



UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS
INSTITUTO DE MATEMÁTICA, ESTATÍSTICA E COMPUTAÇÃO CIENTÍFICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA



Matheus Queiroz Mota

Trabalho Final - MT504

Otimização Multiobjetivo: teoria e aplicação ao problema da cadeia logística de milho

Resumo

A Otimização Multiobjetivo é uma das principais áreas de pesquisa no contexto de Otimização. Um Problema de Otimização Multiobjetivo consiste em otimizar (maximizar ou minimizar) mais de uma função matemática, denominada função objetivo, sujeita a um conjunto de restrições determinadas pelo tipo de problema abordado. Pelo fato de lidarmos com múltiplas funções objetivo, que geralmente são conflitantes – ou seja, otimizar uma função pode prejudicar o valor da outra – não obtemos uma única solução ótima como ocorre em problemas com uma única função objetivo. Neste caso, obtemos um conjunto de soluções denominadas soluções de Pareto. Para resolver Problemas de Otimização Multiobjetivo são utilizados métodos específicos. Deste modo, visando compreender a teoria de problemas multiobjetivo e como resolvê-los, este trabalho busca sintetizar os principais conceitos desta área e estudar os principais métodos exatos: soma ponderada e ε -restrito e suas implementações computacionais. No fim deste trabalho, é apresentado o problema da cadeia logística de milho no Brasil, onde será feito uma análise detalhada da rede do problema.

Conteúdo

1	Introdução	4
2	Aspectos Teóricos da Otimização Multiobjetivo	5
2.1	Modelagem de um POM e conceitos	5
2.1.1	Espaço Critério	6
2.1.2	Relações de Dominância	8
2.1.3	Soluções Eficientes, Pontos não-dominados e Fronteira de Pareto . . .	9
3	Métodos Exatos & Códigos	11
3.1	Método da Soma Ponderada	11
3.2	Método do ε -restrito	12
3.3	Método AUGMECON2	12
3.4	Acesso aos Códigos	14
4	Exemplos Práticos	15
4.1	Problema do Transporte	15
4.2	Emissão de CO ₂ e Lucro em Setores de Produção	18
4.3	Problema da Dieta	21
5	Problema da Cadeia Logística de Milho no Brasil	23
5.1	Motivação	23
5.2	Descrição do Problema	23
5.3	Formulação matemática	24
5.4	Extração de Dados e Elaboração do Modelo Matemático	29
6	Resultados do Problema da Cadeia Logística de Milho	29
6.1	Resultados Minimização da Função Custo	30
6.2	Resultados Minimização da Função Balanço de CO ₂	31
6.3	Resultados obtidos pelo método AUGMECON2	33
6.4	Comparação dos Resultados	34
7	Conclusão	43

1 Introdução

A Programação Multiobjetivo ou Otimização Multiobjetivo lida com problemas de otimização matemática que possuem duas ou mais funções objetivas para serem otimizadas simultaneamente tais que esses objetivos geralmente são conflitantes, ou seja, ao melhorarmos um deles causamos piora no outro.

Para exemplificar, considere uma empresa de transporte que busca maximizar o lucro de toda a sua frota. Para resolver esse problema, podemos utilizar técnicas de programação linear inteira mista e, com base na solução, obter o maior lucro possível para a empresa. No entanto, suponha que a empresa também deseja minimizar a emissão de dióxido do carbono ou gás carbônico (CO_2) de sua frota. Isso caracteriza um problema bi-objetivo, onde a função lucro deve ser maximizada e a função emissão de CO_2 deve ser minimizada.

Neste caso, temos um conflito entre as funções objetivas. Para maximizar o lucro da frota de transporte, teríamos que transportar mais produtos, o que resultaria em mais veículos circulando e, conseqüentemente, um aumento nas emissões de CO_2 . Deste modo, como será apresentado posteriormente, nos problemas multiobjetivo não temos apenas uma única solução, mas sim um conjunto de soluções denominadas soluções de Pareto [1].

Deste modo, este trabalho busca introduzir os conceitos básicos de um Problema de Otimização Multiobjetivo (POM), bem como interpretar seus resultados e apresentar formas de tratar tal problema computacionalmente. Além da fundamentação teórica, este trabalho contempla uma aplicação prática da Otimização Multiobjetivo ao problema da cadeia logística de produção de milho no Brasil, ilustrando o uso da modelagem matemática e dos métodos exatos no apoio à tomada de decisão em problemas reais.

Este texto está organizado da seguinte forma. O Capítulo 2 apresenta uma breve revisão dos conceitos da otimização matemática e uma introdução à teoria básica de otimização linear multiobjetivo. O Capítulo 3 apresenta dois métodos exatos clássicos da literatura para resolução de Problemas de Otimização Multiobjetivo: o método da soma ponderada e o método do ε -restrito. No Capítulo 4 são discutidos exemplos computacionais de problemas bi-objetivo clássicos, de modo a ilustrar a fronteira de Pareto gerada por diferentes tipos de combinações de funções objetivas.

Em seguida, os Capítulos 5 e 6 são dedicado à aplicação da Otimização Multiobjetivo

ao problema da cadeia logística de produção de milho no Brasil. Nesse capítulo, é proposto um modelo de Programação Linear Inteira Mista Multiobjetivo (PLIM), considerando como objetivos a minimização do custo total da cadeia logística e a minimização do balanço líquido de CO₂, com base em dados reais de produção, demanda, transporte e exportação. Também são discutidos os aspectos computacionais envolvidos na resolução do modelo, com destaque para o uso do método AUGMECON2.

2 Aspectos Teóricos da Otimização Multiobjetivo

Inicialmente, serão introduzidos os conceitos fundamentais da Otimização Multiobjetivo, cuja compreensão requer familiaridade prévia com os princípios básicos da modelagem em Programação Matemática — como região factível, variáveis de decisão, funções objetivo, entre outros. Para aqueles que desejam se aprofundar nos métodos exatos utilizados na resolução de problemas de Programação Linear, como o método Simplex e os métodos de Pontos Interiores, recomenda-se a leitura da obra de referência [2].

2.1 Modelagem de um POM e conceitos

Definição 2.1.1. (*Modelo de um Problema de Otimização Multiobjetivo*). De forma geral, um POM com um número p de objetivos que devem ser otimizados, de forma a respeitar um conjunto de restrições $X \subseteq \mathbb{R}^n$, pode ser descrito como:

$$\begin{aligned} \max z &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{sujeito a: } &\left\{ x \in X \right. \end{aligned} \tag{1}$$

De modo que:

- $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$ é o vetor das variáveis de decisão;
- X : conjunto de soluções factíveis para o problema;
- $z_j = f_j(x), j = 1, \dots, p$ é a j -ésima função objetivo a ser maximizada.

Modelo Exemplo: antes de adentrar nos conceitos da Otimização Multiobjetivo, vamos utilizar o seguinte problema para descrever de forma visual e intuitiva os conceitos:

$$\begin{aligned}
\max f_1 &= 25x_1 + 20x_2 \\
\max f_2 &= x_1 + 8x_2 \\
X: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 220 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} & \quad (2)
\end{aligned}$$

2.1.1 Espaço Critério

Em um problema usual de Programação Linear, cada solução factível ($x \in X$) aplicada na função objetivo retorna um valor real. No entanto, em um Problema de Otimização Multiobjetivo (POM), precisamos analisar os valores de p funções objetivo simultaneamente. Isso significa que, em vez de obtermos apenas um único valor real, obtemos um vetor em \mathbb{R}^p .

Definição 2.1.2. (*Espaço Critério*). O Espaço Critério $Z = \{z = f(x) \in \mathbb{R}^p : x \in X\}$ é o espaço formado pela aplicação de cada solução ($x \in X$) em um vetor $z \in \mathbb{R}^p$. Ou seja, para cada $x \in X$, temos um vetor $z = (z_1, z_2, \dots, z_p) = f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$.

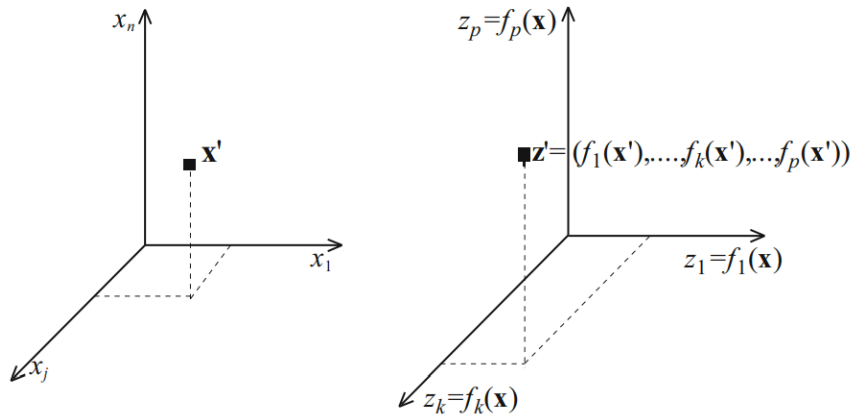


Figura 1: Imagem ilustrativa do Espaço Decisão à esquerda e do Espaço Critério à direita. Retirada de [[3]].

Exemplo 2.1.1. (*Espaço Critério do problema [2]*).

Para encontrar o Espaço Critério deste problema, devemos obter x_1 e x_2 em função de f_1 e f_2 e substituir nas desigualdades de X :

$$\begin{cases} 25x_1 + 20x_2 = f_1 \\ x_1 + 8x_2 = f_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{2f_1 - 5f_2}{45} \\ x_2 = \frac{25f_2 - f_1}{180} \end{cases}$$

Agora devemos substituir x_1, x_2 nas restrições de X :

$$X: \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 50 \\ 2x_1 + x_2 \leq 80 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 220 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow Z: \begin{cases} 7f_1 + 5f_2 \leq 9000 \\ f_1 - f_2 \leq 960 \\ 11f_1 + 85f_2 \leq 39600 \\ 2f_1 - 5f_2 \geq 0 \\ 25f_2 - f_1 \geq 0 \end{cases} \quad (3)$$

Com isso, obtemos o Espaço Critério para o problema.

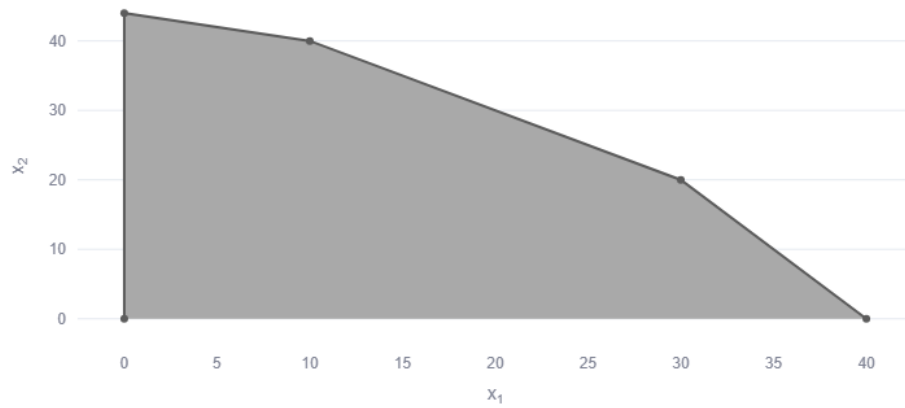


Figura 2: Espaço Decisão do problema [2].

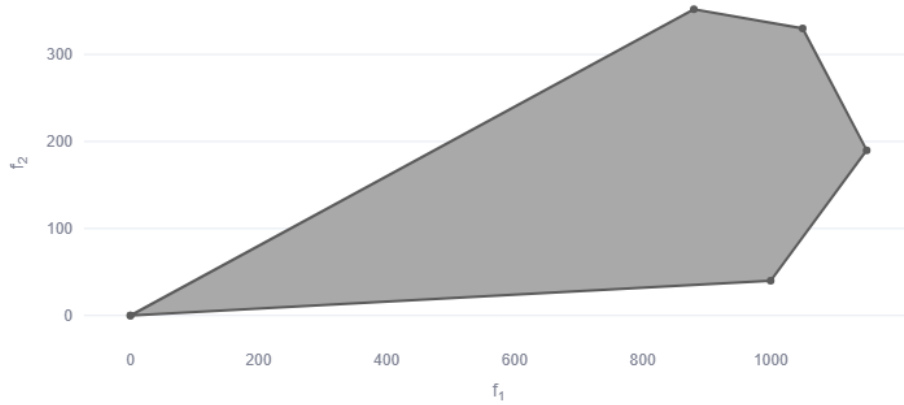


Figura 3: Espaço Critério do problema [2].

2.1.2 Relações de Dominância

Antes de introduzirmos os conceitos de soluções eficientes para um Problema de Otimização Multiobjetivo, vamos definir a relação de dominância entre duas soluções, dado um problema de maximização.

Dominância entre soluções: considere duas soluções, x^* e \bar{x} , pertencentes ao espaço decisão X . A solução x^* domina \bar{x} se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $f_j(x^*) \geq f_j(\bar{x})$ para todo $j = 1, \dots, p$;
2. $f_j(x^*) > f_j(\bar{x})$ para ao menos um j .

Notação: $x^* \preceq \bar{x}$.

Definição 2.1.3. (*Dominância Forte*). A solução x^* domina fortemente a solução \bar{x} se a seguinte condição é satisfeita:

$$f_j(x^*) > f_j(\bar{x}), \text{ para } j = 1, \dots, p.$$

Definição 2.1.4. (*Dominância Fraca*) A solução x^* domina fracamente a solução \bar{x} se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $f_j(x^*) \geq f_j(\bar{x})$ para todo $j = 1, \dots, p$;
2. $f_j(x^*) \neq f_j(\bar{x})$ para ao menos um j ;
3. x^* não domina fortemente \bar{x} .

2.1.3 Soluções Eficientes, Pontos não-dominados e Fronteira de Pareto

Um dos principais conceitos de Otimização Multiobjetivo é o de soluções eficientes, pois é por meio deste que vamos compreender quais soluções possuem mais significância para um Problema de Otimização Multiobjetivo.

Definição 2.1.5. (*Solução Eficiente*). A solução x^* é dita eficiente se, e somente se, não existe nenhum x no espaço de decisão X , de modo que $x \preceq x^*$.

Definição 2.1.6. (*Ponto não-dominado*). O ponto $z(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \in Z$ é dito não dominado se, e somente se, x é uma solução eficiente.

Definição 2.1.7. (*Conjunto Eficiente*). O conjunto eficiente X^* é formado por todos os elementos de X que não são dominados por outros elementos de X . Em outras palavras, $X^* = \{x^* \in X : x \not\preceq x^*, \forall x \in X\}$.

Exemplo 2.1.2. (*Conjunto Eficiente do problema [2]*).

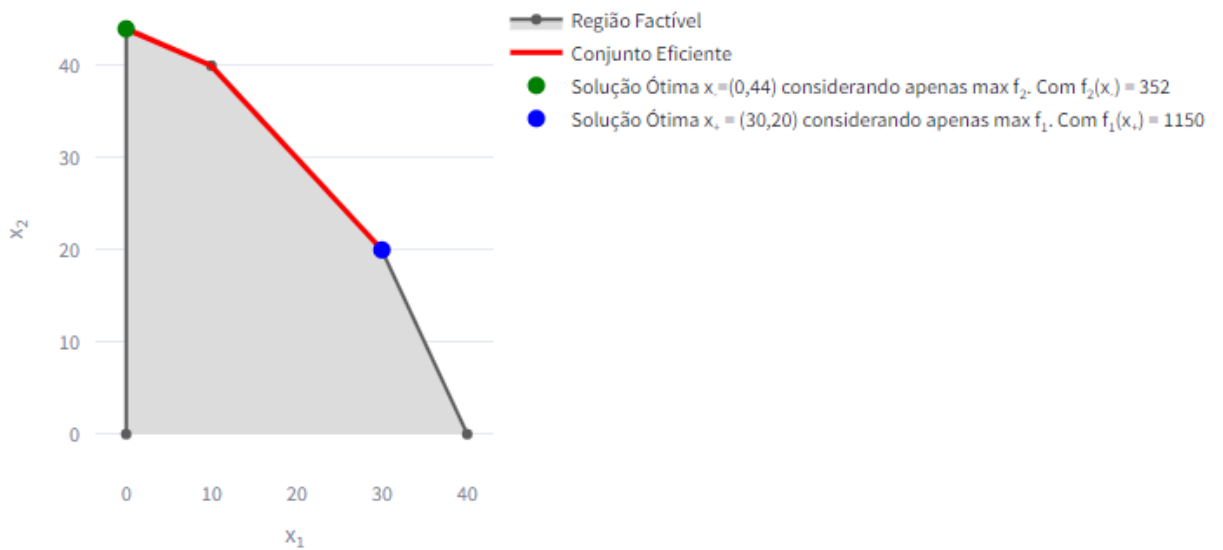


Figura 4: Conjunto Eficiente do problema [2].

Definição 2.1.8. (*Solução Fracamente Eficiente*). Uma solução \hat{x} é considerada fracamente eficiente se não houver nenhuma solução $x \in X$ tal que $f_k(x) > f_k(\hat{x})$ para todos os $k = 1, \dots, p$.

Definição 2.1.9. (*Ponto Fracamente Não-dominado*). Um ponto \hat{z} no espaço de critério é considerado fracamente não-dominado se sua imagem inversa for uma solução fracamente eficiente, ou seja, $\hat{z} = f(\hat{x})$.

Exemplo 2.1.3. (*Exemplo de Relações de Dominância entre Pontos*).

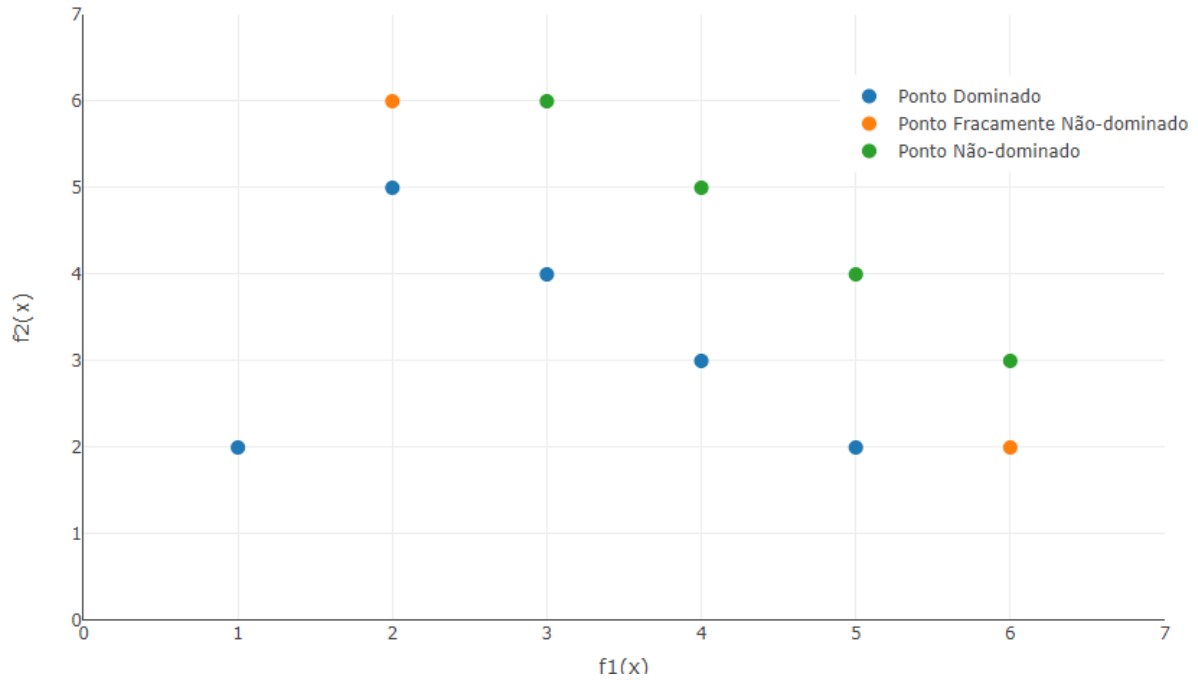


Figura 5: Gráfico com os exemplos de relação de dominância.

Definição 2.1.10. (*Fronteira de Pareto*). A fronteira de Pareto, denotada por Z^* é a imagem do conjunto eficiente X^* , ou seja, $Z^* = \{z^* \in \mathbb{R}^p : z^* = f(x^*), \forall x^* \in X^*\}$

A fronteira de Pareto é de extrema importância nos Problemas de Otimização Multi-objetivo, pois fornece as soluções mais adequadas ao problema. No entanto, a decisão final sobre qual solução é a mais apropriada dentro dessa fronteira é uma responsabilidade exclusiva do tomador de decisões. Ele deve considerar cuidadosamente as necessidades e objetivos específicos do problema para fazer a escolha mais adequada.

Exemplo 2.1.4. (*Fronteira de Pareto do problema [2]*). Por meio das definições anteriores e das inequações [3], obtemos que a fronteira de Pareto é dada por:

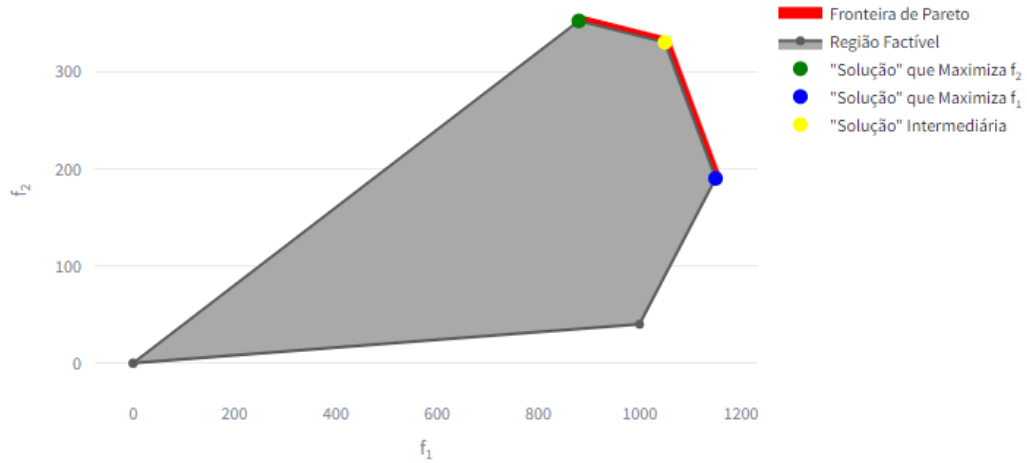


Figura 6: Fronteira de Pareto obtida para o problema [2].

3 Métodos Exatos & Códigos

Na Otimização Multiobjetivo, uma das principais abordagens para obter soluções não dominadas e eficientes é por meio da técnica de escalarização. Essa técnica visa transformar um problema multiobjetivo em um problema de otimização mono-objetivo.

Neste trabalho, são apresentados dois métodos de escalarização:

1. **Método da Soma Ponderada:** nesse método, as funções objetivas são ponderadas por coeficientes específicos. A combinação linear dessas funções resulta em uma única função objetivo, que é então otimizada.
2. **Método do ε -Restrito (ou ε -Constraint):** aqui, uma das funções objetivas é otimizada, enquanto as demais são tratadas como restrições. O tomador de decisão especifica o limiar que deve ser respeitado nas restrições para cada uma das funções restantes.

3.1 Método da Soma Ponderada

Definição 3.1.1. (*Método da Soma Ponderada*). Tal método se baseia em resolver um problema mono-objetivo, cuja função objetivo é uma soma ponderada das p funções originais. Com isso, para cada função f_k , associamos um peso $\lambda_k \geq 0$.

Portanto, a solução de um POM por meio do método da Soma Ponderada pode ser obtida por meio da solução do seguinte problema:

$$\begin{aligned} \max z &= \sum_{k=1}^p \lambda_k f_k(x) \\ \text{sujeito a: } &\left\{ x \in X \right. \end{aligned}$$

Teorema 3.1.1. *Se $\lambda_k > 0$ para todo $k = 1, \dots, p$, então a solução do problema ponderado é uma solução eficiente para o POM original.*

Teorema 3.1.2. *Se o problema ponderado tem uma única solução x^* com $\lambda_k \geq 0$, então x^* é eficiente.*

3.2 Método do ε -restrito

Definição 3.2.1. (*Método do ε -restrito*). Dado um problema com p funções objetivas $(f_1(x), \dots, f_p(x))$, selecionamos uma destas funções (digamos $f_i(x)$) para otimizar. Ademais, temos que as outras funções tornam-se parte do conjunto de restrições, de modo que para cada f_k , temos um ε_k associado de modo que $f_k(x) \geq \varepsilon_k$ ($k \neq i$).

Deste modo, temos que a solução de um (POM) por meio do ε -restrito é obtida por meio da solução do seguinte problema mono-objetivo:

$$\begin{aligned} \max & f_i(x) \\ \text{sujeito a: } &\left\{ \begin{array}{l} x \in X \\ f_k(x) \geq \varepsilon_k, \quad k = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, p. \end{array} \right. \end{aligned}$$

Teorema 3.2.1. *A solução ótima do problema do método ε -restrito é fracamente eficiente.*

3.3 Método AUGMECON2

O método **AUGMECON2** (*Augmented ε -Constraint 2*) é uma extensão do método ε -restrito, proposto por [4], e é especialmente eficaz para problemas de Programação Linear Inteira Multiobjetivo (PLIM). Sua principal finalidade é melhorar a distribuição das soluções ao longo da fronteira de Pareto, evitando a geração de soluções dominadas.

Para isso, o método introduz variáveis de folga associadas às restrições derivadas das funções objetivo e penaliza essas folgas na função objetivo principal. Também é incluído um mecanismo de *bypass* que permite pular subproblemas que gerariam soluções redundantes, aumentando a eficiência computacional.

Definição 3.3.1. (*Método AUGMECON2*). Considere um POM com p funções objetivo $f_1(x), \dots, f_p(x)$. O método AUGMECON2 resolve o seguinte problema escalarizado:

$$\begin{aligned} \max \quad & f_1(x) + \epsilon \left(\frac{S_2}{r_2} + 10^{-1} \frac{S_3}{r_3} + \dots + 10^{-(p-2)} \frac{S_p}{r_p} \right) \\ \text{sujeito a:} \quad & f_k(x) - S_k = e_k, \quad k = 2, \dots, p \\ & x \in X, \quad S_k \geq 0 \end{aligned}$$

onde:

- ϵ é um parâmetro pequeno, entre 10^{-6} e 10^{-3} ;
- S_k são variáveis de folga para as restrições impostas por $f_k(x)$;
- r_k é o intervalo (range) da função f_k obtido da Tabela Payoff;
- e_k é o limite inferior imposto à função $f_k(x)$.

A penalização das folgas garante que as soluções fiquem próximas da fronteira de Pareto, e o uso de pesos decrescentes assegura prioridade à otimização de $f_1(x)$.

em que ϵ é um número pequeno (entre 10^{-6} e 10^{-3}), r_k é o intervalo da função objetivo f_k , e S_k são variáveis de folga introduzidas.

Algorithm 1: Método AUGMECON2

Input: *Tabela Payoff* contendo os ranges das funções-objetivo

Output: *Conjunto de soluções não dominadas*

(1) Definir o número de intervalos e calcular o passo para cada objetivo:

$$step_k = r_k/q_k;$$

(2) **for** $i_p = 0$ **to** q_p **do**

(3) *Atualizar:* $e_p \leftarrow f_p^{min} + i_p \cdot step_p$;

```

(4)   for  $i_{p-1} = 0$  to  $q_{p-1}$  do

```

(5)		$Atualizar: e_{p-1} \leftarrow f_{p-1}^{min} + i_{p-1} \cdot step_{p-1};$
-----	--	---

```
; // ... Aninhamento de objetivos menores
```

(6)	for $i_2 = 0$ to q_2 do
-----	--

(7)		<i>Atualizar:</i> $e_2 \leftarrow f_2^{min} + i_2 \cdot step_2;$
-----	--	--

(8)			<i>Resolver o problema de otimização da definição (3.3.1);</i>
-----	--	--	--

(9)			Obter valores de S_k ;
-----	--	--	--------------------------

$$(10) \quad \text{Calcular: } b \leftarrow \left\lfloor \frac{S_2}{step_2} \right\rfloor ; \quad // \text{ coeficiente de } bypass$$

(11)			if $b < 1$ then
------	--	--	-----------------

(12)				<i>Atualizar: $i_2 \leftarrow i_2 + 1$;</i>
-------------	--	--	--	--

(13)			end
------	--	--	-----

(14)			else
------	--	--	------

(15)				<i>Atualizar:</i> $i_2 \leftarrow i_2 + b;$
------	--	--	--	---

(16)			end
------	--	--	-----

(17)		end
------	--	-----

```
(18) | end
```

(19) end

3.4 Acesso aos Códigos

A seguir, apresentam-se alguns recursos que podem auxiliar na compreensão e no desenvolvimento dos projetos relacionados à Iniciação Científica em Supply Chain e Programação Multiobjetivo Linear. Esses links oferecem acesso aos códigos-fonte, dados completos e ferramentas interativas que complementam o conteúdo abordado nas pesquisas.

- **Códigos e dados completos do modelo de Supply Chain.**
- **GitHub.**
- **Site Web.**

4 Exemplos Práticos

Nesta seção, é abordado a modelagem e a solução de Problemas de Otimização Multiobjetivo. Para resolver esses problemas, foram utilizados os métodos da soma ponderada e ϵ -restrito, desenvolvendo códigos específicos para cada um. Além disso, foram desenvolvidos algoritmos que permitem variar os parâmetros de cada método. Para mais detalhes sobre o funcionamento de cada código, consulte a seção 3.4.

4.1 Problema do Transporte

Na cidade de Campinas, uma empresa possui dois armazéns (Armazéns 1 e 2) responsáveis pelo transporte de produtos alimentícios para três mercados locais (Mercados A, B e C). Um dos objetivos da empresa é minimizar os custos de transporte até os mercados. No entanto, visando emitir a quantidade mínima de CO_2 por toda sua frota, a empresa estimou a produção de CO_2 , em média por valor unitário de produto transportado, de cada armazém para cada cidade. Note que neste exemplo, o Decisor busca um equilíbrio entre a eficiência logística e questão ambiental.

Variáveis de decisão:

x_{1A} : quantidade de mercadorias transportadas do Armazém 1 para o Mercado A

x_{1B} : quantidade de mercadorias transportadas do Armazém 1 para o Mercado B

x_{1C} : quantidade de mercadorias transportadas do Armazém 1 para o Mercado C

x_{2A} : quantidade de mercadorias transportadas do Armazém 2 para o Mercado A

x_{2B} : quantidade de mercadorias transportadas do Armazém 2 para o Mercado B

x_{2C} : quantidade de mercadorias transportadas do Armazém 2 para o Mercado C

Funções objetivo: neste problema, a função custo é representada por $z_1(x)$ e a função que representa a quantidade de CO_2 é $z_2(x)$. Os coeficientes correspondentes são dados por:

$$\min z_1(x) = 2x_{1A} + 4x_{1B} + 5x_{1C} + 3x_{2A} + 1x_{2B} + 2x_{2C} \quad (\text{Custo de transporte em R\$})$$

$$\min z_2(x) = 9x_{1A} + 4x_{1B} + x_{1C} + 2x_{2A} + 5x_{2B} + 8x_{2C} \quad (\text{Emissão de CO}_2)$$

Restrições:

- Capacidade de armazenamento: cada armazém possui uma capacidade máxima de produtos que podem ser estocados, ou seja, a quantidade de mercadorias que vai do armazém para todas as cidades não deve exceder a capacidade do armazém. Os respectivos valores de capacidade são dados a seguir:

$$x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} \leq 100 \quad (\text{Capacidade do Armazém 1})$$

$$x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} \leq 150 \quad (\text{Capacidade do Armazém 2})$$

- Demanda: cada mercado possui uma demanda mínima de produtos que deve ser respeitada, ou seja, a produção de cada armazém para a cidade deve ser maior ou igual a essa demanda mínima. Vale ressaltar que, nas restrições de demanda, estamos trabalhando com desigualdades do tipo " \geq ", pois restrições do tipo " $=$ " podem ocasionar

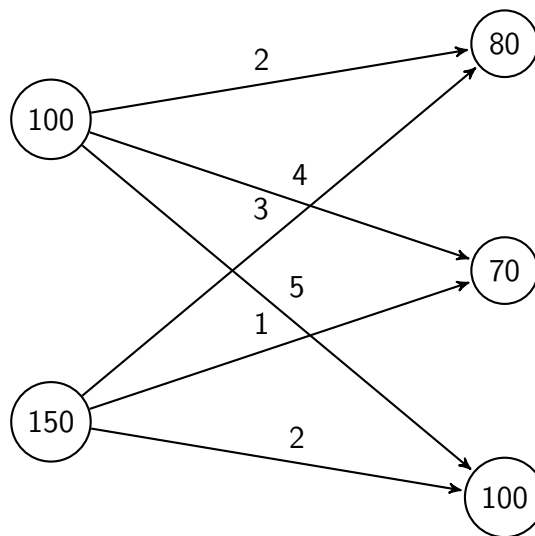
infactibilidade. As restrições são dadas a seguir:

$$x_{1A} + x_{2A} \geq 80 \quad (\text{Demanda do Mercado A})$$

$$x_{1B} + x_{2B} \geq 70 \quad (\text{Demanda do Mercado B})$$

$$x_{1C} + x_{2C} \geq 100 \quad (\text{Demanda do Mercado C})$$

Grafo do Problema de Transporte



Solução: no método do ε -restrito, o valor de ε foi variado no intervalo $[-500, 500]$ em mil passos. Considerando a função custo como restrição, ou seja, a função $z_1(x) \geq \varepsilon$, e aplicando o método do ε -restrito, e o método da soma ponderada, testado com

$$\lambda z_1(x) + (1 - \lambda)z_2(x), \quad \lambda \in [0, 1]$$

com mil passos no intervalo de λ . Os resultados obtidos são apresentados a seguir:

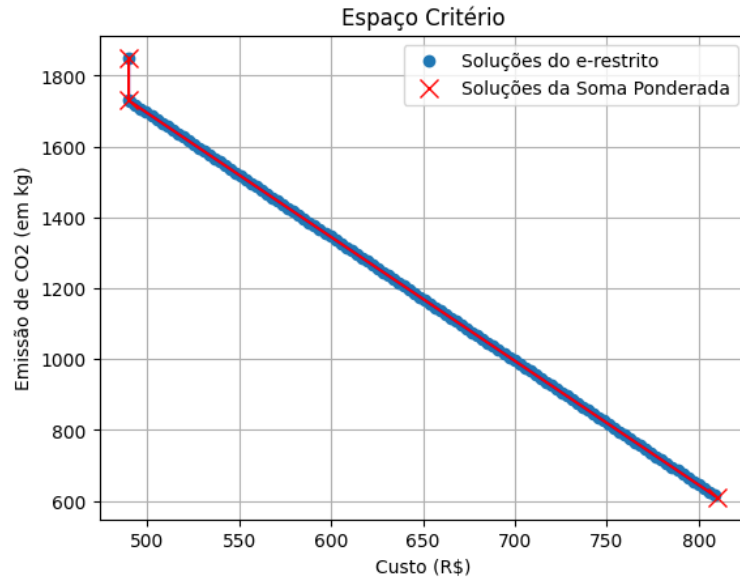


Figura 7: Gráfico da fronteira de Pareto do exemplo do transporte, para os métodos exatos.

Neste exemplo, como é possível observar na Figura 7, ao diminuir o custo de transporte, aumentamos a quantidade de CO₂ emitida. No entanto, note que, no canto superior esquerdo da Figura 7, uma das soluções obtidas pelo método da soma ponderada, $s_1(x) = (490; 1850)$, possui o mesmo custo que outra solução obtida pelo mesmo método, $s_2(x) = (490; 1730)$, mas com uma emissão de CO₂ superior. Conforme as Definições 2.1.8 e 2.1.9, concluímos que a solução $s_1(x)$ é fracamente eficiente (dado que este é um problema com duas minimizações).

4.2 Emissão de CO₂ e Lucro em Setores de Produção

Uma empresa produz seis produtos P_1 , P_2 , P_3 , P_4 , P_5 e P_6 . Cada produto gera um certo lucro e emite uma quantidade específica de CO₂. O objetivo é encontrar a quantidade de cada produto a ser fabricado para maximizar o lucro e minimizar as emissões de CO₂.

Variáveis de decisão:

x_1 : quantidade de P_1 a ser produzida

x_2 : quantidade de P_2 a ser produzida

x_3 : quantidade de P_3 a ser produzida

x_4 : quantidade de P_4 a ser produzida

x_5 : quantidade de P_5 a ser produzida

x_6 : quantidade de P_6 a ser produzida

Funções objetivo: neste problema, a função lucro é representada por $z_1(x)$ e a função de emissões de CO_2 é representada por $z_2(x)$. As funções objetivo são dadas por:

$$\max z_1(x) = 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 22x_5 + 18x_6 \quad (\text{Lucro em R\$})$$

$$\min z_2(x) = 12x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 22x_4 + 14x_5 + 16x_6 \quad (\text{Emissão de } \text{CO}_2 \text{ em kg})$$

Restrições:

- Orçamento: O custo total de produção não deve exceder o orçamento disponível:

$$50x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 65x_5 + 55x_6 \leq 15,000$$

- Horas de trabalho: o total de horas de trabalho necessárias para a produção não deve exceder as horas disponíveis:

$$2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 2.5x_5 + 1.5x_6 \leq 2,000$$

- Demanda mínima: cada produto deve atender a uma demanda mínima de mercado:

$$x_i \geq 10 \quad \text{para } i = 1, \dots, 6$$

Modelo Matemático Multiobjetivo:

$$\max z_1(x) = 15x_1 + 20x_2 + 25x_3 + 30x_4 + 22x_5 + 18x_6$$

$$\min z_2(x) = 12x_1 + 10x_2 + 18x_3 + 22x_4 + 14x_5 + 16x_6$$

$$\text{s.a:} \begin{cases} 50x_1 + 70x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 65x_5 + 55x_6 \leq 15,000 \\ 2x_1 + 3x_2 + 1x_3 + 4x_4 + 2.5x_5 + 1.5x_6 \leq 2,000 \\ x_i \geq 10 \quad \text{para } i = 1, \dots, 6 \\ x_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Solução: por meio dos métodos do ε –restrito e soma ponderada, obtemos a seguinte fronteira de Pareto:

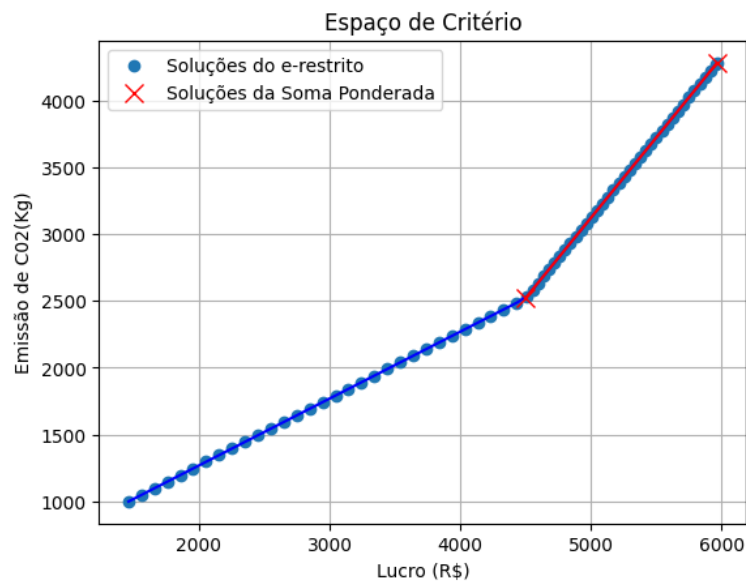


Figura 8: Gráfico da fronteira de Pareto do exemplo de lucro \times CO₂.

Pela Figura 8, temos que ao elevar o seu lucro, a empresa acaba por elevar a emissão de CO₂ advinda de seus produtos. Tal resultado é evidente, tendo em vista que para aumentar seu lucro, tal empresa necessita produzir mais de seus produtos, que por sua vez aumentam a emissão de CO₂.

4.3 Problema da Dieta

O objetivo deste modelo é obter uma dieta que minimize o custo diário de alimentos e maximize a quantidade de proteínas ingeridas. Para resolver esse problema, foi selecionado uma lista de alimentos (Tabela 1), suas informações nutricionais e a dose diária recomendada de nutrientes. Os valores apresentados na tabela correspondem a 100g de cada alimento, enquanto o custo médio por 100g foi obtido a partir de preços da internet. A quantidade de calorias, sódio e gordura foi ajustada para considerar outros ingredientes envolvidos no preparo desses alimentos.

Nutrientes \ Alimento	Arroz (x_1)	Feijão (x_2)	Frango (x_3)	Coxão Mole (x_4)	Queijo (x_5)	Costela (x_6)
Carboidrato (g)	28	14	0	0	5	0
Proteína (g)	3	5	32	32	15	14
Gordura (g)	2	2	8	12	8	13
Calorias (Kcal)	216	164	456	516	176	670
Fibra (g)	2	8	0	0	0	0
Sódio (mg)	166	167	205	209	236	228
Custo (R\$)	0,8	0,9	2,7	4,0	6,5	2,8

Tabela 1: Valores nutricionais dos alimentos.

Com base nas informações, elaboramos o seguinte modelo:

$$\min f_1(x) = 0.8x_1 + 0.9x_2 + 2.7x_3 + 4x_4 + 6.5x_5 + 2.8x_6 \quad (\text{Custo})$$

$$\max f_2(x) = 3x_1 + 5x_2 + 32x_3 + 32x_4 + 15x_5 + 14x_6 \quad (\text{Proteína})$$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 1800 \leq 216x_1 + 164x_2 + 456x_3 + 516x_4 + 176x_5 + 670x_6 \leq 2500 & (\text{Kcal}) \\ 100 \leq 28x_1 + 14x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 5x_5 + 0x_6 \leq 150 & (\text{Carboidrato}) \\ 25 \leq 2x_1 + 8x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 0x_5 + 0x_6 \leq 36 & (\text{Fibra}) \\ 1300 \leq 166x_1 + 167x_2 + 205x_3 + 209x_4 + 236x_5 + 228x_6 \leq 2300 & (\text{Sódio}) \\ 22 \leq 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + 12x_4 + 8x_5 + 13x_6 \leq 29 & (\text{Gordura Saturada}) \\ x_i \geq 10 & \text{para } i = 1, \dots, 6 \end{cases}$$

Ao adaptarmos tal modelo ao método da soma ponderada e ao ε -restrito, considerando a função de proteínas como uma restrição, obtivemos os seguintes resultados:

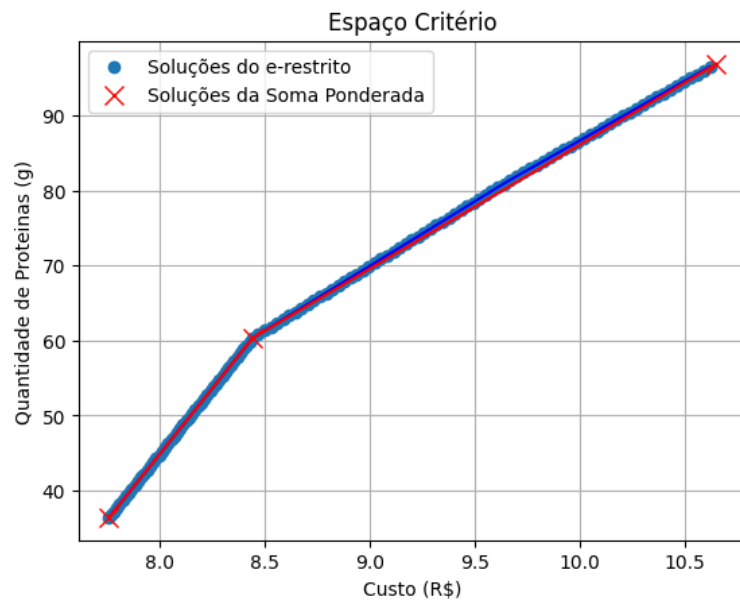


Figura 9: Gráfico da fronteira de Pareto do exemplo da dieta.

O resultado anterior nos mostra que, ao aumentar a quantidade de proteínas diárias, inevitavelmente elevamos o custo da refeição. Este resultado é corroborado pelas quantidades de alimentos selecionados pelo modelo em cada par de soluções, presentes na Tabela [2].

Na primeira solução, onde o custo é mínimo, há uma penalização devido à redução do custo, resultando na não seleção de alimentos ricos em proteínas. Foram selecionadas apenas 71g de costela, a carne com o mais baixo teor proteico, além de grandes quantidades de arroz e feijão, que possuem um custo menor. Esses alimentos, embora menos proteicos, contêm nutrientes suficientes para satisfazer as outras restrições nutricionais.

Por outro lado, na solução em que obtivemos o maior valor de proteínas diárias, o modelo optou por reduzir a quantidade de arroz e feijão consumidos e aumentar a quantidade de frango (aproximadamente 240g), alimento com maior valor proteico entre todos os outros alimentos. Essa escolha reflete a necessidade de incluir alimentos mais caros, mas com maior conteúdo proteico, para atingir o objetivo de maximizar a ingestão de proteínas.

Ademais, a última solução da tabela é uma solução intermediária que busca equilibrar o custo e a quantidade proteica. Como podemos ver, a quantidade de frango selecionada foi de 116g, enquanto a de arroz foi de 432g.

(Custo, Proteínas) Alimento	Arroz (x_1)	Feijão (x_2)	Frango (x_3)	Coxão Mole (x_4)	Queijo (x_5)	Costela (x_6)
(7,76; 36,40)	3,88	2,96	0,00	0,00	0,00	0,71
(10,62; 96,60)	2,30	2,55	2,40	0,00	0,00	0,00
(8,44; 60,30)	4,32	2,07	1,16	0,00	0,00	0,00

Tabela 2: Tabela com os valores das funções objetivo e soluções factíveis.

5 Problema da Cadeia Logística de Milho no Brasil

5.1 Motivação

O Brasil, um dos maiores produtores mundiais de milho, possui uma cadeia logística complexa que envolve desde a escolha das áreas de cultivo até o transporte, secagem, armazenamento e distribuição para mercados internos e externos. A eficiência dessa cadeia depende diretamente de fatores econômicos, como custos de transporte e tributos, que variam conforme o modal utilizado (rodoviário, ferroviário ou hidroviário), e de fatores ambientais, especialmente a redução das emissões de CO_2 , considerando as dimensões continentais do país. Nesse contexto, propõe-se um modelo multiobjetivo misto envolvendo o transporte rodoviário (demanda interna e envio aos portos) e hidroviário (exportações), com destaque à China, principal destino do milho brasileiro, que em 2023 importou cerca de 17,4 milhões de toneladas, representando 31% das exportações nacionais [5]. O modelo tem como objetivos a minimização do custo total da cadeia (produção, transporte, armazenagem e tributos) e do balanço líquido de CO_2 (emissões logísticas menos o sequestro pelo cultivo).

5.2 Descrição do Problema

O problema da cadeia logística de produção de milho no Brasil deste trabalho envolve as seguintes etapas:

1. **Seleção de áreas produtoras:** definição das regiões produtoras e estimação da produtividade (ton/ha), com base em dados históricos de cada localidade;
2. **Transporte para silos:** envio dos grãos dos centros produtores aos silos para secagem e armazenamento, respeitando a restrição de que cada produtor só pode encaminhar sua produção para silos situados no mesmo estado;

3. **Distribuição final:** atendimento da demanda interna e da demanda externa (via portos). Todos os silos têm permissão para enviar mercadoria tanto aos mercados internos quanto aos portos, para exportação;
4. **Parâmetros logísticos:** incorporação de distâncias por modal (rodoviário e hidroviário), custos de frete, tarifas de exportação e ICMS, além das capacidades de silos e portos;
5. **Formulação das restrições:** modelagem de fluxos de entrada e saída em cada nó da rede, limites de capacidade, balanço de estoque, atendimento da demanda e viabilidade de produção;
6. **Objetivos conflitantes:** desenvolvimento de um modelo de Programação Linear Inteira Mista multiobjetivo para minimizar o custo total que envolve todas as partes da rede, e o balanço de CO_2 (emissões de transporte menos sequestro por área cultivada).

A seguir, apresentamos uma formulação matemática de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) para o problema, baseada em [6].

5.3 Formulação matemática

Deste modo, a partir da descrição apresentada na Seção 5.2, foi estabelecido que o modelo matemático segue algumas hipóteses:

- O transporte do milho das localidades produtoras para os silos e dos silos para os mercados internos ou portos, ocorrem exclusivamente por rodovias. Foi considerado uma frota de caminhões disponível suficiente para atender à demanda de transporte ao longo das rotas logísticas (isto é, não há limite de carga em cada conexão de transporte);
- O transporte do milho para os mercados externos ocorrem somente pelo meio marítimo;
- O estoque ao final do último período deve ser zero. No primeiro período, considera-se que não há estoque inicial remanescente;
- Há apenas dois períodos, de modo que no segundo período o estoque é nulo.

A seguir, são apresentados os conjuntos, parâmetros e variáveis de decisão que são utilizados na formulação do Problema de Programação Linear Inteira Mista (PLIM) multiobjetivo:

Conjuntos: D : estados; E : produtores; J : silos; M : mercados internos; T : períodos; S : safras; \mathcal{A}^d : silos por cidade c e estado d ; \mathcal{E}^d : produtores por estado d ; P : portos; Υ : mercados externos; C_d : cidades no estado d .

Parâmetros:

- α_{ets} : produtividade agrícola na localidade e , período t , safra s (ton/ha);
- β_{ets} : área máxima disponível para cultivo na localidade e , período t , safra s (ha);
- δ_j : capacidade fixa do silo j (ton);
- γ_1 : custo de produção do milho (R\$/ha);
- γ_2 : custo de transporte do produtor e até o silo j (R\$/ton), calculado como:

$$\gamma_2 = c_r \cdot d_{ej} + \pi_{ej}(1 + \theta_{ej}),$$

onde $c_r = 0,3194$ R\$/ton.km é o custo unitário do transporte rodoviário, d_{ej} representa a distância entre o produtor e e o silo j (em km), e θ_{ej} é a alíquota do ICMS incidente sobre o transporte entre essas localidades, e π_{ej} é o valor da carga (R\$ / ton).

- γ_3 : custo de transporte do silo j ao mercado interno m (R\$/ton), cujo calculo é o mesmo de γ_2 ;
- γ_4 : custo de transporte do silo j ao porto p (R\$/ton), cujo calculo é o mesmo de γ_2 ;
- γ_5 : custo de transporte do porto p ao mercado externo l (R\$/ton), calculado como:

$$\gamma_5 = c_{plt} \cdot d_{pl} + v_{plt},$$

onde c_{plt} é o custo unitário do transporte marítimo (R\$/ton.km), d_{pl} representa a distância entre o porto p e o mercado externo l (em km), e v_{plt} é a taxa de exportação aplicável (R\$/ton).

- γ_6 : custos unitários de armazenagem (silos e portos, cujo custo é variável) (R\$/ton);
- γ_7 : custo de ativação de silo (R\$);
- λ : sequestro de CO₂ (ton CO₂/ha);
- τ : emissão de CO₂ no transporte (ton CO₂/ton.km);
- d_{ij} : distância entre a localidade i e j (km);
- σ_{it} : demanda do mercado i no período t (ton).

Variáveis de decisão:

- P_{ets} : área cultivada do produtor e , período t , safra s (ha);
- X_{ejts} : quantidade de milho transportada do produtor e para o silo j , no período t e safra s (ton);
- W_{ejt} : quantidade total transportada do produtor e para o silo j no período t , definida como:

$$W_{ejt} = \sum_{s \in S} X_{ejts}, \quad \forall e \in E, j \in J, t \in T; \quad (4)$$

- Y_{jmt} : quantidade de milho transportada do silo j para o mercado m , no período t (ton);
- I_{jt} : estoque de milho armazenado no silo j , ao final do período t (ton);
- B_{jt} : variável binária indicando ativação do silo j no período t ($B_{jt} \in \{0, 1\}$);
- Z_{jpt} : quantidade de milho transportada do silo j para o porto p , no período t (ton);
- R_{plt} : quantidade de milho transportada do porto p para o mercado externo l , no período t (ton);

Funções-objetivos:

- f_1 : função de custo, que considera os custos associados ao plantio e produção de milho, transporte da mercadoria entre produtores, silos e mercados, armazenagem dos grãos e ativação de áreas produtoras e silos;

- f_2 : função de balanço de CO₂, representando a diferença entre a emissão de CO₂ proveniente do transporte das cargas e o sequestro de CO₂ realizado pelas áreas cultivadas ao longo do período de plantio.

$$\begin{aligned}
\min f_1 = & \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} \gamma_1 P_{ets} + \sum_{e \in E} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \gamma_2 W_{ejt} d_{ej} \\
& + \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \gamma_3 Y_{jmt} d_{jm} + \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \gamma_4 Z_{jpt} d_{jp} \\
& + \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \gamma_5 R_{plt} d_{pl} + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \gamma_6 I_{jt} \\
& + \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \gamma_7 B_{jt}.
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\min f_2 = & \sum_{e \in E} \sum_{j \in J} \sum_{t \in T} \tau W_{ejt} d_{ej} + \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \tau Y_{jmt} d_{jm} \\
& + \sum_{j \in J} \sum_{p \in P} \sum_{t \in T} \tau Z_{jpt} d_{jp} + \sum_{j \in J} \sum_{m \in M} \sum_{t \in T} \tau R_{plt} d_{pl} \\
& - \sum_{e \in E} \sum_{t \in T} \sum_{s \in S} \lambda P_{ets}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Restrições:

- Conservação do fluxo produtor-silo: Toda a produção deve ser transportada para os silos:

$$\alpha_{ets} P_{ets} = \sum_{j \in J} X_{ejts}, \quad \forall e \in E, t \in T, s \in S.$$

- Atendimento da demanda: O transporte dos silos para os mercados deve atender à demanda:

$$\sum_{j \in J} Y_{jmt} = \sigma_{mt}, \quad \forall m \in M, t \in T.$$

- Balanço de estoque: O estoque em um silo depende do período anterior, entrada e saída,

e o estoque final (período (T) deve ser nulo):

$$I_{jt} = I_{j,t-1} + \sum_{e \in E} W_{ejt} - \sum_{m \in M} Y_{jmt} - \sum_{p \in P} Z_{jpt}, \quad \forall j \in J, \forall p \in P, t \geq 1.$$

$$I_{jT} = 0, \quad \forall j \in J.$$

- Ativação de silos e capacidade máxima: Apenas silos ativados podem armazenar milho, e, caso ativados, devem ter de armazenar no mínimo 150.000ton. e no máximo a capacidade do silo:

$$150.000B_{jt} \leq \sum_{e \in E} W_{ejt} \leq \delta_j B_{jt}, \quad \forall j \in J, t \in T.$$

$$\sum_{j \in \mathcal{A}_{s,c}^d} B_{jt} \leq 2, \quad \forall j \in J, d \in D, t \in T.$$

- Limite de área disponível: a área total utilizada na produção não deve exceder o limite de área disponível:

$$P_{ets} \leq \beta_{ets}, \quad \forall e \in E, t \in T.$$

- Conservação de fluxo nos portos: toda mercadoria que chega aos portos deve ir ao mercado externo diretamente, ou seja, não há estoque:

$$\sum_{j \in J} Z_{jpt} = \sum_{l \in \Upsilon} R_{plt}, \quad \forall p \in P, t \in T.$$

- Demanda Externa: toda demanda dos mercados externos devem ser atendidas:

$$\sum_{p \in P} R_{plt} = \sigma_{lt}, \quad \forall l \in \Upsilon, t \in T.$$

5.4 Extração de Dados e Elaboração do Modelo Matemático

Para implementar o modelo descrito na Seção 5.3, foi necessária a extração de informações referentes à cadeia logística do milho. Inicialmente foram selecionadas regiões produtoras relevantes (Mato Grosso, Mato Grosso do Sul, Paraná, Minas Gerais e Goiás) com base em dados do [7]. Considerou-se que cada localidade produtora possui três silos situados na mesma cidade, com produtores enviando sua produção somente dentro do mesmo estado. Os mercados consumidores internos foram definidos em São Paulo, Ceará, Pará, Acre, Santa Catarina, Amazonas, Rondônia, Mato Grosso do Sul e Tocantins, estados com demandas distintas — Santa Catarina destacando-se pelo uso do milho na alimentação animal; São Paulo pela indústria alimentícia e produção de etanol; Ceará e Pará por usos mistos; e Acre e Amazonas principalmente na alimentação animal e pequenas agroindústrias [8]. Para exportações, consideraram-se os portos de Santos, São Francisco do Sul, Vitória e Paranaguá, responsáveis por grande parte das exportações brasileiras, destacando-se Santos como principal [9].

Os dados utilizados na formulação incluem produtividade agrícola, área disponível para cultivo, volume transportado aos silos, estoques, demanda, emissões e sequestro de CO₂, capacidades de silos e portos, extraídos de [6, 10, 11, 12]. As rotas logísticas rodoviárias foram obtidas utilizando uma API do *Google Maps*, a partir das coordenadas geográficas das localidades envolvidas, permitindo o cálculo real das distâncias rodoviárias, além da inclusão das alíquotas de ICMS interestadual e intraestadual [13]. As distâncias marítimas, devido à indisponibilidade de API gratuita específica, foram aproximadas pela fórmula de *Haversine*.

6 Resultados do Problema da Cadeia Logística de Milho

Utilizando a biblioteca PuLP do *Python* para a implementação computacional e otimização, em conjunto com Pandas e NumPy para análise e tratamento dos dados, aplicamos o método AUGMECON2 para obter a seguinte fronteira de Pareto, por meio de 100 iterações do algoritmo. Para a resolução dos subproblemas de programação linear e inteira mista dentro do método, utilizamos o *solver* CBC (*Coin-OR Branch and Cut*), que é o *solver* padrão da biblioteca PuLP.

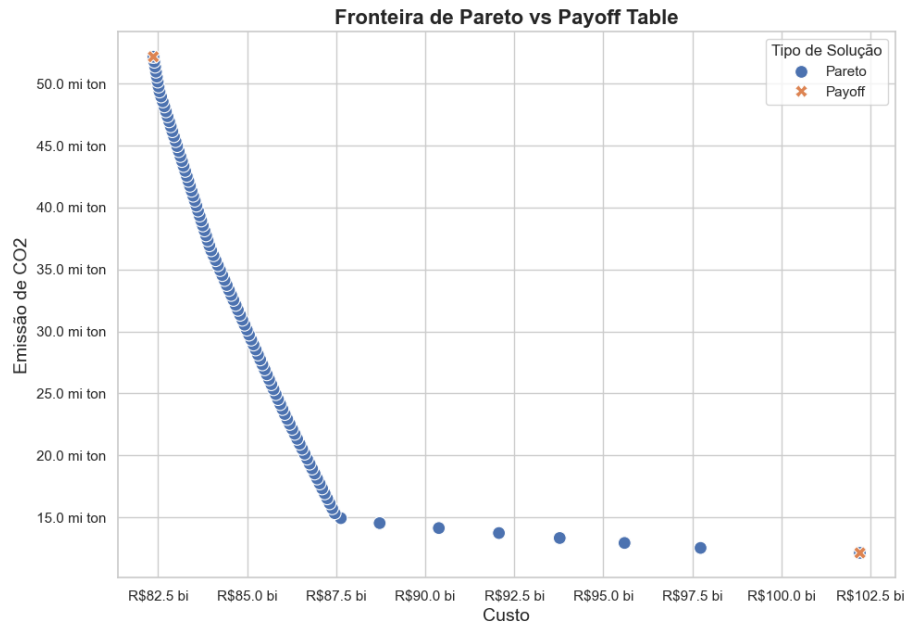


Figura 10: Fronteira de Pareto do método AUGMECON2 e pontos *payoff*.

Agora, deve-se analisar especificamente o comportamento das variáveis de decisão nos casos em que é minimizado o custo, balanço de CO₂ e duas soluções obtidas pelo método AUGMECON2. A ideia é verificar se há um comportamento similar das variáveis de decisão ao longo da rede de nosso problema e, caso contrário, propor possíveis abordagens que possam sanar ou descrever essas diferenças.

Vale ressaltar que para coletar os dados das tabelas seguintes e exibir os gráficos, foi utilizada uma excelente ferramenta de visualização, o *Power BI*. Nela, foi possível extrair tanto os valores apresentados a seguir, quanto obter uma representação visual do comportamento de todas as etapas da cadeia produtiva, de modo a comparar cada uma das soluções obtidas.

6.1 Resultados Minimização da Função Custo

Como pode-se observar, o custo que mais possui representação nesta solução, e nas demais analisadas, é o Custo com Transporte Interno. Esse custo abrange tanto o transporte das mercadorias dos centros produtores até os silos, quanto dos silos até os mercados internos e portos. De modo geral, como será apresentado nas demais soluções, os custos associados a esse transporte interno permanecem na faixa de R\$ 60 bilhões, indicando a existência de rotas preferenciais entre as localidades logísticas dentro do território nacional (ver Seção 6.4).

Além disso, nota-se que o custo com estoque e armazenagem é praticamente irrelevante quando comparado aos custos de transporte e da área de cultivo.

Dessa forma, podemos dizer que os custos mais significativamente reduzidos ao longo das soluções foram aqueles relacionados ao transporte para o mercado externo (dos portos aos destinos internacionais) e à área cultivada.

Categoria de Custo	Valor Absoluto (R\$)	Participação Relativa (%)
Custo Área Cultivada	12.924.360.645	15,69%
Custo Ativação de Silos	12.136.609	0,01%
Custo Estoque e Secagem	257.160.741	0,31%
Custo Transporte ao Mercado Externo	8.693.994.930	10,56%
Custo Transporte Interno	60.478.698.327	73,43%
Total Geral	82.366.351.252	100%

Tabela 3: Custos relativos ao problema de minimização de custo.

Sobre o comportamento da emissão, sequestro e balanço de CO₂, observa-se que o principal responsável pelas emissões nesta solução foi a Emissão CO₂ – Mercado Externo, ou seja, a que vem do transporte de cargas dos portos brasileiros até os mercados internacionais. Como será discutido na Seção 6.4, esta solução priorizou o uso do porto com menores taxas de exportação e custos logísticos, porém associado a uma frota marítima com altos índices de emissão de poluentes, o que explica o aumento relativo nesse componente de emissão.

Indicador	Valor (ton)	Observação
Emissão CO ₂ - Mercado Externo	50.182.326	91,66% da emissão total
Emissão CO ₂ - Mercado Interno	4.566.579	8,34% da emissão total
Sequestro de CO ₂	2.576.321	–
Balanço de CO₂	52.172.584	Emissão total menos sequestro

Tabela 4: Indicadores de emissão, sequestro e balanço de CO₂ para a minimização de custo.

6.2 Resultados Minimização da Função Balanço de CO₂

Como descrito anteriormente, o custo associado ao Transporte Interno manteve-se estável, na ordem de R\$ 60 bilhões, enquanto os custos relacionados à secagem, estoque e ativação de silos continuam sendo baixos.

Por outro lado, observa-se um aumento de aproximadamente R\$ 3 bilhões no custo da Área Cultivada, o que era esperado, tendo em vista que a redução do balanço de CO₂ exige o uso de uma área agrícola maior, resultando em um custo mais elevado.

Porém, a principal diferença encontra-se no custo de transporte para os mercados externos: houve um aumento de quase três vezes em relação ao valor observado na solução que minimiza apenas o custo. Como será discutido posteriormente, essa elevação decorre da escolha de outros portos, cujos custos logísticos e taxas de exportação são mais altos, mas que apresentam índices de emissão de CO₂ mais baixos — alinhando-se, portanto, ao objetivo de redução das emissões totais.

Categoria de Custo	Valor Absoluto (R\$)	Participação Relativa (%)
Custo Área Cultivada	15.578.411.322	15,48%
Custo Ativação de Silos	11.386.067	0,01%
Custo Estoque e Secagem	296.400.146	0,29%
Custo Transporte ao Mercado Externo	24.400.461.941	24,25%
Custo Transporte Interno	60.319.688.834	59,96%
Total Geral	100.606.348.310	100%

Tabela 5: Custos referentes ao problema de minimização do Balanço de CO₂.

Para o balanço de CO₂, observa-se que tanto a taxa de sequestro quanto a emissão proveniente do Mercado Interno mantiveram-se próximas aos valores da solução anterior. Dessa forma, fica evidente que o fator determinante para a variação no balanço de CO₂ está diretamente relacionado à escolha dos portos utilizados para o envio das cargas. Portos com menores taxas de emissão têm sido priorizados nas soluções que visam à sustentabilidade ambiental, ainda que isso implique em maiores custos.

Indicador	Valor (ton)	Observação
Emissão CO ₂ - Mercado Externo	11.186.626,5	73,11% da emissão total
Emissão CO ₂ - Mercado Interno	4.114.772,6	26,89% da emissão total
Sequestro de CO ₂	2.868.027,1	—
Balanço de CO₂	12.433.372	Emissão total menos sequestro

Tabela 6: Indicadores de emissão, sequestro e balanço de CO₂ para a minimização da função Balanço de CO₂.

6.3 Resultados obtidos pelo método AUGMECON2

Para as soluções obtidas por meio do método AUGMECON2, descrito no Algoritmo 1, observa-se um comportamento semelhante aos cenários anteriores em relação aos custos com Área Cultivada, Transporte Interno, Estoque e Secagem. Especificamente, foram analisadas duas soluções intermediárias: a 1ª solução (iteração 3) e a 2ª solução (iteração 6) do método. Esse padrão indica que, de forma geral, o modelo adotado apresenta uma preferência estrutural por determinadas localidades para a produção, o envio da mercadoria aos silos e a distribuição dos silos aos mercados internos.

A principal diferença, portanto, está nos custos associados aos portos, o que sugere que, nessas soluções intermediárias, a carga foi distribuída entre um número maior de portos. Essa diversificação possibilitou um maior equilíbrio entre custo logístico e emissões de CO₂.

Categoria de Custo	Valor Absoluto (R\$)	Participação Relativa (%)
Custo Área Cultivada	12.975.044.143	14,07%
Custo Ativação de Silos	11.816.104	0,01%
Custo Estoque e Secagem	260.295.191	0,28%
Custo Transporte ao Mercado Externo	18.554.653.338	20,12%
Custo Transporte Interno	60.398.359.527	65,51%
Total Geral	92.199.168.303	100%

Tabela 7: Custos referente à 1ª Solução – AUGMECON2.

Como pode ser observado na Tabela 8, o balanço de CO₂ apresentou um acréscimo de aproximadamente 1,4 milhão de toneladas em comparação à solução que minimiza exclusivamente essa função. Em contrapartida, houve uma redução de R\$ 8,4 bilhões no custo total, evidenciando um ganho econômico significativo. Além disso, embora a emissão proveniente do transporte externo ainda represente a maior parcela das emissões totais, observa-se uma redução de quase 40 milhões de toneladas nesse componente. Esse comportamento reforça a hipótese de que a distribuição da mercadoria passou a ser feita por múltiplos portos, o que contribui para um equilíbrio mais eficiente entre custo e impacto ambiental.

Indicador	Valor (ton)	Observação
Emissão CO ₂ - Mercado Externo	12.320.966	74,73% da emissão total
Emissão CO ₂ - Mercado Interno	4.165.360	25,27% da emissão total
Sequestro de CO ₂	2.600.530	–
Balanco de CO₂	13.885.796	Emissão total menos sequestro

Tabela 8: Indicadores de emissão, sequestro e balanço de CO₂ para a 1ª Solução – AUGMECON2.

Para a análise desta outra solução obtida pelo método AUGMECON2, podemos notar os mesmos comportamentos citados anteriormente.

Categoria de Custo	Valor Absoluto (R\$)	Participação Relativa (%)
Custo Área Cultivada	12.924.360.645	14,77%
Custo Ativação de Silos	12.131.520	0,01%
Custo Estoque e Secagem	256.286.814	0,29%
Custo Transporte ao Mercado Externo	13.801.392.026	15,77%
Custo Transporte Interno	60.514.145.709	69,15%
Total Geral	87.496.316.714	100%

Tabela 9: Custos relativos à 2ª Solução – AUGMECON2.

Indicador	Valor (ton)	Observação
Emissão CO ₂ - Mercado Externo	13.258.602	75,24% da emissão total
Emissão CO ₂ - Mercado Interno	4.362.592	24,76% da emissão total
Sequestro de CO ₂	2.576.321	–
Balanco de CO₂	15.044.873	Emissão total menos sequestro

Tabela 10: Indicadores de emissão, sequestro e balanço de CO₂ para a 2ª Solução – AUGMECON2.

6.4 Comparação dos Resultados

Antes de avançarmos para a análise dos resultados, é importante apresentar algumas informações complementares referentes à demanda interna e externa por período, bem como aos custos de exportação, emissões de CO₂ associadas aos portos e suas respectivas capacidades de armazenamento.

Para evitar sobrecarregar visualmente esta seção com tabelas extensas, disponibilizamos todos os dados no seguinte [link](#).

Mercado	Período	Demanda (ton)
Ceará	1	108.965,0
Acre	1	120.236,0
Rondônia	1	125.689,0
Tocantins	1	125.698,0
Pará	1	259.896,0
Amapá	1	269.895,0
Santa Catarina	1	809.562,0
São Paulo	1	1.058.191,0
Mato Grosso do Sul	1	1.559.639,0
Ceará	2	130.758,0
Acre	2	144.283,0
Rondônia	2	150.826,0
Tocantins	2	150.837,0
Amapá	2	183.874,0
Pará	2	311.875,0
Santa Catarina	2	971.474,0
São Paulo	2	1.269.829,0
Mato Grosso do Sul	2	1.871.566,0
Total Geral	—	9.623.093,0

Tabela 11: Demanda interna por mercado e período.

Mercado Externo	Período	Demanda (ton)
China – Xangai	1	2.916.868,0
China – Xangai	2	8.916.868,0
Total Geral	—	11.833.736,0

Tabela 12: Demanda externa por período.

Localidade do Porto	Estado	Capacidade (ton)
Santos, São Paulo	SP	6.412.541
São Francisco do Sul	SC	5.110.912
Vitória, Espírito Santo	ES	2.504.607
Paranaguá	PR	5.079.106

Tabela 13: Portos considerados com suas respectivas capacidades.

Porto	Mercado Externo	Distância (km)	Custo Exp. (R\$/ton)	Custo Transp. (R\$/ton·km)	Taxa Emissão (ton CO₂/ton·km)
Santos, São Paulo	China–Xangai	18.651	980	0,01	0,00006
São Francisco do Sul	China–Xangai	18.983	320	0,0002	0,0005
Vitória, Espírito Santo	China–Xangai	17.909	410	0,0003	0,0003
Paranaguá	China–Xangai	18.930	1.230	0,09	0,00004

Tabela 14: Distâncias, custos e taxas de emissão associadas aos portos no transporte para o mercado externo.

Após a análise dos resultados e a formulação de hipóteses sobre o comportamento do fluxo logístico na rede, passamos agora a uma avaliação mais detalhada. Para isso, utilizaremos gráficos comparativos que ilustram o comportamento do fluxo entre as quatro soluções distintas apresentadas anteriormente, permitindo o acompanhamento das decisões de roteamento, uso de silos e escolha de portos. Vale ressaltar que os gráficos a seguir englobam os dois períodos de análise, com exceção do estoque, que só é definido no primeiro período.

A primeira parte da análise consiste em verificar em quais localidades foram mais utilizadas a área de produção; para isso, foi elaborado o seguinte gráfico com base nos dados obtidos:

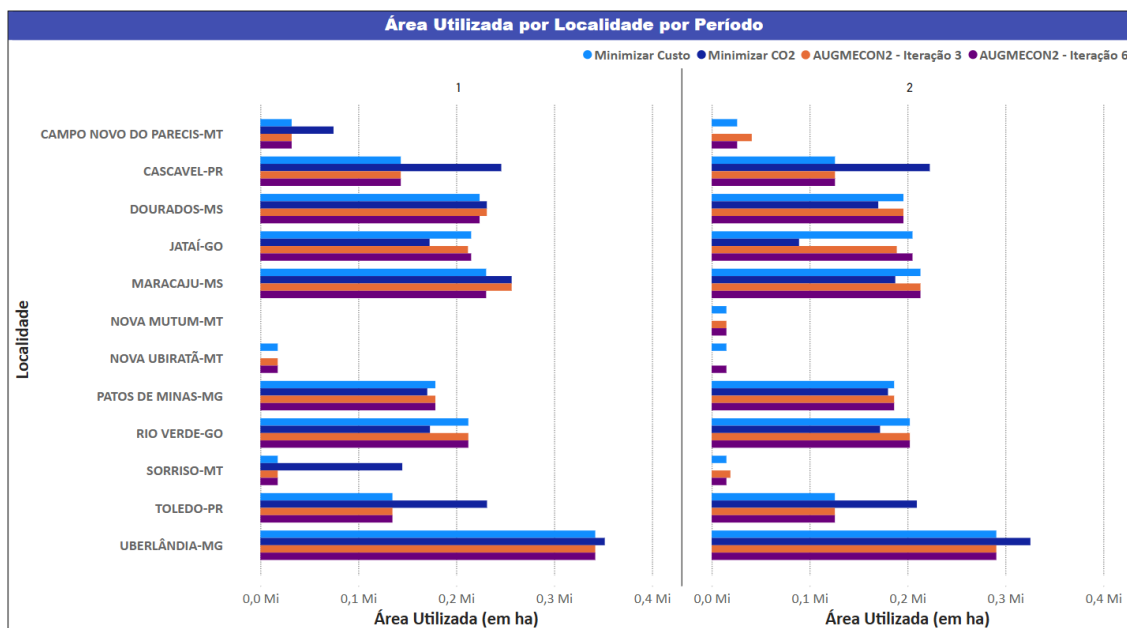


Figura 11: Gráfico comparativo da área utilizada para produção por Localidade.

Como pode ser observado na Figura 11, de forma geral, ambos os problemas de otimização apresentaram uma tendência a selecionar as mesmas localidades para o cultivo. A principal exceção ocorre no caso da minimização do CO₂, que ampliou a seleção para outras localidades adicionais, conforme também evidenciado na Figura 12. Esse comportamento está alinhado com a análise feita anteriormente para essa solução: a escolha de uma área agrícola maior aumenta a taxa de sequestro de CO₂, contribuindo assim para a redução do balanço total de emissões.

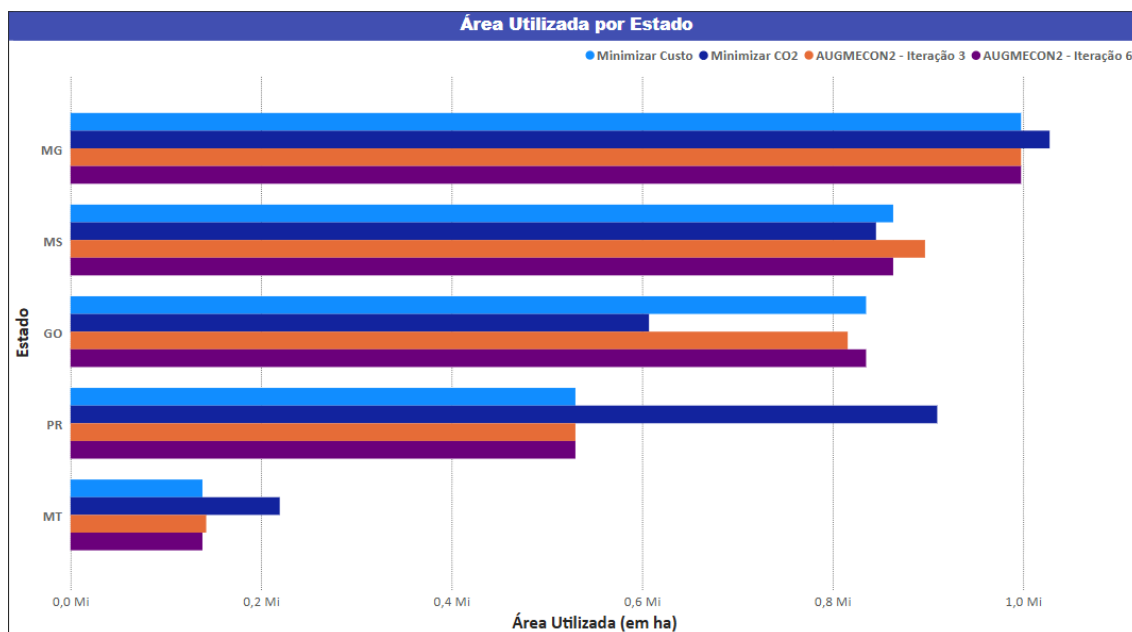


Figura 12: Gráfico comparativo da área utilizada para produção por Estado.

No que diz respeito ao envio de milho aos silos, vale lembrar que, conforme a restrição imposta no modelo, os centros produtores só podem enviar milho para silos localizados no mesmo estado, independentemente de estarem ou não na mesma cidade. Nesse contexto, observa-se que as localidades de envio permaneceram coerentes com aquelas escolhidas para o cultivo. As variações na quantidade de envio são explicadas pelos diferentes coeficientes de produtividade (ton/ha) associados a cada área cultivada, o que impacta diretamente no volume produzido e, consequentemente, no volume transportado aos silos.

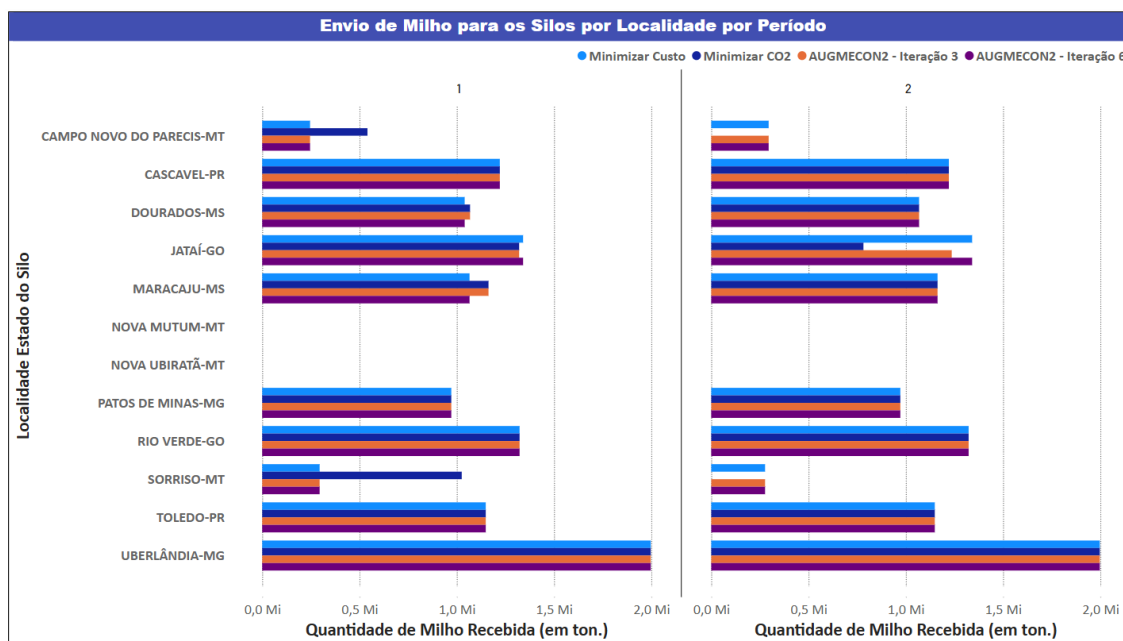


Figura 13: Gráfico comparativo de envio de milho para o Silos por período e solução em ton.).

Conforme mostrado nas Figuras 13 e 14, é possível notar que alguns dos silos que mais receberam carga não realizaram o envio direto aos mercados consumidores, como o caso dos silos em Uberlândia-MG. Além disso, observam-se variações nas quantidades de milho enviadas no cenário de minimização de CO_2 , em comparação às demais soluções, sendo que tal diferença pode estar associada à escolha de localidades com rotas mais próximas aos silos de origem, o que favorece a redução da emissão de CO_2 .

Diante disso, torna-se necessário comparar o balanço de estoque e o volume de envio para os portos, a fim de verificar se as soluções seguem um padrão consistente de comportamento logístico ou se há divergências entre elas.

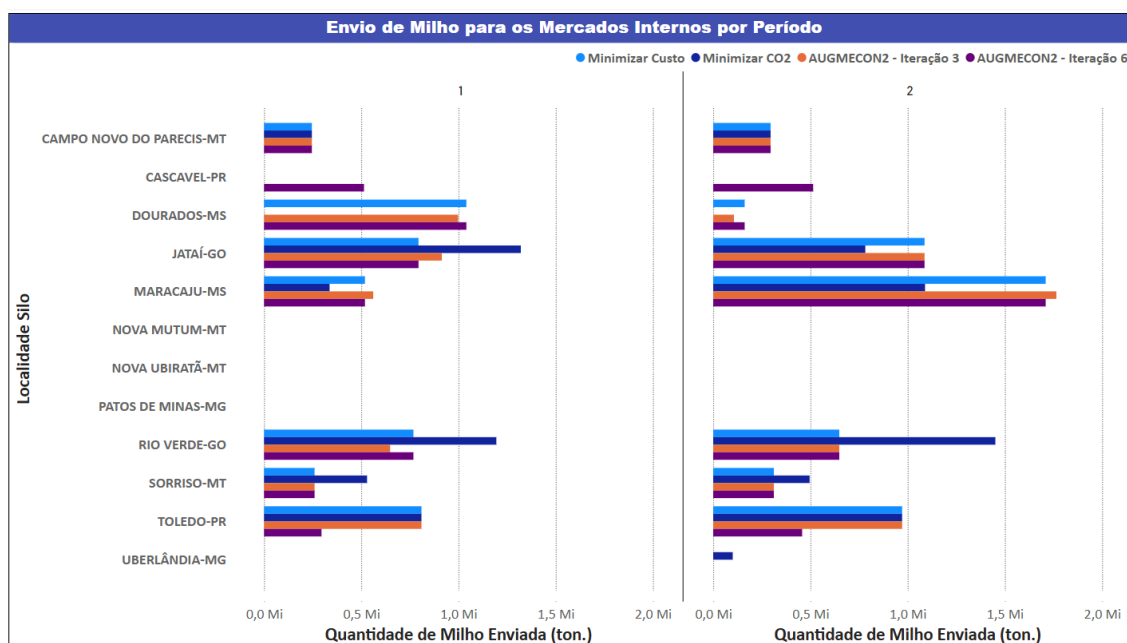


Figura 14: Gráfico comparativo de envio do Silo para o Mercado Interno.

Conforme apresentado na Figura 15, os silos com os maiores volumes de estoque de milho estão localizados em Uberlândia–MG, que também figura entre os silos que mais receberam carga nas diferentes soluções. No período 1, observou-se o armazenamento de aproximadamente 1,2 a 2,0 milhões de toneladas de milho nesse silo, considerando todas as otimizações.

Além disso, a Figura 16 mostra que, de fato, grande parte da carga estocada em Uberlândia e Patos de Minas — com exceção da solução de minimização de CO_2 — foi posteriormente enviada aos portos no segundo período. Em alguns casos, essa quantidade correspondeu a quase metade do volume total estocado no primeiro período.

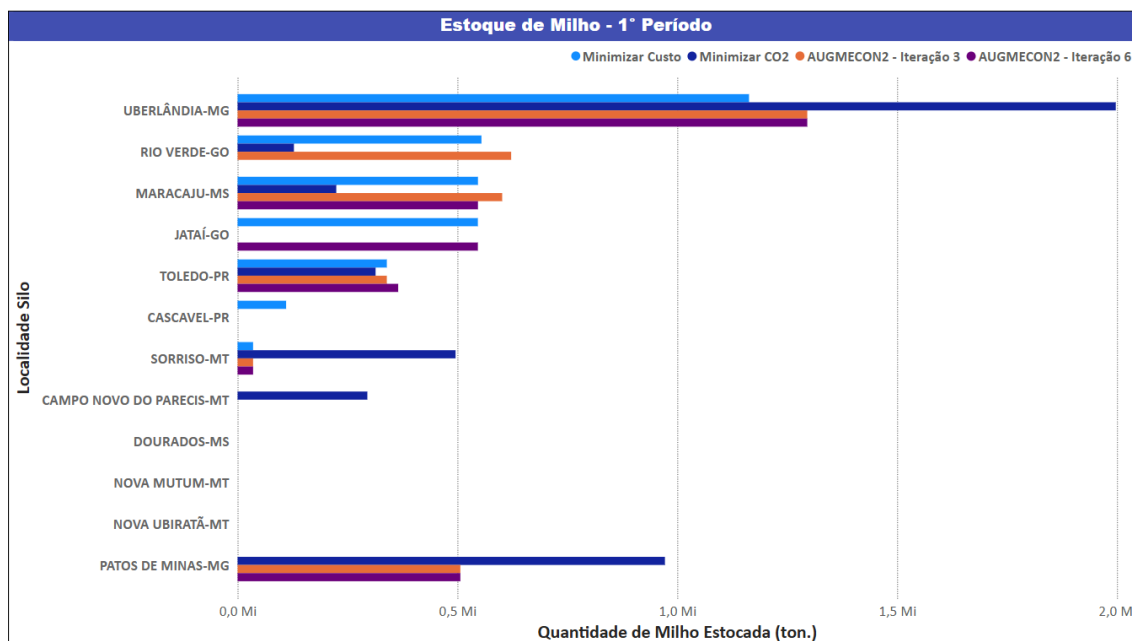


Figura 15: Gráfico comparativo de Estoque no 1ª Período.

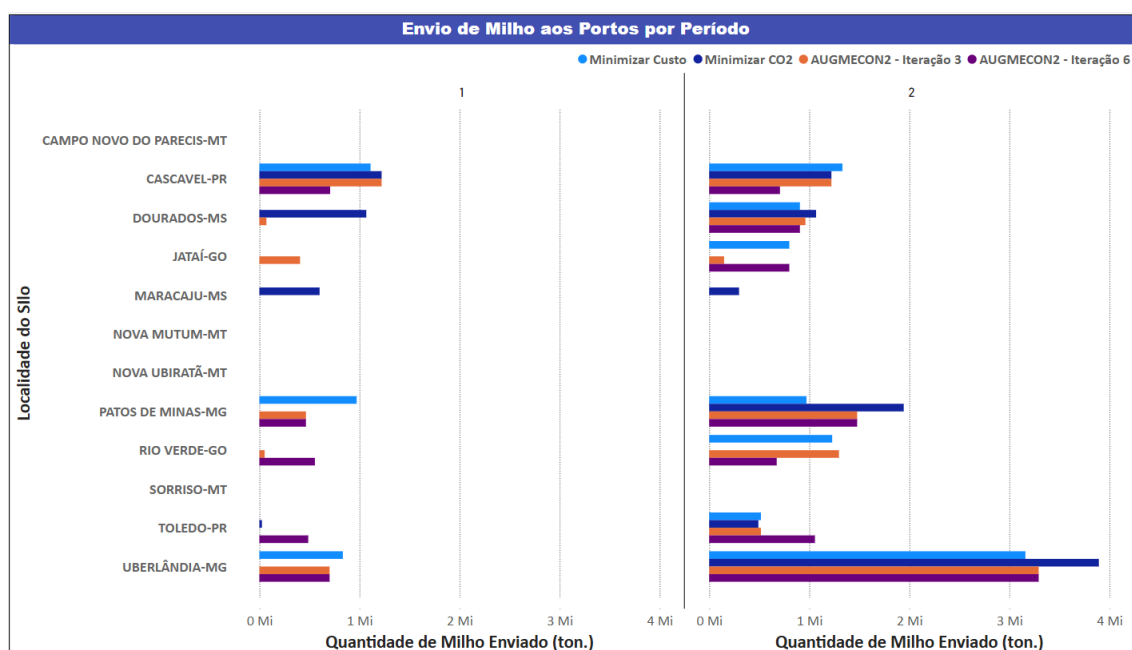


Figura 16: Gráfico comparativo de envio do Silo para o Porto.

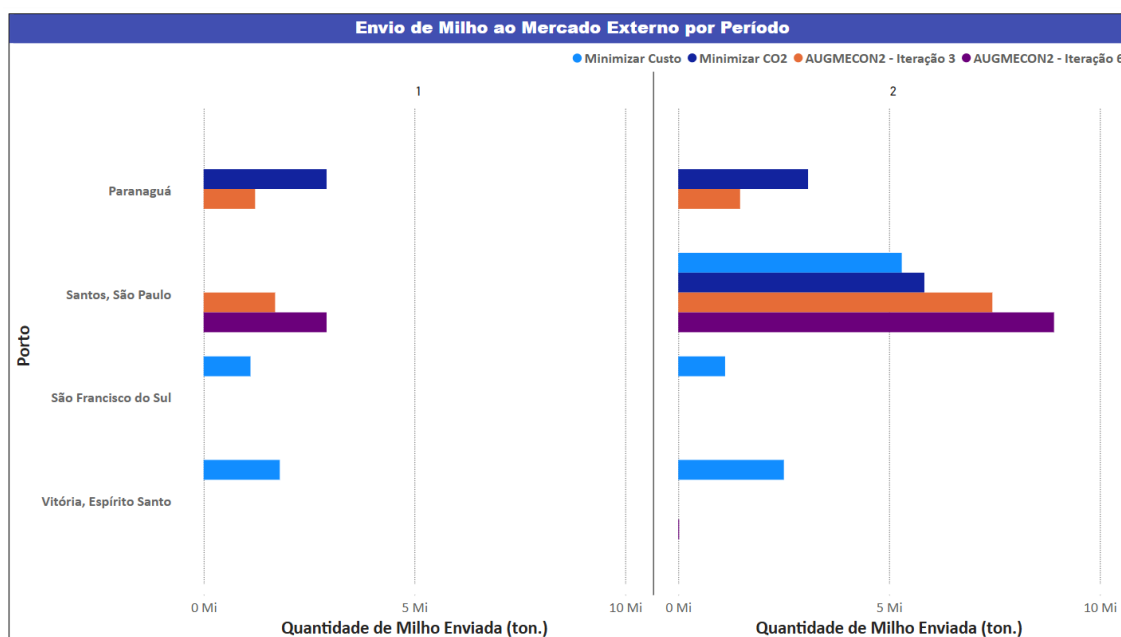


Figura 17: Gráfico comparativo de envio do Porto ao Mercado Externo.

A análise conjunta dos fluxos de exportação (Figura 17), das características logísticas dos portos (Tabela 14) e da demanda externa por período (Tabela 12) permite tirar as seguintes conclusões:

- Minimização de Custo.** No período 1, a solução de minimização de custo concentrou as exportações em Vitória–ES e São Francisco do Sul–SC, que apresentam o melhor custo-benefício, considerando principalmente a distância. No período 2, com a demanda ampliada, foi necessário acionar também o porto de Santos–SP, pois a capacidade de Vitória e São Francisco do Sul não era suficiente para atender à demanda solicitada. Apesar de Santos ter custo de exportação inferior ao de Paranaguá (Tabela 14), o modelo o incluiu devido à sua maior capacidade instalada. Vale observar que os portos mais utilizados, embora eficientes em custo, apresentam as maiores taxas de emissão de CO₂, que podem ser observadas na Tabela 4.
- Minimização de CO₂.** Ao priorizar a redução de emissões, observa-se que, no período 1, houve apenas o envio de mercadorias para Paranaguá, que possui a menor taxa de emissão (0,000041 ton CO₂/ton·km). E assim como ocorre na minimização do custo, o porto de Paranaguá não possui capacidade suficiente para atender toda a demanda; logo, parte da carga vai para o porto de Santos. Como se pode notar na Tabela 14, o porto

de Paranaguá é o que possui o maior custo de exportação e de transporte. Deste modo, ao priorizar a minimização da emissão, temos que o custo se eleva significativamente, como foi mostrado na Tabela 5.

- **Soluções AUGMECON2.** Nas iterações intermediárias do método AUGMECON2, o modelo equilibra custos e emissões:

- **1ª Solução - AUGMECON2:** distribui as mercadorias entre o porto de Santos e Paraguá, evidenciando um balanceamento entre uma região que emite menos CO₂ e uma que possui um custo moderado e uma capacidade maior
- **2ª Solução - AUGMECON2:** nesta iteração, toda a produção passou apenas pelo porto de Santos, que obteve um aumento significativo no balanço de CO₂ em comparação à 1ª Solução do AUGMECON2, de quase 1,2 Milhão de ton. CO₂ (veja as Tabelas 7, 9, 8, 10), mas obteve um custo de R\$ 4,7 bilhões a menos.

7 Conclusão

Este trabalho explorou de forma teórica, computacional e aplicada os fundamentos e as aplicações da Otimização Multiobjetivo. Na primeira etapa, foram apresentados os principais conceitos associados a essa área, como a formulação de problemas com múltiplas funções objetivo e a importância de se considerar a existência de soluções eficientes (ou de Pareto). Em seguida, foram apresentados os métodos exatos, com ênfase na soma ponderada e no ε -restrito, tanto do ponto de vista matemático quanto computacional, incluindo a implementação de algoritmos que possibilitam a construção da fronteira de Pareto. O objetivo foi fornecer não apenas a base teórica, mas também ferramentas práticas que pudessem ser aplicadas a problemas reais.

Na segunda parte do trabalho, esses conhecimentos foram empregados na modelagem e análise da cadeia logística de milho no Brasil. Foi desenvolvido um modelo de otimização inteira mista bi-objetivo, com foco na minimização simultânea dos custos operacionais e do balanço de CO₂. Os resultados obtidos evidenciaram que a configuração da rede logística depende fortemente da escolha dos portos de escoamento, com impactos distintos sobre custo e sustentabilidade. Além disso, foi possível identificar parâmetros sensíveis (como os custos de

ativação de silos e os dados de emissão portuária), bem como propor estratégias de melhoria, como a ampliação do uso de modais sustentáveis e o reposicionamento logístico de estoques.

De modo geral, este trabalho busca mostrar que a Otimização Multiobjetivo é uma ferramenta poderosa para compreender e balancear funções objetivas conflitantes, como cadeias de produção. A análise das soluções obtidas permite identificar as variáveis que mais influenciam o modelo e compreender o comportamento entre objetivos conflitantes, fornecendo, assim, um auxílio para tomada de decisões. Espera-se que este trabalho contribua para a difusão desses métodos no contexto da Matemática Aplicada e estimule novas pesquisas e aplicações em diferentes problemas.

Referências

- [1] V. Chankong and Y. Y. Haimes, *Multiobjective decision making: Theory and methodology*. New York: Elsevier Science Publishing Co, 1983.
- [2] M. N. Arenales, V. A. Armentano, R. Morabito, and H. H. Yanasse, *Pesquisa Operacional*. Editora Campus/Elsevier, 2006.
- [3] C. H. Antunes, M. J. Alves, and J. N. Clímaco, *Multiobjective linear and integer programming*. Switzerland: Springer, 2016.
- [4] G. Mavrotas and K. Florios, “Augmecon2: A novel version of the ε -constraint method for finding the exact pareto set in multi-objective integer programming problems,” *Laboratory of Industrial and Energy Economics, School of Chemical Engineering, National Technical University of Athens*, 2013. [Online]. Available: <https://www.gams.com/modlib/adddocs/epscmmip.pdf>
- [5] Compre Rural. (2024) Brasil amplia dependência da china nas exportações de grãos. Acesso em: 13 abr. 2025. [Online]. Available: <https://www.comprerural.com/brasil-amplia-dependencia-da-china-nas-exportacoes-de-graos/>
- [6] A. A. Filho, C. D. Rocco, and R. Morabito, “Bi-objective model for tactical planning in corn supply chain considering CO_2 balance,” *International Journal of Systems Science: Operations & Logistics*, vol. 11, no. 1, p. 2337442, 2024. [Online]. Available: <https://doi.org/10.1080/23302674.2024.2337442>
- [7] Canal Rural. (2024) Os reis da espiga: Veja os 15 municípios que mais produzem milho no brasil. [Online]. Available: <https://www.canalrural.com.br/agricultura/os-reis-da-espiga-veja-os-15-municipios-que-mais-produzem-milho-no-brasil/>
- [8] Wikipédia, “Economia de santa catarina,” 2024. [Online]. Available: https://pt.wikipedia.org/wiki/Economia_de_Santa_Catarina
- [9] Companhia Nacional de Abastecimento (Conab), “Boletim logístico: Portos do arco norte respondem por 43,3% das exportações de milho,” 2024, acesso

em: 13 abr. 2025. [Online]. Available: <https://www.conab.gov.br/ultimas-noticias/5493-boletim-logistico-portos-do-arco-norte-respondem-por-43-3-das-exportacoes-de-milho>

- [10] Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB). (2024) Informações agropecuárias – safras de grãos. [Online]. Available: <https://www.conab.gov.br/info-agro/safras/graos>
- [11] (2024) Visualização de dados – silos de armazenagem no brasil. [Online]. Available: <https://www.conab.gov.br/armazenagem>
- [12] Companhia Nacional de Abastecimento (CONAB). (2024) Informações sobre armazenagem de grãos no brasil. [Online]. Available: <https://www.conab.gov.br/armazenagem>
- [13] Ministério da Fazenda. (2024) Icms: Regras e alíquotas para operações interestaduais e internas. [Online]. Available: <https://www.gov.br/receitafederal/pt-br/assuntos/icms>