Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP
Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica - IMECC

Relatório - MS728

PROBLEMA DE CORTE UNIDIMENSIONAL

Aluno: Eduardo Moraes Ferrari (RA: 188795)

Aluno: Matheus Queiroz Mota (RA: 251495)

Campinas, 7 de fevereiro de 2025.

1 Resumo

Este trabalho tem por objetivo tratar o problema de corte de estoque unidimensional. Para problemas grandes e de alta complexidade aconselha-se utilizar métodos heurísticos, porém por fins didáticos será tratado apenas problemas de menor complexidade. Será estudado o problema de corte unidimensional para um comprimento L fixo de peça de estoque. Contudo o presente texto apresentará uma formulação para o problema com diversas peças de estoque. Para o estudo computacional será utilizado um conjunto de dados que representa o corte de bobinas de papel.

2 Introdução

Na indústria, o problema de corte é amplamente utilizado, pois, diversos setores necessitam, a partir de uma peça maior, fazer cortes de peças menores. Tal problema pode ser trabalhado com peças que envolvam cortes em uma dimensão (unidimensional), normalmente associado ao comprimento do objeto, tal como o corte de canos de PVC, bobinas de papel, entre outros. O problema em que duas dimensões são consideradas, são denominados problemas bidimensionais, um exemplo prático é corte de placas de metal. Um problema tridimensional por sua vez, pode ser representado por um problema de empacotamento de containers em um determinado veículo de transporte, ou até mesmo o empacotamento de objetos dentro do container.

O problema que será desenvolvido neste projeto será o unidimensional, tendo em vista a sua simplicidade em comparação aos problemas em outras dimensões. Por fim, deve-se ressaltar que problemas de corte unidimensionais em problemas médios e grandes é praticamente inviável de calcular por meio de métodos exatos, devido ao número de combinações de corte possíveis em cada problema. Deste modo, nos limitaremos em problemas mais simples.

Em especial, trataremos do problema de corte de estoque unidimensional com tamanho único de peça de estoque, visando a minimização do resíduo de corte. A formulação geral deste problema é a seguinte

$$\min\, f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = d \\ x_j \geq 0, \ \text{inteiro} \end{cases}$$

O trabalho teórico e a obtenção dessa formulação para o problema estudado será feito nas seções seguintes, o modelo foi exposto acima para fins de motivação à leitura.

3 Estudo Teórico do Problema

O objetivo desta seção é elucidar completamente o modelo apresentado ao final da seção anterior. Seja o seguinte problema: a companhia em questão fornece uma peça em estoque ilimitado de tamanho L fixo; a partir dessa peça deseja-se cortar peças de tamanhos l_i com $i = 1, 2, ..., m$, de tal forma que $l_i \leq L$ para todo i e a companhia exige uma produção d_i de cada um dos itens; o objetivo é atender à demanda minimizando o resíduo do corte das peças. Este é o problema a ser estudado.

Para ser possível construir o modelo da maneira como foi exposta acima, é necessário ter em mente o que é um padrão de corte. A essa ferramenta, associamos um vetor m-dimensional - a dimensão é o número de classes de itens a serem obtidos - em que cada entrada α_i do vetor é a quantidade de itens da classe i no padrão de corte cado. Denota-se um padrão de corte por:

$$a = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$$

Obviamente, cada padrão de corte precisa satisfazer à seguinte condição para que o problema seja factível

$$l_1\alpha_1 + l_2\alpha_2 + \cdots + l_m\alpha_m \leq L$$

em que l_i é o comprimento do item da classe i e α_i é uma variável inteira não negativa que representa o número de itens da classe i produzidas pelo corte a.

Para escrever o modelo, é necessário enumerar todos o possíveis padrões de corte, ou apenas uma quantidade viável julgada suficiente para a resolução do problema. A melhor solução para o problema seria, é claro, utilizar todas os possíveis padrões de corte. Contudo, em problemas de médio a grande porte, o problema combinatório de enumerar todas as possíveis combinações das classes de objetos sob ao objeto de estoque fixo torna-se um problema de alta complexidade, o que dificulta demasiadamente a resolução de um problema de corte de estoque. Em um problema, um pouco mais elaborado, em que se considera uma quantidade k de classes objetos de estoque - objetos que serão cortados - de diferentes tamanhos, essa perspéctica da complexidade combinatória torna-se ainda mais problemática.

Porém, para o problema aqui em questão, há um algoritmo de geração de padrões de corte que pode ser consultado em [2].

Sendo assim, considere que forma obtidos n padrões de corte para o problema representados por

$$a_j = (\alpha_{1j}, \alpha_{2j}, \cdots, \alpha_{mj})$$

em que α_{ij} representa o número de itens do tipo i obtidos pelo padrão de corte j.

Definindo agora as variáveis de decisão do problema x_j como o número de vezes que o objeto é cortado utilizando o padrão j, isto é, o número de vezes que cada padrão j será utilizado. Para finalizar o estudo do modelo, defina a função de perda do total por

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

em que $c_j = L - (\alpha_{1j}l_1 + \alpha_{2j}l_2 + \cdots + \alpha_{mj}l_m)$, representando a sobra no padrão de corte j. Assim, com d um vetor $m-$dimensional com as demandas de cada classe, obtém-se o modelo geral que será utilizado no estudo computacional.

$$\min f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.a.} \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = d \\ x_j \geq 0, \text{ inteiro} \end{cases}$$

4 Problema Prático

4.1 Problema

Devido à volta as aulas, uma papelaria solicita dois tipos de papel, sulfite tradicional e cartolina, a uma empresa. Para a folha sulfite tradicional a empresa dispõe apenas da bobina 1 (2480mm de comprimento) e para a folha cartolina a empresa dispõe da bobina 2 (2540mm). Os dados de comprimento solicitados para a folha sulfite, folha cartolina e suas respectivas demandas estão descritas na tabela abaixo:

Tipo de Bobina	**Tamanho do Corte**	**Demanda**
Bobina 1 (2480 mm)	700 mm	2106 unidades
Bobina 1 (2480 mm)	570 mm	1053 unidades
Bobina 1 (2480 mm)	595 mm	1581 unidades
Bobina 1 (2480 mm)	640 mm	1056 unidades
Bobina 1 (2480 mm)	520 mm	3688 unidades
Bobina 1 (2480 mm)	720 mm	2108 unidades
Bobina 2 (2540 mm)	570 mm	558 unidades
Bobina 2 (2540 mm)	555 mm	600 unidades
Bobina 2 (2540 mm)	710 mm	841 unidades

Tabela 1: Tabela de Tipos de Bobina, Tamanhos e Demanda

Por meio dos dados acima, a empresa elaborou determinados padrões de corte para cada bobina, de modo a atender a demanda e reduzir o resíduo gerado na produção.

4.2 Modelagem

Os cortes associados a bobina 1 representados na modelagem por meio da variável x para o corte não homogêneo e x_h para o corte homogêneo são:

- x_1**:** uma peça de 700mm, duas de 570mm e uma peça 595mm. O resíduo é de 45mm;

- x_2: uma peça de 570mm, duas de 640mm e uma peça 595mm. O resíduo é de 35mm;
- x_3: uma peça de 595mm, 640mm, 520mme 720mm. O resíduo é de 5mm;
- x_4: uma peça de 595mm, 570mm, 700mme 520mm. O resíduo é de 95mm;
- x_5: uma peça de 720mm, 700mm e duas peças de 520mm. O resíduo é de 20mm;
- x_6: duas peças de 700mm e 520mm. O resíduo é de 55mm;
- x_{h1}: três peças de 700mm. O resíduo é de 380mm;
- x_{h2}: quatro peças de 570mm. O resíduo é de 200mm;
- x_{h3}: quatro peças de 595mm. O resíduo é de 100mm;
- x_{h4}: três peças de 640mm. O resíduo é de 560mm;
- x_{h5}: quatro peças de 520mm. O resíduo é de 400mm;
- x_{h6}: três peças de 720mm. O resíduo é de 320mm;

Por fim, os cortes associados a bobina 2 representados na modelagem por meio das variáveis y para o corte não homogêneo e y_h para o corte homogêneo são:

- y_1: duas peças de 555mm e 710mm. O resíduo é de 10mm;
- y_2: duas peças de 570mm e uma peça 710mm. O resíduo é de 281mm;
- y_{h1}: quatro peças de 570mm. O resíduo é de 260mm;
- y_{h2}: quatro peças de 555mm. O resíduo é de 320mm;
- y_{h3}: três peças de 570mm. O resíduo é de 410mm;

Como descrito na seção teórica do trabalho, os cortes são representados por vetores[1], exemplos dos vetores são dados abaixo. Há vetores que representam o corte da bobina 1 - cortes com 6 itens, então vetores com 6 entradas - e há vetores que representam o corte da bobina 2 - cortes com 3 itens, então vetores com 3 entradas.

[1]A ordenação dos elementos nos vetores da bobina 1 e 2 seguem a ordenação da Tabela 1. Por exemplo, na posição 1 do vetor da bobina 1, é a quantidade de peças de 700mm no corte a ser feito, a segunda seria a de 570mm, etc.

$$
\begin{cases}
x_1 = (1,2,1,0,0,0) \\
x_2 = (0,1,1,1,0,0) \\
x_3 = (0,0,1,1,1,1) \\
\vdots \\
y_2 = (2,0,1) \\
y_{h1} = (4,0,0) \\
y_{h2} = (0,5,0) \\
y_{h3} = (0,0,3)
\end{cases}
$$

Deste modo, temos que o modelo matemático que descreve o problema é dado por:

$$
\min 45x_1 + 35x_2 + 5x_3 + 95x_4 + 20x_5 + 40x_6 + 380x_{h1} + 200x_{h2} + 100x_{h3} +
$$

$$
560x_{h4} + 400x_{h5} + 320x_{h6} + 10y_1 + 120y_2 + 260y_{h1} + 320y_{h2} + 410y_{h3}
$$

$$
\text{s.a.}
\begin{cases}
x_1 + x_4 + x_5 + 2x_6 + 2x_{h1} = 2106 \\
2x_1 + x_2 + 1x_4 + 4x_{h2} = 1053 \\
x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 4x_{h3} = 1581 \\
2x_2 + x_3 + 3x_{h4} = 1056 \\
x_3 + x_4 + 2x_5 + 2x_6 + 4x_{h5} = 3688 \\
x_3 + x_5 + 3x_{h6} = 2108 \\
2y_2 + 4y_{h1} = 558 \\
2y_1 + 4y_{h2} = 600 \\
2y_1 + y_2 + 3y_{h3} = 841 \\
x, y, x_h, y_h \geq 0, \text{ inteiro}
\end{cases}
$$

5 Implementação

O modelo acima no software LPSolve IDE fica da seguinte forma:

```
min: 45*x1 + 35*x2 + 5*x3 + 95*x4 + 20*x5 + 40*x6 +
380*xh1 + 200*xh2 + 100*xh3 + 560*xh4+
400*xh5+320*xh6 +10*y1 + 120*y2 + 260*yh1 + 320*yh2 + 410*yh3;
// Subject to:
1*x1 + x4 + x5 + 2*x6 + 2*xh1 =  2106;
2*x1 + 1*x2 + 1*x4 + 4*xh2 = 1053;
1*x1 + 1*x2 + 1*x3 + 1*x4 + 4*xh3 = 1581;
2*x2 + 1*x3 + 3*xh4 = 1056;
1*x3 + 1*x4 + 2*x5 + 2*x6 + 4*xh5 = 3688;
1*x3 + 1*x5 + 3*xh6 = 2108;
2*y2 + 4*yh1= 558;
2*y1 + 4*yh2=600;
2*y1 + y2 + 3*yh3= 841;
int x1, x2 ,x3, x4, x5, x6, xh1, xh2, xh3, xh4, xh5, xh6, y1, y2, yh1, yh2, yh3;
// xhi ------> Corte homogeneo da peça i da bobina 1
// yhj ------> Corte homogeneo da peça j da bobina 2
```

Figura 1: Modelo utilizado no LPSolve IDE (entradas).

Executando o software, obtemos os seguintes resultados:

Variables	MILP ...	result
	97435	97435
x1	526	526
x2	1	1
x3	1054	1054
x4	0	0
x5	1054	1054
x6	263	263
xh1	0	0
xh2	0	0
xh3	0	0
xh4	0	0
xh5	0	0
xh6	0	0
y1	300	300
y2	241	241
yh1	19	19
yh2	0	0
yh3	0	0

Figura 2: Solução para o modelo proposto (saídas).

6 Conclusão e Considerações

Como é possível ver acima, temos que o resíduo em toda a produção foi de 97435 milímetros, o que corresponde a 97,435 metros. Além disso, temos que o que foi utilizado de papel no total(T_p), é o resíduo total gerado (R_g) mais a soma do comprimento de cada item solicitado multiplicado pela sua demanda.

$$T_p = R_g + \sum_i (l_i \cdot d_i)$$

Para cada item i solicitado.

Substituindo o resíduo total, presente na Figura (2), e os respectivos dados da Tabela (2), obtemos T_p(em mm):

$$T_p = R_g + \sum_i (l_i \cdot d_i) = 97435 + 8374635 = 8472070$$

Que equivale a 8472,07 metros.

Deste modo, concluímos que o percentual de resíduo gerado(R_p) foi de:

$$R_p = \frac{97,435}{8472,07} \approx 0,0115 = 1,15\%$$

Tal dado evidencia que o resíduo total foi relativamente pequeno, apenas $1,15\%$ do total de bobina cortada será descartada, esse descarte pode ser feito de forma inteligente, isto é, o papel restante pode ser realocado para outro tipo de problema de produção.

A Tabela 2 mostra o resíduo gerado por cada um dos cortes propostos para o problema. Por exemplo, cada vez que o padrão de corte x_1 for utilizado a função objetivo que desejamos minimizar será acrescida de $45mm$, ao passo que o padrão de corte homogêneo x_{h4} irá acrescer a função objetivo em $560mm$. Logo, intuitivamente faz sentido imaginar que esse corte homogêneo x_{h4} será raramente utilizado, ou até mesmo não será utilizado. A solução obtida computacionalmente mostra que nenhum dos cortes homogêneos foram utilizados, para o conjunto de dados da bobina 1, isso se dá ao fato que, apesar de os cortes homogêneos serem de fácil modelagem e obtenção, eles podem gerar resíduos maiores em comparação àqueles que foram obtidos de forma mais eficiente. Reiterando, para a modelagem aqui presente, cortes com alto resíduo penalizam demasiadamente a função objetivo que desejamos minimizar e, como cortes homogêneos muitas vezes podem apresentar alto resíduo, raras às vezes em que serão utilizados - a menos que, por acaso, o resíduo do corte seja baixo comparado ao dos cortes obtidos com algum algoritmo combinatório, por exemplo.

Padrão de corte	**Resíduo**
x_1	$45mm$
x_2	$35mm$
x_3	$5mm$
x_4	$95mm$
x_5	$20mm$
x_6	$55mm$
x_{h1}	$380mm$
x_{h2}	$200mm$
x_{h3}	$100mm$
x_{h4}	$560mm$
x_{h5}	$400mm$
x_{h6}	$320mm$
y_1	$10mm$
y_2	$281mm$
y_{h1}	$260mm$
y_{h2}	$320mm$
y_{h3}	$410mm$

Tabela 2: Tabela de Resíduos para cada Padrão de Corte

7 Referências

[**1**] POLDI, Kelly Cristina. Algumas extenxões do problema de corte de estoque. ICMC-USP, USP - São Carlos, 2003.

[**2**] OGUNRANTI, Gbemileke A.; OLULEYE, Ayodeji E. Minimizing Waste (Off-cuts) Using Cutting Stock Model: The Case of One Dimensional Cutting Stock Problem in Wood Working Industry. Journal of Industrial Engineering and Management, [s. l.], 2016. Disponível em: http://www.jiem.org/index.php/jiem. Acesso em: 5 jun. 2023.