo signos que no aparezcan en el vocabulario fundamental; estos son introducidos definiéndolos con ayuda de los signos del vocabulario. Por ejemplo, el signo ‘$\wedge$’, el enlace proposicional utilizado como abreviatura de ‘y’, puede ser definido en el contexto del modo siguiente: ‘$p \wedge q$’ equivale a ‘$\neg(\neg p \vee \neg q)$’ ¿Qué número Gödel se asigna a un signo definido? La respuesta es evidente si observamos que las expresiones que contienen signos definidos pueden ser eliminadas a favor de sus equivalentes definidores; y está claro que un número Gödel puede ser determinado para la expresión transformada. Por consiguiente, el número Gödel de la fórmula ‘$p \wedge q$’ es el número Gödel de la fórmula ‘$\neg(\neg p \vee \neg q)$’. Análogamente, los diversos numerales pueden ser introducidos por definición del modo siguiente: ‘1’ abreviatura de ‘$s0$’, ‘2’ abreviatura de ‘$ss0$’, ‘3’ abreviatura de ‘$sss0$’, y así sucesivamente. Para obtener el número Gödel de la fórmula ‘$\neg(2 = 3)$’, eliminamos los signos definidos, obteniendo así la fórmula ‘$\neg(ss0 = sss0)$’, y obtenemos su número Gödel siguiendo las reglas expresadas en el texto. <<

[21] Recordará el lector que hemos definido una prueba como una sucesión finita de fórmulas, cada una de las cuales o es un axioma o puede ser derivada de las fórmulas anteriores de la sucesión con ayuda de las reglas de transformación. Con esta definición, la sucesión antes indicada no es una prueba, ya que la primera fórmula no es un axioma ni se demuestra su derivación de los axiomas: la sucesión es solamente un fragmento de una prueba. Llevaría demasiado tiempo exponer un ejemplo completo de prueba, y para los fines ilustrativos que se pretenden es suficiente la sucesión expresada. <<

[22] No todo número entero es un número Gödel. Consideremos, por ejemplo, el número 100; 100 es mayor que 10, y, por consiguiente, no puede ser el número Gödel de un signo constante elemental; y puesto que no es un número primo mayor de 10 ni el cuadrado ni el cubo de un número primo que reúna esa circunstancia, no puede ser el número Gödel de una variable. Al descomponer 100 en sus factores primos, encontramos que es igual a $2^2 \cdot 5^2$; y el número primo 3 no aparece como factor de la descomposición, sino que queda omitido. De acuerdo con las reglas establecidas, sin embargo, el número Gödel de una fórmula (o de una sucesión de fórmulas) debe ser el producto de varios números primos *sucesivos*, elevado cada uno de ellos a alguna potencia. El número 100 no satisface esta condición. Es decir, que 100 no puede ser asignado a signos constantes, variables o fórmulas; por consiguiente, no es un número Gödel. <<

[23] Este teorema es conocido como el teorema fundamental de la aritmética. Dice que si un número entero es compuesto (o sea, que no es primo), tiene una sola descomposición en factores primos. <<

[24] El lector debe tener presente con toda claridad que, aunque ‘*Dem*(x, z)’ representa la proposición metamatemática, la fórmula misma pertenece al cálculo aritmético. La fórmula podría ser escrita con una notación más habitual como ‘$f(x, z) = 0$’, donde la letra ‘f’ denota una compleja serie de operaciones aritméticas realizadas con números. Pero esta notación más corriente no sugiere inmediatamente la interpretación metamatemática de la fórmula. <<

[25] Esta función es sumamente compleja. Su complejidad resulta evidente si tratamos de formularla con más detalle. Intentémoslo, sin llevarlo a sus últimos extremos. En la página 37 se demostró que *m*, el número Gödel de ‘(∃*x*)(*x* = *sy*)’, es:

$$2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^{13} \cdot 29^9$$

Para hallar el número Gödel de ‘(∃*x*)(*x* = *sm*)’ (la fórmula obtenida sustituyendo en la anterior la variable ‘*y*’ por el numeral de *m*) procedemos del modo siguiente: Esta fórmula contiene el numeral ‘*m*’, que es un signo *definido*, y, de conformidad con el contenido de una nota anterior, *m* debe ser reemplazado por su equivalente definidor. Una vez hecho esto, obtenemos la fórmula:

$$(\exists x)(x = ssssss\ldots s0)$$

donde la letra ‘*s*’ se da *m* + 1 veces. Esta fórmula contiene solamente los signos elementales pertenecientes al vocabulario elemental, con lo que puede calcularse su número Gödel. Para ello, obtenemos primeramente la serie de números Gödel asociados con los signos elementales de la fórmula:

8, 4, 11, 9, 8, 11, 5, 7, 7, 7,…, 7, 6, 9

en la que el número 7 aparece *m* + 1 veces. Tomamos luego el producto de los primeros *m* + 10 números primos por orden de magnitud, elevado cada uno de ellos a una potencia igual al número Gödel del correspondiente signo elemental. Llamemos *r* a este número, con lo que

$$r = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^{11} \cdot 7^9 \cdot 11^8 \cdot 13^{11} \cdot 17^5 \cdot 19^7 \cdot 23^7 \cdot 29^7 \cdot 31^7 \cdot \ldots \cdot \mathrm{p}^9_{m+10}$$

donde p_{m+10} es el número primo que hace el (*m* + 10)-ésimo en el orden de magnitud.

Comparemos ahora los dos números Gödel *m* y *r*; *m* contiene un factor primo *elevado a la potencia 13*; *r* contiene todos los factores primos de *m* y otros muchos más, pero *ninguno de ellos está elevado a la potencia 13*. Del número *m* puede así obtenerse el número *r*, reemplazando al factor primo de *m* que está elevado a la potencia 13 con otros números primos elevados a potencias distintas de 13. No es posible manifestar exactamente y con todo detalle como se relaciona *r* con *m* sin introducir un aparato notativo adicional considerablemente complejo; se halla expresado en el trabajo original de Gödel. Pero se ha dicho lo suficiente para indicar que el número r es una función aritmética definida de *m* y 13. <<

[26] Cabe la posibilidad de que se le ocurran al lector varias cuestiones que es necesario contestar. Puede preguntarse por qué, en la caracterización metamatemática recién mencionada, decimos que es «el numeral de *y*» el que sustituye a cierta variable, en vez de «el número *y*». La contestación depende de la distinción, ya examinada, entre matemática y metamatemática, y exige una breve aclaración de la diferencia entre números y numerales (o cifras). Un *numeral* es un *signo*, una expresión lingüística, algo que se puede escribir, borrar, etc. Un *número*, en cambio, es algo que viene *nombrado* o *designado* por un numeral y que no puede, literalmente, ser escrito, borrado, copiado, etc. Así, decimos que 10 es el *número* de dedos que tenemos en las manos, y, al hacer esta declaración, estamos atribuyendo una cierta «propiedad» a la clase de nuestros dedos; pero sería evidentemente absurdo afirmar que esta propiedad es un numeral. Asimismo, el número 10 viene designado por el numeral arábigo ‘10’, al igual que por la letra romana ‘X’; estas designaciones son distintas aunque designan al mismo número. Es decir, que cuando sustituimos una variable numérica (que es una letra o un signo), estamos poniendo un signo en lugar de otro signo. No podemos sustituir literalmente un signo por un número, porque un número es una propiedad de las clases (y a veces se dice que es un concepto), no algo que podamos poner sobre el papel. De donde se deduce que al sustituir una variable numérica sólo podemos hacerlo con un numeral (o alguna otra expresión numérica, tal como ‘*s*0’ o ‘7 + 5’) y no con un número. Esto explica por qué en la caracterización metamatemática mencionada declaramos que sustituimos la variable por el *numeral* de (el número) *y*, en vez de por el propio *número y*.

Quizá se pregunte el lector que número se designa por ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’ si da la casualidad que la fórmula cuyo número Gödel es *y* no contiene la variable de número Gödel 13 —esto es, si la fórmula no contiene a la variable ‘*y*’—. Así, *sust*(243 000 000, 13, 243 000 000) es el número Gödel de la fórmula obtenida a partir de la fórmula de número Gödel 243 000 000, sustituyendo la variable ‘*y*’ por el numeral ‘243 000 000’. Pero si el lector consulta la tabla de la página 38, hallara que 243 000 000 es el número Gödel de la fórmula ‘0 = 0’, que no contiene a la variable ‘*y*’. ¿Cuál es entonces la fórmula que se obtiene de ‘0 = 0’ sustituyendo la variable ‘*y*’ por el numeral del número 243 000 000? La respuesta, bien sencilla, es que, puesto que ‘0 = 0’ no contiene a esta variable, no puede hacerse ninguna sustitución, o, lo que es lo mismo, que la fórmula obtenida de ‘0 = 0’ es esta misma fórmula. En consecuencia, el número designado por ‘*sust*(243 000 000, 13, 243 000 000)’ es 243 000 000.

Puede también que el lector se sienta asaltado por la duda de si ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’ es una *fórmula* dentro del sistema aritmético en el sentido que son fórmulas, por ejemplo,

‘(∃*x*)(*x* = *sy*)’, ‘0 = 0’ y ‘*Dem*(*x*, *z*)’. La respuesta es negativa por la razón siguiente. La expresión ‘0 = 0’ recibe la denominación de fórmula porque afirma una relación entre dos números y es, por tanto, susceptible de que se le atribuya significativamente la cualidad de verdad o falsedad. Análogamente, cuando las variables de ‘*Dem*(*x*, *z*)’ son sustituidas por numerales definidos, esta expresión formula una relación entre dos números, con lo que se convierte en una proposición que o es verdadera o es falsa. Lo mismo puede decirse para ‘(∃*x*)(*x* = *sy*)’. Por otra parte, aun cuando se sustituya ‘*y*’ por un numeral definido en ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’, la expresión resultante no *afirma* nada y no puede, por tanto, ser verdadera ni falsa. Simplemente, *denomina* o *designa* un número describiéndolo como una determinada función de otros números. La diferencia entre una fórmula (que es en realidad una proposición acerca de números y, por ende, verdadera o falsa) y una *función-nombre* (que es un nombre que identifica a un número y, por ende, ni es verdadera ni falsa) quedara más clara si añadimos algunos ejemplos: ‘5 = 3’ es una fórmula que, aunque falsa, declara que los números 5 y 3 son iguales; ‘$5^2 = 4^2 + 3^2$’es también una fórmula que afirma la existencia de una definida relación entre los números 5, 4 y 3; y, en un sentido más general, ‘*y* = *f*(*x*)’ es una fórmula que afirma la existencia de una determinada relación entre los números no especificados *x* e *y*. Por otra parte, ‘2 + 3’ expresa una función de los números 2 y 3 y, por tanto, denomina a un cierto número (de hecho, el número 5); no es una fórmula, ya que sería evidentemente absurdo preguntar si ‘2 + 3’ es verdadero o falso. ‘(7 · 5) + 8’ expresa otra función de los tres números 5, 7 y 8 y designa al número 43. Y, en términos más generales, ‘*f*(*x*)’ expresa una función de *x* e identifica a cierto número cuando se sustituye ‘*x*’ por un numeral definido y cuando se atribuye un definido significado al signo de función ‘*f*’. Resumiendo, mientras que ‘*Dem*(*x, z*)’ es una fórmula porque tiene la *forma de una proposición* acerca de números, ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’ no es una fórmula porque solo tiene la *forma de un nombre* para los números. <<

[27] Es de suma importancia advertir que ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’, aunque es una expresión de la aritmética formalizada, no es una fórmula, sino más bien una función-nombre para la identificación de un *número*. El número así identificado, sin embargo, es el número Gödel de una fórmula, de la fórmula obtenida a partir de la fórmula de número Gödel y, sustituyendo la variable ‘*y*’ por el numeral de *y*. <<

[28] Esta proposición puede ser expresada más extensamente del modo siguiente: ‘La fórmula (cuyo número Gödel es el número de la fórmula) obtenida a partir de la fórmula de número Gödel *y*, sustituyendo la variable de número Gödel 13 por el numeral de *y*, no es demostrable.’

Puede que el lector se sienta perplejo ante el hecho de que en la proposición metamatemática ‘La fórmula de número Gödel *sust*(*y*, 13, *y*) no es demostrable’ no aparezca entrecomillada la expresión ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’, no obstante haberse afirmado repetidamente en el texto que ‘*sust*(*y*, 13, *y*)’ es una *expresión*. Es esta una cuestión que depende una vez más de la distinción entre utilizar una expresión para hablar acerca de lo que la expresión designa (en cuyo caso la expresión no va entrecomillada) y hablar acerca de la expresión misma (en cuyo caso debemos utilizar un nombre para la expresión y, de acuerdo con la convención establecida para construir tales nombres, debemos entrecomillar la expresión). Un ejemplo servirá para comprenderlo mejor: ‘7 + 5’ es una expresión que designa a un número; por otra parte, 7 + 5 es un número y no una expresión. Igualmente, ‘*sust*(243 000 000, 13, 243 000 000)’ es una expresión que designa el número Gödel de una fórmula (véase la tabla de la página 38), pero *sust*(243 000 000, 13, 243 000 000) es el número Gödel de una fórmula y no es una expresión. <<

[29] Quizá sea conveniente explicar la semejanza, así como la desemejanza, de esta argumentación con la empleada en la paradoja de Richard. La cuestión principal a observar es que la fórmula *G* no es idéntica a la proposición metamatemática con la que está asociada, sino que solamente la *representa* (o refleja) dentro del cálculo aritmético. En la paradoja de Richard, el número *n* es el número asociado con una determinada expresión *metamatemática*. En la construcción de Gödel, el número *n* está asociado a una determinada *fórmula aritmética* perteneciente al cálculo formal, aunque esta fórmula aritmética representa en realidad una proposición metamatemática. (La fórmula representa a esta proposición porque la metamatemática de la aritmética ha sido proyectada en la aritmética.) Al desarrollar la paradoja de Richard se plantea la cuestión de si el número *n* posee la propiedad *metamatemática* de ser richardiano. En la construcción de Gödel, la cuestión que surge es la de si el número *sust*(*n*, 13, *n*) posee una determinada propiedad *aritmética,* la propiedad aritmética expresada por la fórmula ‘(x)¬*Dem*(x, z)’. En la construcción de Gödel no existe, por tanto, confusión alguna entre proposiciones dentro de la aritmética y proposiciones *acerca* de la aritmética, como ocurre en la paradoja de Richard. <<

[30] Esto no es lo que demostró realmente Gödel, y la declaración del texto, adaptación de un teorema obtenido en 1936 por J. Barkley Rosser, se emplea aquí a efectos de una mayor sencillez de exposición. Lo que realmente demostró Gödel es que si G es demostrable, entonces es demostrable $\neg G$ (con lo que la aritmética es inconsistente); y si $\neg G$ es demostrable, entonces la aritmética es ω-inconsistente. ¿Qué es la ω-inconsistencia? Sea 'P' algún predicado aritmético. Entonces la aritmética sería ω-inconsistente si fuese posible demostrar tanto la fórmula '$(\exists x)P(x)$' (esto es, 'existe por lo menos un número que tiene la propiedad P'), como igualmente cada una de la serie infinita de fórmulas '$\neg P(0)$', '$\neg P(1)$','$\neg P(2)$', etc. (esto es, '0 no tiene la propiedad P', '1 no tiene la propiedad P', '2 no tiene la propiedad P', y así sucesivamente). Una breve reflexión basta para hacer ver que si el cálculo es inconsistente, entonces es también ω-inconsistente; pero lo contrario no es necesariamente cierto: un sistema puede ser ω-inconsistente sin ser inconsistente. Porque para que un sistema sea inconsistente deben ser demostrables tanto '$(\exists x)P(x)$' como '$(x)\neg P(x)$'. Sin embargo, aunque si un sistema es ω-inconsistente son demostrables tanto '$(\exists x)P(x)$' como cada una de la serie infinita de fórmulas '$\neg P(0)$', '$\neg P(1)$', '$\neg P(2)$', etc., la fórmula '$(x)\neg P(x)$' puede, no obstante, no ser demostrable, con lo que el sistema no es inconsistente.

Vamos a esbozar la primera parte de la argumentación de Gödel, cuando afirma que si G es demostrable entonces es demostrable $\neg G$. Supongamos que la fórmula G fuese demostrable. Tendría en tal caso que haber una sucesión de fórmulas dentro de la aritmética que constituyese una prueba para G. Sea k el número Gödel de esta prueba. En consecuencia, la relación aritmética designada por '$Dem(x, z)$' debe mantenerse entre k, número Gödel de la prueba, y $sust(n, 13, n)$, número Gödel de G, lo que equivale a decir que '$Dem(k, sust(n, 13, n))$' tiene que ser una fórmula aritmética verdadera. Sin embargo, puede demostrarse que esta relación aritmética es de un tipo tal que, si dicha relación se da entre un par definido de números, la fórmula que expresa este hecho es demostrable. Por consiguiente, la fórmula '$Dem(k, sust(n, 13, n))$' es no solo verdadera, sino también formalmente demostrable; es decir, la fórmula es un *teorema*. Pero, sirviéndonos de las reglas de transformación de la lógica elemental, podemos derivar inmediatamente de este teorema la fórmula ('$\neg(x)\neg Dem(x, sust(n, 13, n))$'. Hemos demostrado, por tanto, que si la fórmula G es demostrable, su negación formal es también demostrable. De donde se sigue que si el sistema formal es consistente, la fórmula G no es demostrable.

Un razonamiento en cierto modo análogo, aunque más complicado, es necesario para demostrar que si $\neg G$ es demostrable, entonces también G es demostrable. Prescindiremos de exponerlo aquí. <<

[31] Quizá le sea útil aquí al lector recordar que, igualmente, la prueba de que es imposible dividir un ángulo en tres partes iguales con regla y compás no significa que un ángulo no pueda dividirse en tres partes iguales por cualquier otro medio. Por el contrario, puede dividirse en tres partes iguales a cualquier ángulo si, por ejemplo, además del empleo de regla y compás, se permite utilizar una distancia fija marcada sobre la regla. <<

[32] La prueba de Gentzen se basa en disponer todas las demostraciones de la aritmética en un orden lineal según su grado de «simplicidad». La disposición resulta tener un módulo que es de un cierto tipo «ordinal transfinito». (La teoría de los números ordinales transfinitos fue creada en el siglo XIX por el matemático alemán Georg Cantor.) La prueba de consistencia se obtiene aplicando a este orden lineal una regla de deducción llamada «el principio de inducción transfinita». El razonamiento de Gentzen no puede ser representado en el formalismo de la aritmética. Además, aunque la mayoría de los estudiosos no discuten la fuerza lógica de la prueba, esta no es finitista en el sentido previsto por las condiciones originales de Hilbert para una prueba absoluta de consistencia. <<

[33] Las conclusiones de Gödel no excluyen la posibilidad de construir una prueba absoluta y finitista de consistencia para la aritmética. Gödel demostró que ninguna prueba de este tipo puede ser representada dentro de la aritmética. Su argumentación no elimina la posibilidad de pruebas estrictamente finitistas que no puedan ser representadas dentro de la aritmética. Pero nadie parece tener hoy día una clara idea de cómo habría de ser una prueba finitista que *no* fuese susceptible de formulación dentro de la aritmética. <<

[34] El realismo platónico sostiene la idea de que las matemáticas no crean ni inventan sus «objetos», sino que los descubren como Colón descubrió América. Ahora bien: si esto es cierto, los objetos deben tener en cierto sentido una «existencia» anterior a su descubrimiento. Conforme a la doctrina platónica, los objetos de estudio matemático no se encuentran en el orden espacio-temporal. Son formas eternas incorpóreas o arquetipos, que moran en un mundo distinto, accesible solamente al intelecto. De acuerdo con este punto de vista, las formas triangulares o circulares de los cuerpos físicos perceptibles por los sentidos no constituyen los objetos verdaderos de las matemáticas. Esas formas son, simplemente, encarnaciones imperfectas de un indivisible triángulo «perfecto», o círculo «perfecto», que es increado, no se halla jamás plenamente manifestado por las cosas materiales y únicamente puede ser captado por la mente exploradora del matemático. Gödel parece sostener un punto de vista semejante cuando dice: «Las clases y los conceptos pueden… ser concebidos como objetos reales…, existentes con independencia de nuestras definiciones y construcciones. Yo creo que la hipótesis de tales objetos es tan legítima como la hipótesis de los cuerpos físicos y que hay las mismas razones para creer en su existencia» (Kurt Gödel, «Russell's Mathematical Logic», en *The Philosophy of Bertrand Russell*, ed. Paul A. Schilpp, Evanston y Chicago, 1944, pág. 137). <<