Norme matrik

1. `Prva norma:` $||A||_1 = max_{1,2,3...}(\sum_{i=i}^{m} |a_{i,j})$ Kar je v resnici seštevek vseh indeksov po stolpcih.

2. `Neskončna norma:` $||A||_\infty = max_{1,2,3...}\left(\sum_{i=j}^{m} |a_{i,j}\right)$ Kar je v resnici seštevek vseh indeksov po vrsticah.

3. `Frobenisova norma:` $||A||_F = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} |a_{i,j}^2\right)^{\frac{1}{2}}$

4. `Druga norma:` $||A||_2 = max_{1,2,3...}\sqrt{\lambda_i(A^TA}$ Po definiciji je za ortogonalne matrike enaka 1.

5. `Primer:`

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$||A||_1 = 12 \quad ||A||_\infty = 11||A||_F = \sqrt{91}$

Reševanje posebih sistemov Ax=B

Če je matrika nesingularna sledi, da je $\det(A) \neq 0$.

1. `A je zgornje ali spodnje trikotna= DIREKTNO VSTAVLJANJE:` Splošna forma je enaka:

$$x_i = \frac{1}{l_{i,i}}\left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{i,j}x_j\right)$$

Torej vstavljamo za nazaj elemente.
ČASOVNA ZAHTEVNOST JE $\sigma(n^2)$

2. `A je nesingularna matrika= LU razcep:` Matriko A spremenimo tako, da velja

$$A = LU$$

, kjer je L spodnje trikotna (1 po diagonali), U pa zgornje trikotna. V primeru da $A \neq= LU$,velja:

$$PA = PLU$$

, kjer je P matrika, ki nam spremeni položaj neke vrstice ali stolpca, da se LU in A ujemajo.
IZRAČUN DETERMINANTE:

$$\det(PA) = \det(L)\det(U) = (-1)^k \Pi_{i=1}^{n} u_{i,i}$$

ČASOVNA ZAHTEVNOST 1 RAZCEPA JE $\sigma(n^3)$.

Tridiagonalni sistemi

Vse neničelne elemente tridiagonalne A lahko hranimo v treh stolpcih dolžine n. Tako dobimo LU razcep brez pivotiranja s prostorsko in časovno zahtevnostjo $\mathcal{O}(n)$.

Sistemi nelinearnih enačb

Iskanje ničel enačbe f(x)=0

1. `Navadna iteracija:` Je oblike:

$$x_{r+1} = g(x_r)$$

Primer: $x^3 - 5x + 1 = 0 \rightarrow g(x) = \frac{x^3+1}{5}$ (izrazimo ven x iz enačbe in to vstavljamo v $x_{r+1} = g(x_r)$)

2. `Tangentna iteracija:` Je oblike:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)}{f'(x_r)}$$

Velja, da če je $f'(x) \neq= 0$ je konvergenca vsaj kvadratična.

3. `Sekantna iteracija:` Je oblike:

$$x_{r+1} = x_r - \frac{f(x_r)(x_r - x_{r-1})}{f(x_r) - f(x_{r-1})}$$

V resnici je to tangentna, kjer nismo naredili limite za odvod.
Konvergenca je p=1.62.

Pomembni pojmi pri iteraciji

1. `Negibna točka:` Negibna točka iteracije je definirana kot:

$$g(\alpha) = \alpha$$

2. `Konvergenca iteracije:` Najdemo jo z odvodom g(x) v točki α.
KVADRATIČNA KONV:

$$g'(\alpha) = 0 \quad g''(\alpha) \neq 0$$

LINEARNA KONV:

$$g'(\alpha) \neq 0$$

Reševanje sistema

1. `Newtonova metoda reševanja:` Zapišemo jo kot:

$$X^{k+1} = X^k - J_F(x^k)^{-1}F(x^k)$$

Kjer je J jakobijeva matrika na funkciji F.

Linearni problem najmanjših kvadratov

V splošnem rešujemo enačbo Ax=b. V primeru, da je A matrika, x in b pa stolpca, lahko zapišemo problem kot:

$$(A^TA)X = A^TB$$

kjer je (A^TA) simetrična in poz def. matrika.
To uporabljamo ponavadi, ko želimo narediti iz nekih podatkov funckcijo in nas zanimajo parametri.

1. `Primer:` Podatki naj bodo:
x 1 2 3
$f(x)$ 3 4 5
Zapišemo nato matriko oblike:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \; Y = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} \; F = \left[\vec{F(x)}\right]$$

$$(A^TA)F = A^TY$$

Householderjevo zrcaljenje($\mathcal{O}(2mn^2 - \frac{2}{3}n^3)$)

Želimo si transformacijo iz hiperavnine v $\mathbb{R}^n$ Zato imamo podano formulo, da velja:

$$x' = Px$$

kjer je x' željeni vektor preslikave, x vektor, ki ga slikamo, P pa Householderjeva matrika preslikave preko hiperavnine, def kot:

$$P = I - \frac{2}{\omega^T \omega}\omega\omega^T$$

Zanjo velja:

$$P^T P = P^2 = I$$

Poznamo več primerov zrcaljenja in zato vel primerov ω:

1. `Želimo, da je vektor enak enotskemu vektorju:`
   To lahko naredimo, če def ω kot

   $$\vec{\omega} = \vec{x} + \mathrm{sign(x_i)}\vec{e_i}$$

   , kjer je e_i enotski vec, v katerega želimo preslikati.
2. `Želimo da je x'=-x:`
   Za to moramo v resnici zgolj definirati, da je:

   $$\vec{\omega} = \vec{x}$$

Uporabljamo jo za iskanje lastnih vrednosti matrike:
`Primer:`
Imamo mat sistem $Ax = b$. Če sedaj obe str pomnožimo z mat $P^{(1)}Ax = P^{(1)}b$ dobimo tako novo matriko A, ki ima v prvem stolpcu vse elemente 0, razen prvega. Nato isto naredimo na podmatriki, da še tam dobimo 0. (PAZIMO, DA PONOVNO PRERAČUNAMO $\vec{\omega_2}$, SAJ RAZVIJAMO PO 2 ENOTSKEM VEKTORJU.)
Velja tudi, da je.

$$PAPe_1 = \lambda_1 e_1$$

Na koncu imamo $R = A^{(n)}$,
$Q = (\tilde{P}_n \cdots \tilde{P}_1)^T = \tilde{P}_1 \cdots \tilde{P}_n$ in $A = QR$.

Problem lastnih vrednosti

Za $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ iščemo $A\vec{x} = \lambda\vec{x}$.

Potenčna metoda

$\vec{y}_{k+1} = A\vec{z}_k, \quad \vec{z}_{k+1} = \frac{\vec{y}_{k+1}}{\|\vec{y}_{k+1}\|}$

Naj bo λ_1 dominanta lastna vrednost A ($|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \cdots \geq |\lambda_n|$). Če ima vektor $\vec{z}_0$ neničelno komponento v smeri lastne vektorja, ki pripada λ_1, potem zaporedje $(\vec{z}_k)$ po smeri konvergira k temu lastnemu vektorju.

Reyleighov koeficient: $\rho(\vec{x}, A) = \frac{\vec{x}^H A\vec{x}}{\vec{x}^H\vec{x}}$.
Iteracijo ustavimo, ko $\|A\vec{z}_k - \rho(\vec{z}_k, A)\vec{z}_k\| \leq \varepsilon$.
Rayleighjev koeficient je najboljši približek za lastno vrednost pri danem lastnem vektorju.

Hitrost konvergence je linearna in je hitrejša, če je $\frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|}$ majhno.

Hotelingova redukcija

Naj bo $A = A^T$ in $(\lambda_1, \vec{x}_1)$ dominantni lastni par A, kjer $\|\vec{x}_1\|_2 = 1$. Tedaj za $B = A - \lambda_1\vec{x}_1\vec{x}_1^T$ velja $B\vec{x}_1 = 0$ in $B\vec{x}_k = \lambda_k\vec{x}_k$ za $k \neq 1$.
Potenčna metoda na B nam torej da drugo dominantno lastno vrednost A.

B ne računamo eksplicitno, saj
$B\vec{z} = A\vec{z} - \lambda_1(\vec{x}_1^T\vec{z})\vec{x}_1$.

Householderjeva redukcija

Poiščemo ortogonalno matriko Q, da je $Q\vec{x}_1 = k\vec{e}_1$ (Householderjevo zrcaljenje). Tedaj je
$B = QAQ^T = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \vec{b}^T \\ 0 & C\end{bmatrix}$, kjer se lastne vrednosti C ujemajo s preostalimi lastnimi vrednostmi A.

Inverzna iteracija

Če iščemo najmanjšo lastno vrednost A lahko izvajamo potenčno metodo na A^{-1}. V praksi raje kot ekspliciten račun A^{-1} rešujemo sistem $A\vec{y}_{k+1} = \vec{z}_k$.

Če je σ približek za lastno vrednost, lahko pripadajoč lastni vektor dobimo z inverzno iteracijo na $A - \sigma I$.

QR iteracija

$A_0 = A, \quad A_k = Q_k R_k$ (QR razcep), $\quad A_{k+1} = R_k Q_k$
Če ima A lastne vrednosti s paroma različnimi absolutnimi vrednostmi, potem zaporedje (A_k) konvergira proti Schurovi formi.

Simetrične matrike

Simetrično matriko lahko ortogonalno podobno pretvorimo na simetrično tridiagonalno matriko (recimo s Householderjevimi zrcaljenmi).

Sturmovo zaporedje

Imamo tridiagonalno simetrično matriko T, za katero lahko zapišemo determinanto kot
$f_r(r) = \det(Tr - \lambda I)$
Veljalo bo:

$$f_{r+1}(\lambda) = (a_{r+1} - \lambda)f_r(\lambda) - b_r^2 f_{r-1}(\lambda) \quad f_0(\lambda) = 1$$

in še

$$f_0(\lambda) = 1 \quad f_1 = (a_1 - \lambda)$$

`Primeri:`
Najprej za matriko zapišemo vse funkcije $f_r(\lambda)$ nato pa vstavimo v njih robove intervala ki sta nam podana ter primerjamo, koliko ujemanj predznakov je v zaporedju. Št ujemanj predznakov na istih mestih v intervalih nam pove št lastnih vrednosti.

Interpolacije

Lagrangeova oblika

$l_{n,i}(x) = \prod_{k=0,k\neq i}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$, $i = 0, 1, \ldots, n$
Potem je $p_n(x) = \sum_{j=0}^{n} f_j l_{n,j}(x)$.

Če definiramo $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$, potem velja $l_{n,i}(x) = \frac{\omega(x)}{(x - x_i)\omega'(x_i)}$.

Če je f $(n+1)$-krat zvezno odvedljiva na $[a, b]$, ki vsebuje vse paroma različne x_i, potem $\forall x \in [a, b]$ $\exists\xi \in (a, b)$, da je $f(x) - p_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega(x)$.

Newtonova oblika

Definiramo, da za deljeno diferenco velja:

$$p_n(x) = [x_0]f + (x - x_0)[x_0,x_1]f +$$
$$...(x - x_0)...(x - x_n)[x_0,x_1...,x_n]f$$

Vrednost deljenih diferenc dobimo kot:

$$[x_0,x_1]f = \frac{[x_1]f - [x_0]f}{x_1 - x_0}$$

(Poglej si tabelo deljenih diferenc)
Napaka take meritve je definirana kot:

$$|f(x) - p_k(x)| = |\frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}||\omega(x)|$$

kjer je $\omega(x) = (x - x_0)(x - x_1)..(x - x_n)$ enak kar, njeno max vrednost absolutne pa izračunamo preko odvoda $\omega'(x) = 0$

$$[x_0, x_1, \dots, x_k]f = \begin{cases} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} & ; x_0 = \dots = x_k \\ \frac{[x_1,\dots,x_k]f - [x_0,\dots,x_{k-1}]f}{x_k - x_0} & ; \text{sicer} \end{cases}$$

Numerično reševanje dif enačb

Enokoračne metode

1. `Eulerjeva metoda:`
   Je oblike:

   $$y_{n+1} = y_n + hf(x_n,y_n)$$

   kjer je h naša vrednost koraka, $f(x_n,y_n)$ pa funkcija, za katero želimo vedeti približek odvoda.

2. `Primer:`

   $$y'' = -xy$$

   Rečeš, da je $y_1 = y$ in $y_2 = y'$ iz česar sledi, da je $y_1' = y_2$ in $y_2' = y'' = -xy$.
   Nato zapišeš matrike:
   $Y_{n+1} = \begin{bmatrix} y_1 = y \\ y_2 = y' \end{bmatrix}$ $Y_n = \begin{bmatrix} y_1(x_n) = y(x_n) \\ y_2(x_n) = y'(x_n) \end{bmatrix}$
   $F(x_n) = \begin{bmatrix} y_1'(x_n) = y_2(x_n) \\ y_2'(x_n) = f(x,y) \end{bmatrix}$
   Da velja sistem:

   $$Y_{n+1} = Y_n + h \cdot F(x_n)$$

Metoda Runge-Kutta 4. reda:
$k_1 = hf(x_n, y_n)$
$k_2 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2}\right)$
$k_3 = hf\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2}\right)$
$k_4 = hf\left(x_n + h, y_n + k_3\right)$
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Enokoračne implicitne metode

Splošna oblika je $y_{n+1} = \Phi(h, x_n, y_n, y_{n+1}, f)$.
Za izračun y_{n+1} moramo rešiti (nelinearno) enačbo.
Najpogosteje to naredimo kar z iteracijo
$y_{n+1} = \tilde{\Phi}(y_{n+1})$, ki konvergira, če
$\left|\frac{\partial \Phi}{\partial y}(h, x_n, y_n, y, f)\right| \leq 1$ (vedno za dovolj majhen h).
Za začetni približek vzamemo y_{n+1} po neki eksplicitni metodi.

Trapezna metoda (2. red):
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1}))$

Sistemi ODE 1. reda

Rešujemo
$y_1' = f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_d)$
$\vdots$
$y_d' = f_d(x, y_1, y_2, \dots, y_d)$
pri pogojih $y_1(a) = y_{1a}, \dots, y_d(a) = y_{da}$

Če uvedemo $\vec{Y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_d \end{bmatrix}^T$ in
$\vec{F} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \dots & f_d \end{bmatrix}^T$, dobimo
$\vec{Y}' = \vec{F}(x, \vec{Y}), \vec{Y}(a) = \vec{Y}_a$, kar pa lahko rešujemo s katero koli metodo za reševanje ODE 1. reda prepisano v vektorsko obliko.

ODE višjih redov

Rešujemo $z^{(k)} = f(x, y, y', \dots, y^{k-1})$ pri pogojih $y(a) = y_a, y'(a) = y'(a), \dots, y^{(k-1)}(a) = y_a^{(k-1)}$.

S substitucijami $y_1 = y, y_2 = y', \dots, y_k = y^{(k-1)}$ prevedemo problem na sistem:
$y_1' = y_2$
$\vdots$
$y_{k-1}' = y_k$
$y_k' = f(x, y_1, \dots, y_k)$
pri pogojih $y_1(a) = y_a, y_2(a) = y_a', \dots, y_k(a) = y_a^{(k-1)}$

Robni problem 2. reda

Rešujemo $y'' = f(x, y, y')$ pri pogojih
$y(a) = \alpha, y(b) = \beta$

Linearni robni problem 2. reda

Rešujemo $-y'' + py' + qy = r, y(a) = \alpha, y(b) = \beta$, kjer so p, q, r dane zvezne funkcije.

Rešimo 2 začetna problema oblike
$-y'' + py' + qy = r, y(a) = \alpha, y'(a) = \delta_i$, za neka δ_i in dobimo rešitvi y_1, y_2.
Enačbo reši tudi $y = \lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2, \lambda \in \mathbb{R}$.
Avtomatsko velja $y(a) = \alpha$, iz zahteve $y(b) = \beta$ pa dobimo $\lambda = \frac{\beta - y_2(b)}{y_1(b) - y_2(b)}$.
Če je $y_1(b) = y_2(b)$ izberemo drugačne δ_i.

Metoda končnih diferenc

Izberemo ekvidistante delilne točke
$a = x_0 < \dots < x_{n+1} = b$, $h = x_{i+1} - x_i$ in uporabimo simetrične približke odvodov.

Če označimo $p_i = p(x_i), q_i = q(x_i)$ in $r_i = r(x_i)$ dobimo:
$y_1(2 + h^2 q_1) + y_2\left(-1 + \frac{h}{2}p_1\right) = h^2 r_1 - \alpha\left(-1 - \frac{h}{2}p_1\right)$
$y_{i-1}\left(-1 - \frac{h}{2}p_i\right) + y_i(2 + h^2 q_i) + y_{i+1}\left(-1 + \frac{h}{2}p_i\right) = h^2 r_i$, za $i = 2, 3, \dots n - 1$
$y_{n-1}\left(-1 - \frac{h}{2}p_n\right) + y_n(2 + h^2 q_n) = h^2 r_n - \beta\left(-1 + \frac{h}{2}p_n\right)$
Ta sistem je tridiagonalen in diagonalno dominanten.

Nelinearni robni problem 2. reda

Metoda končnih diferenc za nelinearen problem

Izberemo ekvidistante delilne točke
$a = x_0 < \dots < x_{n+1} = b$, $h = x_{i+1} - x_i$ in uporabimo simetrične približke odvodov.

Dobimo $y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = h^2 f\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right)$, $i = 1, \dots, n$. To je sistem n nelinearnih enačb.

Strelska metoda

Začetni problem rešimo z nekim $y'(a) = k_0$ in dobimo rešitev $y(x; k_0)$. Definiramo $F(k) = y(b; k) - \beta$ in iščemo rešitev enačbe $F(k) = 0$.

Ponavadi se to rešuje s sekantno metodo $k_{r+2} = k_{r+1} - \frac{F(k_{r+1})(k_{r+1}-k_r)}{F(k_{r+1})-F(k_r)}$, kjer na vsakem koraku rešimo ODE 2. reda z $y'(a) = k_r$.