

Vrtavka

By

Matic Tonin

ID No. (28181098)

Mentor

(Rok Dolenec)

Pod okvirom:

FAKULTETE ZA FIZIKO IN MATEMATIKO, LJUBLJANA

1. 4. 2020

1 Naloga

Izmeri precesijsko (ω_{pr}) in nutacijsko kotno hitrost (ω_N) v odvisnosti od kotne hitrosti (ω_z) vrtavke. Izvedi meritev pri vsaj treh frekvencah $\nu_z = \omega_z/(2\pi)$. Na primer pri približno 600, 500 in 400 obratov na minuto (kratica rpm – angl. rotations per minute). Gornjo meritev izvedi pri naslednjih nastavitvah vrtavke:

1. vrtavka z utežjo blizu krogle
2. utež na sredini palice
3. utež na koncu palice (pusti si prostor za oprijem)

Meritve z različnimi nastavitvami vrtavke izvedi pri podobnih frekvencah ν_z kot prej, da so rezultati lažje primerljivi. Izmerjene vrednosti ω_{pr} in ω_N primerjaj z izračunanimi iz (??) in (??) in naredi tabelo.

Kljub temu, da meritve sam nisem izvajal, bom v poročilu navedel, kakšen bi moral biti postopek dela in kako smo dobili določene meritve.

2 Postopek dela

Najprej smo si morali izbrati, pri 3 različne frekvence, ki jih bomo uporabljali skozi meritev, pri različnih položajih uteži in pri različnih vrtenjih. (sicer to ni potrebno, ampak nam olajša kasnejše obdelovanje podatkov in primerjavo). Sam bom razdelil to nalogo na tri poglavja, kot so navedena v poglavju naloga. Pri vsakem delu pa je bil postopek isti (npr blizu ali na sredini krogle).

1. Za meritev precesije smo morali najprej postaviti kroglo na našo žračno blazino", ki ji je pomagala, da se je vrtela s konstantno frekvenco. Nato smo, ko se je vrtavka nekaj časa vrtela in tako vzpostavila neko konstantno hitrost, prižgali stroboskop, da bi izmerili njeno hitrost vrtenja. V navodilih točno piše, kako to storimo in kako nastavimo stroboskop za najboljšo meritev. Za konec smo morali le še z svinčnikom in ravnilom izmakniti vrtavko za nek kot in izmerili čas precesije. To meritev smo nato ponovili za različne hitrosti vrtenja vrtavke in različne kote nagiba vrtavke.
2. Za meritev nutacije pa smo potrebovali vrtavko, ko se je ta vrtela, rahlo poriniti s svinčnikom in nato opazovati njeno gibanje in meriti, kolikšen je čas nutacije.

3 Meritve in rezultati

3.1 Podatki o vrtavki

V samem poročilu o vrtavki so nam navedli določene podatke, ki jih bom zaradi lažje kasnejše obdelave dodal v svoje poročilo.

Predmet	masa [g]	premer [mm]	debelina ali dolžina [mm]
Krogla	$m_k = 512$	$2r_k = 50.7$	/
Ploščica	$m_o = 19$	$2r_o = 58$	$h_o = 1$
Palica	$m_p = 23$	$2r_p = 6.3$	$h_p = 89.8$
Utež	$m_u = 19$	$2r_u = 19.3$	$h_u = 25.2$

Tabela 1: Podatki o naših predmetih, masa ter dolžina

Opozorilo

Meritve smo, zaradi izrednih razmer, dobili kar od asistentov in sicer:

3.1.1 Utež ob krogli

frekvenca vrtenja [rpm]	čas precesije [s]	
	1. kot	2. kot
1386	4,7	5
1415	5,2	4,9
1475	5,2	5,4
1518	4,8	5,1
1550	5,3	5
1570	5,2	5,3

Tabela 2: Utež ob krogli - precesija

frekvenca vrtenja [rpm]	frekvenca nutacije [rpm]
830	363
996	391
1393	644

Tabela 3: Utež ob krogli - nutacija

Ker pa so frekvence vrtenja podane v [rpm], jih moramo pretvoriti v [1/s], kar nam pomaga zveza med tem dvema količinama in sicer:

$$60\text{rpm} = \frac{2\pi}{s}$$

Tako lahko vse naše frekvence v obratih na minuto spremenimo v kotne frekvence.

Da pa bi izmerili, kolikšna je hitrost precesije in nutacije, pa si pomagamo z zvezo, o frekvencah in sicer:

$$\omega_{pr,n} = \frac{2\pi}{t}$$

Če sedaj z navedenimi formulami izračunamo, kolikšna je precesija in nulacija, dobimo:

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}
145,1	1,3	1,3
148,1	1,2	1,3
154,4	1,2	1,2
158,9	1,3	1,2
162,2	1,2	1,3
164,3	1,2	1,2

Tabela 4: Precesija - utež ob krogli

ω_z	ω_N
86,9	38,0
104,2	40,9
145,8	67,4

Tabela 5: Nutacija - utež ob krogli

3.1.2 Utež 1.5cm od krogle

Isti postopek za vse ponovimo tudi pri utežeh na različnih lokacijah, zato bom tu zgolj navedel, kakšne so vrednosti in kakšne so meritve:

frekvenca vrtenja [rpm]	čas precesije [s]	
	1. kot	2. kot
1073	3,4	3,6
1140	3,7	3,5
1191	3,7	3,5
1211	3,8	3,6

Tabela 6: Utež 1.5cm od krogle - precesija

frekvenca vrtenja [rpm]	frekvenca nutacije [rpm]
1220	631
1467	709
938	480

Tabela 7: Utež 1.5cm od krogle - nutacija

Za rezultate pa dobimo kar:

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}
112,3	1,8	1,7
119,3	1,7	1,8
124,7	1,7	1,8
126,8	1,7	1,7

Tabela 8: Precesija - utež 1.5cm od krogle

ω_z	ω_N
127,7	66,0
153,5	74,2
98,2	50,2

Tabela 9: Nutacija - utež 1.5cm od krogle

3.1.3 Utež oddaljena 2.5 cm od krogle

Isti postopek za vse ponovimo tudi pri utežeh na različnih lokacijah, zato bom tu zgolj navedel, kakšne so vrednosti in kakšne so meritve:

frekvenca vrtenja [rpm]	čas precesije [s]	
	1. kot	2. kot
1100	2,9	3,1
1224	3,5	3,7
1270	3,7	3,6
1465	4	4,2

Tabela 10: Utež 2.5cm od krogle - precesija

frekvenca vrtenja [rpm]	frekvenca nutacije [rpm]
880	439
985	496
1107	567

Tabela 11: Utež 2.5cm od krogle - nutacija

Za rezultate pa dobimo kar:

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}
115,1	2,2	2,0
128,1	1,8	1,7
132,9	1,7	1,7
153,3	1,6	1,5

Tabela 12: Precesija - utež 2.5cm od krogle

ω_z	ω_N
92,1	45,9
103,1	51,9
115,9	59,3

Tabela 13: Nutacija - utež 2.5cm od krogle

S tem smo izmerili vse potrebne reči, sedaj pa potrebujemo to primerjati z dejanskimi vrednostmi. Pred tem, pa nas čaka še obravnava vztrajnostnih momentov za naše opazovano telo.

4 Izračuni

4.1 Izračuni vztrajnostnih momentov

Določeni vztrajnostni momenti so nam že znani, saj smo se jih učili na Klasični fiziki in so tudi zapisani v navodilih za vajo, zato jih lahko tu zgolj navedemo za ponovitev.

Vztrajnostni moment krogle:

$$J_{krogla} = \frac{2}{5}mr^2$$

Vztrajnostni moment valja skozi os z (simetrijska os):

$$J_{valj, z} = \frac{1}{2}mr^2$$

Vztrajnostni moment valja skozi osi x in y (osi pravokotni na simetrijsko os):

$$J_{valj, x} = J_{valj, y} = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{h^2}{12}\right)$$

Če gremo nato računati vztrajnostne momente naših teles vsakega posebej, preden jih sestavimo skupaj v vrtavko, dobimo:

$$\begin{aligned} J_{krogla} &= \frac{2}{5}m_k r_k^2 = (1316 \pm 1) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \\ J_{ploščica, z} &= \frac{1}{2}m_o r_o^2 = (80 \pm 7) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \\ J_{palica, z} &= \frac{1}{2}m_p r_p^2 = (1.1 \pm 0.1) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \\ J_{utež, z} &= \frac{1}{2}m_u r_u^2 = (9 \pm 0.5) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \\ J_{ploščica, x} &= m_o\left(\frac{r_o^2}{4} + \frac{h_o^2}{12}\right) = (42 \pm 0.3) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \\ J_{palica, x} &= m_p\left(\frac{r_p^2}{4} + \frac{h_p^2}{12}\right) = (160 \pm 7) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \\ J_{utež, x} &= m_u\left(\frac{r_u^2}{4} + \frac{h_u^2}{12}\right) = (14 \pm 0.8) \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \end{aligned}$$

Ker bomo po naši palici sedaj premikali utež, nas zanima, kako se bo z premikanjem naše uteži spreminjalo težišče. Za izračun težišča si lahko pomagamo s formulo.

$$l = \frac{\sum_i m_i \cdot h_i}{\sum_i m_i}$$

Kjer so i indeksi vseh teles, ki nastopajo v našem sistemu. Za vrtavko bo veljalo, da je:

$$l = \frac{m_o \cdot \left(r_k + \frac{h_o}{2}\right) + m_p \cdot \left(r_k + h_o + \frac{h_p}{2}\right) + m_u \cdot L}{m_k + m_o + m_p + m_u} = 0.3717 \text{ cm} + 0.033 \cdot L$$

Kjer je L drsnik, ki nam pove, kako nizko ali visoko smo postavili utež, oziroma oddaljenost uteži od središča krogle. Ta bo za vsako lokacijo drugačen.

Za našo nalogo izračuna hitrosti precesije in nulacije nam bosta koristili formuli iz uvoda in sicer:

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}}\omega_z \quad \omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}$$

Posledično vidimo, da bomo potrebovali izračunati J_{33} in J_{11} . Kaj pa sploh sta te dva vztrajnostna momenta?

To sta vztrajnostna momenta, ki sta odvisna od tega, okoli katere osi se vrtavka vrti. Saj vrtavko lahko vrtimo na različne načine, okoli x, y ali z osi.

Tako lahko za vsako os izračunamo, kolikšen je, ampak v našem primeru potrebujemo zgolj J_{33} in J_{11} .

Pred izračunom pa bom definiriral še naslednje pojme (kakšnega smo spoznali že prej, a jih bom zaradi preglednosti ponovno napisal):

1. M - skupna masa
2. l - oddaljenost težišča od središča krogle
3. L - oddaljenost uteži od središča krogle

Sedaj pa izračunajmo oba vztrajnostna momenta:

1. Vztrajnostni moment J_{11} :

$$J_{11} = J_{krogla} + J_{ploščica, x} + J_{palica, x} + J_{utež, x} + m_o \cdot \left(r_k + \frac{h_o}{2}\right)^2 + m_p \cdot \left(r_k + h_o + \frac{h_p}{2}\right)^2 + m_u \cdot L^2$$

$$\text{Rezultat tega izračuna je: } \underline{J_{11} = 2727g \cdot cm^2 + 19g \cdot L^2}$$

2. Vztrajnostni moment J_{33} :

$$J_{33} = J_{krogla} + J_{ploščica, z} + J_{palica, z} + J_{utež, z}$$

$$\text{Rezultat tega izračuna je: } \underline{J_{33} = 1406g \cdot cm^2}$$

S temi vsemi podatki pa lahko izračunamo tudi predvidene kotne hitrosti za naše dva pojava.

4.2 Izračuni predvidenih kotnih hitrosti

Za to lahko uporabimo že prej navedene formule, ki so:

$$\omega_N = \frac{J_{33}}{J_{11}}\omega_z \quad \omega_{pr} = \frac{mgl}{J_{33}\omega_z}$$

In tako izračunamo vrednosti in jih primerjamo z izmerjenimi.

4.2.1 Utež ob krogli

Potrebne manjkajoče podatke izračunamo z $L = r_k + h_0 + \frac{h_u}{2} = 3.895cm$.

$$J_{11} = 3015g \cdot cm^2$$

$$l = 0.50cm$$

$$mgl = 280\,900 \frac{g \cdot cm^2}{s^2}$$

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}	$\omega_{pr,calc}$ (izračunana)
145,1	1,3	1,3	1,38
148,1	1,2	1,3	1,35
154,4	1,2	1,2	1,29
158,9	1,3	1,2	1,26
162,2	1,2	1,3	1,23
164,3	1,2	1,2	1,22

Tabela 14: Precesija - utež ob krogli

ω_z	ω_N	$\omega_{N,calc}$ (izračunana)
86,9	38,0	40,5
104,2	40,9	48,6
145,8	67,4	68,0

Tabela 15: Nutacija - utež ob krogli

Komentar tabele:

1. Precesija:

V tabeli za precesijo imamo v prvem stolpcu navedeno kotno hitrost vrtavke, ki smo jo izmerili, drugi in tretji stolpec nam prikazujeta kotne hitrosti precesije, ki smo jih izračunali v poglavju meritve (postopek podatkov je zapisan tam), zadnji stolpec pa nam prikazuje izračunane vrednosti iz naših vztrajnostnih momentov v odvisnosti od začetne kotne hitrosti vrtavke ω_z .

2. Nutacija:

V tabeli za nutacijo imamo v prvem stolpcu navedeno kotno hitrost vrtavke, ki smo jo izmerili, drugi stolpec nam prikazuje kotno hitrost nutacije, ki smo jo izračunali v poglavju meritve (postopek podatkov je zapisan tam), zadnji stolpec pa nam prikazuje izračunane vrednosti iz naših vztrajnostnih momentov v odvisnosti od začetne kotne hitrosti vrtavke ω_z .

4.2.2 Utež 1.5cm oddaljena od krogle

$$J_{11} = 3259g \cdot cm^2$$

$$l = 0.55cm$$

$$mgl = 306\,800 \frac{g \cdot cm^2}{s^2}$$

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}	$\omega_{pr,calc}$ (izračunana)
112,3	1,8	1,7	1,94
119,3	1,7	1,8	1,83
124,7	1,7	1,8	1,75
126,8	1,7	1,7	1,72

Tabela 16: Precesija - utež 1.5cm od krogle

ω_z	ω_N	$\omega_{N,calc}$ (izračunana)
127,7	66,0	55,1
153,5	74,2	66,2
98,2	50,2	42,4

Tabela 17: Nutacija - utež 1.5cm od krogle

Komentar: podatek oddaljenosti 1.5cm, sem privzel, da je to razdalja med sredino uteži in kroglo.

Komentar tabele:

1. Precesija:

V tabeli za precesijo imamo v prvem stolpcu navedeno kotno hitrost vrtavke, ki smo jo izmerili, drugi in tretji stolpec nam prikazujeta kotne hitrosti precesije, ki smo jih izračunali v poglavju meritve (postopek podatkov je zapisan tam), zadnji stolpec pa nam prikazuje izračunane vrednosti iz naših vztrajnostnih momentov v odvisnosti od začetne kotne hitrosti vrtavke ω_z .

2. Nutacija:

V tabeli za nutacijo imamo v prvem stolpcu navedeno kotno hitrost vrtavke, ki smo jo izmerili, drugi stolpec nam prikazuje kotno hitrost nutacije, ki smo jo izračunali v poglavju meritve (postopek podatkov je zapisan tam), zadnji stolpec pa nam prikazuje izračunane vrednosti iz naših vztrajnostnih momentov v odvisnosti od začetne kotne hitrosti vrtavke ω_z .

4.2.3 Utež 2.5cm oddaljena od krogle

$$J_{11} = 3479g \cdot cm^2$$

$$l = 0.58cm$$

$$mgl = 325\,400 \frac{g \cdot cm^2}{s^2}$$

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}	$\omega_{pr,calc}$ (izračunana)
115,1	2,2	2,0	2,01
128,1	1,8	1,7	1,81
132,9	1,7	1,7	1,74
153,3	1,6	1,5	1,51

Tabela 18: Precesija - utež 2.5cm od krogle

ω_z	ω_N	$\omega_{N,calc}$ (izračunana)
92,1	45,9	37,2
103,1	51,9	41,7
115,9	59,3	46,8

Tabela 19: Nutacija - utež 2.5cm od krogle

Komentar: podatek oddaljenosti 2.5cm, sem privzel, da je to razdalja med sredino uteži in kroglo.

Komentar tabele:

1. Precesija:

V tabeli za precesijo imamo v prvem stolpcu navedeno kotno hitrost vrtavke, ki smo jo izmerili, drugi in tretji stolpec nam prikazujeta kotne hitrosti precesije, ki smo jih izračunali v poglavju meritve (postopek podatkov je zapisan tam), zadnji stolpec pa nam prikazuje izračunane vrednosti iz naših vztrajnostnih momentov v odvisnosti od začetne kotne hitrosti vrtavke ω_z .

2. Nutacija:

V tabeli za nutacijo imamo v prvem stolpcu navedeno kotno hitrost vrtavke, ki smo jo izmerili, drugi stolpec nam prikazuje kotno hitrost nutacije, ki smo jo izračunali v poglavju meritve (postopek podatkov je zapisan tam), zadnji stolpec pa nam prikazuje izračunane vrednosti iz naših vztrajnostnih momentov v odvisnosti od začetne kotne hitrosti vrtavke ω_z .

5 Napaka

Pri primerjavi izračunov in meritev vidimo, da pride do določenih odstopanj. Sam sklepam, da se napaka predvsem pojavi zaradi približka naše hitre vrtavke, ki smo ga ustvarili v enačbi:

$$\cos \theta_0 - \cos \theta_1 \approx \frac{J_{11}}{J_{33}} \frac{2mgl}{J_{33}\omega_z^2} \sin^2 \theta_0$$

Saj vidimo, da bodo za manjše hitrosti vrtenja, večja odstopanja od naše meritve. To se dobro vidi pri večini meritve precesije, saj se z večanjem hitrosti vrtenja vrtavke manjša odstopanje meritve od naše dejanske vrednosti. Primer: Na žalost isti princip ne moremo reči za nutacijo,

ω_z	ω_{pr1}	ω_{pr2}	$\omega_{pr,calc}$ (izračunana)
145,1	1,3	1,3	1,38
148,1	1,2	1,3	1,35
154,4	1,2	1,2	1,29
158,9	1,3	1,2	1,26
162,2	1,2	1,3	1,23
164,3	1,2	1,2	1,22

Tabela 20: Precesija - utež ob krogli, primer da se napaka z večanjem hitrosti vrtenja, manjša

kjer pa ta približek ni tako očiten. Je pa rahlo viden. Predvsem iz tega razloga, da z oddaljenostjo uteži od središča krogle, se napaka večja, oziroma so odstopanja večja. Kot primer lahko vzamemo nutacije za največje hitrosti pri vseh odmikih in jih damo v tabelo.

Odmik uteži	0	1.5	2.5
ω_z	145,8	153,5	115,9
ω_N	67,4	74,2	59,3
$\omega_{N,calc}$ (izračunana)	68,0	66,2	46,8
$\Delta\omega_N$	-0,6	8	13,5

Tabela 21: Nutacija, primerjava vrednosti za različne odmike.