

TP 3 - SIMULACIÓN DE MODELOS MM1 E INVENTARIO

Romero Joan
joanromerosfc@gmail.com

Santolari Matías
santolarimatiash@gmail.com

Foresi Alejandro
alejandroforesi15@gmail.com

Brajús Ana Paula Natividad
anapaulabrajus2001@gmail.com

June 26, 2023

ABSTRACT

Este informe tiene como objetivo poder simular y observar el comportamiento de un sistema de colas MM1 e inventario, que a través del ingreso de parámetros podremos analizar sus medidas de rendimiento y resultado.

Keywords Simulacion · MM1 · Inventatio · Teoria de Colas

1 Introducción

En el presente informe simularemos un sistema de colas con un único servidor, las aplicaciones de la vida real de los sistemas de cola cubren una amplia gama de aplicaciones, como la forma de proporcionar un servicio al cliente más rápido , mejorar el flujo de tráfico, enviar pedidos de manera eficiente desde un almacén y diseñar sistemas de telecomunicaciones, desde redes de datos hasta centros de llamadas. Luego simularemos un Modelo de inventarios que es una relación detallada, ordenada y valorada de los elementos que componen el patrimonio de una empresa.

En este trabajo práctico realizaremos la simulación de un sistema de colas M/M/1 en python y anylogic para posteriormente comparar los resultados obtenidos analíticamente.

2 Marco teórico

- t_i = tiempo de arribo del i-ésimo cliente ($t_0 = 0$)
- $A_i = t_i - t_{i-1}$ = tiempo de arribo entre el (i-1)-ésimo cliente y el i-ésimo.
- S_i = tiempo que el servidor pasa atendiendo al i-ésimo cliente (excluyendo el retraso del cliente en la cola)
- D_i = retraso en la cola del i-ésimo cliente.
- $c_i = t_i + D_i + S_i$ = tiempo en el que el i-ésimo cliente completa el servicio y se va.
- e_i = tiempo de ocurrencia del i-ésimo evento de cualquier tipo (valor que toma el reloj de simulación, excluyendo el valor $e_0 = 0$)

Estado del sistema: La colección de variables de estado necesarias para describir el sistema en un momento particular.

Reloj de simulación: Una variable que indica el valor actual del tiempo simulado.

Lista de eventos: Una lista que contiene el próximo momento en que ocurrirá cada tipo de evento.

Contadores estadísticos: Variables utilizadas para almacenar información estadística sobre el rendimiento del sistema.

Rutina de inicialización: Un subprograma para inicializar el modelo de simulación en el tiempo 0.

Rutina de sincronización: Un subprograma que determina el próximo evento de la lista de eventos y luego avanza el reloj de simulación hasta el momento en que ese evento debe ocurrir.

Rutina de evento: Un subprograma que actualiza el estado del sistema cuando ocurre un tipo particular de evento (hay una rutina de evento para cada tipo de evento).

Rutinas de biblioteca: Un conjunto de subprogramas utilizados para generar observaciones aleatorias a partir de distribuciones de probabilidad que se determinaron como parte del modelo de simulación.

Generador de informes: Un subprograma que calcula estimaciones (a partir de los contadores estadísticos) de las medidas de rendimiento deseadas y produce un informe cuando la simulación termina.

Programa principal: Un subprograma que invoca la rutina de sincronización para determinar el próximo evento y luego transfiere el control a la rutina de evento correspondiente para actualizar adecuadamente el estado del sistema. El programa principal también puede verificar la terminación e invocar el generador de informes cuando la simulación ha finalizado.

2.1 Sistema de colas

En la vida cotidiana, nos encontramos frecuentemente con situaciones en las que debemos esperar en una fila o cola. Por ejemplo, al hacer una llamada, a veces debemos esperar a que la red del operador esté disponible. Lo mismo ocurre al realizar compras en un supermercado o al registrarnos en el aeropuerto para acceder a la sala de espera. En estas circunstancias y muchas otras, se forman colas, por lo que es importante estudiar y analizar el comportamiento de estos sistemas con el objetivo de optimizar los servicios y los costos asociados.

Podemos considerar un modelo de formación de colas como un sistema compuesto por diversos elementos que interactúan entre sí con un propósito común. Este sistema incluye a los clientes, que son los individuos que forman parte del sistema, así como una línea de espera y los servidores encargados de brindar el servicio. Mediante el estudio de la interacción y las características de estos elementos, podemos tomar decisiones y mejorar los procesos, lo cual constituye la base de la teoría de colas.

El modelado de sistemas de colas resulta muy útil para tomar decisiones relacionadas con el servicio ofrecido en situaciones específicas y en la configuración del sistema en sí. Cuando los clientes deben esperar en una cola para recibir un servicio, están pagando un costo en términos de tiempo, que a menudo supera las expectativas. Además, las largas filas de espera implican costos adicionales, ya que pueden llevar a la pérdida de prestigio y clientes para la organización.

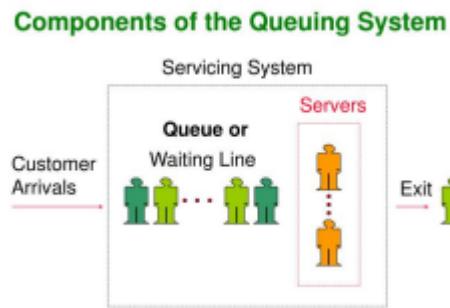


Figure 1: Componentes básicos de un sistema de cola

2.1.1 Marco teórico del modelo MM1

El modelo MM1 es un modelo de cola simple que consta de un servidor y una cola de espera. Las llegadas de clientes al sistema siguen un proceso de Poisson, mientras que el tiempo de servicio para cada cliente sigue una distribución

exponencial. En este modelo, se asume que no hay límite en la capacidad de la cola y que los clientes se atienden en el orden en que llegan.

La condición necesaria y suficiente para que un modelo M/M/1 tenga solución de equilibrio, es que $\rho < 1$, también denominada **condición de estabilidad**.

2.1.2 Medidas de rendimiento del modelo MM1

Las medidas de rendimiento que se analizarán en el modelo MM1 son las siguientes:

Promedio de clientes en el sistema (L_s):

$$L_s = \frac{\lambda}{\mu - \lambda} = \lambda W_s$$

Donde:

- λ es la tasa de llegada de clientes al sistema.
- μ es la tasa de servicio del servidor.

Promedio de clientes en cola (L_q):

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\rho^2}{1 - \rho}$$

Tiempo promedio en el sistema (W_s):

$$W_s = \frac{1}{\mu - \lambda} = W_q + \frac{1}{\mu}$$

Donde:

- W es el tiempo promedio que un cliente pasa en el sistema (incluyendo la espera en cola y el servicio).
- λ es la tasa de llegada de clientes al sistema.
- μ es la tasa de servicio del servidor.

Tiempo promedio en cola (W_q):

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{L_q}{\lambda}$$

Utilización del servidor (ρ):

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Donde:

- ρ es la fracción de tiempo en la que el servidor está ocupado atendiendo clientes.
- λ es la tasa de llegada de clientes al sistema.
- μ es la tasa de servicio del servidor.

Probabilidad de encontrar 0 clientes en cola (P_0):

$$P_0 = 1 - \rho$$

Probabilidad de encontrar n clientes en cola (P_n):

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n(1 - (\lambda/\mu))}{1 - (\lambda/\mu)^{N+1}}$$

$$P_n = \rho^n P_0$$

Donde:

- P_n es la probabilidad de encontrar n clientes en cola.
- λ es la tasa de llegada de clientes al sistema.

- μ es la tasa de servicio del servidor.
- N es el número máximo de clientes en cola.

Probabilidad de denegación de servicio (cola finita) (P_d):

$$P_d = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^N = 1 - \sum_{n=0}^N P_n$$

Donde:

- P_d es la probabilidad de denegación de servicio.
- λ es la tasa de llegada de clientes al sistema.
- μ es la tasa de servicio del servidor.
- N es el número máximo posible de clientes en cola.

2.1.3 Simulación de un sistema de cola

Considere un sistema de colas simple, las variables de interés son:

A_1, A_2, \dots, A_n tiempos entre llegada.

S_1, S_2, \dots, S_n tiempos de servicio de los clientes sucesivos.

Donde ambas son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas.

Para medir el desempeño de este sistema:

$d(n)$: retraso promedio esperado en la cola de los n clientes

En otra ejecución de la simulación, probablemente habría llegadas en diferentes momentos, y los tiempos de servicio requeridos también serían diferentes. Por lo tanto, el retraso promedio en una ejecución dada de la simulación se considera propiamente como una variable aleatoria en sí misma.

Una interpretación de esto es que $d(n)$ es el promedio de un número grande (en realidad, infinito) de demoras promedio de n clientes.

$$d(n) = \frac{\sum_{i=1}^n D_i}{n}$$

$q(n)$: número promedio esperado de clientes en la cola

Necesitamos definir qué significa este número promedio de tiempo de clientes en cola. Para hacer esto, sea $Q(I)$ el número de clientes en la cola en el momento I y sea $T(n)$ el tiempo requerido para observar nuestros n retrasos en la cola. Entonces, para cada vez que I entre 0 y $T(n)$, $Q(I)$ es un entero no negativo. Además, si hacemos que P_i sea la proporción esperada (que estará entre 0 y 1) del tiempo que $Q(I)$ es igual a i , entonces una definición razonable de $q(n)$ sería:

$$q(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i p_i$$

Para estimar $q(n)$ a partir de una simulación, simplemente reemplazamos las p por estimaciones de ellas y obtenemos:

$$\hat{q}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} i \hat{p}_i$$

donde \hat{p}_i es la proporción observada (en lugar de la esperada) del tiempo durante la simulación en que había i clientes en la cola. Si hacemos que T , sea el tiempo total durante la simulación que la cola tiene una longitud i , entonces $T(n) = T_0 + T_1 + T_2 + \dots + T_n$ y $\hat{p}_i = T_i/T(n)$, de modo que podemos reescribir la ecuación.

$$\hat{q}(n) = \frac{\sum_{i=0}^{\infty} i T_i}{T(n)}$$

La suma en el numerador de la ecuación, es simplemente el área bajo la curva $Q(t)$ entre el comienzo y el final de la simulación: El “área bajo una curva” es una integral, podemos escribir:

$$\sum_{i=0}^{\infty} iT_i = \int_{-0}^{T(n)} Q(t) dt$$

y el estimador de $q(n)$ se puede expresar como:

$$\hat{q}(n) = \frac{\int_{-0}^{T(n)} Q(t) dt}{T(n)}$$

La utilización esperada del servidor es la proporción esperada de tiempo durante la simulación (desde el tiempo 0 hasta el tiempo $T(n)$) que el servidor está ocupado y, por lo tanto, es un número entre 0 y 1; lo denotamos por $u(n)$.

$u(n)$ = la proporción de tiempo observada durante la simulación en la que el servidor está ocupado.

Ahora $u(n)$ podría calcularse directamente a partir de la simulación. Sin embargo, es más fácil ver esta cantidad como un promedio de tiempo continuo, similar a la longitud promedio de la cola, definiendo la “función ocupada”.

$$B(t) = \begin{cases} 1 & \text{si el servidor está ocupado en el momento } t \\ 0 & \text{si el servidor está desocupado en el momento } t \end{cases}$$

Entonces $u(n)$ podría expresarse como la proporción de tiempo en que $B(t)$ es igual a 1.

$$\hat{q}(n) = \frac{\int_{-0}^{T(n)} B(t) dt}{T(n)}$$

Para simular el modelo MM1, se puede utilizar el enfoque de simulación de eventos discretos. Los pasos generales para la simulación son los siguientes:

- Establecer parámetros iniciales:
 1. Tasa de llegada de clientes (λ): Se puede variar según los requerimientos (25%, 50%, 75%, 100%, 125% de la tasa de servicio).
 2. Tasa de servicio del servidor (μ): Valor constante.
 3. Número máximo de clientes en cola (N) (para casos de cola finita).
- Generar llegadas de clientes: Utilizar un proceso de Poisson para generar los tiempos entre llegadas de clientes.
- Generar tiempos de servicio: Utilizar una distribución exponencial para generar los tiempos de servicio para cada cliente.
- Simular el sistema:
 1. Mantener una lista de eventos futuros ordenada por tiempo.
 2. Manejar eventos de llegada y eventos de finalización de servicio.
 3. Actualizar las estadísticas relevantes después de cada evento.
- Repetir la simulación: Realizar diez corridas del modelo MM1 con los diferentes parámetros y registrar los resultados.

2.2 Modelo de inventario

2.2.1 Marco teórico del modelo de inventario

El modelo de inventario es un enfoque utilizado para gestionar el nivel de existencias de un producto en un sistema de inventario. El objetivo es encontrar un equilibrio entre el costo de mantener inventario y el costo de faltante, para optimizar el rendimiento y maximizar la eficiencia operativa.

En el modelo de inventario, se consideran los siguientes elementos:

- **Costo de pedido o de orden:** Representa el costo asociado con la realización de un pedido o reabastecimiento de inventario. Puede incluir el costo de procesamiento del pedido, transporte y otros gastos relacionados.

- **Costo de mantenimiento:** Representa el costo de mantener inventario en el sistema durante un período de tiempo determinado. Incluye costos como almacenamiento, seguro, obsolescencia y deterioro.
- **Costo de faltante:** Representa el costo asociado con la falta de inventario o la incapacidad de satisfacer la demanda del cliente. Puede incluir costos por pérdida de ventas, pérdida de clientes y daño a la reputación.
- **Costo total:** Es la suma de los costos de orden, costo de mantenimiento y costo de faltante. Representa el costo total de operación del sistema de inventario.

2.2.2 Parámetros del modelo de inventario

En el modelo de inventario, se pueden seleccionar los siguientes parámetros:

- **Cantidad de pedido (Z):** La cantidad de unidades a ordenar en cada pedido o reabastecimiento de inventario.
- **Punto de reorden (s):** El nivel de inventario en el que se debe realizar un nuevo pedido para evitar el faltante de inventario.
- **Tiempo de entrega (U):** El tiempo necesario para recibir un pedido después de realizarlo.
- **Demandas (D):** La cantidad de unidades que se requieren o consumen durante un período de tiempo determinado.

2.2.3 Fórmulas del modelo de inventario

Supongamos que una empresa que vende un solo producto le gustaría decidir cuántos artículos debe tener en inventario para cada uno de los próximos n meses. Los tamaños de las demandas, D , son variables aleatorias e idénticamente distribuidas (con la siguiente distribución empírica):

$$D = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } 1/6 \\ 2 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 3 & \text{con probabilidad } 1/3 \\ 4 & \text{con probabilidad } 1/6 \end{cases}$$

La demora del proveedor en entregar un pedido está definida por la variable aleatoria U que si consideramos que el proveedor puede entregar en cualquier momento dentro del segundo período, tendríamos la siguiente definición:

$$U \sim U(0.5, 1)$$

Al comienzo de cada mes, la empresa revisa el nivel de inventario y decide cuántos artículos pedir a su proveedor. Si definimos:

Z = artículos ordenados por una empresa. (Si $Z = 0$, no se incurre en ningún costo)

Cuando se hace un pedido, el tiempo requerido para que llegue (llamado retraso en la entrega o tiempo de entrega) es una variable aleatoria que se distribuye uniformemente entre 0 y 1 mes. La empresa utiliza una política estacionaria (s , S) para decidir cuánto pedir, es decir:

$$Z = \begin{cases} S - I & \text{Si } I \leq s \\ 0 & \text{Si } I \geq s \end{cases}$$

donde I es el nivel de inventario al comienzo del mes. Cuando ocurre una demanda, se satisface inmediatamente si el nivel de inventario es al menos tan grande como la demanda. Si la demanda excede el nivel de inventario, el exceso de demanda sobre la oferta se atrasa y se satisface con entregas futuras.

Sea $I(t)$ el nivel de inventario en el momento t

Sea $I^+(t) = \max(I(t), 0)$ el número de artículos físicamente disponibles en el inventario en el momento t

Sea $I^-(t) = \min(I(t), 0)$ el número la acumulación de artículos físicamente disponibles en el tiempo t

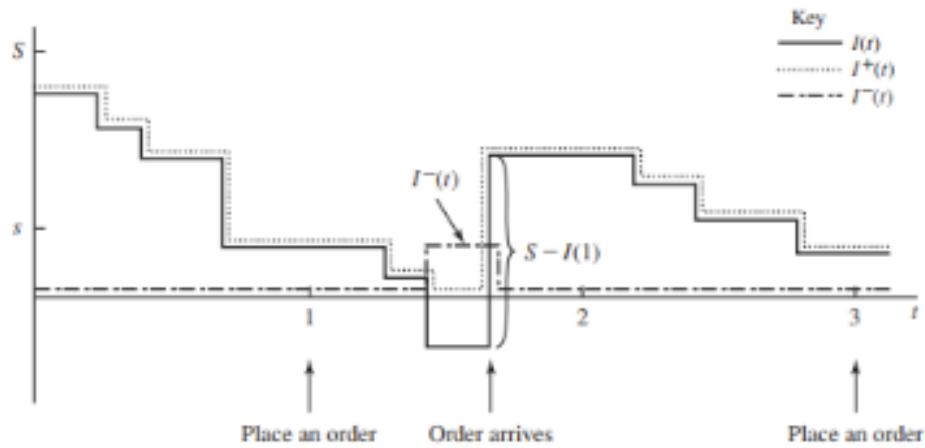


Figure 2: Estructura básica de un sistema de inventario

Tenemos por definir las fórmulas para la obtención de los costos correspondientes:

$$C_{total} = C_p + C_f + C_m$$

donde C_p es el costo por pedido, C_f es el costo por faltante y C_m el costo por mantenimiento.

$$C_p = \begin{cases} 0 & \text{Si } Z=0 \leq s \\ k + iZ & \text{Si } Z \neq 0 \geq s \end{cases}$$

donde k es un costo fijo, i es el costo unitario del producto.

$$C_f = \pi \bar{I}^-$$

donde π es un costo unitario por no disponer de mercadería por periodo.

$$C_m = h \bar{I}^+$$

donde h es un costo unitario por mantener un artículo en el depósito por período.

2.2.4 Simulación de un Modelo de inventario

Utilizando el enfoque de revisión periódica cada mes para simular el sistema de inventario, primero definimos los parámetros iniciales:

1. Nivel de inventario inicial (I_0): 35 unidades
2. Cantidad de pedido (s): 20 unidades
3. Punto de reorden (S): 40 unidades
4. Tasa de clientes: promedio de 20 clientes por mes
5. Demanda: Se asume que la demanda sigue la siguiente distribución:
 - 1 artículo con probabilidad de 1/6
 - 2 artículos con probabilidad de 1/3
 - 3 artículos con probabilidad de 1/3
 - 4 artículos con probabilidad de 1/6
6. Duración de simulación: 120 meses

Para la simulación del sistema de inventario seguimos estos pasos:

- Paso 1: Inicializar el inventario y las variables de seguimiento.

- Paso 2: Para cada mes de la simulación (desde el mes 1 hasta el mes 120):
 - Generar la demanda del mes utilizando la distribución de probabilidad establecida.
 - Actualizar el inventario disponible restando la demanda del inventario actual.
 - Verificar si se debe realizar un pedido: si el inventario disponible es igual o menor que el punto de reorden, se realiza un pedido de la cantidad de pedido (s) y se suma el tiempo de entrega al mes actual.
 - Actualizar el inventario disponible sumando la cantidad pedida.
 - Registrar los valores del mes en las variables de seguimiento.
- Paso 3: Calcular las medidas de rendimiento utilizando los valores registrados:
 - Costo de orden: Calcular el costo total de los pedidos realizados durante los 120 meses de simulación.
 - Costo de mantenimiento: Calcular el costo total de mantener inventario en el sistema durante los 120 meses de simulación.
 - Costo de faltante: Calcular el costo total asociado con la falta de inventario durante los 120 meses de simulación.
 - Costo total: Calcular la suma de los costos de orden, mantenimiento y faltante.

A partir de los datos generados en la simulación, realizamos las gráficas y análisis correspondientes procediendo de la siguiente manera:

- Generar gráficas que representen la evolución del inventario a lo largo de los 120 meses de simulación.
- Calcular y mostrar los valores promedio del inventario durante la simulación.
- Realizar un análisis comparativo de los costos de orden, mantenimiento y faltante obtenidos en la simulación, y evaluar la eficiencia y rentabilidad del sistema de inventario bajo las condiciones establecidas.

3 Resultados

En el presente estudio, se ha decidido variar la tasa de arribos con respecto a la tasa de servicio en relaciones al 25%, 50%, 75%, 100% y 125% de la tasa de servicio. SE seleccionó un valor inicial de la tasa de servicio $\mu = 2.0$ para realizar un total de 10 simulaciones.

Caso	Valor λ	valor μ	Relación λ/μ
1	0.5	2.0	25%
2	1.0	2.0	50%
3	1.5	2.0	75%
4	2.0	2.0	100%
5	2.5	2.0	125%

Se debe tener en cuenta para la comparación, que si λ (tasa de arribos) $\geq \mu$ (tasa de servicio). Como ocurre en las configuraciones 3 y 4, ya no es posible calcular los valores esperados, a excepción de la utilizaciones del servidor que en estos casos convergerá siempre en 1. Ya que lógicamente al llegar más clientes por unidad de tiempo de lo que el servidor puede atender, la longitud de la cola y la demora promedio en esta tiende a infinito.

3.1 Simulación MM1 con Python

Gráficas obtenidas en Python para 10 corridas de programa con 10000 delayed costumers y un tamaño de cola infinita

3.1.1 Caso 1. $\lambda = 0,5$ y $\mu = 2,0$

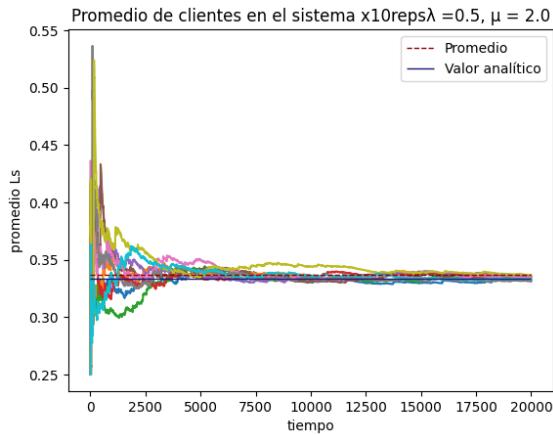


Figure 3: N° prom clientes en sistema

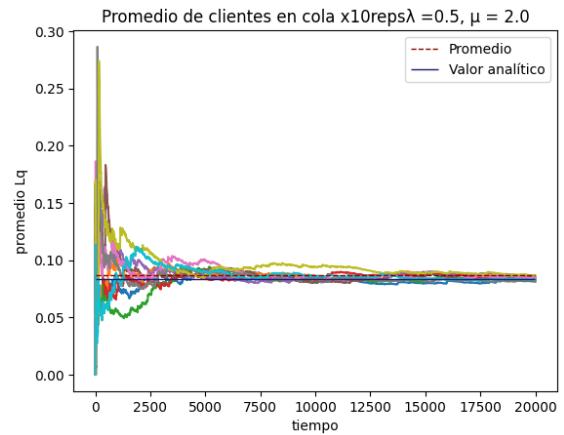


Figure 4: N° prom clientes en cola $q(n)$

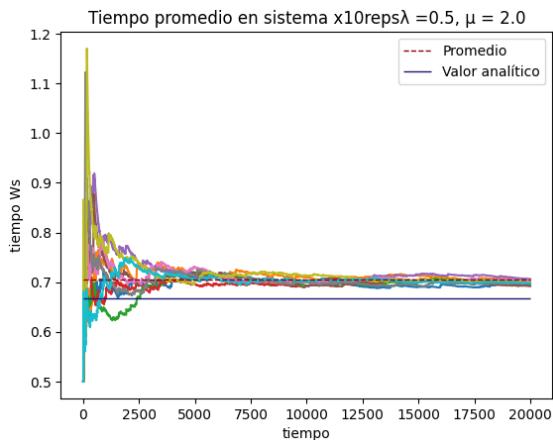


Figure 5: Tiempo prom en sistema

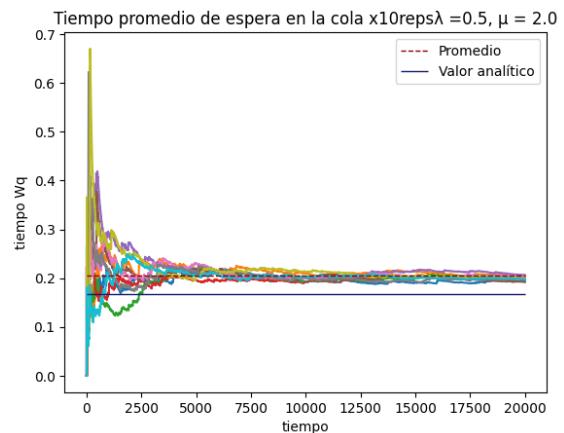


Figure 6: Tiempo prom en cola $d(n)$

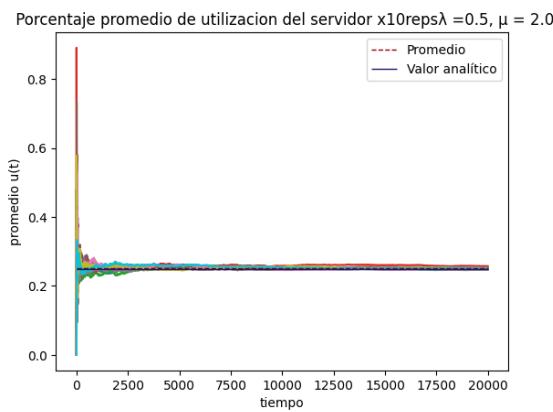


Figure 7: Utilización del servidor

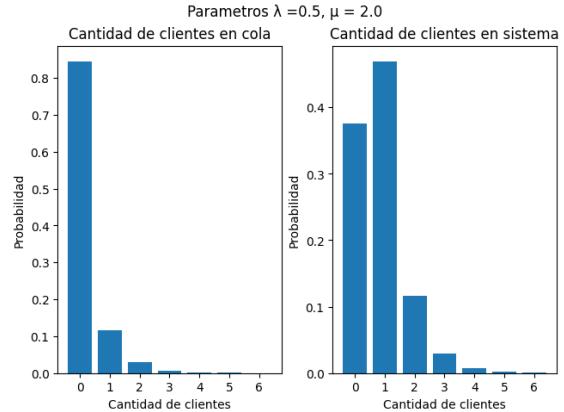


Figure 8: Frecuencias clientes en cola y sistema

3.1.2 Caso 2. $\lambda = 1,0$ y $\mu = 2,0$

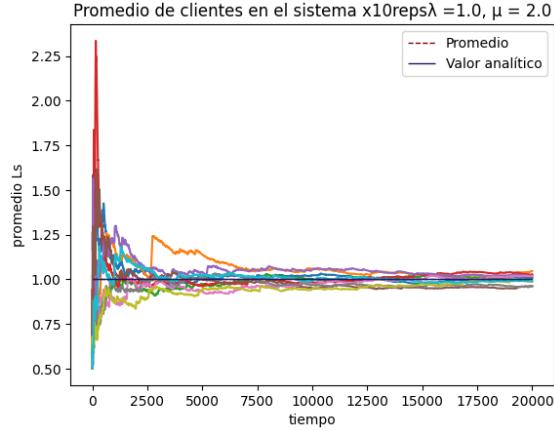


Figure 9: N° prom clientes en sistema

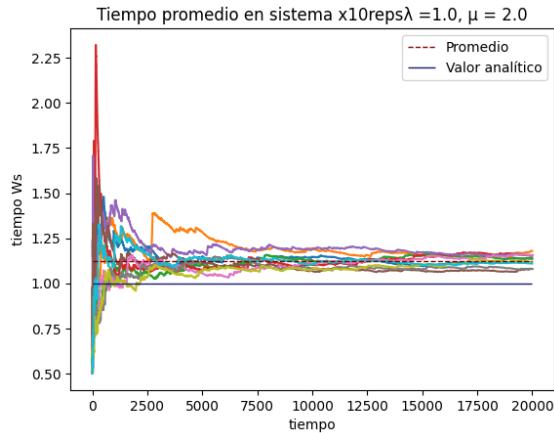


Figure 11: Tiempo prom en sistema

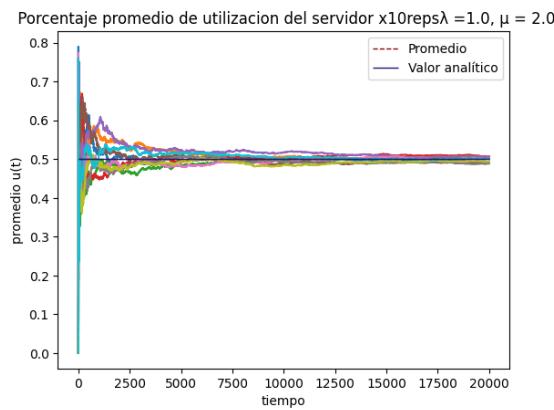


Figure 13: Utilización del servidor

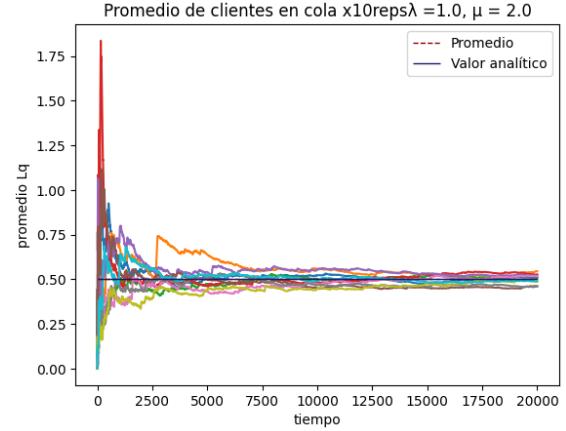


Figure 10: N° prom clientes en cola q(n)

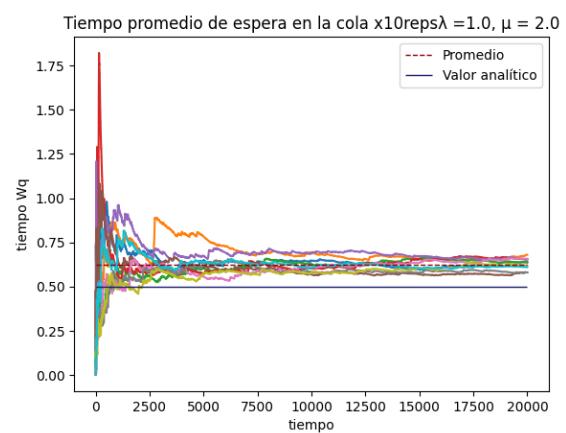


Figure 12: Tiempo prom en cola d(n)

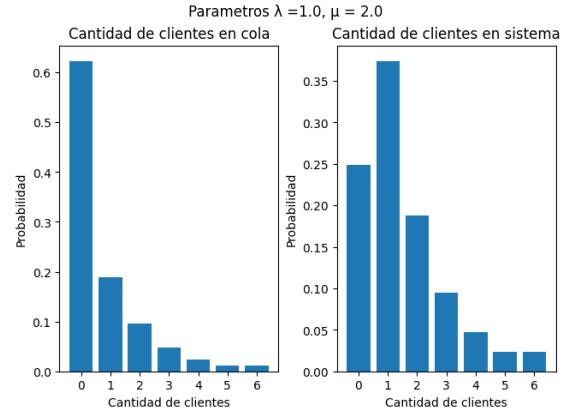


Figure 14: Frecuencias clientes en cola y sistema

3.1.3 Caso 3. $\lambda = 1,5$ y $\mu = 2,0$

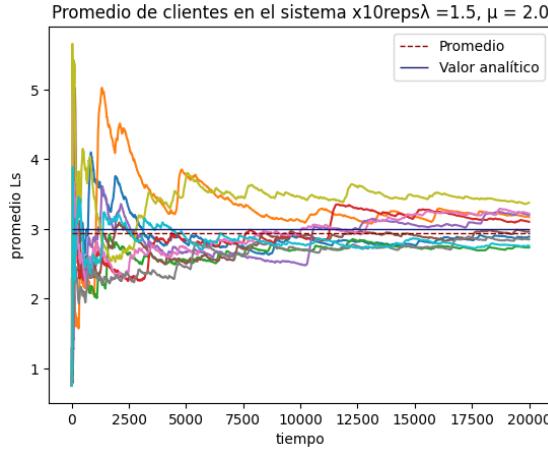


Figure 15: N° prom clientes en sistema

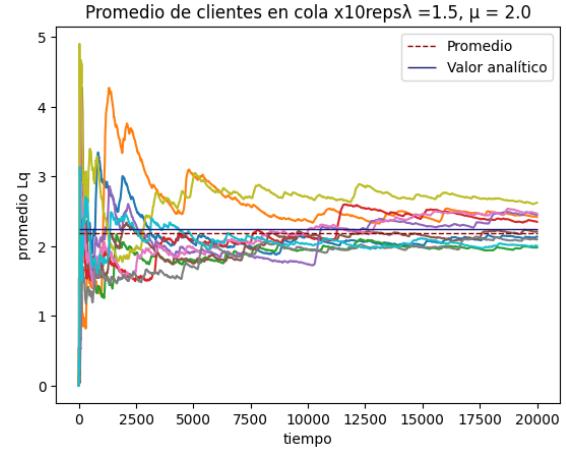


Figure 16: N° prom clientes en cola q(n)

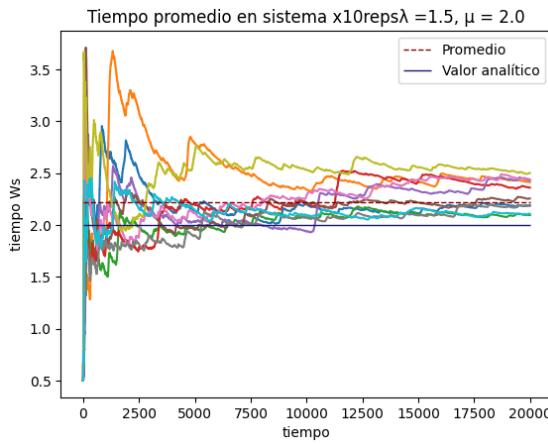


Figure 17: Tiempo prom en sistema

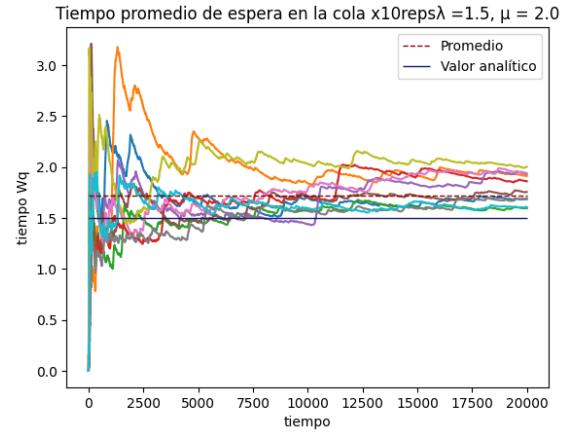


Figure 18: Tiempo prom en cola d(n)

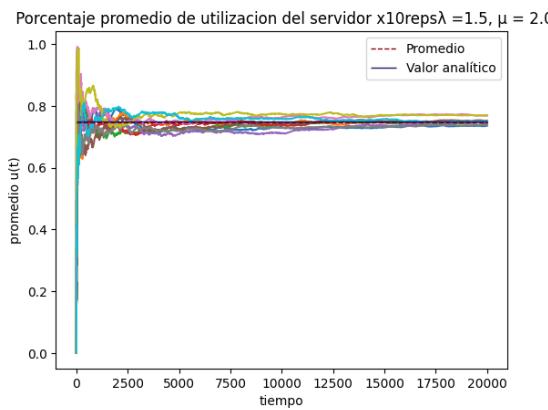


Figure 19: Utilización del servidor

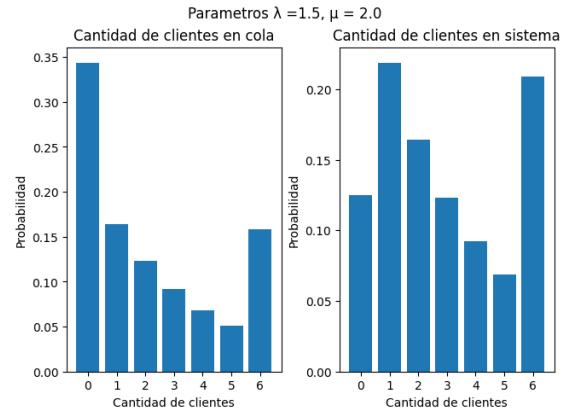


Figure 20: Frecuencias clientes en cola y sistema

3.1.4 Caso 4. $\lambda = 2,0$ y $\mu = 2,0$

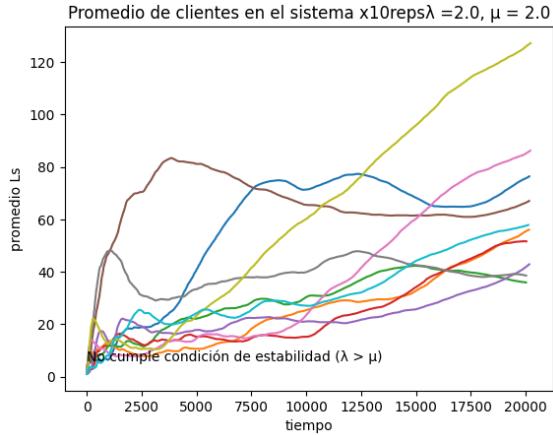


Figure 21: N° prom clientes en sistema

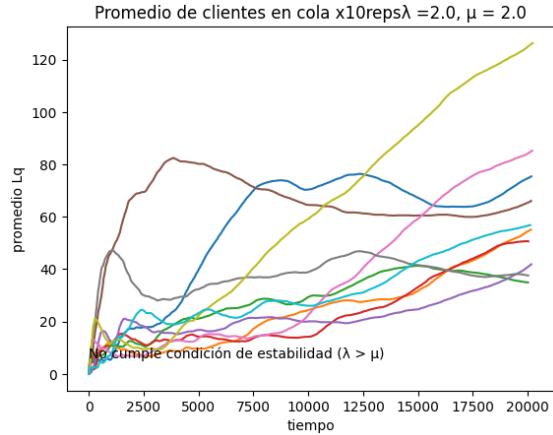


Figure 22: N° prom clientes en cola q(n)

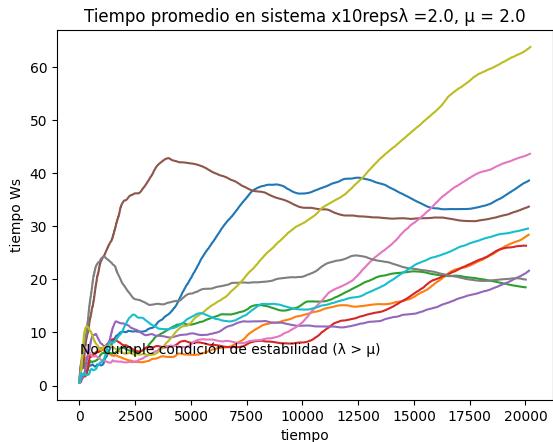


Figure 23: Tiempo prom en sistema

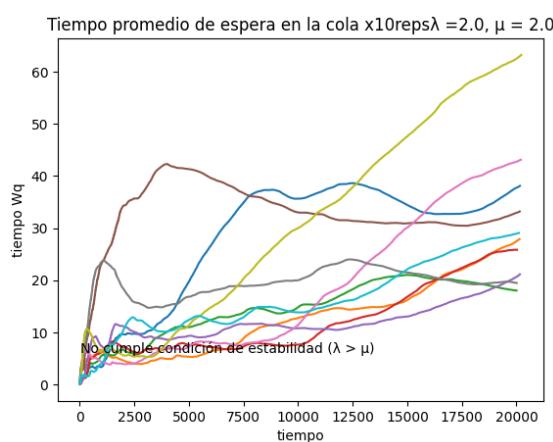


Figure 24: Tiempo prom en cola d(n)

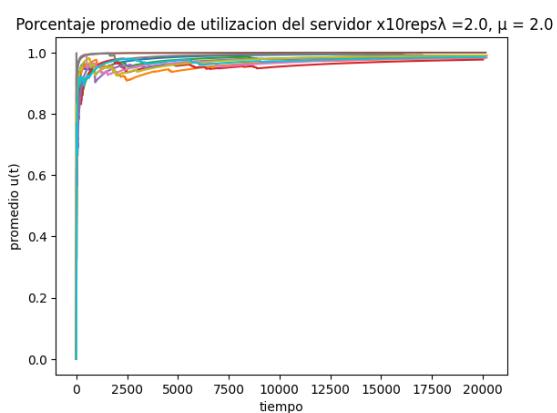


Figure 25: Utilización del servidor

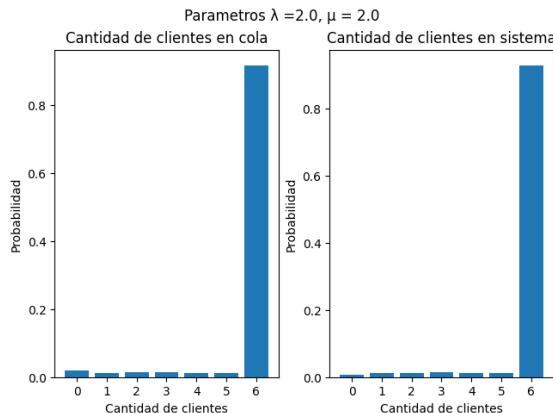


Figure 26: Frecuencias clientes en cola y sistema

3.1.5 Caso 5. $\lambda = 2.5$ y $\mu = 2.0$

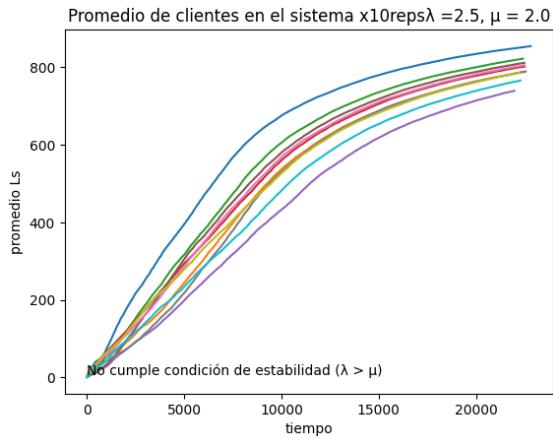


Figure 27: N° prom clientes en sistema

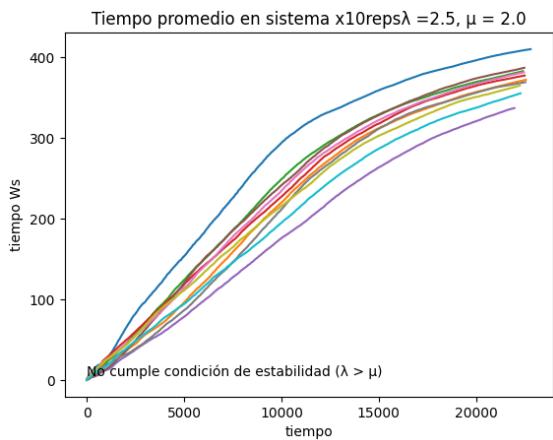


Figure 29: Tiempo prom en sistema

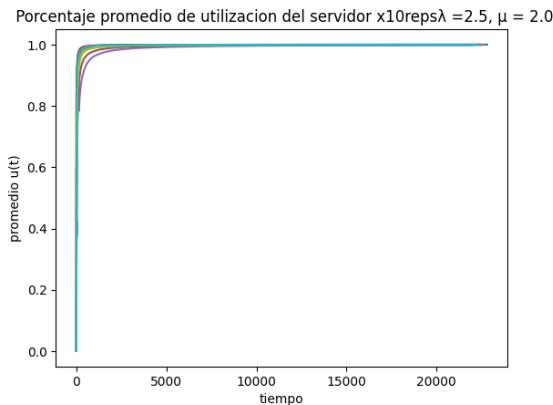


Figure 31: Utilización del servidor

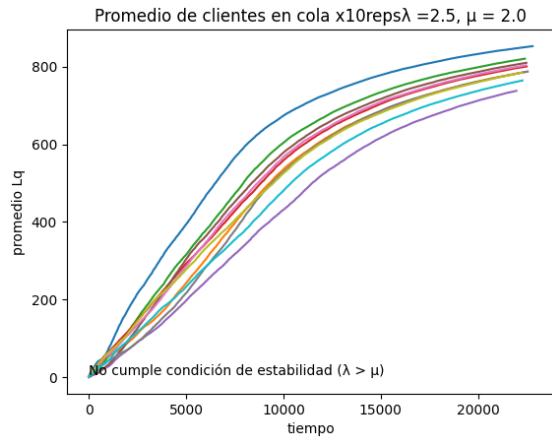


Figure 28: N° prom clientes en cola q(n)

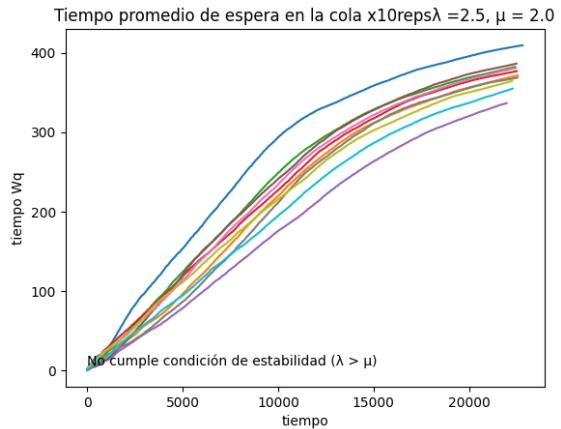


Figure 30: Tiempo prom en cola d(n)

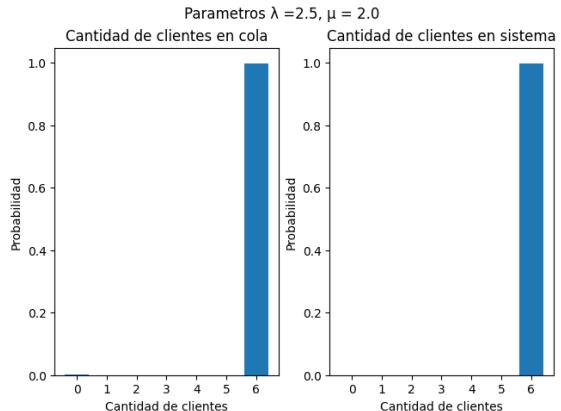


Figure 32: Frecuencias clientes en cola y sistema

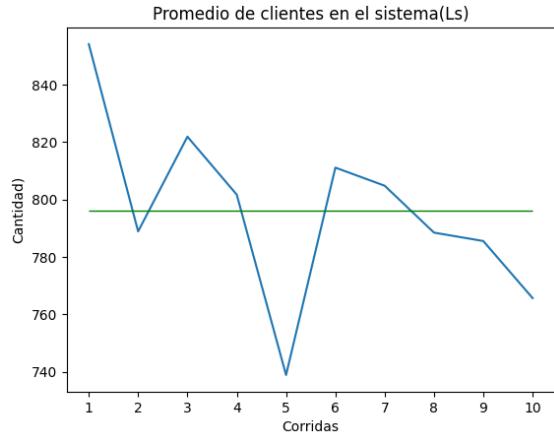


Figure 33: N° prom clientes en sistema de 10 corridas

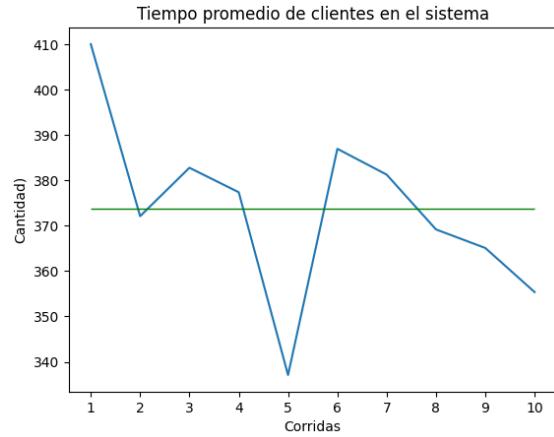


Figure 34: Tiempo en el sistema de las 10 corridas

En estas dos últimas gráficas vemos como están alejados en un rango muy amplio los valores de estos indicadores lo que ocurre debido a la inestabilidad del sistema. Al contrario podemos observar abajo, la misma gráfica para el caso 1, donde el sistema cumple la condición de estabilidad y gestiona eficientemente la llegada de clientes al servidor debido a la baja tasa de arribos.

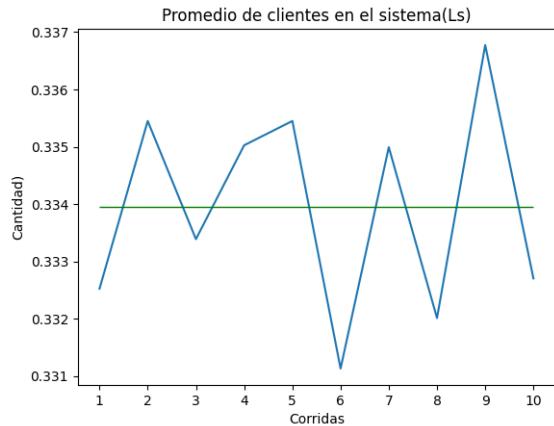


Figure 35: N° prom clientes en sistema de cada una de las 10 corridas para caso 1.

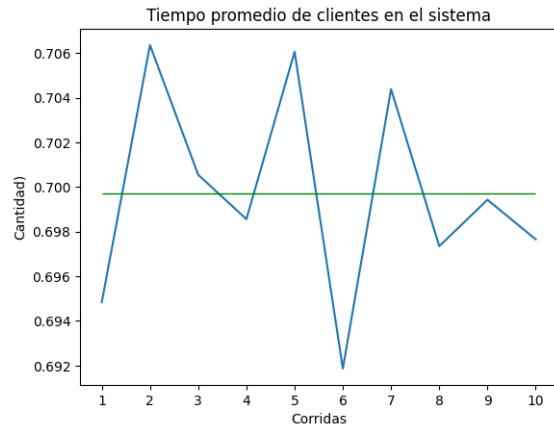


Figure 36: Tiempo en sistema de 10 corridas para caso 1.

3.1.6 Denegación de servicio

En la siguiente sección, presentamos las gráficas y valores obtenidos a través de simulaciones del modelo M/M/1 centradas en analizar el impacto de diferentes tasas de arribo y tamaños máximos de cola en la denegación del servicio. Para llevar a cabo estas simulaciones, implementamos un sistema con una tasa de servicio fija (μ) igual a 2 clientes por unidad de tiempo, mientras variamos la tasa de arribos (λ) al 25%, 50%, 75%, 100% y 125 % respecto a dicha tasa.

Además, hemos considerado cinco escenarios distintos para el tamaño máximo permitido en la cola: finita e igual a los siguientes valores: {0, 2, 5, 10, 50}. Estos límites nos permitirán observar cómo afectan tanto las diferencias entre tasas como las restricciones impuestas sobre el espacio disponible en la fila al desempeño general del sistema.

A continuación encontrará una serie detallada de gráficos que ilustran cómo varía la probabilidad promedio estimada para cada combinación posible entre λ y tamaño máximo permitido. De esta manera podremos identificar tendencias claras que ayudenrender mejor cómo estos factores influyen directamente en el fenómeno estudiado.

Lím. cola	μ	λ	Prob. denegación
0	2	0.5	0.201
	2	1	0.335
	2	1.5	0.428
	2	2	0.499
	2	2.5	0.555
2	2	0.5	0.012
	2	1	0.068
	2	1.5	0.156
	2	2	0.249
	2	2.5	0.339
5	2	0.5	0.00136
	2	1	0.009
	2	1.5	0.054
	2	2	0.142
	2	2.5	0.254
10	2	0.5	0.0
	2	1	0.00026
	2	1.5	0.01016
	2	2	0.08473
	2	2.5	0.2154
50	2	0.5	0.0
	2	1	0.0
	2	1.5	0.0
	2	2	0.02174
	2	2.5	0.19598

Para el caso de límite de cola en 2 tenemos la probabilidad de encontrar 0 o 1 clientes en cola (la probabilidad de hallar 2 es la denegación):

- para $\lambda = 0.5$ y $\mu = 2$
 - $P_0 = 0.94$
 - $P_1 = 0.04$
- para $\lambda = 1$ y $\mu = 2$
 - $P_0 = 0.80$
 - $P_1 = 0.13$
- para $\lambda = 1.5$ y $\mu = 2$
 - $P_0 = 0.64$
 - $P_1 = 0.20$
- para $\lambda = 2$ y $\mu = 2$
 - $P_0 = 0.47$
 - $P_1 = 0.25$
- para $\lambda = 2.5$ y $\mu = 2$

- $P_0 = 0.38$
- $P_1 = 0.27$

A continuación, mostramos algunas de las gráficas obtenidas que pueden resultar útiles para el análisis visual que complementa los datos de la tabla:

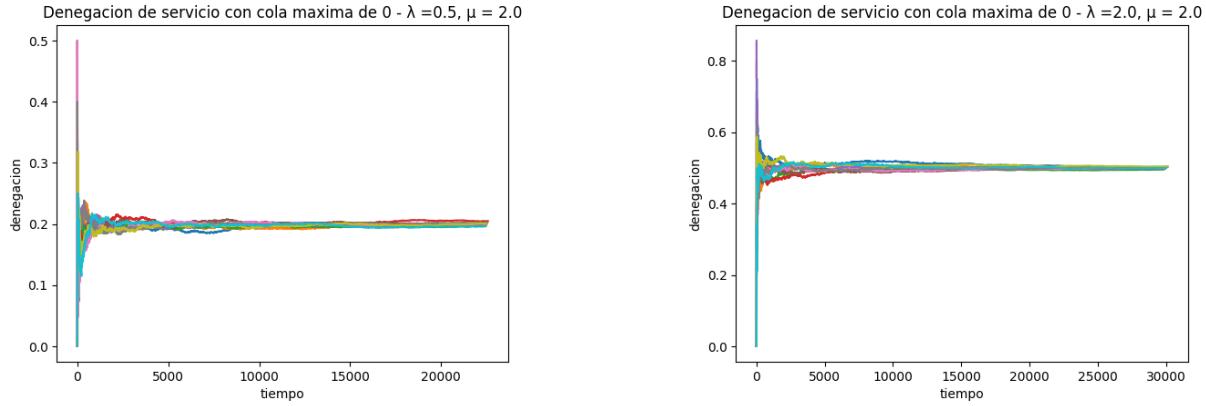


Figure 37: Denegación de servicio para límite de cola 0

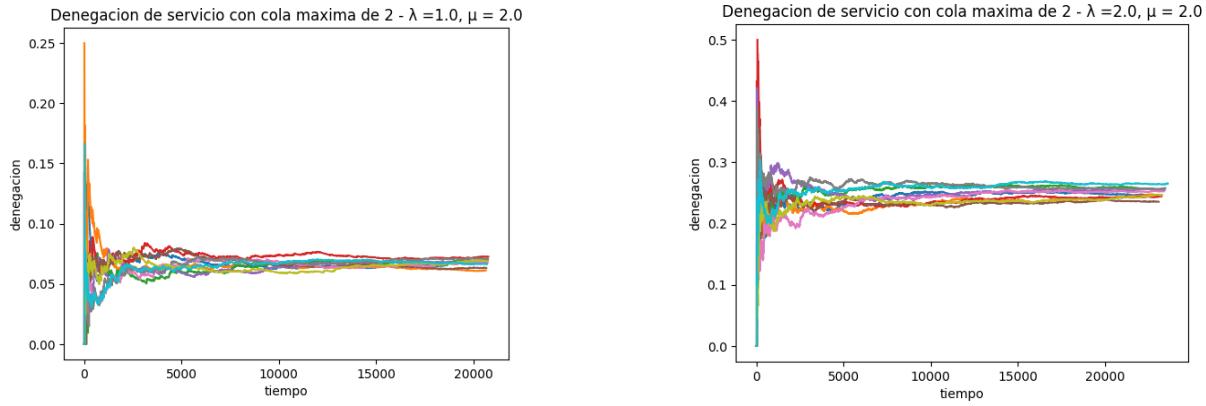


Figure 38: Denegación de servicio para límite de cola 2

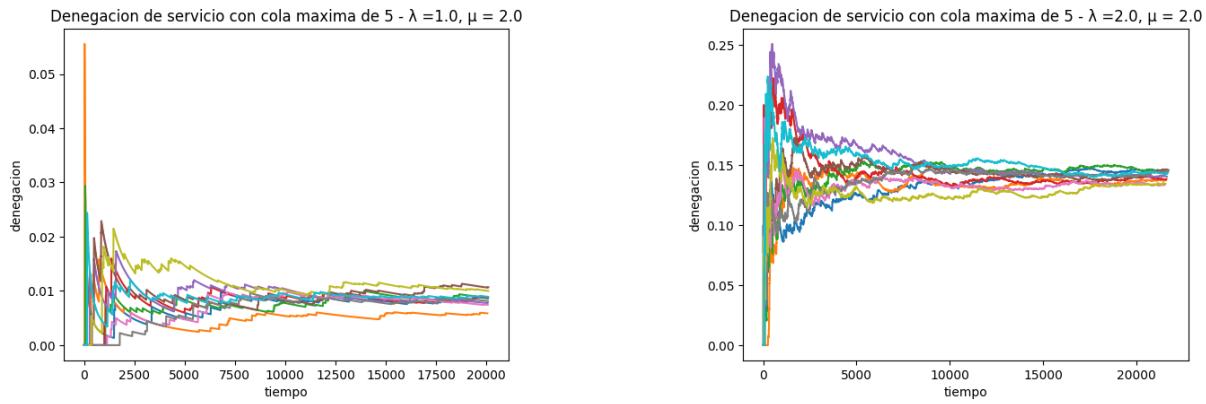


Figure 39: Denegación de servicio para límite de cola 5

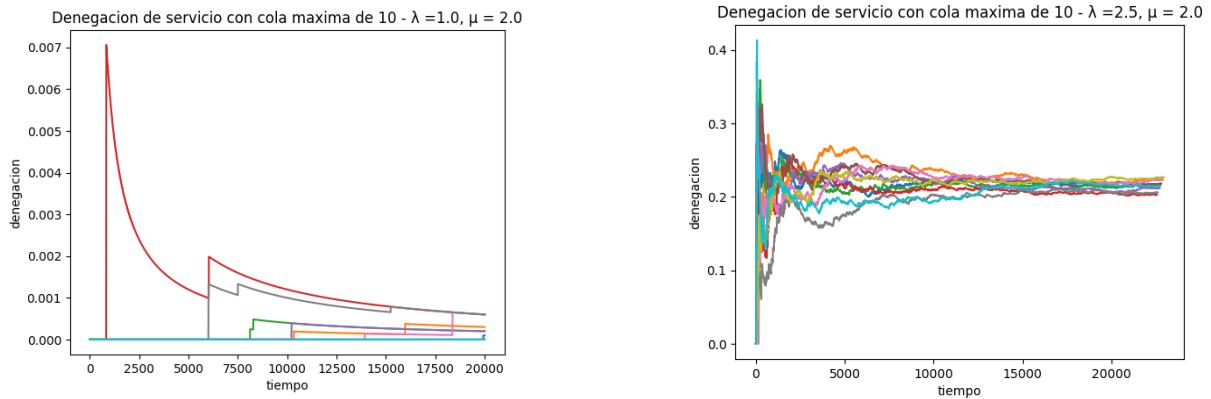


Figure 40: Denegación de servicio para límite de cola 10

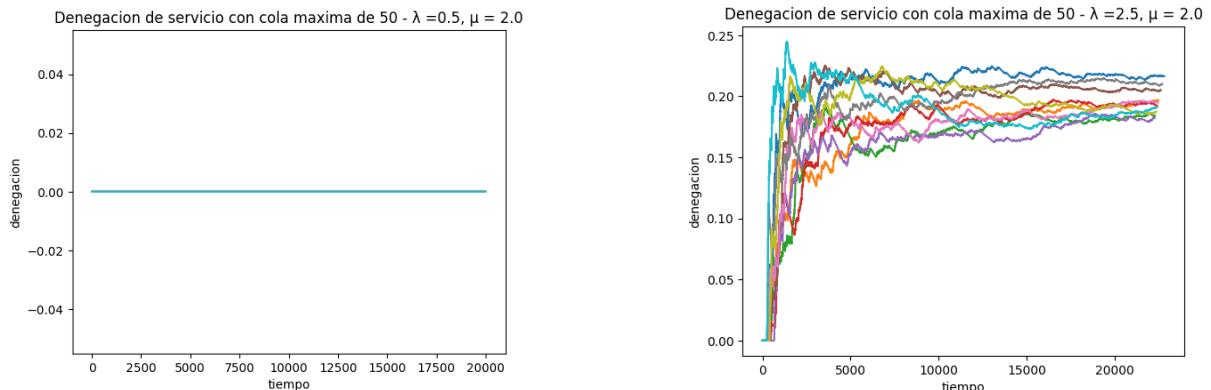


Figure 41: Denegación de servicio para límite de cola 50

3.2 Simulación MM1 con Anylogic

Gráficas obtenidas en AnyLogic PLE considerando un tamaño de cola infinita.

3.2.1 Tasa de arribo del 25% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 0.5$ minutos/ $\mu = 2$ minutos

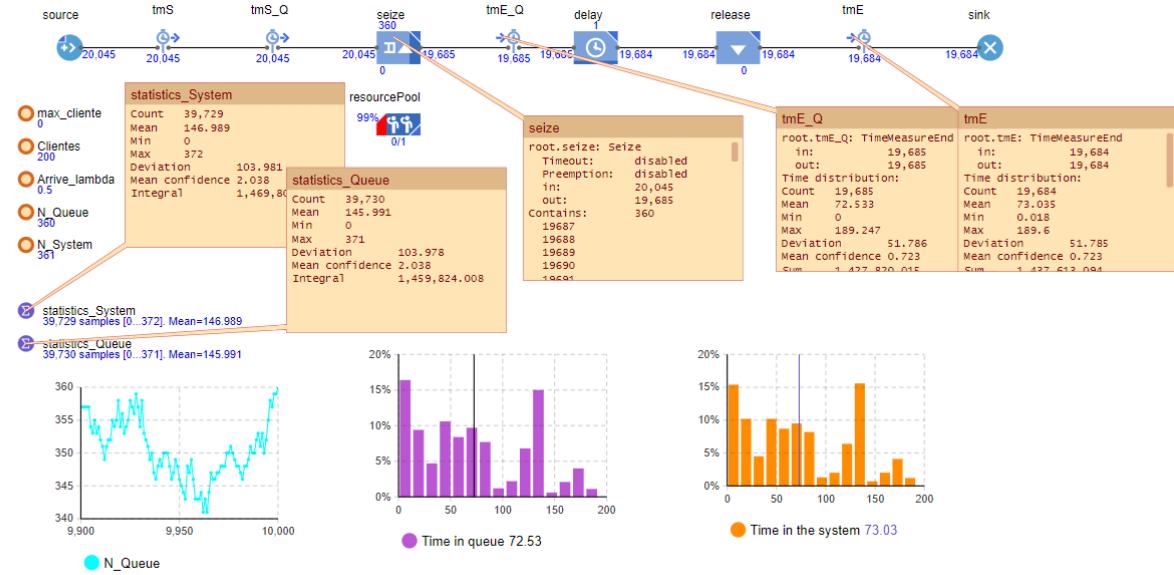


Figure 42: Tasa de arribo 25%

3.2.2 Tasa de arribo del 50% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 1$ minutos/ $\mu = 2$ minutos

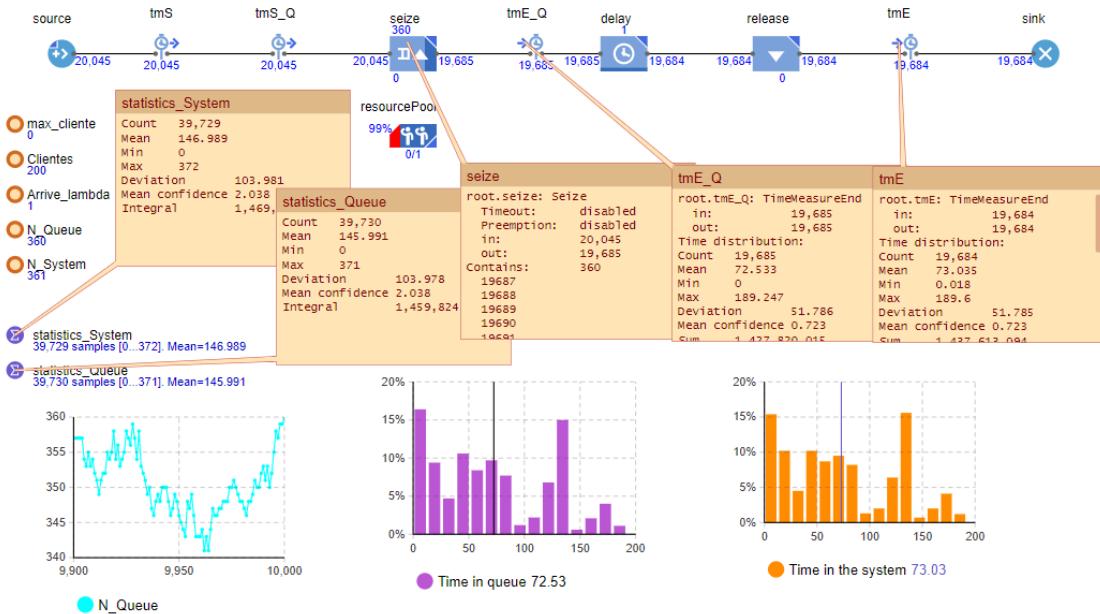


Figure 43: Tasa de arribo 50%

3.2.3 Tasa de arribo del 75% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 1.5$ minutos/ $\mu = 2$ minutos

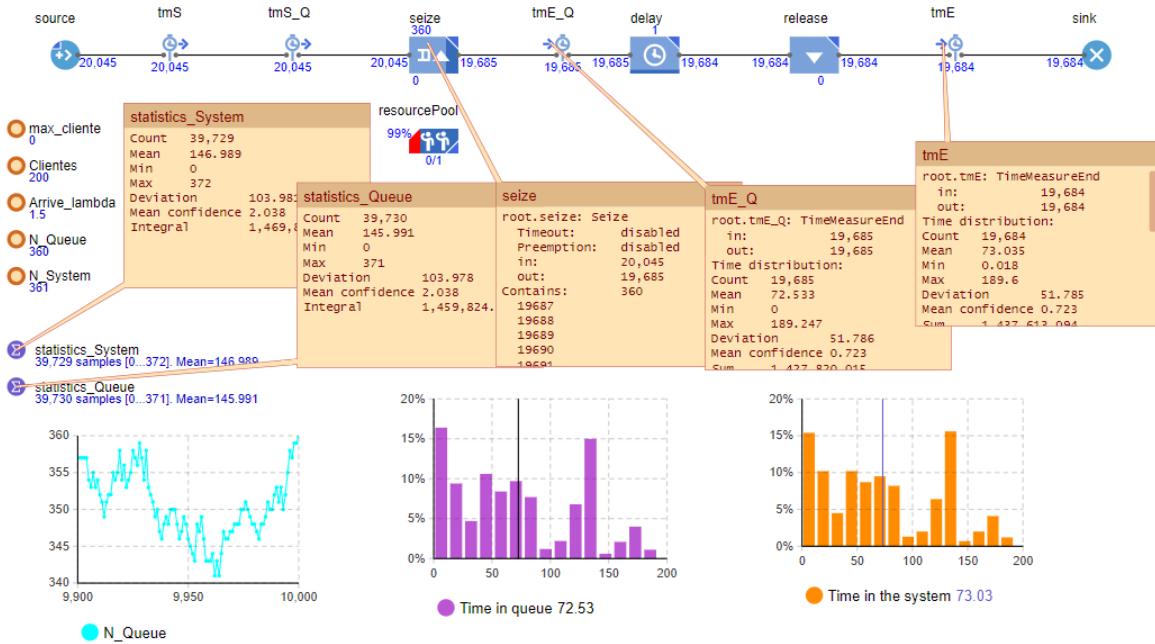


Figure 44: Tasa de arribo 75%

3.2.4 Tasa de arribo del 100% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 2$ minutos/ $\mu = 2$ minutos

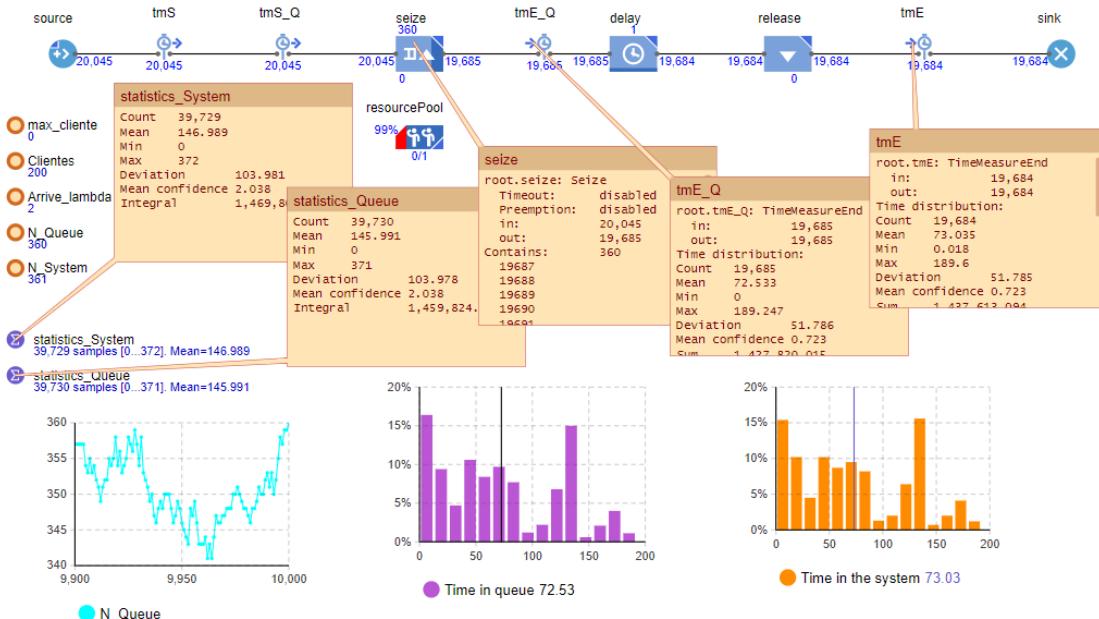


Figure 45: Tasa de arribo 100%

3.2.5 Tasa de arribo del 125% con respecto a la tasa de servicio. $\lambda = 2.5$ minutos/ $\mu = 2$ minutos

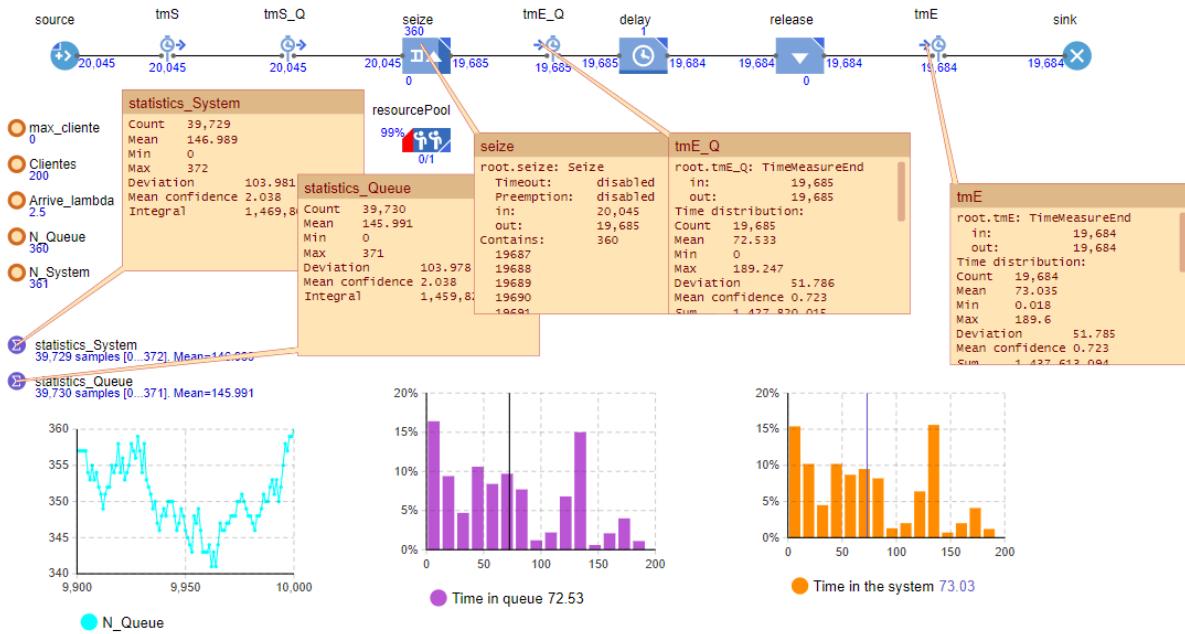


Figure 46: Tasa de arribo 125%

3.3 Simulación Modelo Inventario con Python

Gráficas obtenidas en Python para 10 corridas de programa con 10000 delayed costumers y un tamaño de cola infinita

3.3.1 Corrida 1

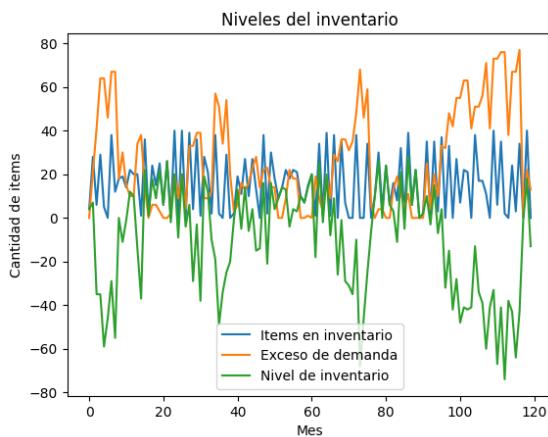


Figure 47: Nivel de Inventario

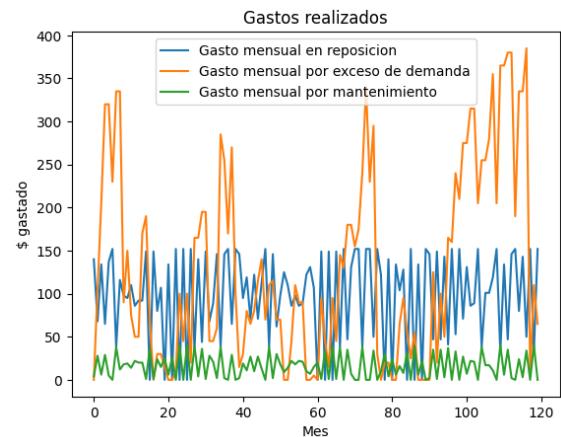


Figure 48: Gastos Mensuales

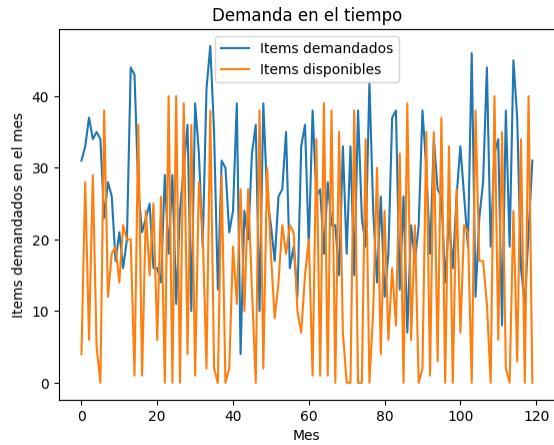


Figure 49: Nivel de demanda en el tiempo

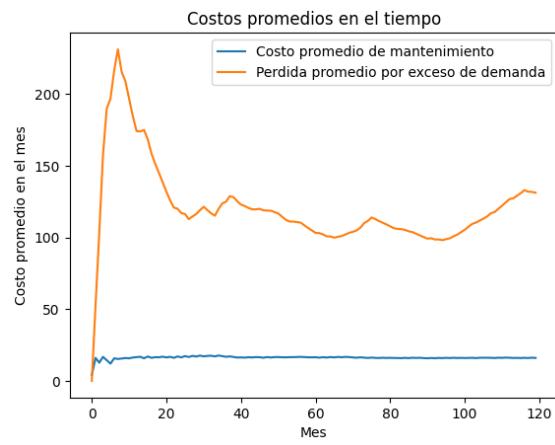


Figure 50: Nivel de Costos Promedio

3.3.2 Corrida 2

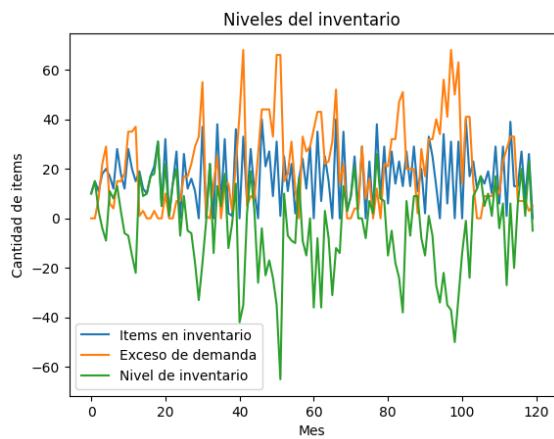


Figure 51: Nivel de Inventory

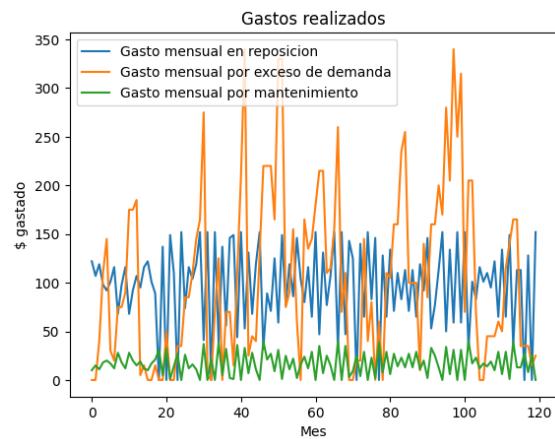


Figure 52: Gastos Mensuales

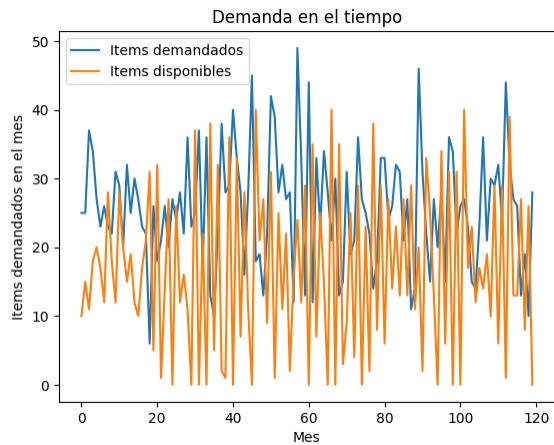


Figure 53: Nivel de demanda en el tiempo

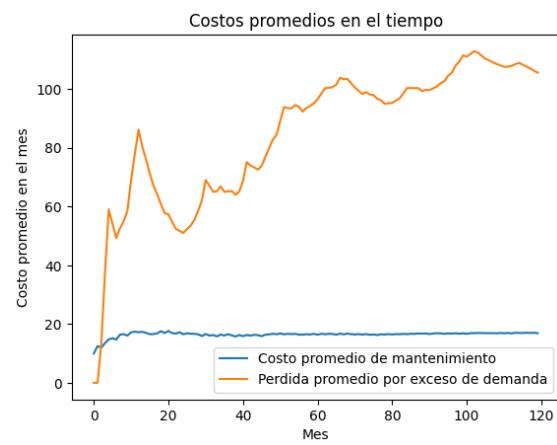


Figure 54: Nivel de Costos Promedio

3.3.3 Corrida 3

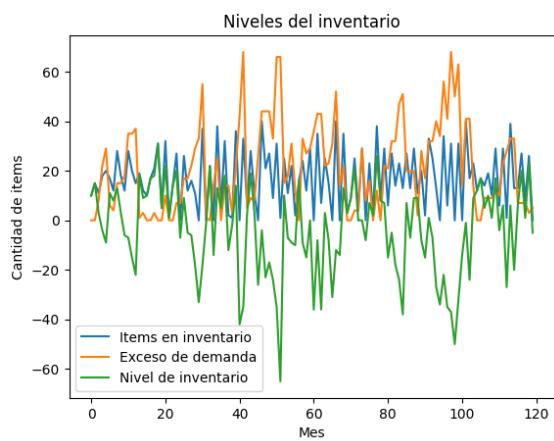


Figure 55: Nivel de Inventario

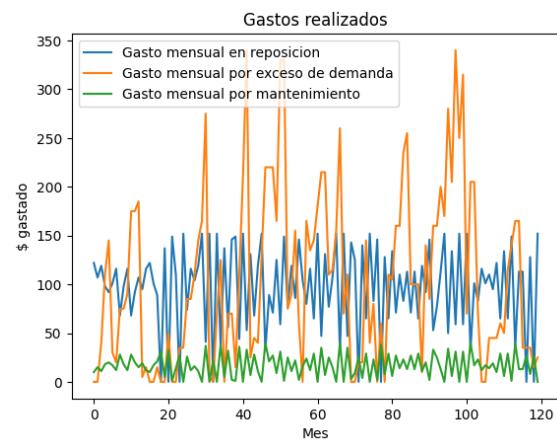


Figure 56: Gastos Mensuales

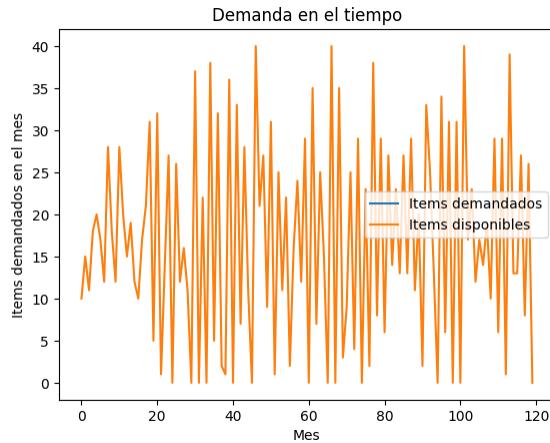


Figure 57: Nivel de demanda en el tiempo

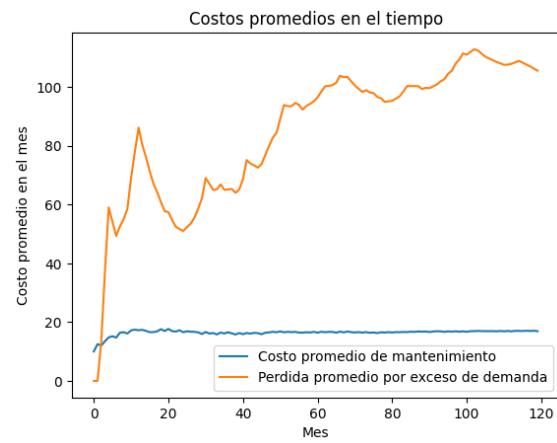


Figure 58: Nivel de Costos Promedio

3.3.4 Corrida 4

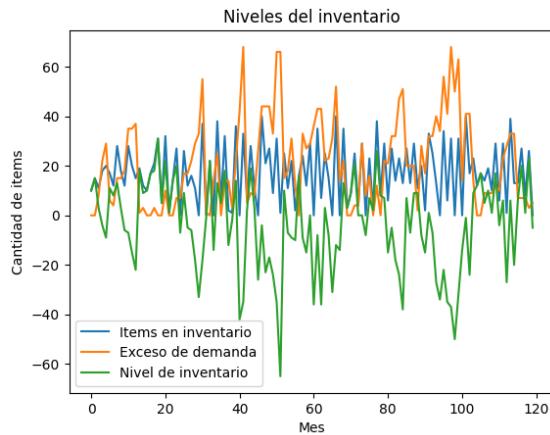


Figure 59: Nivel de Inventory

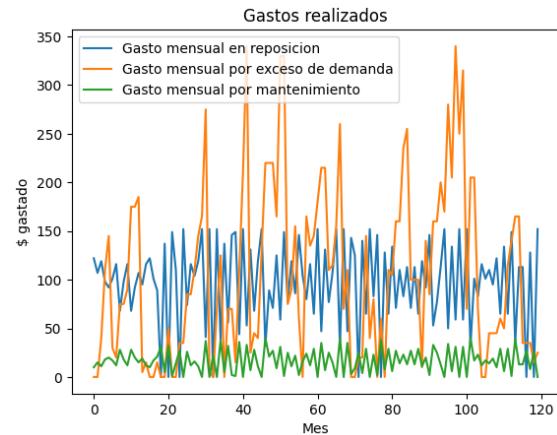


Figure 60: Gastos Mensuales

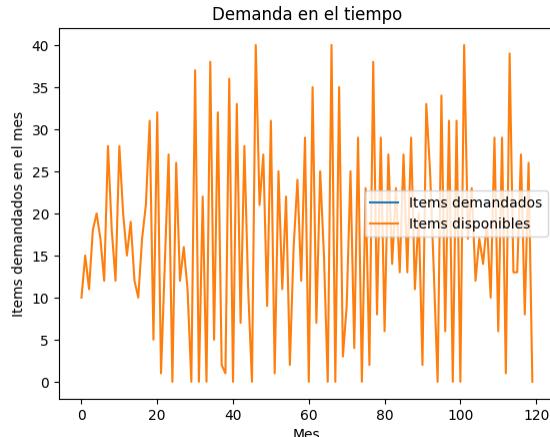


Figure 61: Nivel de demanda en el tiempo

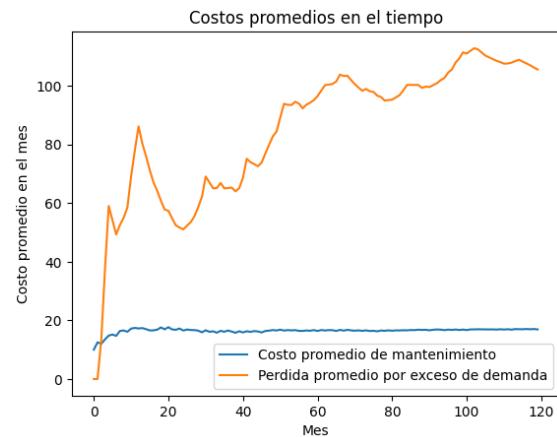


Figure 62: Nivel de Costos Promedio

3.3.5 Corrida 5

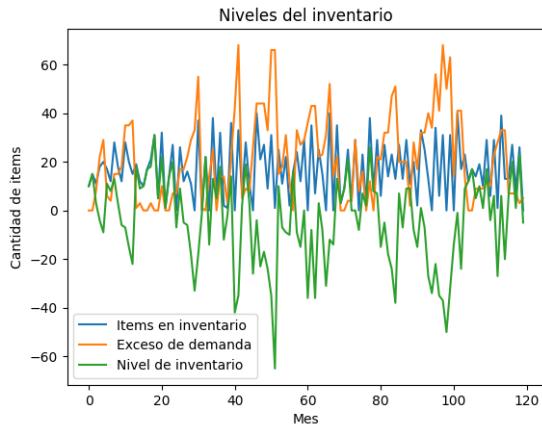


Figure 63: Nivel de Inventory

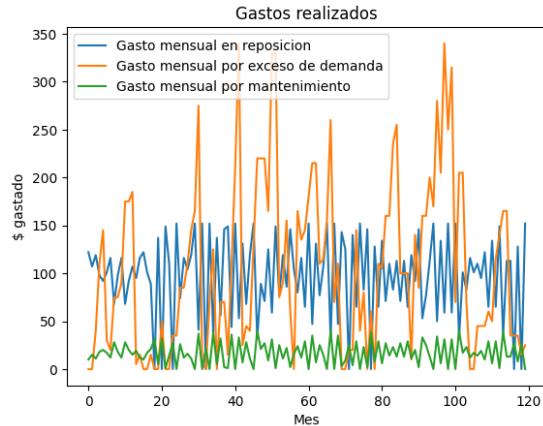


Figure 64: Gastos Mensuales

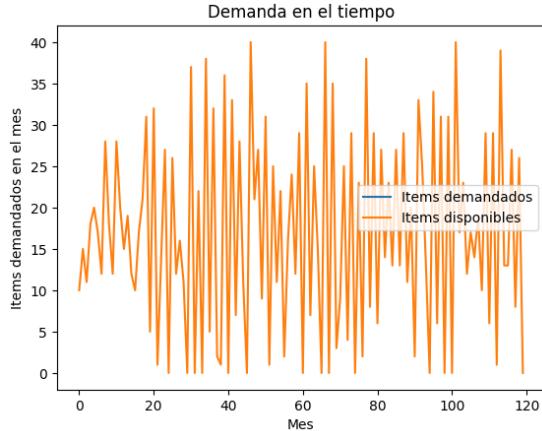


Figure 65: Nivel de demanda en el tiempo

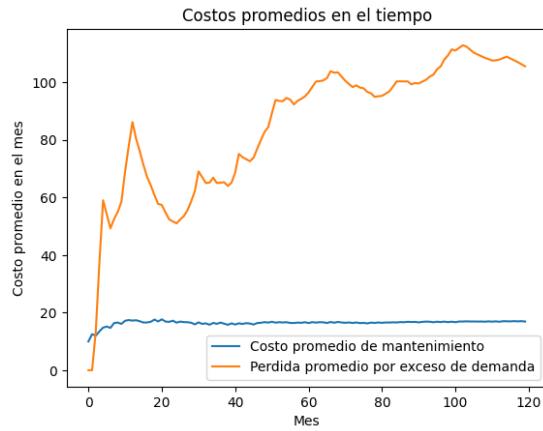


Figure 66: Nivel de Costos Promedio

3.3.6 Corrida 6

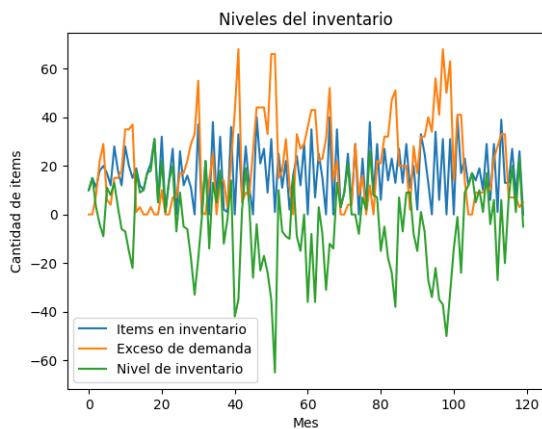


Figure 67: Nivel de Inventory

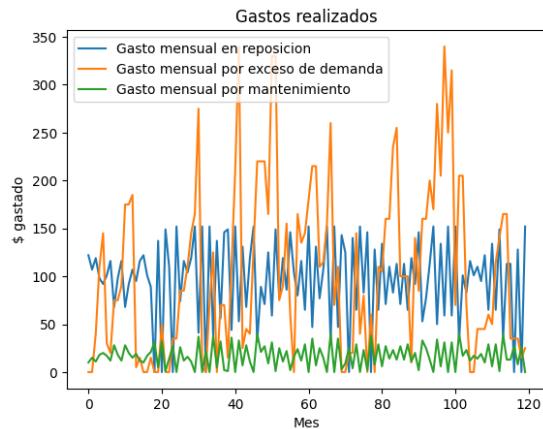


Figure 68: Gastos Mensuales

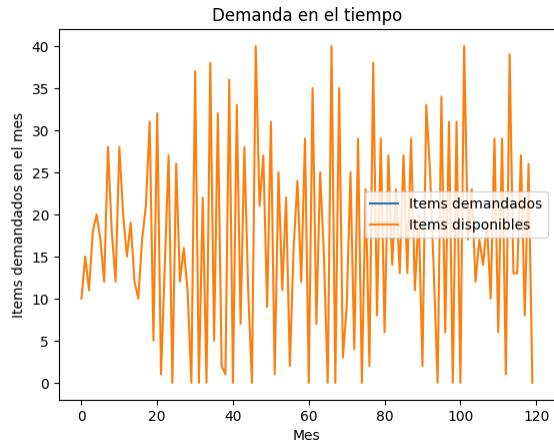


Figure 69: Nivel de demanda en el tiempo

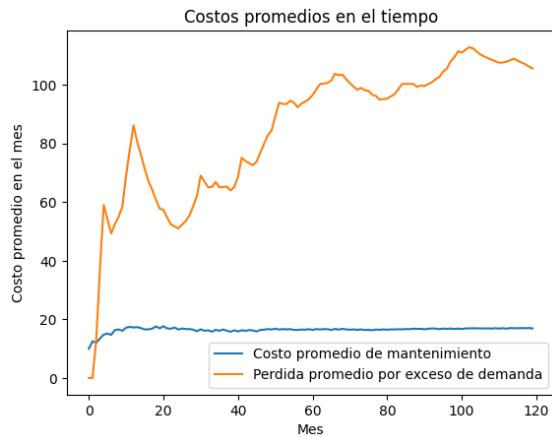


Figure 70: Nivel de Costos Promedio

3.3.7 Corrida 7

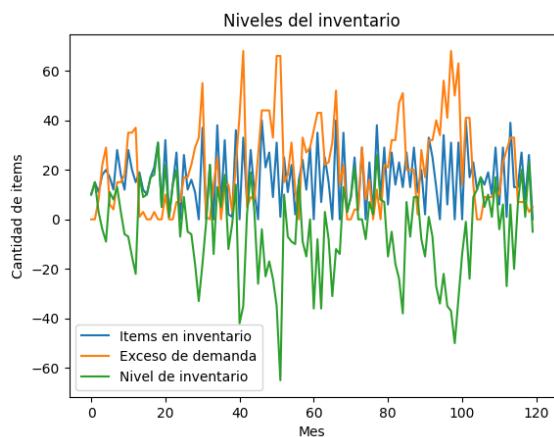


Figure 71: Nivel de Inventory

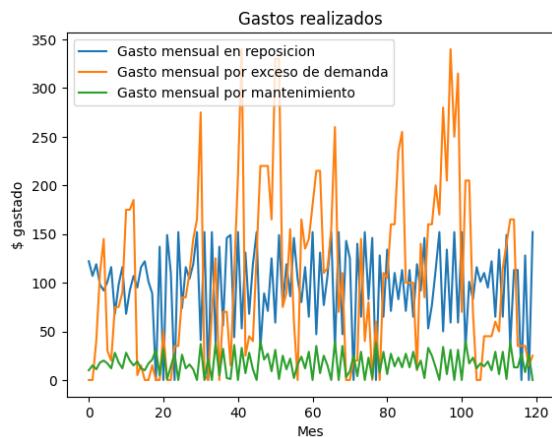


Figure 72: Gastos Mensuales

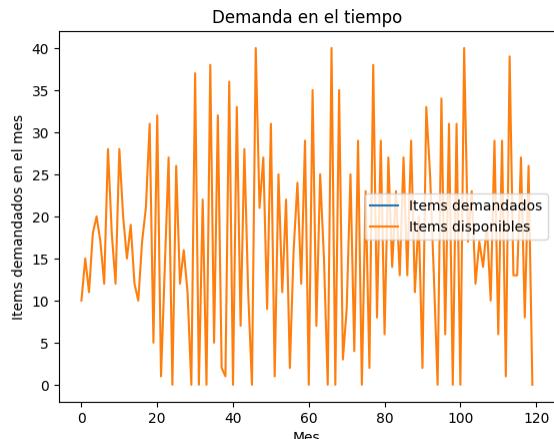


Figure 73: Nivel de demanda en el tiempo

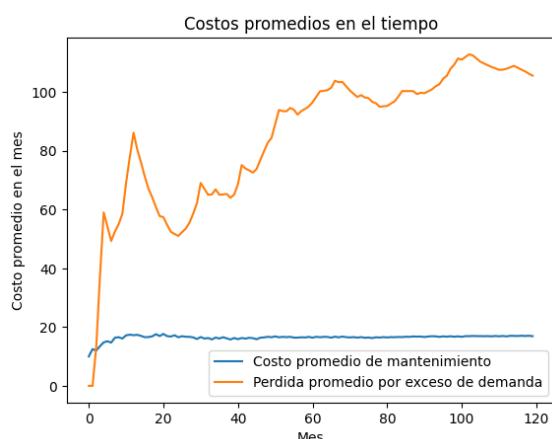


Figure 74: Nivel de Costos Promedio

3.3.8 Corrida 8

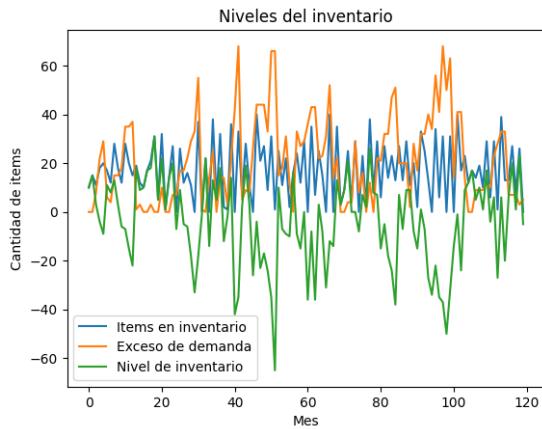


Figure 75: Nivel de Inventory

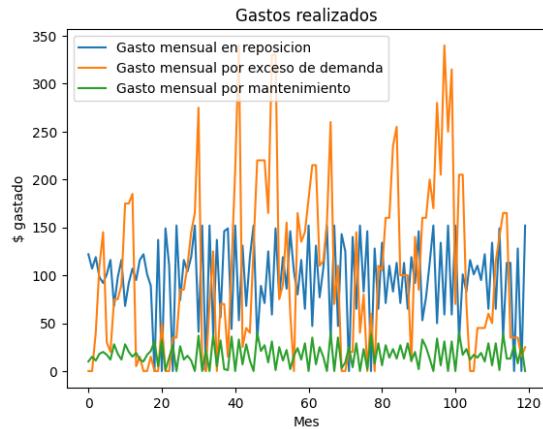


Figure 76: Gastos Mensuales

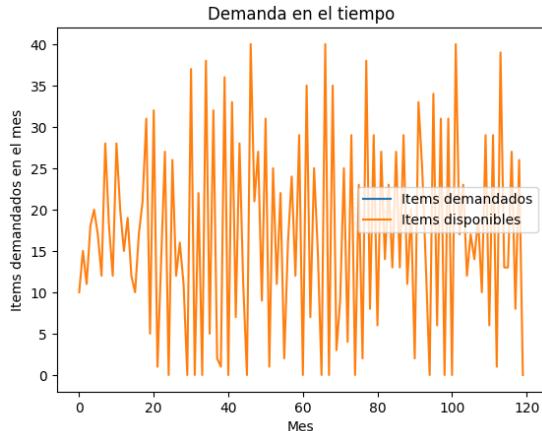


Figure 77: Nivel de demanda en el tiempo

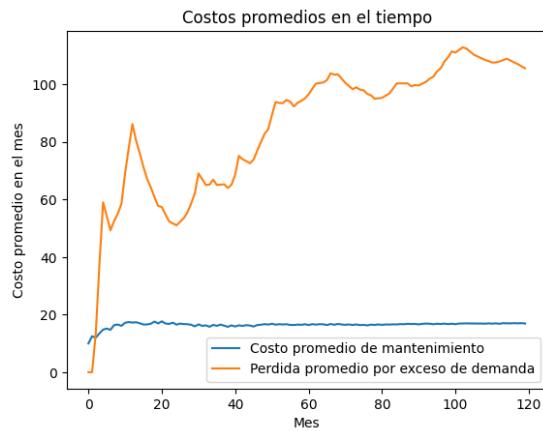


Figure 78: Nivel de Costos Promedio

3.3.9 Corrida 9

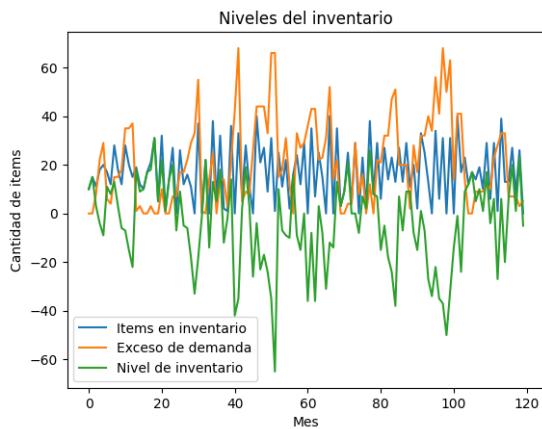


Figure 79: Nivel de Inventory

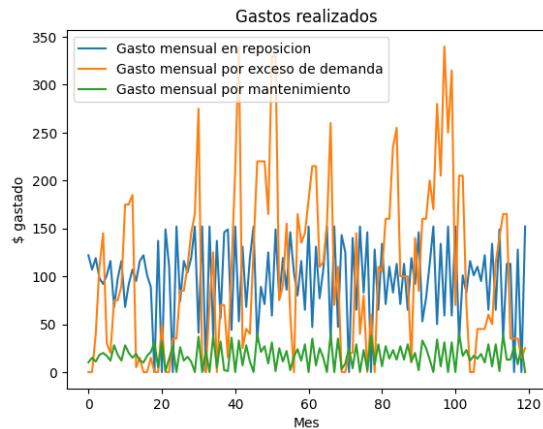


Figure 80: Gastos Mensuales

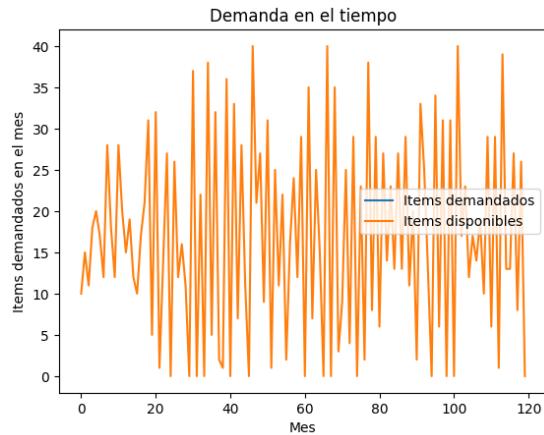


Figure 81: Nivel de demanda en el tiempo

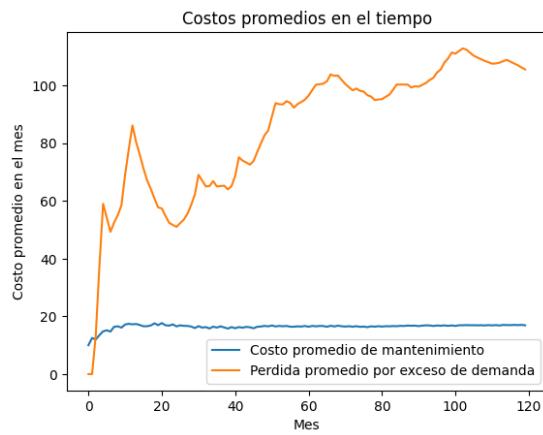


Figure 82: Nivel de Costos Promedio

3.3.10 Corrida 10

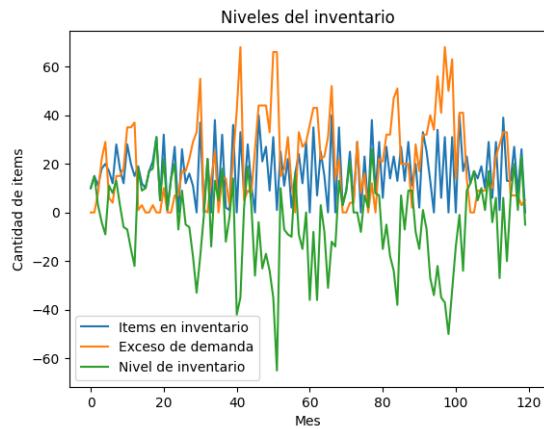


Figure 83: Nivel de Inventory

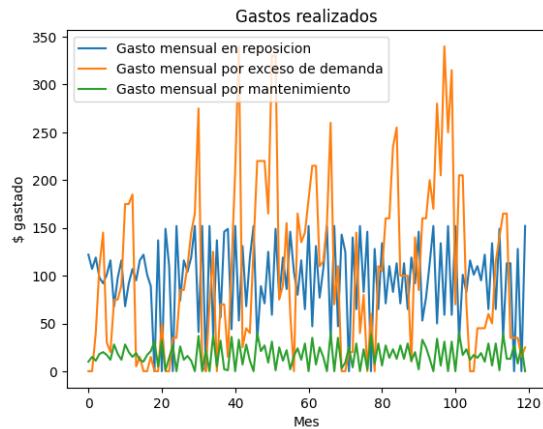


Figure 84: Gastos Mensuales

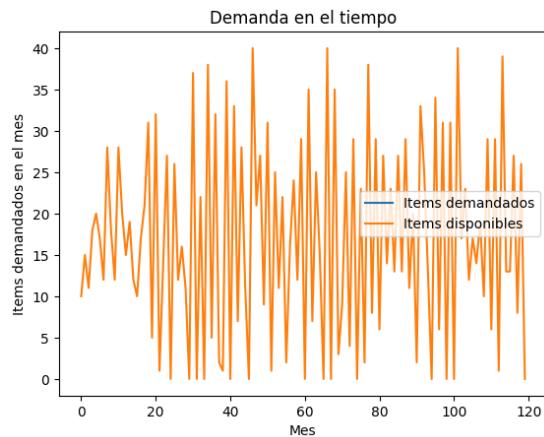


Figure 85: Nivel de demanda en el tiempo

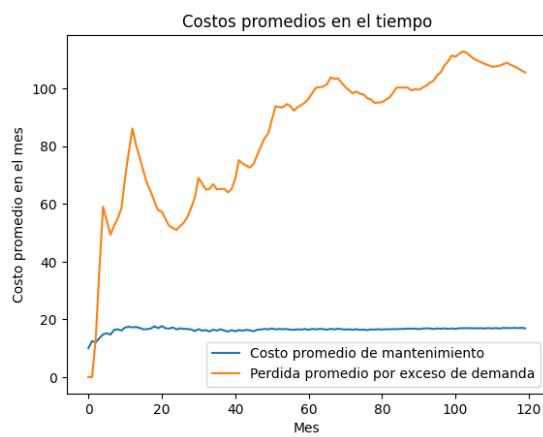


Figure 86: Nivel de Costos Promedio

3.3.11 Adicional

Luego de las diez corridas del modelo de simulación utilizando $s=20$, $S=40$, podemos afirmar que tenemos un elevado costo de escasez que influye en casi el 50% del costo total según la siguiente tabla:

Política	Orden	Escasez	Mantenimiento	Costo total(\$)
$s=20 S=40 I_0=35$	46.26%	45.32%	8.42%	\$24151

Analizamos los tres componentes separados del costo total promedio por mes para ver cómo responden individualmente a los cambios en s y S , como una posible verificación de la respuesta que esperamos por intuición. Como por ejemplo podemos pensar que al tener un s bajo (20), el costo de escasez podría ser significativo debido a que se puede saltar una alerta de pocos productos al tener revisiones periódicas (cada mes) de inventario, y no poder satisfacer demandas hasta la siguiente revisión de inventario y posterior entrega. Otra situación que creemos previsible, es que si tenemos un S con valor alto, podrían aumentar los costos de mantenimiento, y más aún con un s mayor, ya que esto implicaría que nuestros niveles de productos disponibles se mantenga elevado, subiendo también el costo de mantenerlos. Respecto al costo de orden, creemos que podría adquirir un comportamiento equilibrado a los cambios porque ante s y S bajos vamos a tener muchas órdenes periódicas de pocos ítems pedidos, pero si s y S son altos tendríamos que pedir más cantidad de productos por orden pero las mismas serían mucho menos frecuentes. Para confirmar estas hipótesis, repetimos las corridas que hicimos para la política (20,40) para distintos valores de s y S .

Política	Orden	Escasez	Mantenimiento	Costo total(\$)
$s=20 S=60 I_0=35$	60.19%	21.97%	17.84%	\$17615.0
$s=20 S=80 I_0=35$	57.08%	20.4%	22.51%	\$18478.0
$s=20 S=100 I_0=35$	52.88%	18.2%	28.92%	\$18711.0
$s=40 S=60 I_0=35$	71.23%	5.0%	23.77%	\$16415.0
$s=40 S=80 I_0=35$	65.82%	3.76%	30.42%	\$16484.0
$s=40 S=100 I_0=35$	63.04%	3.07%	33.89%	\$17725.0
$s=60 S=80 I_0=35$	65.21%	0.08%	34.7%	\$17869.0
$s=60 S=100 I_0=35$	57.55%	0.86%	41.59%	\$18013.0

Teniendo los valores simulados podemos afirmar las siguientes conclusiones. Fijando $s = 20$ y aumentando S de 40 a 100, aumenta constantemente el costo de mantenimiento de 2033.50 a 5411.20, al mismo tiempo que reduce el costo de escasez. El efecto de este aumento de S en el costo de ordenar es reducirlo, ya que ordenar hasta valores mayores de S implica que estos pedidos mayores se realizarán con menos frecuencia, evitando así el costo fijo de ordenar con más frecuencia. De manera similar, fijar S en 100 y aumentar s de 20 a 60 conduce a una disminución en el costo de escasez (\$3405.40, \$544.15, \$154.90) pero a un aumento en el costo de mantenimiento (\$5411, \$6007.0, \$7491.60), ya que los aumentos en s se traducen en una menor disposición a permitir que el nivel de inventario caiga a valores bajos. Si bien pudimos predecir la dirección del movimiento de estos componentes del costo sin hacer la simulación, no habría sido posible decir mucho sobre su magnitud sin la ayuda del resultado de la simulación.

Dado que el criterio general del costo total por mes es la suma de tres componentes que se mueven en direcciones a veces diferentes en reacción a los cambios en s y S , no podemos predecir ni siquiera la dirección del movimiento de este criterio sin la simulación. Por lo tanto, simplemente observamos los valores de este criterio y parecería que la política (40, 60) es la mejor, con un costo total promedio de \$16415.0.

3.4 Simulación Modelo Inventario con Anylogic

Gráficas obtenidas en AnyLogic PLE considerando un tamaño mínimo requerido de inventario de 20 y un máximo de 40, comenzando con 35 artículos en el mismo.

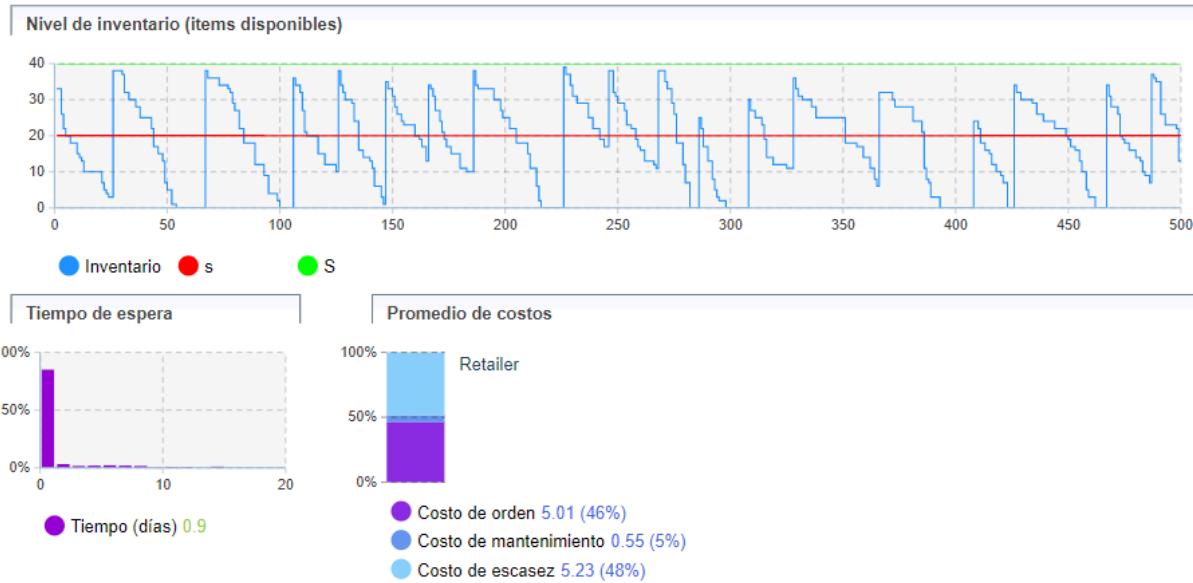


Figure 87: Análisis de inventario

4 Conclusión

A lo largo del estudio de simulación, se analizaron dos modelos distintos: el modelo M/M/1 y el modelo de Inventario. Se llevaron a cabo experimentos variando parámetros clave en ambos modelos y se realizaron comparaciones entre los resultados teóricos esperados, las implementaciones en Python y las realizadas en Anylogic.

En el caso del modelo M/M/1, se observaron tendencias claras al variar la tasa de arribo (λ) con respecto a la tasa de servicio (μ). A medida que aumentaba la carga del sistema (mayor λ), también aumentaban las medidas de rendimiento como promedio de clientes en el sistema, promedio de clientes en cola, tiempo promedio en sistema y tiempo promedio en cola. Además, se pudo apreciar una mayor utilización del servidor cuando había una mayor cantidad relativa de llegadas. Además de las medidas de rendimiento mencionadas anteriormente, también se estudió la probabilidad de denegación de servicio. Esta métrica es particularmente relevante en sistemas con colas finitas donde existe un límite en la cantidad máxima de clientes que pueden esperar. Se analizaron diferentes tamaños de cola (0, 2, 5, 10 y 50) para determinar cómo afectan a la probabilidad de denegación del servicio y al desempeño general del sistema.

La denegación de servicio está directamente relacionada con el tamaño máximo permitido de la cola. A medida que aumenta el límite en la cantidad máxima de clientes que pueden esperar en la cola (tamaño de cola), disminuye la probabilidad de denegación del servicio.

Cuando se incrementa el tamaño de cola, hay más espacio disponible para albergar a los clientes entrantes antes de alcanzar su capacidad máxima. Como resultado, es menos probable que un cliente llegue y encuentre una situación donde no haya espacio en la fila; esto reduce efectivamente las posibilidades de rechazar nuevos arribos debido a capacidad limitada.

Sin embargo, tener colas más grandes también puede generar consecuencias negativas como mayores tiempos promedio en espera o mayores costos asociados con mantener un sistema capaz de manejar estas filas largas. Es crucial encontrar un equilibrio entre minimizar las probabilidades de denegación del servicio y mantener niveles aceptables en otras métricas importantes como tiempo promedio en espera o costo operativo. Realizar simulaciones detalladas permite analizar diferentes escenarios para encontrar ese punto óptimo según nuestras necesidades específicas.

Respecto al modelo de Inventario, los diferentes experimentos permitieron identificar cómo los costos asociados (orden, mantenimiento y faltante) afectan al costo total. La selección adecuada e informada sobre estos parámetros es crucial para lograr un equilibrio óptimo entre los costes relacionados con pedidos demasiado frecuentes o infrecuentes y aquellos causados por mantener un exceso o insuficiencia stock.

Al comparar valores teóricos esperados con implementaciones realizadas tanto utilizando Python como Anylogic se pudo constatar que hay consistencia entre estas tres perspectivas lo cual valida aún más nuestras conclusiones.

Por último, este estudio pone en evidencia la importancia del análisis detallado mediante simulaciones para comprender mejor sistemas complejos como colas o inventarios. También destaca cómo ajustar correctamente ciertos parámetros clave puede mejorar la eficiencia y optimizar los recursos en tales sistemas. Tener la capacidad de interactuar con diferentes parámetros iniciales durante las presentaciones brinda una herramienta valiosa para explorar más a fondo el comportamiento del modelo y su sensibilidad ante cambios en sus variables principales.

Para finalizar, pensamos que este estudio demuestra cómo simular modelos como M/M/1 e Inventario permite obtener un entendimiento profundo sobre los sistemas estudiados y cómo tomar decisiones informadas que mejoren su desempeño en escenarios reales.

References

- [1] Arash Mahdavi. “The Art of Process-Centric Modeling with AnyLogic”.
- [2] Apunte Simulación - Prof. Ing. Weitz, Darío (UTN FRRo)
- [3] Wikipedia ES. “Teoría de Colas”.