Kompleksna analiza

Kevin Jaksetič

Avgust 2020

Predmet: Matematika IV

Asistent: Jaka Strohsack

1 Elementarne zveze

- $e^{iz} = \cos z + i \sin z$
- $\mathrm{ch} z + \mathrm{sh} z = e^z$
- $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$
- $\mathrm{ch}^2 z - \mathrm{sh}^2 z = 1$
- $\cos(iz) = \mathrm{ch(z)}$
- $\sin(iz) = \frac{\mathrm{sh}(-z)}{i}$
- $\overline{e^{ix}} = e^{-ix} = \cos x - i \sin x$
- $z = |z| e^{i\varphi}$
- $z^r = |z|^r e^{i\varphi r}$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

$$\mathrm{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin(iz)$$

$$\mathrm{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos(iz)$$

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k; \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

2 Cauchy-Riemmanovi enakosti

$$f : D \to \mathbb{C}, \quad D \subseteq \mathbb{C}$$

$$f(z) = u(z) + iv(z); \quad u(z), v(z) \in \mathbb{R}$$

$$z = x + iy; \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y) \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) \tag{2}$$

Če veljata zgornji enakosti, je funkcija holomorfna, odvedljiva v kompleksnem smislu.

3 Integriranje kompleksnih funkcij

$$f : [a, b] \to \mathbb{C}$$

$$f(t) = u(t) + iv(t); \quad u, v : [a, b] \to \mathbb{R}$$

Definicija:

$$\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i\int_a^b v(t)dt$$

Definicija: $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}, \quad [\gamma] := \{\gamma(t) : t \in [a, b]\}, \quad f : [\gamma] \to \mathbb{C}$

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)dt$$

Ovojno število:
Naj bo $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ sklenjena pot in $\alpha \in \mathbb{C} \setminus [\gamma]$.

$$I_\gamma(\alpha) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z - \alpha} \in \mathbb{Z} \tag{3}$$

Cauchyjeve formule:
D enostavno povezano območje, f holomorfna na D. γ je sklenjena pot. Potem velja:

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0 \tag{4}$$

$$\oint_\gamma \frac{f(z)}{z - w}dz = 2\pi i \cdot I_\gamma(w) \cdot f(w) \tag{5}$$

Za pole višje stopnje velja:

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-w)^n} dz = 2\pi i \cdot I_{\gamma}(w) \cdot \frac{f^{(n-1)}(w)}{(n-1)!} \tag{6}$$

4 Liouvillov izrek, princip identičnosti

Če se f in g ujemata na množici s stekališčem v D, potem se ujemata na D.

5 Laurentova vrsta

$r < |z-w| < R$, f holomorfna na D:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-w)^n$$

Taylorjev razvoj okrog $x = a$:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Znani Taylorjevi razvoji:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

6 Residuum

z_0 izolirana singularna točka f, pol stopnje m, residuum:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\left(f(z) \cdot (z-z_0)^m\right)^{(m-1)}(z_0)}{(m-1)!} \tag{7}$$

7 Fourierova transformacija

$f \in L^1(\mathbb{R})$, komentar: takšne gredo v ∞ proti 0

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \tag{8}$$

<u>**Lastnosti:**</u>

- $\widehat{f(x)e^{iax}}(\omega) = \hat{f}(\omega - a), \;\; a \in \mathbb{R}$
- $\widehat{f(ax)}(\omega) = \frac{1}{a}\hat{f}(\frac{\omega}{a}), \;\; a > 0$
- $\widehat{f(x-a)}(\omega) = e^{-ia\omega}\hat{f}(\omega), \;\; a \in \mathbb{R}$
- $f(x), x \cdot f(x) \in L^1 \implies \hat{f}(\omega) = ?????$
- $f, f' \in L^1 \implies \hat{f}'(\omega) = i\omega\hat{f}(\omega)$
- $\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi}\hat{f}\hat{g}, \quad f, g \in L^1$
- $\widehat{fg} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\hat{f} * \hat{g}$
- $f \in S(\mathbb{R}) \implies \hat{f} \in S(\mathbb{R})$
- $f, \hat{f} \in L^1 \implies \hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$
- $\widehat{e^{-\frac{x^2}{2}}}(\omega) = e^{-\frac{\omega^2}{2}}$
- $\widehat{e^{-a|x|}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{2a}{a^2+\omega^2}$
- f soda $\implies \hat{f}$ soda, če je f še realna, je tudi $\hat{f}$
- f liha $\implies \hat{f}$ liha
- injektivna preslikava, če sta Fourierovi transformiranki dveh funkcij enaki, potem sta tudi sami funkciji enaki
- Fourierova transformacija je vedno zvezna

8 Parcialne diferencialne enačbe

$u(x,t); \quad g(x,t) = au_{xx} + bu_{xt} + cu_{tt} + du_x + eu_t + fu$

Fourierova metoda ločitve spremenljivk:

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

Mešani členi ponavadi uničijo uporabnost metode.

Nastavki za diferencialno enačbo

$$X'' - \lambda X = 0$$

1. $\underline{\lambda > 0:}$
   $X = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x} = A\mathrm{ch}(\sqrt{\lambda}x) + B\mathrm{sh}(\sqrt{\lambda}x)$

2. $\underline{\lambda = 0:}$
   $X = Ax + B$

3. $\underline{\lambda < 0:}$
   $X = A\cos(\sqrt{-\lambda}x) + B\sin(\sqrt{-\lambda}x)$

9 Kompleksne diferencialne enačbe

Iščemo $y(z)$, ki je rešitev diferencialne enačbe. Če diferencialna enačba nima polov, ko jo delimo z vodilnim koeficientom (koeficient pred najvišjim odvodom), pišemo kar

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

in to vstavimo v enačbo. Največkrat rabimo prva dva odvoda. To sta:

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} \ .$$

Gledamo člene pri fiksnih potencah. Najprej pogledamo izjeme, ko pa so členi od nekih potenc naprej v vseh vrstah enačbe, napišemo splošno formulo. Začnemo z najnižjo potenco, ki je recimo z^0, kot: $z^0 : a_2 + 3a_0 = 0$. Iz takšnih enačb z nižjimi členi izrazimo višje. Dobimo rekurzivno formulo za koeficiente. Iz tega lahko izrazimo našo rešitev $y(z)$.

Če ima diferencialna enačba pole, gremo s Frobeniusovo metodo. Tedaj pišemo

$$y = z^{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n; \quad \mu \in \mathbb{R} \ (\mathbb{C}??), \quad a_0 \neq 0$$

Postopamo isto kot prej, najdemo ustrezne μ. Probamo isto kot prej z nekim ustreznim μ. Poračunamo koeficiente in imamo rešitev.

Liouvillova formula:
To uporabimo, ko imamo bazno rešitev in iščemo še eno. Naša diferencialna enačba se glasi

$$y'' + p(z) y' + q(z) y = 0.$$

Po tem je ta formula enaka

$$y_2 = y_1 \int \frac{e^{-\int p(z) dz}}{y_1^2} dz \tag{9}$$

Končna rešitev je linearna kombinacija baznih rešitev:

$$y(z) = A y_1(z) + B y_2(z)$$

10 Ortogonalni polinomi

Razvoj po polinomih se v splošnem glasi:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n,$$

pri tem so koeficienti a_n enaki:

$$a_n = \frac{\langle f, P_n \rangle}{\langle P_n, P_n \rangle}$$

10.1 Legendrovi polinomi

- $P_n(z) = \frac{1}{2^n n!} \left(\frac{d}{dz}\right)^n [(z^2-1)^n]$ Rodriguesova formula
- to je ena izmed rešitev $(z^2-1)y'' + 2zy' - n(n+1)y = 0$
- rodovna funkcija (konvergira za dovolj majhne t):

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) t^n = \frac{1}{\sqrt{1-2zt+t^2}}; \quad |t| < R$$

- rekurzivna zveza: $(n+1)P_{n+1}(z) = (2n+1)zP_n(z) - nP_{n-1}(z)$
- ortogonalnost:

$$\int_{-1}^{1} P_m(x) P_n(x) dx = \delta_{m,n} \cdot \frac{2}{2n+1} = \langle P_m, P_n \rangle$$

  pri tem je:

$$\delta_{m,n} = \begin{cases} 1; & m = n \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

- razvoj po Legendrovih polinomih (so baza L^2): $f \in L^2([-1,1])$

$$\Longrightarrow f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n, \quad a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x) dx$$

  vrsta konvergira proti f v normi prostora L^2

- $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

10.2 Hermitovi polinomi

- $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$ Rodriguesova formula, $n \geq 0$
- to je ena izmed rešitev $y'' - 2xy' + 2ny = 0$
- rodovna funkcija:
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n = e^{2xt-t^2}$$
- $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - H'_{n-1}(x)$
- $H_n(x) = 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x)$
- ortogonalnost:
$$\int_{-\infty}^{\infty} H_m(x)H_n(x)e^{-x^2}dx = \delta_{m,n}\sqrt{\pi} \cdot 2^n n! = \langle H_m, H_n \rangle$$

11 Besselove funkcije

- rešitve enačbe: $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$
- Rodriguesova formula:
$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!(\nu+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+\nu}$$
- $\nu \notin \mathbb{Z} \implies J_\nu, J_{-\nu}$ neodvisni rešitvi
- $\nu \in \mathbb{C} \implies J_\nu, Y_\nu$ neodvisni rešitvi, pri tem je Y_ν Webrova funkcija
- rodovna funkcija:
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n = e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$$
- $2J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x), \quad \nu \in \mathbb{C}$
- $J_{\nu+1}(x) + J_{\nu-1}(x) = \frac{2\nu}{x}J_\nu(x), \quad \nu \in \mathbb{C}$
- iz prejšnjih dveh sledi: $J_{\nu+1}(x) = \frac{\nu}{x}J_\nu(x) - J'_\nu(x)$