3 domača naloga

By

Matic Tonin

ID No. (28181098)

Mentor

(Janez Šter)

Pod okvirom:

FAKULTETE ZA FIZIKO IN MATEMATIKO, LJUBLJANA

20. 4. 2020

1 Naloga

Naj bo $a \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Poisci vse funkcije $f \in L^1(\mathbb{R})$, ki zadoscajo enacbi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{t(x-t)}dt = e^{ax^2}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(Namig: namesto x v enacbo vstavi $2x$, nato enacbo pomnoziz e^{-x^2}.)

Enačbo lahko preuredimo tako, da dobimo na levi strani konvolucijo. To storimo tako, da najprej spremenimo x v 2x in jo pomnožimo z e^{-x^2} Prikaz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{xt-t^2}dx = e^{ax^2}$$

Vstavimo 2x namesto x:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2xt-t^2}dx = e^{4ax^2}$$

Pomnožimo z e^{-x^2}:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{2xt-t^2-x^2}dx = e^{4ax^2-x^2}$$

Sledi, da je:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(t-x)^2}dx = e^{-(1-4a)x^2} \tag{1}$$

Kar je pa v resnici enako kar:

$$\left(f(t) * e^{-t^2}\right)(x) = e^{-(1-4a)x^2} \tag{2}$$

Če sedaj na obeh straneh enačbe izvedemo Fourierjevo transformacijo, dobimo z preoblikovanjem enačbe, da je:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\pi(2-8a)}}e^{-\frac{\omega^2}{2}\frac{4a}{2-8a}} \tag{3}$$

Če naredimo še eno Fourierjevo transformacijo in ker vemo, da je: $\hat{\hat{f}}(x) = f(-x)$, dobimo, da je:

$$f(-x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-\frac{1-4a}{4a}x^2}$$

Iz česar nam sledi:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi a}}e^{-\frac{1-4a}{4a}x^2} \tag{4}$$

2 Naloga

Poisci funkcijo $u(x,t) : [0, 2\pi] \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$, **ki zadosca diferencialni enacbi**

$$u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx}$$

in pogojem $u_x(0,t) = u_x(2\pi, t) = 0$ **ter** $u(x,0) = \cos x$ **in** $u_t(x,0) = \left|\cos \frac{x}{2}\right|$

Osnovna enačba je oblike:

$$u_{tt} + 2u_t + u = u_{xx} \tag{5}$$

Če definiramo, da je u(x,t) zgrajena kot funkcija spremenljivke x in funkcija spremenljivke t.

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{6}$$

Dobimo, da je $u_t = XT'$, $u_{tt} = XT''$ in $u_{xx} = X''T$. Če v enačbo (5) sedaj vstavimo izpeljane zveze za u, X in T, dobimo, da je:

$$XT'' + 2XT' + XT = X''T \tag{7}$$

Enačbo delimo z T in X, da dobimo:

$$\frac{T'' + 2T' + T}{T} = \frac{X''}{X} \tag{8}$$

S tem smo dobili, da je rešitev enačbe neodvisna glede na spremenljivke. Tako lahko rečemo, da je (8) enak neki konstanti, ki jo imenujemo λ
Poglejmo si še robne pogoje. Vemo, da je $u_x(0, t == u_x(2\pi, t) = 0$ za vsak t. To lahko spremenimo v:

$$X'T(0,t) = X'T(2\pi, t) = 0 \tag{9}$$

In ker vemo, da to velja za vsak T in da ne smemo dobiti trivialne rešitve sledi, da je lahko le

$$X'(0,t) = X'(2\pi, t) = 0 \tag{10}$$

S tem smo dobili homogena robna pogoja za enačbo X. Sedaj bomo pa razdelili nalogo na dva dela in sicer na reševanje naloge za enačbo z X in z T.

2.1 Reševanje X dela diferencialne enačbe

Za X dobimo, da je:

$$X'' - \lambda X = 0 \tag{11}$$

Sedaj pa je rešitev te diferencialne enačba odvisna od tega, kakšen je koeficient λ:

1. $\lambda > 0$
   V primeru, da je lamda večji od 0, dobimo, da je:

   $$X(x) = A\cosh(\sqrt{\lambda}x) + B\sinh(\sqrt{\lambda}x) \tag{12}$$

   Če enačbo odvajamo, dobimo, da je:

   $$X'(x) = A\sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}x) + B\sqrt{\lambda}\cosh(\sqrt{\lambda}x)$$

   Če sedaj vstavimo robne pogoje za X, ki smo jih izpeljali v (10), dobimo:

(a) $X'(0,t) = 0$:

$$X'(0) = 0 = B\sqrt{\lambda} \tag{13}$$

Iz česar nam sledi, da je B=0.

(b) $X'(2\pi,t) = 0$

$$X'(2\pi) = 0 = \sqrt{\lambda}\sinh(\sqrt{\lambda}2\pi) \tag{14}$$

Iz česar nam sledi, da je A=0, saj sinh ne more biti enak 0.

Torej ta rešitev za λ ni prava.

2. $\lambda = 0$:
V primeru, da je lambda enak 0, dobimo da je:

$$X(x) = Ax + B \tag{15}$$

Če sedaj dodamo še robne pogoje: e sedaj vstavimo robne pogoje za X, ki smo jih izpeljali v (10), dobimo:

(a) $X'(0,t) = 0$:

$$X'(0) = 0 = A \cdot 0 \tag{16}$$

Iz česar nam sledi, da ta robni pogoj ne da uporabnih vrednosti.

(b) $X'(2\pi,t) = 0$

$$X'(2\pi) = 0 = A \tag{17}$$

Iz česar nam sledi, da je A=0 in $B \in \mathbb{R}$.

Torej ta rešitev za λ ni prava.

3. $\lambda < 0$: V primeru, da je lambda manjši od 0, dobimo, da je:

$$X(x) = B\sin(\sqrt{-\lambda}x) + A\cos(\sqrt{-\lambda}x) \tag{18}$$

Če to enačbo odvajamo dobimo, da je:

$$X'(x) = \sqrt{-\lambda}B\cos(\sqrt{-\lambda}x) - \sqrt{-\lambda}A\sin(\sqrt{-\lambda}x)$$

Če sedaj dodamo še robne pogoje: e sedaj vstavimo robne pogoje za X, ki smo jih izpeljali v (10), dobimo:

(a) $X'(0,t) = 0$:

$$X'(0) = 0 = \sqrt{-\lambda}B \tag{19}$$

Iz česar nam sledi, da je B=0.

(b) $X'(2\pi,t) = 0$

$$X'(2\pi) = -\sqrt{-\lambda}A\sin(\sqrt{-\lambda}2\pi) \tag{20}$$

Ker želimo neničelno rešitev za A, mora biti sinus v enačbi (20) enak nič. To bo res, ko bo:

$$\sqrt{-\lambda}2\pi = n\pi \quad n \in \mathbb{Z} \tag{21}$$

Sledi, da je:

$$\lambda_n = -\frac{n^2}{4} \tag{22}$$

Tako dobimo, da je rešitev za X del enaka:

$$X(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \tag{23}$$

2.2 Reševanje T dela diferencialne enačbe

Za T dobimo, da je:

$$T'' + 2T' + (1 + \frac{n^2}{4})T = 0 \tag{24}$$

Za tako diferencialno enačbo lahko definiramo karakteristični polinom

$$k^2 + 2k + (1 + \frac{n^2}{4}) = 0 \qquad \rightarrow \qquad k_n = -1 \pm \frac{n}{2}i \tag{25}$$

Za te rešitve vemo, da je potem nastavek kar $T(t) = Ae^{kt}$, ampak ker je dvojna ničla, za n=0 dobimo:

$$T_0(t) = A_0 e^{-t} + B_0 e^{-t} t \tag{26}$$

Če pa vstavimo, da je n neko naravno število, pa lahko razdelimo na imaginarni del in realni del, da je:

$$T_n(t) = e^{-t}\left(A_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + B_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right) \tag{27}$$

S tem smo sedaj dobili začetne rešitve za X in T, manjkajo pa nam še začetni pogoji.

2.3 Začetni pogoji

Iz enačbe vemo, da je (6) zato lahko zmonžimo naše pogoje, ki smo jih dobili, da dobimo:

$$u(x,t) = A_0 e^{-t} + B_0 e^{-t} t + \sum_{n=0}^{\infty} e^{-t}\left(A_n \cos\left(\frac{nt}{2}\right) + B_n \sin\left(\frac{nt}{2}\right)\right) \cos\frac{nx}{2} \tag{28}$$

Če najprej pogledamo začetni pogoj $u(x,0) = \cos(x)$, dobimo, da je:

$$\cos(x) = A_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(\frac{nx}{2})$$

Sledi, da je $A_0 = 0$ in da je:

$$A_n = \begin{cases} 1; n = 2 \\ 0;\ \text{sicer} \end{cases}$$

Sedaj pa poglejmo še drug pogoj in sicer $u_t(x,0) = |\cos\frac{x}{2}|$ Če to vstavimo v enačbo, dobimo, da je:

$$u(x,0) = -u(x,0) + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n}{2} \cos\left(\frac{nx}{2}\right) = |\cos\frac{x}{2}| \tag{29}$$

Vidimo, da bi morali $|\cos\frac{x}{2}|$ razviti v Fourierjevo vrsto, da bi dobili na vsaki strani enačbe vrsto ter ju nato primerjali.

2.4 Razvoj $|\cos\frac{x}{2}|$ v vrsto

Za splošni člen vrste vemo, da je enak:

$$a_n = \frac{4}{4\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\left(\frac{x}{2}\right)|\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)dx \tag{30}$$

Če vstavimo, da je n=0, dobimo integral:

$$a_0 = \frac{2}{4\pi}\int_0^{2\pi} |\cos\left(\frac{x}{2}\right)|dx$$

Kar pa lahko izračunamo z uvedbo nove spremenljivke $v = \frac{x}{2}$ in spremembe integrala na intervale:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(v)dv - \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos(v)dv = \frac{2}{\pi} \tag{31}$$

Za reševanje splošne oblike, a_n uporabimo podobne principe in na koncu, po integraciji dobimo, da je:

$$a_n = \frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2} \tag{32}$$

Vidimo še, da moramo posebej obravnavati primer, ko je n=1 in po integraciji ugotovimo, da je $a_1 = 0$

2.5 Rešitev koeficienta B_n

Z primerjavo vrst, ki smo jih dobili, dobimo izraz:

$$B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n}{2}\cos\left(\frac{nx}{2}\right) = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2}\cos\left(\frac{nx}{2}\right) + \cos(x) \tag{33}$$

In s primerjavo koeficientov kmalu ugotovimo, da je B_n enak kar:

$$B_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}; n = 0 \\ \frac{4}{3\pi} + 1; n = 2 \\ 0; n = \text{lih} \\ \frac{8}{n\pi}\frac{\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{1-n^2};\ \text{sicer} \end{cases} \tag{34}$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(Cnx)dx$$