Trabajo Práctico N° 1: Lógica Proposicional

1) Dadas las proposiciones: p: 4 es un número par
q: 4 es un número primo

Escribir las proposiciones compuestas en forma simbólica y determinar su valor de verdad:

a) 4 es un número par y primo
b) 4 es un número par pero no es primo
c) No es cierto que 4 es un número par y primo.
d) 4 es un número par o primo, o ambas cosas.
e) 4 es un número par o primo pero no ambas cosas.

2) Dadas las siguientes proposiciones simples, en el conjunto de los números enteros:

* p: 6 es un número par.
* q: 6 es divisible por 3.
* r: 6 es menor que 5.

Escribir en lenguaje coloquial las siguientes proposiciones compuestas y determina su valor de verdad:

i) $p \wedge \neg q$ *ii)* $q \Rightarrow \neg p$ *iii)* $p \Leftrightarrow (q \wedge r)$ *iv)* $(p \vee \neg q) \Rightarrow \neg r$
v) $\neg p \wedge q$ *vi)* $\neg(p \wedge q)$ *vii)* $(p \vee r) \Leftrightarrow (\neg r \wedge \neg q)$

3) Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones y determinar si son leyes lógicas:

a) $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (r \Rightarrow p)$
b) $[(p \wedge q) \vee r] \Rightarrow s$
c) $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \wedge \neg(p \Rightarrow r)$
d) $[\neg(p \Leftrightarrow \neg q)] \Rightarrow (q \Rightarrow p)$
e) $[\neg(\neg p \vee q) \vee q] \vee p \Leftrightarrow (q \vee p)$
f) $[(p \vee q) \wedge \neg q] \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \Rightarrow p$

4) Demostrar que las siguientes proposiciones son tautologías:

Involución:	$\neg(\neg p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la conjunción:	$(p \wedge p) \Leftrightarrow p$
Idempotencia de la disyunción:	$(p \vee p) \Leftrightarrow p$
Asociativa de la conjunción:	$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$
Asociativa de la disyunción:	$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
Conmutativa de la conjunción:	$(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$
Conmutativa de la disyunción:	$(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$
Distributiva de la conjunción respecto a la disyunción: $(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	
Distributiva de la disyunción respecto a la conjunción: $(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	
Ley de De Morgan (Negación de una conjunción): $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$	

Ley de De Morgan (Negación de una disyunción): $\neg (p \vee q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$	
Negación de una implicación:	$\neg (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q)$
Negación de una doble implicación:	$\neg (p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \underline{\vee} q)$
Simplificación:	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
Adición:	$p \Rightarrow (p \vee q)$
Implicación contrarrecíproca:	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$
Implicación	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$

5) Demostrar que $p \wedge \neg p$ es una contradicción.

6) Demostrar la validez de las siguientes reglas de inferencia:

a) *Silogismo hipotético*: $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$.
b) *Modus Ponens:* $[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
c) *Modus Tollens:* $[(p \Rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$

7) Suponer que *p, q, r, s* y *t* son, en cada caso, proposiciones simples. Analizar si la información que se da, en cada ítem, es suficiente para determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas, sin construir la tabla. Si la información es suficiente, determinar su valor de verdad y justificar la respuesta. Si la información no es suficiente, construir la tabla de verdad para los casos que correspondan.

a) $(r \wedge \neg q) \Rightarrow p$, siendo el valor de verdad de $q \Rightarrow r$, falso.
b) $[p \wedge (q \vee r)] \Rightarrow \neg s$, siendo el valor de verdad de $(s \wedge q)$, verdadero.
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$, siendo el valor de verdad de r, verdadero.
d) $(p \wedge q) \Rightarrow \neg r$, siendo el valor de verdad de $\neg(p \vee r)$, verdadero.
e) $(p \vee \neg q) \Leftrightarrow (\neg q \wedge p)$, siendo el valor de verdad de $(\neg p \Leftrightarrow q)$, verdadero.
f) $[(p \Rightarrow r) \vee (\neg s \Leftrightarrow r)] \Rightarrow \neg(q \vee p)$, siendo el valor de verdad de $(s \Rightarrow p)$, falso.

8) Negar los siguientes esquemas proposicionales y obtener expresiones equivalentes más simples.

a) $q \Rightarrow (\neg p \vee q)$
b) $(p \wedge \neg q) \Leftrightarrow p$
c) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \Rightarrow q$
d) $\neg(p \vee q) \vee (\neg p \wedge q)$

9) Para cada caso, escribir con los dos enunciados una sola proposición, que sea verdadera, usando **"Si...entonces..."** o **"si y sólo si"**, según corresponda. En los casos en que sea posible, determinar condición necesaria, condición suficiente o condiciones necesarias y suficientes.

a) x es un número natural par; x es un número natural múltiplo de 2.
b) La figura F es un polígono; La figura F es un triángulo.
c) La suma de dos números es 45; La suma de dos números es mayor que 30.
d) (abc) es un triángulo equilátero; (abc) es un triángulo isósceles.

10) Dadas las siguientes implicaciones:

a) Si un número es múltiplo de 8, dicho número es múltiplo de 2 y de 4.
b) (abcd) es un cuadrado, sólo si (abcd) es un rectángulo.

Determinar, para cada una de ellas, su negación y sus implicaciones asociadas.

Funciones Proposicionales

1) Dadas las siguientes funciones proposicionales, con dominio en el conjunto de los números enteros:

* $P(x)$: *x es un número primo*.

* $Q(x, y)$: *x es menor que y*.

* $R(x, y)$: $2. x + y = 5$.

* $S(x, y)$: $x. y = 0$.

a) Dar valores a la o las variables de modo tal de convertirlas:

i) En proposiciones verdaderas. *ii)* En proposiciones falsas.

b) Obtener para cada función proposicional una proposición verdadera y otra falsa utilizando cuantificadores.

c) Hallar las proposiciones cuantificadas equivalentes a las negaciones de las que obtuvo en el ítem b.

2) Dadas las siguientes proposiciones cuantificadas:

a) $\forall x \in N: x > 1$
b) $\exists x \in Z / x > 0$
c) $\exists x \in Z / \forall y \in Z: x. y = 0$
d) $\forall x \in R: |x| \geq 0$
e) $\forall x \in R, \exists y \in R / x. y = 1$
f) $\exists x \in Q / x > 3$

Expresar en lenguaje coloquial, determinar su valor de verdad y luego obtener las proposiciones cuantificadas equivalentes a sus negaciones.

Actividades complementarias

1) Construir la tabla de verdad de las siguientes proposiciones compuestas y determinar si son leyes lógicas:

a) $[(p \underline{\vee} q) \wedge \neg q] \Leftrightarrow \neg(p \Rightarrow q)$
b) $\neg[p \Rightarrow (\neg p \wedge \neg q)] \Leftrightarrow p \wedge (\neg p \vee \neg q)$
c) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(p \vee q) \Leftrightarrow q]$
d) $[\neg(p \wedge q) \vee \neg p] \wedge q \Leftrightarrow (\neg p \wedge q) \Rightarrow q$

2) Suponer que *p, q, r* y *s* son, en cada caso, proposiciones simples. Analizar si la información que se da, en cada ítem, es suficiente para determinar el valor de verdad de las proposiciones compuestas dadas, sin construir la tabla. Si la información es suficiente, determinar su valor de verdad y justificar la respuesta. Si la información no es suficiente, construir la tabla de verdad para los casos que correspondan.

   a) $(p \wedge q) \Rightarrow \neg s$, siendo el valor de verdad de $(s \wedge q)$, verdadero.
   b) $\neg q \Rightarrow (r \vee \neg p)$, siendo el valor de verdad de $\neg(p \Rightarrow q)$, verdadero.
   c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$, siendo el valor de verdad de $(p \Rightarrow q)$, falso.

3) En cada caso, determinar si es posible conocer el valor de verdad de las proposiciones simples *p, q, r* y *s*, sabiendo que:

   a) El valor de verdad de la proposición $\neg[(r \wedge q) \Rightarrow (r \Rightarrow p)]$ es verdadero.
   b) El valor de verdad de la proposición $[(p \vee q) \wedge r] \Rightarrow p$ es falso.
   c) El valor de verdad de la proposición $[(q \Leftrightarrow s) \wedge (p \vee q)] \vee (r \Rightarrow p)]$ es falso.

4) Negar los siguientes esquemas proposicionales y obtener expresiones equivalentes más simples.

   a) $\neg p \wedge (p \vee \neg q)$
   b) $[\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg q] \wedge \neg p$

5) En cada uno de los siguientes casos, enunciar la correspondiente conclusión de modo que el razonamiento resulte formalmente válido, justificando la respuesta.

   a) Si 4 es múltiplo de 5, 8 es múltiplo de 10.
      8 no es múltiplo de 10.
      Conclusión:
   b) Si las rosas son rojas y las violetas azules, entonces el azúcar es dulce y María también.
      Las rosas son rojas y las violetas azules.
      Conclusión:
   c) Si me quedo dormido por la mañana, llegaré tarde al trabajo.
      Si llego tarde al trabajo, me descontarán el día.
      Conclusión:

6) Dadas las siguientes funciones proposicionales, con dominio en el conjunto de los números enteros:

   a) $P(x)$: $x > 2$
   c) $R(x, y)$: $x.\ y = x$
   b) $S(x, y)$: $x + y$ *es un número par*

   i) Obtener para cada función proposicional una proposición verdadera utilizando cuantificadores y expresarlas en lenguaje coloquial.
   ii) Hallar las proposiciones cuantificadas equivalentes a las negaciones de las que obtuvo en el ítem i), en forma coloquial y simbólica.