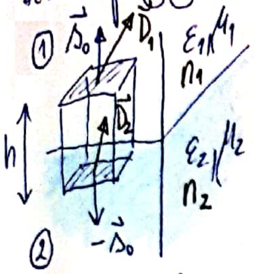
EMV NA MEJI DVEH SNOVI – Fresnelove enačbe

Robni pogoji za polje na meji na kateri ni tokov in nabojev: $\delta_e = \mathcal{K}_e = 0$ → površinski naboj/tok



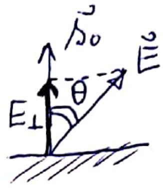
n_1 in n_2 sta lomna količnika v snovi 1 oz 2.

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = 0 \Rightarrow \oint \vec{D}\,d\vec{S} = 0$$

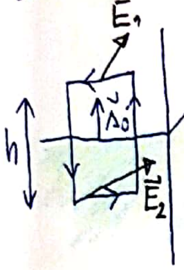
$$h \to 0 \Rightarrow \vec{D}_1\vec{s}_0 + \vec{D}_2(-\vec{s}_0) = 0$$

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\cdot\vec{s}_0 = 0 \quad \text{oz.}\quad D_{2,\perp} = D_{1,\perp}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \quad (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\cdot\vec{s}_0 = 0 \quad \text{oz.}\quad B_{2,\perp} = B_{1,\perp}$$



$E_\perp = E\cdot\cos\theta$ to porežemo s skalarnim produktom

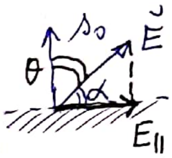


$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \oint \vec{E}\,d\vec{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int \vec{B}\,d\vec{S}$$

$h \to 0$, desni del enačbe $\to 0$

$$\vec{E}_1\cdot d\vec{s} - \vec{E}_2\,d\vec{s} = 0$$

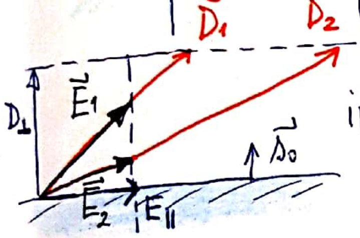
$\vec{s}_0$ lahko vedno izberemo tako, da zanka leži v ravnini $\vec{s}_0$ in $\vec{E}$



$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\times\vec{s}_0 = 0$$

oz. $E_{2,\parallel} = E_{1,\parallel}$

$E_\parallel = E\cdot\cos\alpha = E(\cos(\frac{\pi}{2} - \theta))$
$= E\cdot\sin\theta$ to dobimo pri vektorskem produktom

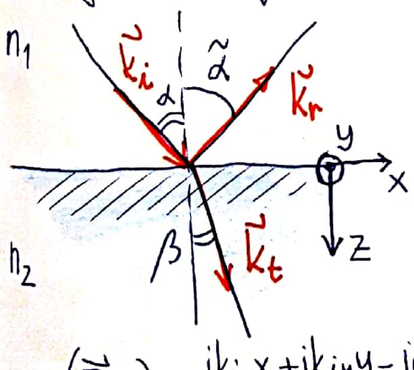


in podobno

$$(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\times\vec{s}_0 = 0$$

oziroma $H_{2,\parallel} = H_{1,\parallel}$

Zamislimo si ravno potujoče sinusno EMV, ki vpada na mejo dveh snovi 1 in 2. Vemo, da dobimo poleg vpadnega še odbito in prepuščeno (lomljeno) EMV. Zanima nas, kakšne lastnosti imata vpadno, odbito in prepuščeno valovanje, da bo zadoščeno zgornjim robnim pogojem.



$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i}\,e^{i\vec{k}_i\vec{r} - i\omega_i t + i\delta_1} \qquad k_i = \frac{\omega_i}{c_0} n_1$$

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r}\,e^{i\vec{k}_r\vec{r} - i\omega_r t + i\delta_2} \qquad k_r = \frac{\omega_r}{c_0}\cdot n_1$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t}\,e^{i\vec{k}_t\vec{r} - i\omega_t t + i\delta_3} \qquad k_t = \frac{\omega_t}{c_0}\cdot n_2$$

Mejo med snovema postavimo v ravnino $z = 0$.
Robni pogoj za $\vec{E}$ potem prinese

$$(\vec{E}_{0i})_\parallel e^{ik_{ix}x + ik_{iy}y - i\omega_i t + i\delta_1} + (\vec{E}_{0r})_\parallel e^{ik_{rx}x + ik_{ry}y - i\omega_r t + i\delta_2} = (\vec{E}_{0t})_\parallel e^{ik_{tx}x + ik_{ty}y - i\omega_t t + i\delta_t}$$

Temu pogoju mora biti zadoščeno $\forall t$ in za vse vrednosti x in y.
Če izberemo $x = y = 0$ in $t = 0 \Rightarrow \delta_1 = \delta_2 = \delta_3$
$x = y = 0$ in $t > 0 \Rightarrow \omega_i = \omega_r = \omega_t$ frekvenca se pri odboju in lomu nespremeni!
Če izberemo $t = 0$ in $x, y \Rightarrow$

$$k_{ix}x + k_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{tx}x + k_{ty}y = \text{konst} \quad \forall x, y$$

to je enačba ravnine, če denimo vzamemo $y = 0 \Rightarrow k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$ in podobno $k_{iy} = k_{ry} = k_{ty}$

$\boxed{\vec{k}\vec{r} = \text{konst}}$ enačba ravnine v 3D $\vec{r}$ & $\vec{k}$ prostoru ⟹ vpadno valovanje $\vec{k}_i$ in valovna vektorja odbitega $\vec{k}_r$ ter prepuščenega valovanja $\vec{k}_t$

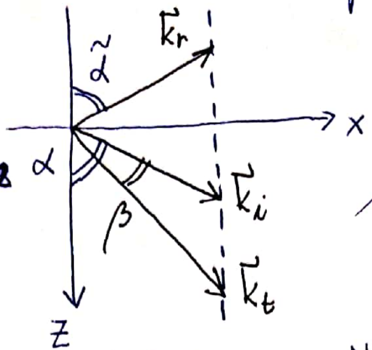
$\boxed{\vec{k}_i, \vec{k}_t, \vec{k}_r \text{ LEŽIJO V ISTI RAVNINI}}$ VPADNA RAVNINA!

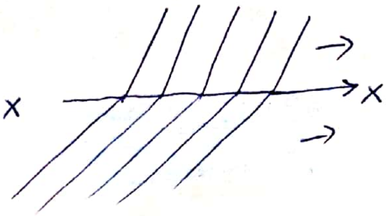
Po navadi izberemo, da je to ravnina XZ. Posledično zapišemo:

$\vec{k}_i = (\sin\alpha, 0, \cos\alpha)\frac{\omega}{c_0} n_1$

$\vec{k}_r = (\sin\tilde{\alpha}, 0, -\cos\tilde{\alpha})\frac{\omega}{c_0} n_1$

$\vec{k}_t = (\sin\beta, 0, \cos\beta)\frac{\omega}{c_0} n_2$





vzdolžna komponenta $\vec{k}$ se ohranja!

Če uporabimo $k_{ix} = k_{rx} = k_{tx}$

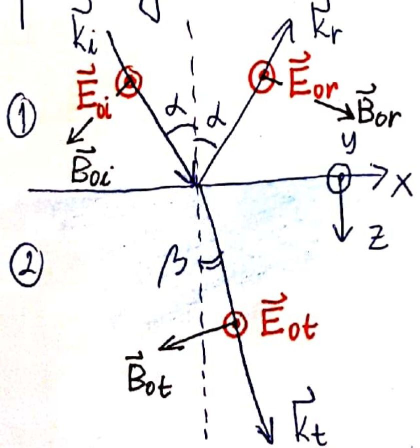
$k_{ix} = k_{rx} \Rightarrow \frac{\omega}{c_0} \cdot n_1 \cdot \sin\alpha = \frac{\omega}{c_0} \cdot n_1 \cdot \sin\tilde{\alpha} \Rightarrow \boxed{\tilde{\alpha} = \alpha}$ odbojni zakon

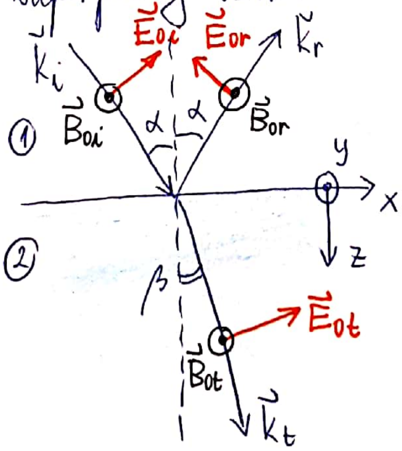
$k_{ix} = k_{tx} \Rightarrow \frac{\omega}{c_0} \cdot n_1 \cdot \sin\alpha = \frac{\omega}{c_0} \cdot n_2 \cdot \sin\beta$ $\boxed{n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta}$ lomni zakon (Snellov zakon)

(Willebrord Snellius, NL)

Z zgornjimi enačbami smo zadostili samo pogoju periodičnemu spreminjanju faze polja v eni in v drugi snovi. Hribi in doline valovanja vzdolž meje → potujejo enako hitro. Moramo pa uskladiti tudi še amplitude polj $\vec{E}_{0i}$, $\vec{E}_{0r}$ in $\vec{E}_{0t}$. To vodi do t.i. Fresnelovih enačb (August-Jean Fresnel, F, fizik)

Za obravnavo izberemo dve ortogonalni linearni polarizaciji. Vemo, da vsako drugo polarizacijo lahko sestavimo kot superpozicijo teh.





velja $\text{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}$

$\Rightarrow \vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$

$E_0 = c \cdot B_0$

$c = c_0/n$

to polarizacijo $\vec{E}_{0i} \| \vec{E}_{0r} \| \vec{E}_{0t} \| \vec{e}_y$ imenujemo TE, s, σ polarizacija/valovanje

to polarizacijo $\vec{B}_{0i} \| \vec{B}_{0r} \| \vec{B}_{0t} \| \vec{e}_y$ pa imenujemo TM, p, π polarizacija/valovanje

Za vsako izmed njiju bomo robne pogoje obravnavali posebej. Pri tem se bomo omejili na nemagnetne snovi, za katere velja $\mu = 1$, $\vec{B} = \mu_0\vec{H}$ in $n = \sqrt{\varepsilon}$

Osnovna zahteva za TE situacijo je $E_\parallel = (E_{0i} + E_{0r}) = E_{0t} = \text{konst}$

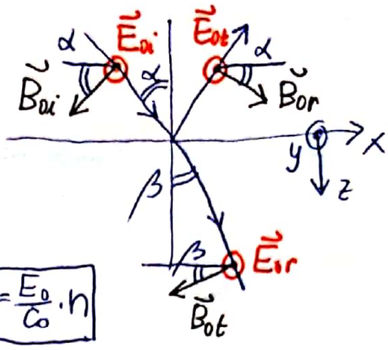
—||— —||— za TM situacijo pa $H_\parallel = (H_{0i} + H_{0r}) = H_{0t} = \text{konst}$

vendar pa, če je $\mu_1 = \mu_2 = 1 \Rightarrow$ dobimo

polje v snovi 1 je superpozicija vpadnega in odbitega, v snovi 2 pa imamo samo prepuščeno valovanje.

$(B_{0i} + B_{0r}) = B_{0t} \Rightarrow B_0$ zveza z E_0 $\quad B_0 = \frac{E_0}{c} = \frac{E_0}{c_0} \cdot n$

Fresnelove enačbe za TE valovanje



1) $E_\parallel = konst \Rightarrow E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

2) $D_\perp = konst = 0$ ✓

3) $H_\parallel = konst$ (v primeru $\mu_1 = \mu_2 = 1$) $\Rightarrow B_\parallel = konst$

$$\Rightarrow -B_{0i}\cos\alpha + B_{0r}\cos\alpha = -B_{0t}\cos\beta \qquad \boxed{B_0 = \frac{E_0}{c_0}\cdot n}$$

$$-E_{0i} n_1 \cos\alpha + E_{0r} n_1 \cos\alpha = -n_2 E_{0t}\cos\beta$$

$$n_1 \cos\alpha\, E_{0i} - n_1\cos\alpha\, E_{0r} = n_2 \cos\beta\, E_{0t}$$

4) $B_\perp = konst$

Zapisali smo vse 4 robne pogoje.

$$B_{0i}\sin\alpha + B_{0r}\cdot\sin\alpha = B_{0t}\cdot\sin\beta$$

$$n_1\cdot E_{0i}\sin\alpha + n_1\cdot E_{0r}\cdot\sin\alpha = n_2\cdot E_{0t}\cdot\sin\beta$$

$$n_1\cdot\sin\alpha\,(E_{0i} + E_{0r}) = n_2\cdot\sin\beta\,(E_{0t})$$

ker velja lomni zakon $n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta \Rightarrow$

$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$ kar je ekvivalentno enačbi 1)! ✓

V resnici imamo torej **2** enačbe za **3** neznanke: E_{0t}, E_{0r} in E_{0i}. Po navadi izrazimo E_{0r} in E_{0t} kot funkcijo E_{0i}. Na tak način lahko izračunamo relativna razmerja med njimi.

1) $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \qquad / \cdot n_2\cos\beta$

3) $n_1\cos\alpha\, E_{0i} - n_1\cos\alpha\, E_{0r} = n_2\cos\beta\cdot E_{0t}$

$$n_2\cos\beta\, E_{0i} + n_2\cos\beta\, E_{0r} = n_2\cos\beta\cdot E_{0t}$$

$$n_1\cos\alpha\, E_{0i} - n_1\cos\alpha\, E_{0r} = n_2\cos\beta\, E_{0t}$$

enačbi odštejemo

$$(n_2\cos\beta - n_1\cos\alpha)E_{0i} + (n_2\cos\beta + n_1\cos\alpha)E_{0r} = 0$$

$$\Rightarrow E_{0r} = \left(\frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}\right)E_{0i} = r\cdot E_{0i}$$

TE

$$\boxed{r = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta} = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1\cdot\sin\alpha}{n_2}\right)^2}}{n_1\cos\alpha + n_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1\cdot\sin\alpha}{n_2}\right)^2}}}$$

amplitudna refleksivnost (odbojnost)

včasih temu rečemo tudi (amplitudni) (refleksijski koeficient.)

Ta izraz lahko še malo predelamo z uporabo $n_1\sin\alpha = n_2\sin\beta \Rightarrow n_1/n_2 = \sin\beta/\sin\alpha$

$$\boxed{r = \frac{(n_1/n_2)\cos\alpha - \cos\beta}{(n_1/n_2)\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha - \cos\beta}{\left(\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{\sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha}{\sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha} = \frac{-\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}}$$

iz zveze $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

lahko potem izračunamo še amplitudno transmitivnost (amplitudni transmisijski koeficient)

$$E_{0t} = (1 + r)E_{0i} = t\cdot E_{0r}$$

$$\boxed{t = 1 + r} = \frac{2n_1\cdot\cos\alpha}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}$$

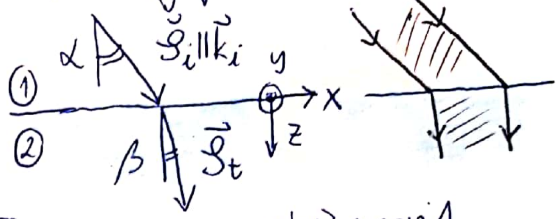
V eksperimentih nas ponavadi zanima energijski tok valovanja $\vec S = \vec E \times \vec H$, $S = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2\cdot c$

$c = \frac{c_0}{n}$, $\varepsilon = n^2 \Rightarrow \boxed{S = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_0^2\cdot c_0\cdot n} = j$

Refleksivnost: (ODBOJNOST) $\boxed{R = \frac{j_r}{j_i} = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{or}^2 \cdot c_0 \cdot n_1}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{oi}^2 c_0 \cdot n_1} = \left(\frac{E_{or}}{E_{oi}}\right)^2 = r^2 = \left(\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}\right)^2}$

ker odbita svetloba potuje po istem mediju kot vpadna je pomembno le razmerje amplitud polj.

Transmitivnost (PREPUSTNOST) (v smeri z osi!!!) $T = \frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{ot}^2 c_0 \cdot n_2}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{oi}^2 c_0 \cdot n_1} \cdot \frac{\cos\beta}{\cos\alpha}$



$T = \left(\frac{E_{ot}}{E_{oi}}\right)^2 \cdot \frac{n_2\cos\beta}{n_1 \cdot \cos\alpha} = \frac{4n_1^{\cancel{2}}\cos^{\cancel{2}}\alpha \cdot n_2\cos\beta}{(n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta)^2 \cancel{n_1\cos\alpha}}$

Za pretok energije iz snovi 1 v snov 2 je relevantna le komponenta $\vec{S}$ v smeri z osi!

$= \frac{4n_1 n_2\cos\alpha\cos\beta}{(n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta)^2}$ $\boxed{T = (t)^2 \cdot \frac{n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha}}$

Ker se energija nikjer ne izgublja velja $\boxed{R+T=1}$, oziroma $T = 1-R$

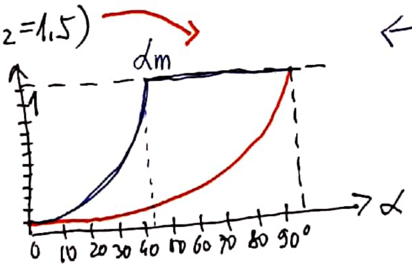
$R+T = \left(\frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}\right)^2 + \frac{4n_1\cos\alpha \cdot n_2\cos\beta}{(n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta)^2} = \frac{n_1^2\cos^2\alpha + n_2^2\cos^2\beta - 2n_1n_2\cos\alpha\cos\beta + 4n_1n_2\cos\alpha\cos\beta}{(n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta)^2}$

po navadi t niti ne računamo, ker vemo $T = 1-R$

$= \frac{n_1^2\cos^2\alpha + n_2^2\cos^2\beta + 2n_1n_2\cos\alpha\cos\beta}{n_1^2\cos^2\alpha + n_2^2\cos^2\beta + 2n_1n_2\cos\alpha\cos\beta} = 1$ ✓

primer $n_1 < n_2$ ($n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$)

$R = \left(\frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}\right)^2$



$\alpha = 0 \Rightarrow R = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$

$R = \left(\frac{0.5}{2.5}\right)^2 = \frac{1}{25} = 4\%$

$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{-0.5}{2.5}$ odboj v PROTIFAZI!

$\odot$ $\otimes$
$\vec{E}_{oi}$ $\vec{E}_{or}$

primer $n_1 > n_2$ ($n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$)

$R = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta}$

pri kotu β kjer velja $\beta > 90°$ prepuščene svetlobe ni več in dobimo le se odbito.

$n_1 \cdot \sin\alpha_m = n_2 \cdot \sin\beta$, $\beta = 90°$

$n_1 \cdot \sin\alpha_m = n_2$

$\sin\alpha_m = (n_2/n_1)$

pri steklu je to pri $\underline{\underline{\alpha_m = 41.8°}}$

TOTALNI ODBOJ

$r = \frac{n_1 \cdot \sin\alpha - n_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2}}{n_1 \cdot \sin\alpha + n_2\sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\cdot\sin\alpha\right)^2}}$

$\boxed{\sin\alpha_m = n_2/n_1}$

ko velja $\alpha > \alpha_m \Rightarrow n_1 \cdot \sin\alpha > n_2$ in drugi člen v korenu postane večji od 1! Zato postane ta člen imaginaren

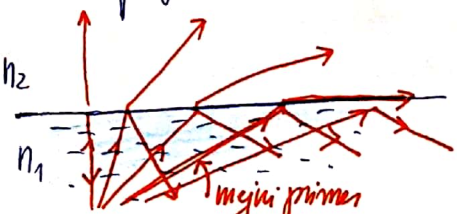
$r = \frac{n_1 \cdot \sin\alpha - i\mathscr{H}}{n_1 \cdot \sin\alpha + i\mathscr{H}}$, $\mathscr{H} = n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\alpha - 1} = \sqrt{n_1^2\sin^2\alpha - n_2^2} = n_2\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_m}\right)^2 - 1}$

v tem primeru moramo refleksivnost R izračunati po formuli $R = |r|^2 = r \cdot r^*$

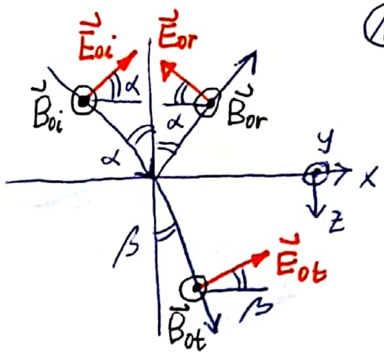
$R = \left(\frac{n_1\sin\alpha - i\mathscr{H}}{n_1\sin\alpha + i\mathscr{H}}\right)\left(\frac{n_1\sin\alpha + i\mathscr{H}}{n_1\sin\alpha - i\mathscr{H}}\right) = 1$

$\Rightarrow T = 1 - R = 0$

Pri totalnem odboju se vsa svetloba odbije. Energijski tok odbite svetlobe je enak vpadnemu energ. toku.



FRESNELOVE ENAČBE ZA TM VALOVANJE



1) $H_{\parallel}, B_{\parallel} \Rightarrow B_{oi} + B_{or} = B_{ot}$; $B_0 = \frac{E_0}{c_0} \cdot n$
= konst

$E_{oi} \cdot n_1 + E_{or} n_1 = E_{ot} \cdot n_2$

2) $B_{\perp} = \text{konst} = 0$ ✓

3) $E_{\parallel} = \text{konst}$

$E_{oi} \cos\alpha - E_{or} \cdot \cos\alpha = E_{ot} \cdot \cos\beta$

4) $D_{\perp} = \text{konst}$

$E_{oi} \cdot \sin\alpha \cdot n_1^2 + E_{or} \cdot \sin\alpha \cdot n_1^2 = E_{ot} \cdot \sin\beta \cdot n_2^2$, upoštevali smo $D_0 = \varepsilon_0 \varepsilon E_0 = \varepsilon_0 n^2 E_0$

$(E_{oi} n_1 + E_{or} \cdot n_1)(\cancel{n_1 \sin\alpha}) = (E_{ot} \cdot n_2)(\cancel{\sin\beta \cdot n_2})$

ker velja $n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta$

je ta enačba ekvivalentna enačbi 1. ✓

Imamo torej spet dve enačbi za 3 neznanke. Ponovno lahko izrazimo E_{ot} in E_{or} kot funkcijo E_{oi}.

1) $E_{oi} \cdot n_1 + E_{or} \cdot n_1 = E_{ot} \cdot n_2 \quad / \cdot \cos\beta$

3) $E_{oi} \cos\alpha - E_{or} \cdot \cos\alpha = E_{ot} \cdot \cos\beta \quad / \cdot n_2$

1) $E_{oi} n_1 \cos\beta + E_{or} \cdot n_1 \cdot \cos\beta = E_{ot} \cdot n_2 \cdot \cos\beta$

3) $E_{oi} \cdot n_2 \cos\alpha - E_{or} \cdot n_2 \cos\alpha = E_{ot} \cdot n_2 \cdot \cos\beta$

enačbi odštejemo

$$E_{oi}(n_1 \cos\beta - n_2 \cos\alpha) + E_{or}(n_1 \cos\beta + n_2 \cos\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow E_{or} = \left(\frac{n_2 \cos\alpha - n_1 \cos\beta}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}\right) E_{oi} = r \cdot E_{oi}$$

TM

$$\boxed{r = \left(\frac{n_2 \cos\alpha - n_1 \cos\beta}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}\right) = \frac{n_2 \cos\alpha - n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \cdot \sin\alpha}{n_2}\right)^2}}{n_2 \cos\alpha + n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_1 \cdot \sin\alpha}{n_2}\right)^2}}}$$

Tudi ta izraz lahko predelamo z upoštevanjem lomnega zakona $\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ in dobimo

$$r = \frac{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cdot \cos\alpha - \cos\beta}{\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \cos\alpha + \cos\beta} = \frac{\sin\alpha \cos\beta - \sin\beta \cos\beta}{\sin\alpha \cos\alpha + \sin\beta \cos\beta} = \frac{\sin 2\alpha - \sin 2\beta}{\sin 2\alpha + \sin 2\beta}$$

$$= \frac{\cos(\alpha+\beta) \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}$$

TRIGONOMETRIJA

če uporabimo zvezo: $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$$\boxed{r = \frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}}$$

Ta izraz vstavimo v zvezo 3) $\Rightarrow$

$$E_{oi} \cos\alpha + (r \cdot E_{oi} \cos\alpha)(-1) = E_{ot} \cdot \cos\beta$$

$$\frac{E_{ot}}{E_{oi}} = \boxed{t = (1-r) \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}} = \left(\frac{2 n_1 \cos\beta}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}\right) \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{2 n_1 \cos\alpha \cancel{\cos\beta}}{(n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta) \cancel{\cos\beta}}$$

$$= \frac{2 n_1 \cos\alpha}{n_2 \cos\alpha + n_1 \cos\beta}$$

PRAVOKOTNI VPAD! PREVERIMO, DA DOBIMO ENAK REZULTAT

TE: $r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}$ = obrat faze za $n_1 < n_2$

$t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$ ✓

TM $r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$ = obrat faze za $n_2 > n_1$ (glej sliko zgoraj desno!) ✓

$t = \frac{2 n_1}{n_1 + n_2}$

$\vec{E}_{oi}$ $\vec{E}_{or}$

PREDZNAKE JE TREBA UPOŠTEVATI GLEDE NA ZAČETNO SHEMO ZA IZRAČUN !!!

Spet nas zanima Reflektivnost (ODBOJNOST) $\boxed{R=\left(\frac{j_r}{j_i}\right)=\frac{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{0r}^2 c_0 n_1}{\frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{0i}^2 c_0 n_1}=\left(\frac{E_{0r}}{E_{0i}}\right)^2=r^2=\left(\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}\right)^2}$

Podobno izračunamo Transmitivnost (PREPUSTNOST) $\boxed{T=\left(\frac{j_t}{j_i}\right)=\frac{E_{0t}^2 \cdot n_2\cos\beta}{E_{0i}^2 \cdot n_1 \cos\alpha}=t^2\cdot\frac{n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha}}=\left(\frac{2n_1\cos\alpha}{n_2\cos\alpha+n_1\cos\beta}\right)^2\frac{n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha}$

$=\frac{4n_1^{\cancel{2}}\cos^{\cancel{2}}\alpha\, n_2\cos\beta}{(n_2\cos\alpha+n_1\cos\beta)^2\,\cancel{n_1\cos\alpha}}$

$=\frac{4n_1n_2\cos\alpha\cos\beta}{(n_2\cos\alpha+n_1\cos\beta)^2}$

Tudi v tem primeru mora veljati $R+T=1$.
In zato tudi v tem primeru običajno izračunamo $T=1-R$.

PRIMER $n_1<n_2$ ($n_1=1$, $n_2=1.5$) zrak/steklo

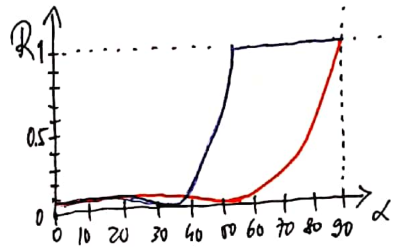
$$R=\left(\frac{n_2\cos\alpha-n_1\cos\beta}{n_2\cos\alpha+n_1\cos\beta}\right)^2$$

$\alpha=0$

$R=\left(\frac{n_2-n_1}{n_2+n_1}\right)^2$ enako kot za TE ✓

$R=\left(\frac{-0.5}{2.5}\right)^2=\frac{1}{25}=4\%$

$r=\frac{1.5-1}{1.5+1}$ odboj v "protifazi". $\vec{E}_{i0}\rightarrow$ $\leftarrow\vec{E}_r$



primer $n_1>n_2$ ($n_1=1.5$, $n_2=1$) steklo/zrak

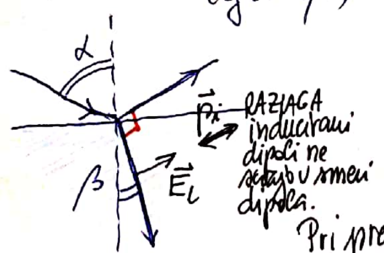
$$R=\frac{n_2\cos\alpha-n_1\cos\beta}{n_2\cos\alpha+n_1\cos\beta}$$

pri kotu α bo postane $\beta>90°$ spet dobimo samo še odboj.
= TOTALNI ODBOJ

Dodatni pojav = BREWSTROV KOT ($R=0$)

BREWSTROV KOT

V izrazu $r=\frac{tg(\alpha-\beta)}{tg(\alpha+\beta)}$ se pri kotu $(\alpha+\beta)=\frac{\pi}{2}$ zgodi, da imenovalec divergira $\to\infty$, števec pa je različen od 0, ker $\beta\neq\alpha$. Tako tudi odbojnost $R=r^2$ pade na vrednost 0.
To se zgodi pri kotu $\beta=((\pi/2)-\alpha)\Rightarrow\sin\beta=\cos\alpha$
$\Rightarrow n_1\sin\alpha=n_2\sin\beta=n_2\cos\alpha$
$\boxed{tg\,\alpha_B=n_2/n_1}$ Brewstrov kot



Pri prehodu zrak/steklo $\alpha_B=atg(1.5)=56.3°$, steklo/zrak $\alpha_B=atg\left(\frac{1}{1.5}\right)=33.6°$

Zaradi tega pojava je odbojnost za TM valovanje pri mnogih vpadnih kotih dosti manjša kot za TE valovanje. Pri kotu $\alpha=\alpha_B$ pri osvetljevanju površine z nepolarizirano svetlobo dobimo linearno polarizirano svetlobo. To je eden od najbolj enostavnih načinov, kako pridemo do linearno polarizirane svetlobe. Če skozi polarizator opazujemo odboj svetlobe z bleščeče površine, ta pojav zlahka opazimo.

TOTALNI ODBOJ

Kot totalnega odboja je za obe polarizaciji enak: $\boxed{\sin\alpha_m=\frac{n_2}{n_1}}$
Kot totalnega odboja je za obe polarizaciji enak, tudi pri TM polarizaciji za $\alpha>\alpha_m=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ dobimo podobno, kot pri TE polarizaciji, kompleksen izraz

$$r=\frac{n_2\cos\alpha-n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2}}{n_2\cos\alpha+n_1\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2}}=\frac{n_2\cos\alpha-i\kappa}{n_2\cos\alpha+i\kappa},\quad \kappa=n_1\sqrt{\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_m}\right)^2-1}$$

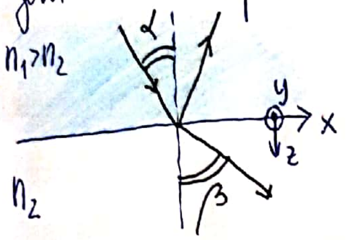
$$R=|r|^2=1,\quad T=1-R=0$$

Vendar: izraza za amplitudno odbojnost r_{TE} in r_{TM} nista enaka niti za $\alpha>\alpha_m$. To prinese razliko v fazi!

TOTALNI ODBOJ SVETLOBE in POJAV GOOS-HÄNCHEN(OVE)

Herman Goos, Hilda HÄNCHEN

Zanima nas totalni odboj pri prehodu svetlobe med dvema neprevodnima, homogenima in izotropnima snovema!



$n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \sin\beta$, $\beta > \alpha$

$\beta_{MAX} = 90°$

$n_1 \cdot \sin\alpha_m = n_2 \cdot 1$

$\sin\alpha_m = (n_2/n_1)$

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{n_1 \cdot \sin\alpha}{n_2}\right)^2} = \sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha_m}\right)^2}$$

za $\alpha > \alpha_m$ postane število pod korenom negativno $\Rightarrow$

$$\cos\beta = i\left(\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_m} - 1}\right) = iK$$

Za amplitudno refleksnost potem dobimo izraza:

$$r_{TE} = \frac{n_1 \cdot \cos\alpha - i n_2 K}{n_1 \cos\alpha + i n_2 K} \qquad r_{TM} = \frac{n_2 \cos\alpha - i n_1 K}{n_2 \cos\alpha + i n_1 K} \qquad r_{TE} \neq r_{TM} \;!$$

VALOVANJE V SNOVI 2 potem zapišemo kot (primer TE polarizacije), $\vec{k}_t = k_0 n_2 (\sin\beta, 0, \cos\beta)$

$= (k_0 n_2 \sin\beta, 0, k_0 n_2 \cos\beta)$

$= (\underbrace{k_0 n_1 \sin\alpha}_{\text{to je } k_{\parallel} \text{ in se vedno ohranja!}}, 0, \underbrace{i k_0 n_2 K}_{\text{ta člen pa postane imaginaren}})$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t}\, e^{i k_0 n_2 \sin\beta \cdot x}\, e^{i k_0 n_2 \cos\beta z}\, e^{-i\omega t} \quad (\parallel \vec{e}_y \text{ za TE})$$

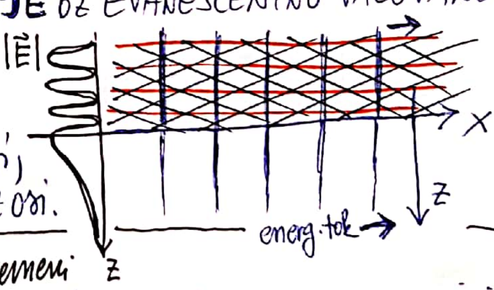
$$= E_{0t} \cdot \vec{e}_y\, e^{i k_0 n_1 \sin\alpha \cdot x}\, e^{-i\omega t}\, e^{i k_0 n_2 (iK) z}$$

$$\boxed{\vec{E}_t = E_{0t} \vec{e}_y\, e^{i k_0 n_1 \sin\alpha \cdot x}\, e^{-i\omega t} \cdot e^{-\kappa z}}$$

$\kappa = k_0 n_2 K$ (TE)

Amplituda polja z globino eksponentno pojema. Temu polju rečemo **EVANESCENTNO POLJE** oz EVANESCENTNO VALOVANJE.

$$Re(\vec{E}_t) = E_{0t} \cdot \vec{e}_y\, e^{-\kappa z} \cdot \cos(k_0 n_1 \sin\alpha x - \omega t)$$



Valovne fronte potujejo v smeri x osi; amplituda polja pojema v smeri z osi.

Odbito polje je podobno vpadnemu, le smer k_z se spremeni $\rightarrow$ NI ČISTO RES $\rightarrow$ v resnici je odbito polje fazno zamaknjeno glede na vpadno, tako da je celotno polje polje v snovi 1 $\propto \cos(k_0 n_1 \cos\alpha z \mp \delta/2)$ *

$$\vec{E}_1 = E_{0i} \vec{e}_y e^{i k_x x} e^{i k_z z - i\omega t} + E_{0r} \vec{e}_y e^{i k_x x} e^{-i k_z z} e^{-i\omega t}$$

$$= E_0 \vec{e}_y \left(e^{i k_0 n_1 \sin\alpha x} e^{i k_0 n_1 \cos\alpha \cdot z} + e^{i k_0 n_1 \sin\alpha x} e^{-i k_0 n_1 \cos\alpha z}\right) e^{-i\omega t}$$

$$= E_0 \vec{e}_y e^{i k_0 n_1 \sin\alpha x - i\omega t} (2 \cdot \cos(k_0 n_1 \cos\alpha z))$$

$$Re \vec{E}_1 = E_0 \vec{e}_y (2 \cos(k_0 n_1 \cos\alpha \cdot z)) Re(e^{i k_0 n_1 \sin\alpha x - i\omega t})$$

$$= \underbrace{E_0 \vec{e}_y \cdot 2 \cdot \cos(k_0 n_1 \cos\alpha z)}_{\text{to je interferenčno modulirano polje v smeri z osi}} \cdot \underbrace{\cos(k_0 n_1 \sin\alpha x - \omega t)}_{\text{valovne fronte se širijo v smeri osi x}}$$

$$Re \vec{E}_2 = 2 E_0 \vec{e}_y e^{-\kappa z} \cos(k_0 n_1 \sin\alpha x - \omega t)$$

Polje v snovi 2

Posledično dobimo tudi valovne fronte v spodnji snovi ravno tako potujejo v smeri osi x. Pri $z=0$ mora veljati $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \Rightarrow 2E_0 = E_{0t}$

$E_{01} = 2E_0$, $E_{02} = 2E_0$ $\}$ $z=0$ ✓ $E_{\parallel_1} = E_{\parallel_2}$

Izračunajmo še Poyntingov vektor v snovi 1 in snovi 2. Ugotovimo, da ima v obeh snoveh samo komponento vzdolž osi x. Energija se propagira samo v smeri x osi. (Podobno kot pri odboju ravnega valovanja na zrcalu).

$\langle \vec{S}_1\rangle = \vec{E}_1 \times \vec{H}_1 = |S_1|\cdot \vec{e}_x$, $\langle \vec{S}_2\rangle = (\vec{E}_2 \times \vec{H}_2) = |S(z)|\vec{e}_x$, $\langle S\rangle \parallel \vec{e}_x$ v obeh snoveh

---

Imaginarni zapis:

$$\vec{E} = (0, E_{0t} e^{ik_x x - i\omega t} e^{-\varkappa z}, 0) = (0,1,0) E_{0t} e^{ik_x x - i\omega t - \varkappa z}$$, vemo $E_{0t} = 2E_{0i} = E_0$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \mu_0 i\omega \vec{H}$$

$$\vec{H} = \frac{-iE_{0t}}{\mu_0\omega}\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0, & e^{ik_x x - i\omega t} e^{-\varkappa z}, & 0\end{pmatrix} = \frac{-i}{\mu_0\omega}\left(-\varkappa e^{ik_x x - i\omega t - \varkappa z} E_{0t}, 0, ik_x e^{ik_x x - i\omega t - \varkappa z} E_{0t}\right)$$

$$\vec{H} = \frac{E_{0t}}{\mu_0\omega}(i\varkappa, 0, k_x)\, e^{ik_x x - i\omega t} e^{-\varkappa z}$$

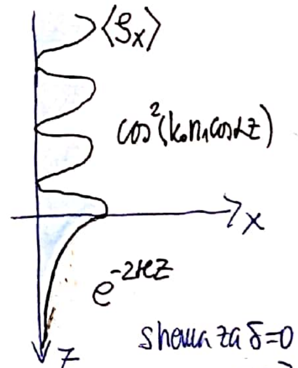
$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}^* = \frac{E_{0t}^2 e^{-2\varkappa z}}{\mu_0\omega}\left[(0,1,0)\times(i\varkappa,0,k_x)\right] = \frac{E_{0t}^2 e^{-2\varkappa z}}{\mu_0\omega}(k_x, 0, -i\varkappa) = (S_x, S_y, S_z)$$

Vidimo, da je z komponenta Poyntingovega vektorja imaginarna. Kar pomeni, da se energija ne širi v smeri z osi.

Stvar lažje razumemo, če polje zapišemo realno ⇒

$$\tilde{\vec{E}} = E_{0t}(0,1,0)e^{-\varkappa z}\cdot\cos(k_x x - \omega t)$$, $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$

$$\tilde{\vec{H}} = ? \quad \mathrm{rot}\,\tilde{\vec{E}} = \begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial x}, & \frac{\partial}{\partial y}, & \frac{\partial}{\partial z}\\ 0, & E_{0t}e^{-\varkappa z}\cos(k_x x - \omega t), & 0\end{pmatrix} = \left(-\varkappa E_{0t} e^{-\varkappa z}\cos(k_x x - \omega t), 0, -k_x E_{0t} e^{-\varkappa z}\sin(k_x x - \omega t)\right)$$



$$\frac{\partial \tilde{\vec{H}}}{\partial t} = \frac{-1}{\mu_0}\left(-\varkappa E_{0t} e^{-\varkappa z}\cos(k_x x - \omega t), 0, -k_x E_{0t} e^{-\varkappa z}\cdot\sin(k_x x - \omega t)\right)$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}E_{0t}\left[\varkappa e^{-\varkappa z}\int\cos(k_x x - \omega t)\,dt, 0, k_x E_{0t} e^{-\varkappa z}\int\sin(k_x x - \omega t)\,dt\right]$$

$$\tilde{\vec{H}} = \frac{E_{0t}}{\mu_0}\left[\varkappa e^{-\varkappa z}\cdot\frac{\sin(k_x x - \omega t)}{-\omega}, 0, k_x e^{-\varkappa z}\frac{\cos(k_x x - \omega t)}{\omega}\right]$$

$$\tilde{\vec{H}} = \frac{E_{0t}}{\mu_0\omega}e^{-\varkappa z}\left[-\varkappa\sin(k_x x - \omega t), 0, k_x\cos(k_x x - \omega t)\right]$$

$$\tilde{\vec{S}} = \tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}} = E_{0t}e^{-\varkappa z}(0, \cos(k_x x - \omega t), 0)\times\frac{E_{0t}}{\mu_0\omega}e^{-\varkappa z}\left[-\varkappa\sin(k_x x - \omega t), 0, k_x\cos(k_x x - \omega t)\right]$$

$$= \frac{E_{0t}^2}{\mu_0\omega}e^{-2\varkappa z}\left(k_x\cos^2(k_x x - \omega t), 0, \varkappa\sin(k_x x - \omega t)\cos(k_x x - \omega t)\right)$$

Pri energijskem toku nas zanima $\langle \vec{S}\rangle$ = povprečje po času ⇒

Vidimo, da je $\langle S_z\rangle = 0$! (jalova moč)

$$\langle \vec{S}\rangle = \frac{E_{0t}^2}{\mu_0\omega}e^{-2\varkappa z}\left(k_x\cdot\frac{1}{2}, 0, 0\right),$$

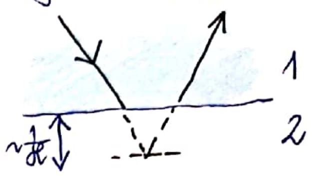
$$\langle S_x\rangle = \frac{1}{2}E_{0t}^2 e^{-2\varkappa z}\frac{k_0\cdot n_1\cdot\sin\alpha}{\mu_0\omega}\Big|\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0} = \frac{1}{2}E_{0t}^2 e^{-2\varkappa z}\cdot\frac{\omega}{c_0}\cdot n_1\cdot\sin\alpha\,\frac{\varepsilon_0}{\mu_0\varepsilon_0\omega} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E_{0t}^2 e^{-2\varkappa z} n_1\cdot c_0\cdot\sin\alpha$$

dobili smo običajni izraz, le pomnožen z $\sin\alpha$!

Poyntingov vektor v snovi 1 ima pri $z=0$ enako vrednost. Tudi v snovi 1 je le $\langle S_x\rangle \neq 0$, $\langle S_z\rangle = 0$.
Odvisnost $\langle S_x(z)\rangle$ pa se spreminja oscilatorno!

FAZNI ZAMIK ODBITEGA VALOVANJA

Sedaj nas zanima, KAJ SE ZGODI S FAZO ODBITE SVETLOBE?
V računu na prejšnji strani smo videli, da atenuacijski koeficient $\varkappa$ v izrazih nastopa kot parameter, ki določa vdorno globino polja v mediju 2. Njegova vrednost



$$\varkappa_{TE} = k_0 n_2 K_{TE} = k_0 \cdot n_2 K = k_0 \cdot n_2 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_m} - 1}$$
$$\varkappa_{TM} = k_0 n_1 K_{TM} = k_0 n_1 K = k_0 \cdot n_1 \sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_m} - 1}$$

pa je odvisna od vpadnega kota α ter ima različne vrednosti za TE in TM polarizacijo. Ker polje "vdira" v snov 2, pri odboju doživi fazni zamik, ki je odvisen od kota α. Ta fazni zamik je poleg tega odvisen še od polarizacije svetlobe. (Pojav Goos-Hänchen)

TE valovanje: $\left[r = \frac{n_1\cos\alpha - i n_2 K}{n_1 \cos\alpha + i n_2 K} = |r| e^{-i\delta} = \frac{e^{-i\phi}}{e^{i\phi}} \right]$

$z = x + iy = |z| e^{i\phi}$
$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(x+iy)(x-iy)}$
$\phi = \mathrm{arctg}(y/x)$
kompleksna števila

izraz v števcu in imenovalcu vsak posebej zapišemo kot $|\,|e^{\mp i\phi}$

$$r = \frac{\sqrt{n_1^2\cos^2\alpha + n_2^2K^2}\; e^{-i\phi}}{\sqrt{n_1^2\cos^2\alpha + n_2^2K^2}\; e^{i\phi}} = e^{-2i\phi} \qquad \phi = \mathrm{arctg}\left(\frac{n_2 K}{n_1\cos\alpha}\right)$$

$|r| = 1$

$$\delta = 2\phi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{n_2K}{n_1\cos\alpha}\right)$$

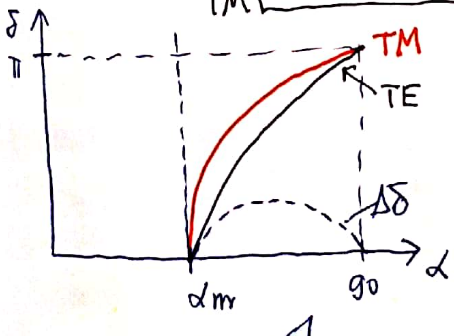
$$\text{TE} \quad \boxed{\mathrm{tg}(\delta/2) = \frac{n_2 K}{n_1\cos\alpha} = \frac{n_2\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_m} - 1}}{n_1 \cdot \cos\alpha}}$$

Pri $\alpha = \alpha_m \Rightarrow \mathrm{tg}(\delta/2) = 0 \Rightarrow \delta = 0$, Pri $\alpha = 90° \Rightarrow \mathrm{tg}(\delta/2) = \left(n_2\sqrt{\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 - 1}\right) / n_1\cos\alpha = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_1 \cdot \cos 90°} = \infty$
$\Rightarrow \delta/2 = \pi/2 \Rightarrow \delta = \pi$

TM valovanje: dobimo podoben rezultat, le n_1 in n_2 sta zamenjana.

$$\text{TM} \quad \boxed{\mathrm{tg}(\delta/2) = \frac{n_1 K}{n_2\cos\alpha} = \frac{n_1\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_m} - 1}}{n_2\cos\alpha}}$$

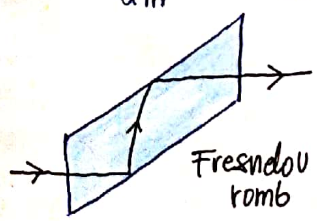
na desni strani dobimo večje vrednosti kot pri TE, ker je $n_1 > n_2$. Zato je fazni zamik za TM polarizacijo večji kot za TE.



$$[\mathrm{tg}(\delta/2)]_{TM} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 [\mathrm{tg}(\delta/2)]_{TE}$$

$$\Delta\delta = (\delta_{TM} - \delta_{TE}) > 0$$

Na meji steklo/zrak ($n_1 = 1.5$, $n_2 = 1$) dobimo maksimalno vrednost $\Delta\delta > \pi/4$. To pomeni, da lahko z dvema zaporednima odbojema dobimo med TM in TE polarizacijo zamik $\frac{1}{2}\pi$, kar pomeni, da je učinek analogen učinku ploščice $\lambda/4$. S štirimi odboji pa dobimo učinek ploščice $\lambda/2$. Tovrstni retarderji se imenujejo Fresnelovi rombi. Glavna prednost je, da je njihov učinek neodvisen od valovne dolžine λ, saj le ta ne nastopa eksplicitno v izrazu za $\Delta\delta$.



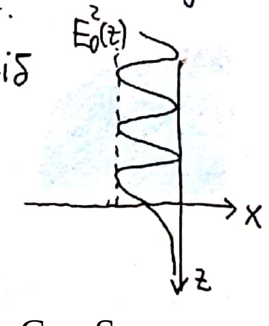
Fresnelov romb

* Odbito polje $\vec{E}_r = \vec{e}_y E_{0i} |r| e^{-i\delta} e^{ik_x x - i\omega t} e^{-ik_z z} = \vec{e}_y \cdot E_{0i} \cdot 1 \cdot e^{ik_x x - i\omega t} e^{-ik_z z - i\delta}$

Vpadno polje $\vec{E}_i = \vec{e}_y E_{0i} e^{ik_x x - i\omega t} e^{ik_z z}$

Celotno polje v snovi 1 je potem: $\vec{E}_1 = E_{0i} \vec{e}_y e^{ik_x x - i\omega t} e^{-i\delta/2}\left(e^{ik_z z} e^{i\delta/2} + e^{-ik_z z} e^{-i\delta/2}\right)$

$Re(\vec{E}_1) = E_{0i} \vec{e}_y \cdot (2\cos(k_z z + \delta/2)) \cos(k_x x - \omega t)$



VDORNA GLOBINA EVANESCENTNEGA POLJA:

Zanima nas, kolikšna je vdorna globina polja v snovi 2: (TE)

$$\vec{E}_2 = E_{0t}(z=0)\vec{e}_y e^{ik_0 n_1 \sin\alpha - i\omega t} e^{-k_0 n_2 K z} = E_{0t}(z=0) e^{ik_0 n_1 \sin\alpha x - i\omega t} e^{-\kappa z}$$

$$E_{0t}(z=0) = E_{0i}(z=0) + E_{0r}(z=0) = 2E_{0i}\cos(\delta/2)$$

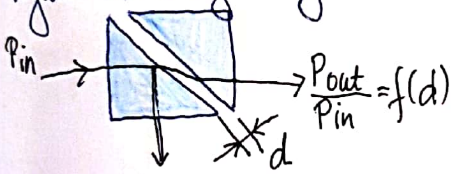
$$d_v = \frac{1}{\kappa} = \frac{1}{k_0 \cdot n_2 K} = \frac{\lambda_0}{2\pi \cdot n_2}\frac{1}{\sqrt{\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha_m} - 1}} = \frac{\lambda_0}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{n_1^2\sin^2\alpha - n_2^2}}$$

Pri $\alpha = \alpha_m \Rightarrow d_v = \infty$

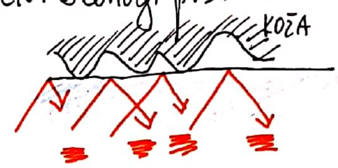
Pri $\alpha \to \pi/2$ pa pade na vrednost $d_v \approx \frac{\lambda_0}{2\pi NA}$, $NA = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$ numerična apertura

FRUSTRIRAN TOTALNI ODBOJ (FTIR):

Če je debelina snovi z $n = n_2$ končna, lahko pride do "tuneliranja". Še zlasti če je $d \lesssim d_v$, znaten delež polja pri do drugega roba snovi. Tam ga potem spet lahko ujamemo v snovi z $n = n_1$ in na ta način dobimo tuneliranje valovanja. Prepustnost takega "tunela" lahko reguliramo z regulacijo debeline "prepovedane" plasti.



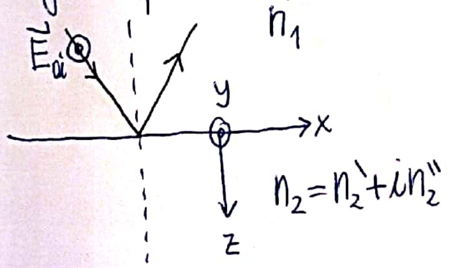
APLIKACIJA: Skenerji prstnih odtisov.



totalni odboj je močno odvisen od širine "zračne" reže med kožo in podlago.

ODBOJ NA MEJI DIELEKTRIK - KOVINA

Zanimivo vprašanje je, kako se Fresnelove enačbe spremenijo, če je snov 2 prevodna. Zanimivo zaradi globino zaradi motrajih tokov. Pričakujemo v tem primeru vemo, da polje pojema z globino zaradi motrajih tokov. Pričakujemo torej, da bo po analogiji s totalnim odbojem, odbojnost na meji zato večja.



Ker je zaradi meje simetrija prostora zlomljena le v smeri osi z, tudi v tem primeru polje lahko pojema le z globino → to je s koordinato z.

V snovi 2 torej zapišemo:

$$\vec{E}_2 = \vec{e}_y E_{0t} e^{i\underbrace{(k_z + i\kappa)}_{\tilde{k}_z} z} \underbrace{e^{ik_x x - i\omega t}}$$

kjer vemo da je enak kot v snovi 1.

$k_x = k_0 n_1 \sin\alpha$

$\tilde{k} = (k_x, 0, \tilde{k}_z)$

V snovi 2 moramo biti zadoščeno telegrafski enačbi

$$\tilde{k}^2 = k_0^2 \mathcal{N}^2 = k_x^2 + (k_z + i\kappa)^2 = k_0^2\left(\varepsilon_2 + \frac{i\sigma_2}{\varepsilon_0\omega}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{k_x^2 + k_z^2 - \kappa^2}{k_0^2} + \frac{2i\kappa k_z}{k_0^2} = \varepsilon_2 + \frac{i\sigma_2}{\varepsilon_0\omega}}$$

iz te enačbe lahko izračunamo k_z in κ v odvisnosti od $k_x = k_0 n_1 \sin\alpha$, ki se mora ohranjati zaradi robnih pogojev.

k_x^2 nesemo na drugo stran

$$k_z^2 - \kappa^2 + 2i\kappa k_z = (k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2) + i\frac{k_0^2\sigma_2}{\varepsilon_0\omega}$$

po analogiji z računom lomnega količnika kovin potem sledi:

$$\boxed{\tilde{k}_z = k_z + i\kappa}$$

$$k_z^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2)^2 + \left(\frac{\sigma k_0^2}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} + (k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2)\right]$$

$$\kappa^2 = \frac{1}{2}\left[\sqrt{(k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2)^2 + \left(\frac{\sigma k_0^2}{\varepsilon_0\omega}\right)^2} - (k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2)\right]$$

Če se spomnimo, za navadni (neprevodni) primer dobimo: $r = \frac{n_1\cos\alpha - n_2\cos\beta}{n_1\cos\alpha + n_2\cos\beta} = \frac{k_0 n_1\cos\alpha - k_0 n_2\cos\beta}{k_0 n_1\cos\alpha + k_0 n_2\cos\beta} = \frac{k_{z1}-k_{z2}}{k_{z1}+k_{z2}}$

Analogno v primeru upada na kovino dobimo, če upoštevamo robne pogoje:

v primeru kovine v ta izraz vstavimo $\tilde{k}_{2z} = k_{2z} + i\kappa$

E_y: $E_{0i} + E_{0r} = E_{0t}$

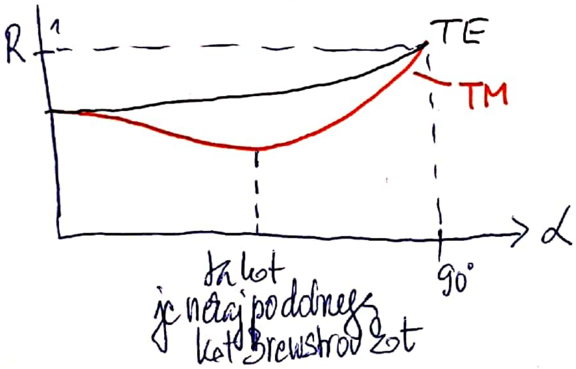
H_x: $-ik_{1z}E_{0i} + ik_{1z}E_{0r} = -(ik_{2z} - \kappa)E_{0t}$

$$\left.\begin{aligned} E_{0i} + E_{0r} &= E_{0t} \quad /(k_{2z}+i\kappa) \\ -k_{1z}E_{0i} + k_{1z}E_{0r} &= -(k_{2z}+i\kappa)E_{0t} \end{aligned}\right\}$$

enačbi rešujemo $\Rightarrow$

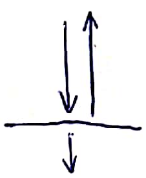
$$\boxed{\frac{E_{0r}}{E_{0i}} = r = \frac{\underbrace{(k_{1z}-k_{2z})}_{\text{ta del je analogen kot v neprevodnih snoveh}} - i\kappa}{(k_{1z}+k_{2z}) + \underbrace{i\kappa}_{\text{ta del je analogen kot pri totalnem odboju na meji med dvema neprevodnima materialoma}}}}$$

* polje H v snovi 1 in 2 dobimo iz $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$



Temu ustrezno, kot rezultat dobimo nekoliko mešano rešitev, ki delno spominja na navadni odboj, ima pa večjo reflektivnost. Kovine odbijajo svetlobo in se zato "bleščijo".

Zgornji račun je enostaven le pri pravokotnem upadu $\alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$; takrat dobimo



$$r = \frac{n_1 - \mathcal{N}_2}{n_1 + \mathcal{N}_2} = \frac{n_1 - n_2' - in_2''}{n_1 + n_2' + in_2''}$$

$$R = |r|^2 = \frac{(n_1 - n_2')^2 + n_2''^2}{(n_1 + n_2')^2 + n_2''^2}$$

Če imamo zelo dobro kovino $\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} \gg \varepsilon$, vemo da velja $n'' \gg n'$

V tem primeru dobimo

$$R = \frac{n_1^2 + n_2''^2}{n_1^2 + n_2''^2} = 1$$

Tanka kovinska plast na ravni podlagi ali pa spolirana površina kovine deluje kot zrcalo!