Trabajo Práctico Nº 3: Relaciones y Funciones

1) Sean los conjuntos $A = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$; $B = \{1;\ 4;\ 6;\ 16\}$; $C = \{2\ ;3\ ;8\ ;10\}$ y las relaciones $R \subset A \times B$; $S \subset B \times C$, definidas por : $(x,y) \in R \Leftrightarrow y = x^2$ y $(y,z) \in S \Leftrightarrow z = \frac{y}{2}$

a) Determinar R y S por extensión.
b) Representar $A \times B$ y R.
c) Determinar S^{-1}.
d) Definir la composición $S \circ R \subset A \times C$ por extensión.

2) Sea el conjunto $A = \{a,b,c\}$, y las relaciones definidas en él:

$R = \{(a,a);\ (b,b);\ (c,c);\ (a,c);\ (b,c)\} \subset A^2$; $S = \{(a,a);\ (b,a);\ (c,a)\} \subset A^2$

a) Construir el dígrafo correspondiente y la matriz de adyacencia de cada una de las relaciones dadas.
b) Determinar la matriz de adyacencia y el dígrafo de:
   i) R^{-1} ii) $R^C = A^2 - R$ (Complemento de R)
   iii) $R \cup S$ iv) $R \cap S$
   v) $S \circ R$

3) Sea el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$, y las relaciones definidas en él:

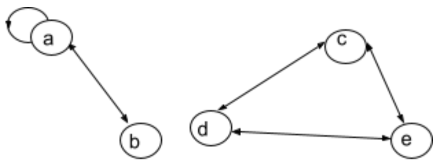
$R_1 = \{(x,y) \in A^2 / \ x|y\}$ y $R_2 = \{(x,y) \in A^2 / \ x = y\}$

a) Determinar R_1 y R_2 por extensión, construir sus dígrafos correspondientes y las matrices de adyacencia.
b) Analizar cada una de las relaciones dadas, determinando qué propiedades cumplen y cuáles no, y de ser posible, clasificarlas justificando todas las respuestas.

4) Sea $M = (a_{ij})_{7x7}$ la matriz de adyacencia de un grafo de vértices a,b,c,d,e,f y g, tal que sólo $a_{12} = a_{16} = a_{23} = a_{25} = a_{37} = a_{41} = a_{43} = a_{51} = a_{64} = a_{74} = 1$ y los restantes $a_{ij} = 0$.

a) Escribir por extensión la relación $R \subset A^2$, con $A = \{\ a,b,c,d,e,f,g\}$, asociada a M.
b) Analizar qué propiedades cumple R y cuáles no justificando todas las respuestas. Si es posible, clasificarla.

5) Dado el siguiente dígrafo:



a) Escribir por extensión la relación $R \subset A^2$ con $A = \{\ a,b,c,d,e\}$, asociada al dígrafo dado.
b) Analizar qué propiedades cumple R y cuáles no, justificando todas las respuestas. Si es posible, clasificarla.

6) Analizar cuáles de las siguientes relaciones son de equivalencia y representarlas mediante un dígrafo. En cada caso, $A = \{1, 2, 3\}$ y $R \subset A^2$.

a) $R = \{(1,1);\ (1,2);\ (2,1);\ (2,2)\}$
b) $R = \{(1,1); (1,2); (2,1); (2,2);\ (2,3);\ (3,2);\ (3,3)\}$
c) $R = \{(1,1);\ (1,3);\ (3,1);\ (2,2);\ (3,3)\}$
d) $R = \{(1,1);\ (1,2);\ (2,2);\ (3,3)\}$

7) Sean los conjuntos: $A = \{a, b, c\}$; $B = \{a, b, c, d\}$; $C = \{1, 2, 3, 4\}$; $D = \{1, 2, 3\}$
Determinar si cada una de las siguientes relaciones es función.
En caso de que lo sean, clasificarlas y si es posible hallar su inversa.
i) $R \subset \text{AxC} / R = \{(a, 2);\ (a, 4);\ (b, 1);\ (c, 3)\}$
ii) $S \subset \text{BxD} / S = \{(a, 2);\ (b, 1);\ (c, 3);\ (d, 2)\}$
iii) $R \subset \text{BxC} / R = \{(\text{a}, 4);\ (\text{b}, 1);\ (\text{c}, 3);\ (\text{d}, 2)\}$
iv) $R \subset \text{BxC} / R = \{(\text{a}, 2);\ (\text{b}, 1);\ (\text{c}, 2);\ (\text{d}, 3)\}$
v) $R \subset \text{AxC} / R = \{(\text{a}, 3);\ (\text{b}, 4);\ (\text{c}, 1)\}$

8) Determinar si las siguientes relaciones son funciones y representarlas gráficamente:
a) Sean $A = \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$.
Se define la relación $S \subset \text{A x B}$ mediante: $(x, y) \in S \Leftrightarrow y = -5\,x$
b) Sean $A = \mathbb{Z}$ y $B = \mathbb{Z}$.
Se define la relación $\text{R} \subset \text{A x B}$ mediante: $(x, y) \in R \Leftrightarrow y = x/2$
c) Sean $A = \mathbb{N}$ y $B = \mathbb{N}$.
Se define la relación $R: A \to B$, dada por: $R = \{(x^2, x);\ x \in \mathbb{N}\}$

9) Sean los conjuntos $A = \{1;\ 2;\ 4\}$; $B = \{1;\ 4;\ 6;\ 16\}$; $C = \{1/2;\ 2\ ; 3\ ; 8\ ; 10\}$ y las funciones: $f: A \to B / f(x) = x^2$ y $g: B \to C / g(x) = \frac{x}{2}$
a) Determinar f y g por extensión.
b) Definir la composición $g \circ f \subset \text{A x C}$ por extensión.
c) Determinar los dominios e imágenes de las tres funciones y clasificarlas.

10) Dada la función, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2$:
i) Representarla gráficamente en un sistema de ejes cartesianos.
ii) Determinar dominio e imagen.
iii) Clasificarla.

11) Dada la siguiente función, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 + 1$
Determinar cada una de las siguientes funciones y representarlas gráficamente en un mismo sistema de ejes cartesianos.
a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = f(x) + 2$
b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = f(x + 2)$
c) $z: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / z(x) = f(x - 2)$

12) Representar gráficamente las siguientes funciones y clasificarlas:

a) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = |x + 2|$ b) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / h(x) = |x| + 2$
c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / f(x) = \left\lceil \frac{x}{2} + 1 \right\rceil$ d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / i(x) = \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor + 1$

13) a) Definir en cada caso las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$. Representarlas gráficamente.
b) ¿Todas las composiciones definidas en a) son funciones?
Si alguna de ellas no lo es, explicar por qué.
En caso de que sí lo sea, clasificarla y determinar dominio e imagen.
i) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x^2 - 5$; $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / g(x) = x - 3$
ii) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = x + 2$; $g: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ / g(x) = \sqrt{x}$

Actividades complementarias

1) Sean $A = \{ x \in N / 1 \leq x \leq 5 \}$ y $B = \{ 3 ; 4; 5 \}$.
Se define $R \subset A \text{ x } B$ mediante: $(x, y) \in R \Leftrightarrow x + y \leq 5$
a) Definir R por extensión.
b) Representar $A \text{ x } B$ y R.
c) Determinar R^{-1}.

2) Dado el conjunto no vacío A y la relación $R = \{(x, y) \in A^2 / x \leq y\}$.
Determinar qué propiedades cumple y cuáles no.
De ser posible, clasificarla justificando todas las respuestas.

3) Dado el conjunto $A = \{1,2,3,4\}$
Determinar si es posible, las siguientes relaciones en el conjunto A:
- una relación R que sea simétrica y antisimétrica.
- una relación S que sea no simétrica y antisimétrica.
- una relación T que sea no simétrica y no antisimétrica.
- una relación U que sea reflexiva y no antisimétrica.
- una relación V que sea reflexiva y antisimétrica.
- una relación W que sea no reflexiva y antisimétrica.

4) Dado el conjunto $B = \{1, 2, 3, 4\}$, se definen dos relaciones R y S en B.
A continuación, se presentan las matrices de adyacencia de R y S^{-1} (inversa de S):

$$M_R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad M_{S^{-1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Escribir por extensión cada una de las relaciones R y S.
b) Construir el dígrafo correspondiente a cada una.
c) Analizar qué propiedades cumple y cuáles no. De ser posible, clasificarlas.

5) Dado el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$
En cada caso definir, si es posible, una relación $R \subset A^2$ que verifique las siguientes propiedades:
I. Reflexiva, no simétrica y transitiva.
II. Antisimétrica y no transitiva.
III. Arreflexiva y antisimétrica.

b) Proponer dos relaciones de equivalencia T y S, ambas en A^2, cuya unión no sea una relación de equivalencia

6) Analizar si cada una de las siguientes relaciones, son funciones o no.
a) Edad (VI) y peso (VD) de un individuo.
b) Peso (VI) y edad (VD) del mismo individuo.
c) Radio de un vaso cilíndrico (VI) y altura alcanzada (VD) al verter en él 50 cm^3 de agua.
d) Volumen de un vaso cilíndrico (VI) y altura alcanzada (VD) al verter en él 50 cm^3 de agua.
e) Un número (VI) y su cuadrado (VD).
f) Un número (VI) y su raíz cúbica (VD).

7) Representar gráficamente las siguientes funciones y clasificarlas:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = |x|$

b) $g: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / \ g(x) = \lceil x \rceil$

c) $h: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / \ h(x) = \left\lceil \frac{x}{2} + 1 \right\rceil^2$

d) $i: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / \ i(x) = \left\lceil \frac{x}{2} \right\rceil + 1$

e) $j: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / \ j(x) = \lfloor x \rfloor$

f) $k: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / \ k(x) = \lfloor x + 1 \rfloor$

8) Sean las funciones $f: \mathbb{R} \to \mathbb{Z} / \ f(x) = \lfloor x \rfloor$ y $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ g(x) = 2x + 1$
i. Definir si es posible, las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$.
ii. Representar gráficamente y clasificar las funciones obtenidas en el ítem anterior.

9) Dada la siguiente función, $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / \ f(x) = x^2$
i) ¿Qué restricciones pueden aplicarse a la función para que la misma resulte biyectiva?
ii) A partir de lo analizado en el ítem anterior, definir f^{-1} (inversa de f).
iii) Representar gráficamente f y f^{-1} en un mismo sistema de ejes cartesianos.