Universidad Nacional del Nordeste

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura

Unidad 2: Relaciones

PAR ORDENADO

Sean A y B dos conjuntos.

Se llama par ordenado (a,b) al par de elementos dados en un cierto orden, a es el primer elemento del par y b es el segundo.

Decimos que

$$(a,b)=(c,d) \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$$

PRODUCTO CARTESIANO

Se define el producto cartesiano de A x B al conjunto formado por los pares ordenados tal que el primer elemento pertenece a A y el segundo a B.

En símbolos: $AxB = \{(a,b) / a \in A \quad \wedge \quad b \in B\}$

Ejemplo: Sean $A = \{2,3,9\}$ y $B = \{1,4,8\}$

$$AxB = \{(2,1),(2,4),(2,8),(3,1),(3,4),(3,8),(9,1),(9,4),(9,8)\}$$

#A = m y   #B = n

#(AxB) = m.n

Relación Binaria de un conjunto A en otro B

Dados dos conjuntos A y B, una relación R entre A y B es un subconjunto del producto cartesiano AxB

$$R \subset AxB$$

Por ejemplo:

Sean $A = \{2,3,9\}, B = \{1,4,8\}$ y $R \subset AxB \, / \, R = \{(a,b) \, / \, a \leq b\}$

$$AxB = \{(2,1),(2,4),(2,8),(3,1),(3,4),(3,8),(9,1),(9,4),(9,8)\}$$

$$R = \{(2,4),(2,8),(3,4),(3,8)\}$$

DOMINIO, IMAGEN, RELACIÓN INVERSA

Dominio de la Relación: es el conjunto formado por los primeros elementos de los pares ordenados definidos por la relación.

$$Dom(R) = \{a \in A : \exists b \in B / (a,b) \in R\}$$

Imagen: es el conjunto formado por los segundos elementos de los pares ordenados definidos por la relación.

$$\mathrm{Im}(R) = \{b \in B : \exists a \in A / (a,b) \in R\}$$

Relación Inversa de R: es el subconjunto de B x A definido:

$$R^{-1} = \{(b,a) / (a,b) \in R\}$$

DOMINIO, IMAGEN E INVERSA

Por ejemplo:

Sean $A = \{2,3,9\}$ $B = \{1,4,8\}$ $R : A \rightarrow B / R = \{(a,b) / a \leq b\}$

$$AxB = \{(2,1),(2,4),(2,8),(3,1),(3,4),(3,8),(9,1),(9,4),(9,8)\}$$

$$R = \{(2,4),(2,8),(3,4),(3,8)\}$$

$$D_R = \{2,3\} \qquad I_R = \{4,8\}$$

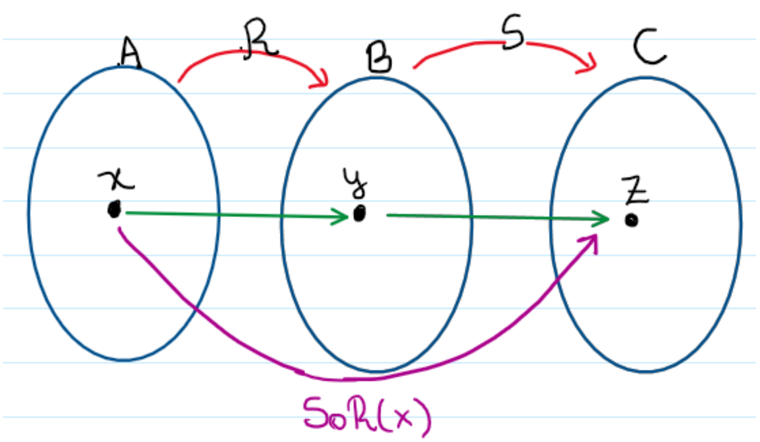
$$R^{-1} = \{(4,2),(8,2),(4,3),(8,3)\}$$

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Dados tres conjuntos A, B y C, una relación $R \subset AxB$ y otra relación $S \subset BxC$

Es posible definir una tercera relación de A en C de la siguiente manera:

$$S \circ R \subset AxC \,/\, (x,z) \in (S \circ R) \Leftrightarrow \exists y \in B \,/\, (x,y) \in R \wedge (y,z) \in S$$



$$(x,y) \in \mathcal{R} \wedge (y,z) \in \mathcal{S}$$
$$\Leftrightarrow (x,z) \in \mathcal{S} \circ \mathcal{R}$$

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

Sean los conjuntos:

$A = \{ 1; 2; 3; 4; 5 \}$; $B=\{ 1; 4; 6; 16 \}$; $C = \{2 ;3 ;8 ;10\}$

y las relaciones

$R \subset A \times B \;/\; (x , y) \in R \Leftrightarrow y = x^2$

$S \subset B \times C \;/\; (y , z) \in S \Leftrightarrow z = y/2$

Tarea:

a) Determinar R y S por extensión.

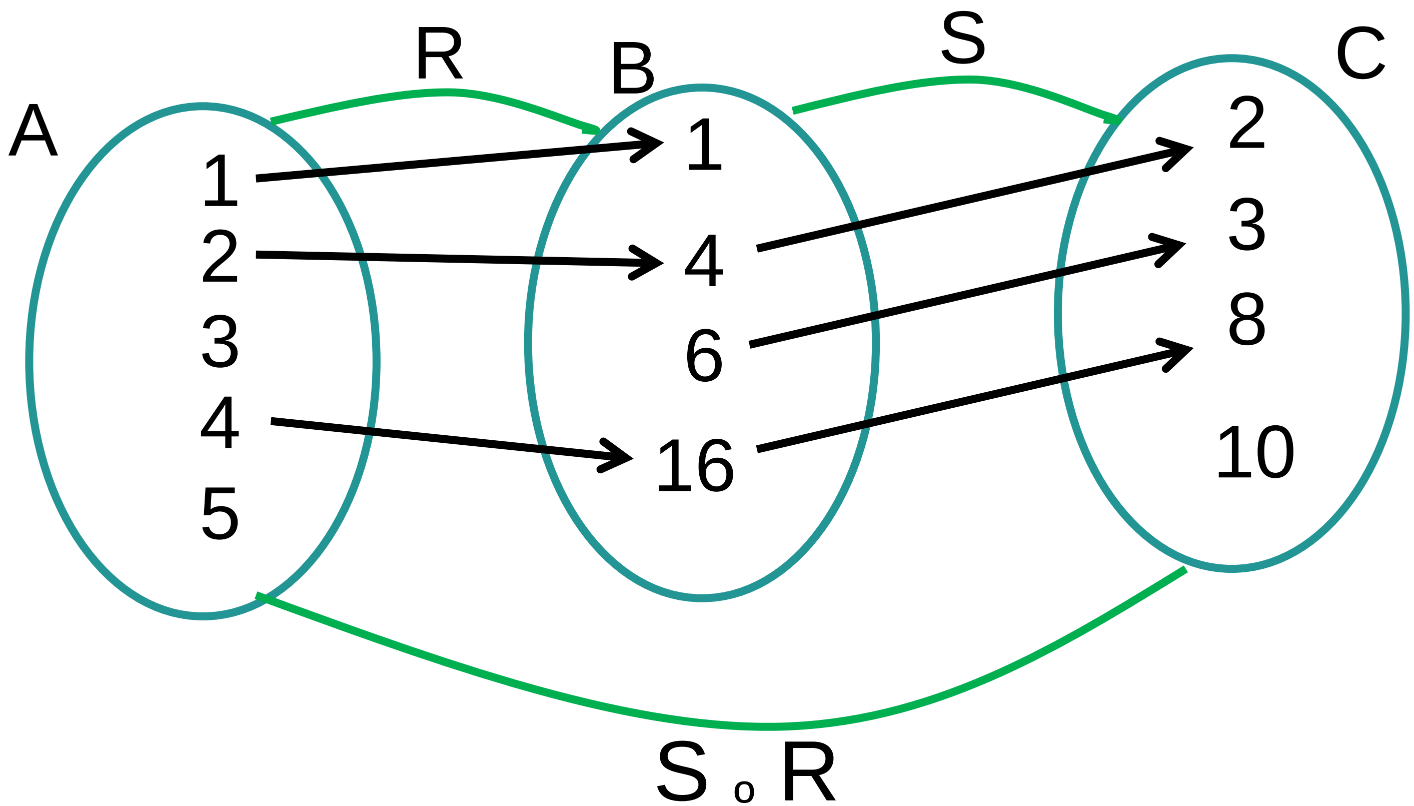
b) Definir la composición $S \circ R \subset A \times C$ por extensión.

COMPOSICIÓN DE RELACIONES

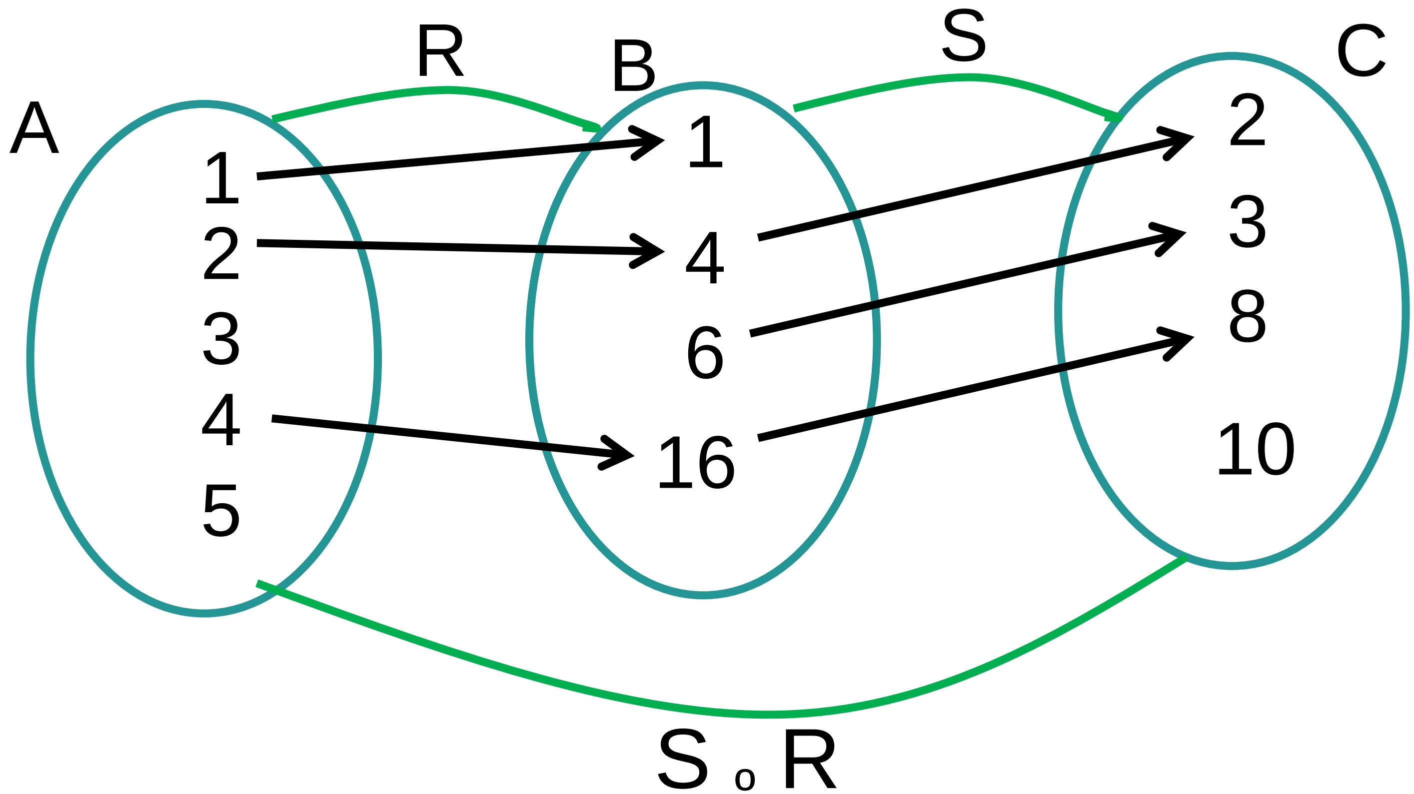
A = { 1; 2; 3; 4; 5 } ; B={ 1; 4; 6; 16 } ; C = {2 ;3 ;8 ;10}

$R \subset A \times B \;/\; (x , y) \in R \Leftrightarrow y = x^2$

$S \subset B \times C \;/\; (y , z) \in S \Leftrightarrow z = y/2$



COMPOSICIÓN DE RELACIONES



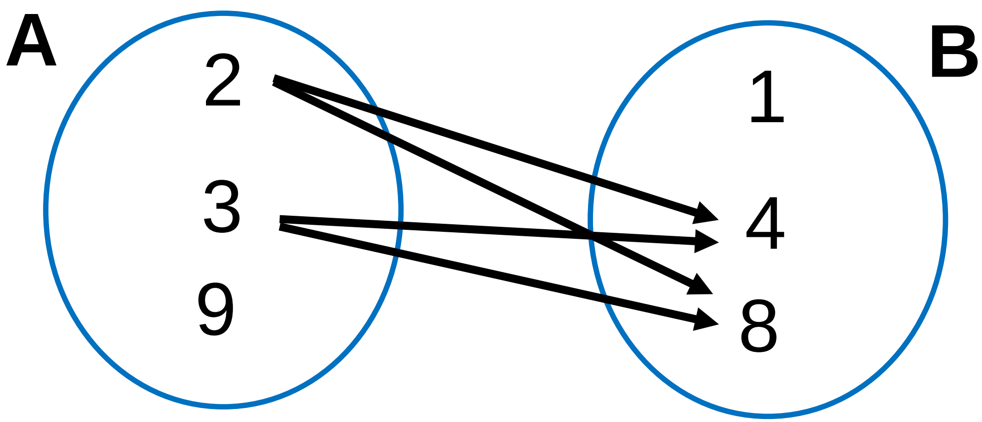
$$R = \{(1,1),(2,4),(4,16)\} \qquad S = \{(4,2),(6,3),(16,8)\}$$

$$S \circ R = \{(2,2),(4,8)\}$$

REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

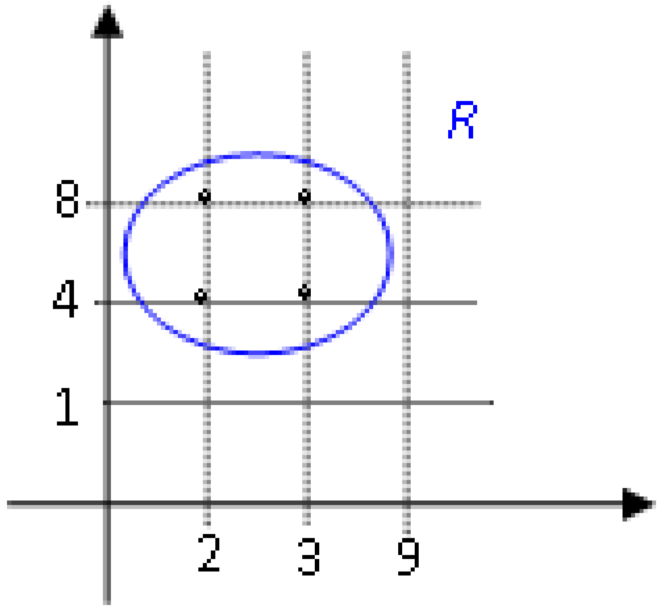
Sea R una relación entre A y B, es decir $R \subset AxB$
En el caso de conjuntos finitos se utilizan los siguientes tipos de representación:
1) Mediante diagramas de Venn

$$R = \{(2,4),(2,8),(3,4),(3,8)\}$$



REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

2) Mediante un gráfico cartesiano



REPRESENTACIÓN DE RELACIONES

3) Mediante una matriz, también llamada matriz de adyacencia

R	1	4	8
2	0	1	1
3	0	1	1
9	0	0	0

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea R una relación definida en AxA, es decir $R \subset A^2$

1) **Reflexividad:** R es reflexiva en A, si y sólo si,

$$\forall a \in A : (a, a) \in R$$

2) **No reflexividad:** R es no reflexiva en A, si y sólo si,

$$\exists a \in A / (a, a) \notin R$$

3) **Arreflexividad:** R es arreflexiva en A, si y sólo si,

$$\forall \mathrm{a} \in \mathrm{A} : (\mathrm{a}, \mathrm{a}) \notin \mathrm{R}$$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

4) **Simetría:** R es simétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R$$

5) **Asimetría:** R es asimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \notin R$$

6) **Antisimetría:** R es antisimétrica en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b \in A : (a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a = b$$

PROPIEDADES DE LAS RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

7) **Transitividad:** R es transitiva en A, si y sólo si,

$$\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$$

8) **No transitividad:** R es no transitiva en A, si y sólo si, $\exists \mathrm{a}, \exists \mathrm{b}, \exists \mathrm{c} \in \mathrm{A} / (\mathrm{a},\mathrm{b}) \in \mathrm{R} \wedge (\mathrm{b},\mathrm{c}) \in \mathrm{R} \wedge (\mathrm{a},\mathrm{c}) \notin \mathrm{R}$

9) **Atransitividad:** R es atransitiva en A, si y sólo si, $\forall a, \forall b, \forall c \in A : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \Rightarrow (a,c) \notin R$

CLASIFICACION DE RELACIONES

Relación de equivalencia: La relación $R \subset A^2$ es de equivalencia en A, si y sólo si es reflexiva, simétrica y transitiva.

Relación de Orden:

La relación $R \subset A^2$ es de **orden amplio** en A si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva

La relación $R \subset A^2$ es de **orden estricto** en A si y sólo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva