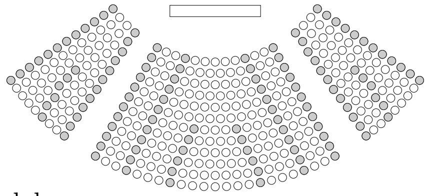
Matematika 3 (FIZ): 1. računski izpit

31. 1. 2020 $15^{00} - 17^{00}$

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!



Sedež (VFP)

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Dan naj bo integral s parametrom

$$J(a) = \int_1^\infty \frac{a^x(x+1)}{x}\,dx\,.$$

a) Določi vse $a \geq 0$, za katere integral $J(a)$ konvergira.

b) Ali je $J(a)$ zvezna funkcija na konvergenčnem območju?

c) Izračunaj $J'(a)$.

d) Ali integral $J(a)$ konvergira enakomerno na konvergenčnem območju?

Rešitev:

Konvergira za $a \in [0,1)$, saj ga lahko preuredimo v

$$\int_1^\infty \frac{xa^x(x+1)}{x^2}\,dx$$

in preverimo, da je v števcu omejena funkcija za $a \in [0,1)$.

Po Weierstrassu velja

$$\frac{a^x(x+1)}{x} \leq \frac{c^x(x+1)}{x} \quad a \in [0,c] \subset [0,1)\,,$$

torej konvergira enakomerno na $[0,c]$, torej je zvezna na $[0,1)$.

Na $[0,1)$ ne konvergira enakomerno, saj za polj. velik M velja

$$\int_M^\infty \frac{a^x(x+1)}{x}\,dx \geq \int_M^{M+1} a^x\,dx \geq a^{M+1}\,.$$

Velja $\lim\limits_{a\to 1} a^{M+1} = 1$, torej zmeraj obstaja a dovolj blizu 1, da je ostanek integrala velik.

$$J'(a) = \int_1^\infty a^{x-1}(x+1)\,dx = \text{per partes} = \frac{1-2\ln(a))}{(\ln(a))^2}\,,$$

saj integral za J' po W. krit. zopet enakomerno konv. na zaprtih intervalih v konv. območju.

2. naloga (25 točk)

Dano naj bo homogeno telo $V \subset \mathbb{R}^3$

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,;\, (x^2 + y^2)^2 \leq z \leq 2x^2 y\}\,.$$

Izračunaj vztrajnostni moment J_z telesa V.

Rešitev:

Telo V leži nad območjem $r \leq 2\cos^2\varphi \sin\varphi$, $\varphi \in [0, \pi]$. Dobimo

$$J_z = \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\cos^2\varphi\sin\varphi} r\, dr \int_{r^4}^{2r^3\cos^2\varphi\sin\varphi} r^2\, dz = ...$$

$$... = \frac{64}{7}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{16}\varphi \sin^8\varphi\, d\varphi = \frac{65\pi}{2^{17}}\,.$$

3. naloga (25 točk)

Vektorsko polje $\vec{v} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ je *linearno vektorsko polje*, če je oblike

$$\vec{v}(x) = Ax + b \qquad x \in \mathbb{R}^3 \,,$$

za neko konstantno realno 3×3 matriko A in konstanten realen vektor b.

a) Izrazi $\operatorname{div}(\vec{v})$ in $\operatorname{rot}(\vec{v})$ z elementi matrike A.

b) Določi vse A in b, za katere je linearno vektorsko polje $\vec{v}(x) = Ax + b$ potencialno, in določi njegov potencial.

c) Naj bo A antisimetrična matrika, $A^T = -A$. Naj bosta $x_1(t)$ in $x_2(t)$ poljubni rešitvi sistema $\dot{x} = Ax$. Pokaži, da je kot med vektorjema $x_1(t)$ in $x_2(t)$ enak kotu med vektorjema $x_1(0)$ in $x_2(0)$ za vsak $t \in \mathbb{R}$.

Rešitev:
Divergenca je ravno sled, $\operatorname{rot}\vec{v} = (a_{32} - a_{23}, a_{13} - a_{31}, a_{21} - a_{12})$, polje je torej potencialno, natanko tedaj ko je A simetrična in potencial znaša

$$u = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + C \,.$$

$(x(t)^T x(t))' = -x^T A x + x^T A x = 0$, torej se dolžina vsake rešitve ohranja, prav tako pa skalarni produkt $(x_1(t)^T x_2(t))$, torej se tudi kot ohranja.

4. naloga (25 točk)

Točka naj se giblje po ravnini tako, da je njena hitrost v točki $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ enaka

$$v(x,y) = x^2 + y^2\,.$$

Gibanje točke opišimo v polarnih koordinatah s funkcijo $r(\varphi)$.

a) Pokaži, da je čas, ki ga točka potrebuje, da prepotuje pot, ki je v polarni obliki dana s funkcijo $r(\varphi)$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$, enak

$$T(r) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2}}{r(\varphi)^2}\, d\varphi\,.$$

b) Določi pot $r(\varphi)$, pri kateri funkcional T doseže ekstremno vrednost in zadošča pogojem

$$r(0) = 1 \quad r(\tfrac{\pi}{2}) = \sqrt{3}\,.$$

c) Pokaži, da je funkcional T neomejen na prostoru odsekoma zvezno odvedljivih funkcij $r : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ z lastnostjo $r(0) = 1$ in $r(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}$.

d) Dani naj bosta funkciji

$$r_1(\varphi) = 1 \quad \text{in} \quad r_2(\varphi) = \sqrt{2}\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4}) \qquad \varphi \in [0, \tfrac{\pi}{2}]\,.$$

Pokaži, da sta funkciji $r_1(\varphi)$ in $r_2(\varphi)$ ekstremni vrednosti za funkcional T pri robnih pogojih $r(0) = r(\frac{\pi}{2}) = 1$. Pri kateri doseže funkcional T manjšo vrednost?

Rešitev:

Uporabimo Beltramijevo enakost, ki nam da

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = C \Rightarrow r' = \pm\sqrt{C^2 - r^2} \Rightarrow r(\varphi) = C\sin(\varphi + D)\,.$$

Robni pogoji dajo $C = 2$, $D = \frac{\pi}{6}$,

$$r(\varphi) = 2\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{6})\,.$$

Vzamemo zaporedje funkcij r_n, ki imajo na $[a,b] \subset (0, \frac{\pi}{2})$ vrednost $\frac{1}{n}$. Potem je

$$T(r_n) \geq \int_a^b n\, d\varphi = n(b-a) \to \infty\,,$$

torej je funkcional T navzgor neomejen. Navzdol je seveda omejen, saj je $T(r) \geq 0$ za vse funkcije r.

Velja $T(r_1) = \frac{\pi}{2} > T(r_2) = \sqrt{2}$.

Opomba: Tu je za vsak izbor robnih pogojev neskončno mnogo funkcij, kjer T doseže ekstremno vrednost:

Npr. da gledamo primer, ko je $r(0) = r(\frac{\pi}{2}) = 1$. E-L enačbi zadoščajo funkcije

$$r(\varphi) \equiv 1$$

$$r(\varphi) = \sqrt{2}\sin(\varphi + \tfrac{\pi}{4})$$

$$r(\varphi) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\varphi + \frac{\pi}{3}) & ;\quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{6}] \\ \frac{2}{\sqrt{3}} & ;\quad \varphi \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}] \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi + \frac{\pi}{3}) & ;\quad \varphi \in [\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$

Splošno: naj bosta C, D takšna, da je $C\sin(D) = 1$

$$r(\varphi) = \begin{cases} C\sin(\varphi + D) & ;\quad \varphi \in [0, \frac{\pi}{2} - D] \\ C & ;\quad \varphi \in [\frac{\pi}{2} - D, D] \\ C\sin(\frac{\pi}{2} - \varphi + D) & ;\quad \varphi \in [D, \frac{\pi}{2}] \end{cases}$$