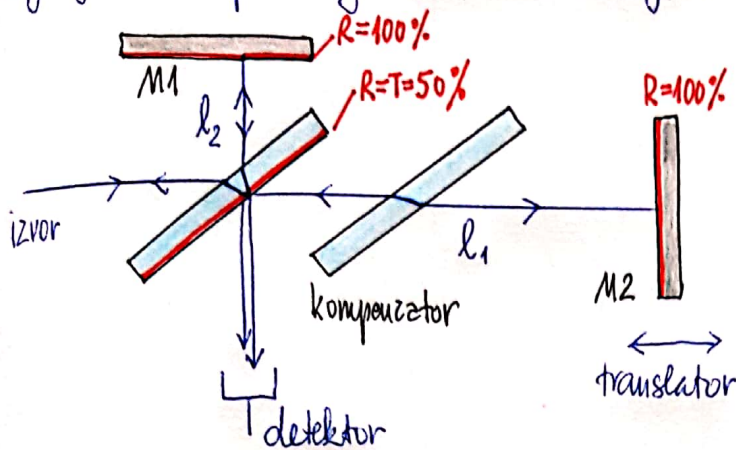


B) INTERFERENCA Z DELITVIJO AMPLITUDE

(36)

Najbolj znan primer je Michelsonov interferometer (A.A. Michelson, ZDA, 1852-1931).



Gostota energ. toka na detektorju:

$$j = 4 \cdot j_0 \cdot \cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)$$

$$\Delta\phi = k_0(l_1 - l_2) \cdot 2$$

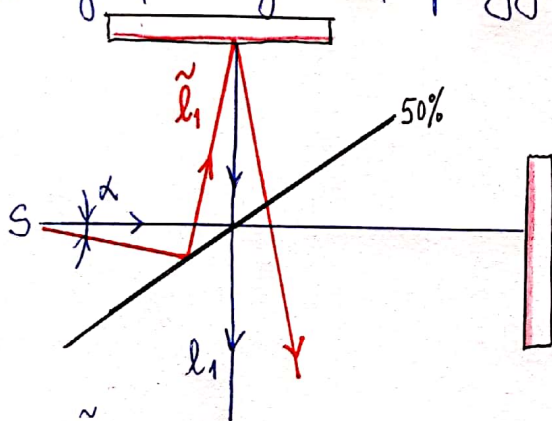
l_1, l_2 je optična pot žarka v vejah 1 in 2.

$$\text{Maximumi: } \frac{1}{2} k_0 \Delta l \cdot 2 = N \cdot \pi$$

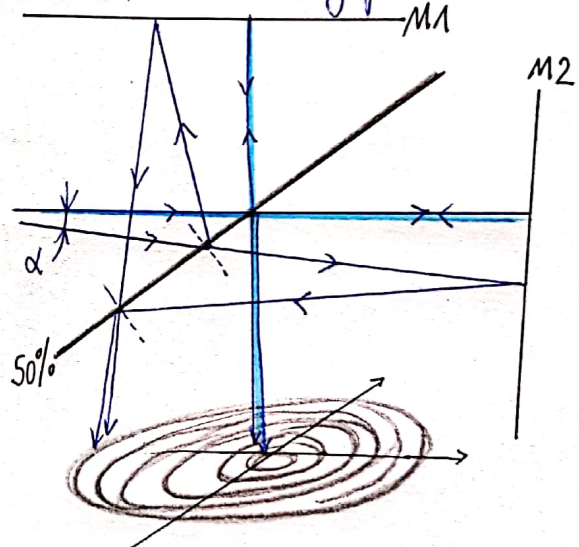
$$\Delta l = \frac{N \cdot \pi}{k_0} = N \left(\frac{\lambda}{2}\right)$$

se pojavljajo pri premiku zrcala za $\frac{\lambda}{2}$.

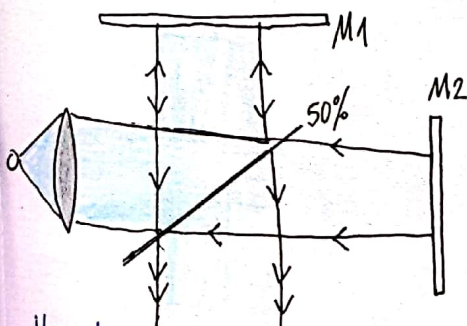
Če v eksperimentu uporabimo neolimiran snop, se na opazovalnem zaslonu oz detektorju pojavijo klobazji, ki nastajajo oz. izgubljajo prosto medino, če pomikamo zrcalo M2. To se zgodi, ker imajo žarki, ki potujejo pod različnimi koti, različno dolge poti.



$\tilde{l}_1 > l_1$, oziroma če uvrstimo
majhno sferično odboja \Rightarrow

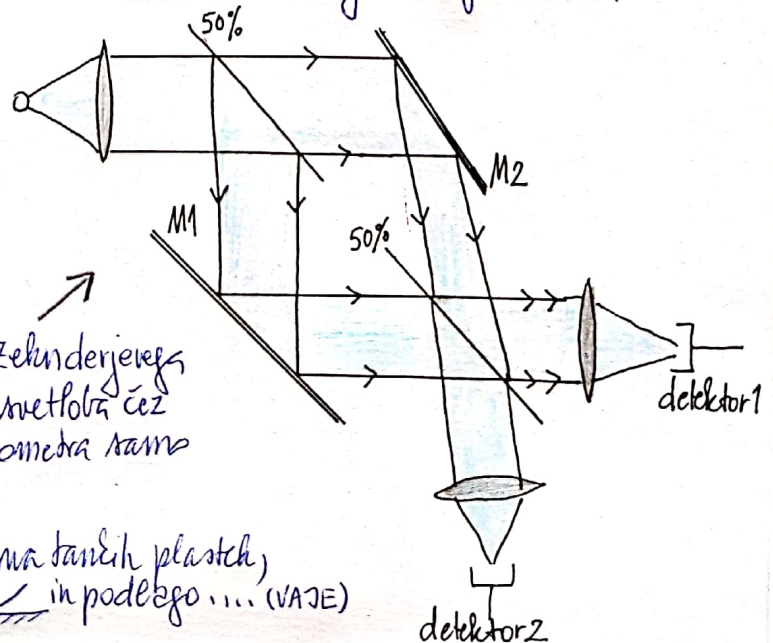


Todaki izvor svetlobe S lahko pred vpadom na polnepustno zrcalo, eliminiramo z lečo. Na ta način izvedemo Twyman-Greenov in Mach-Zehnderjev interferometer.

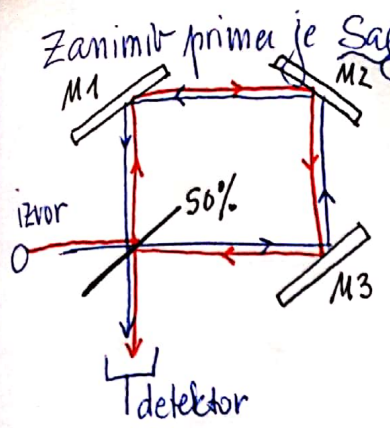


Uporaben
za testiranje
homogenosti in ravnosti
prozornih
objektov...

Prednost Mach-Zehnderjevega
sistema je, da gre svetloba čez
vratno ujo interferometra samo
enkrat.



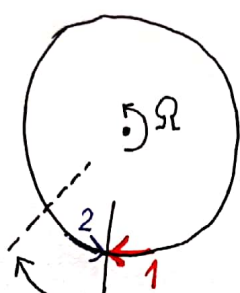
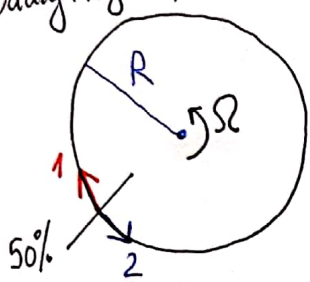
Interferenco z delitvijo amplitude dobimo tudi na tankih plasteh,
primarnemu Newtonovi klobazji med lečo in podlago ... (VAJE)



Zanimiv primer je Sagnacov interferometer, ki se uporablja za losenje giroskope. En del svetlobe potuje v smeri urinega kazalca, drugi del pa v nasprotni smeri. Če interferometer miruje, med njima dobimo konstruktivno interferenco. Če se interferometer vrti v ravnini žarkov, pa se pojavi fazni zamik in z njim zmanjšanje signala na detektorju.

Za lažje razumevanje si predstavljamo, da imamo zelo velike zrcal, tako da je pot svetlobe kar krožna.

oddaja signala



detekcijski signal

svetloba vstopi v interferometer in se razdeli na del, ki potuje v smeri urinega (modra) in del, ki potuje v nasprotni smeri urinega (rdeča)

pot iste svetlobe, ki potuje v nasprotni smeri urinega je krajša, kot pot svetlobe, ki potuje v smeri urinega

Izvor svetlobe in detektor se vrtila skupaj z interferometrom. Celotna naprava je denimo nameščena na vrtečiji mizi. Izvor in detektor se ne premikata eden glede na drugega

Čas, ki ga žarec 1 potrebuje, da pride od izvora do detektorja

$$\Delta t_1 = \frac{2\pi R - \Delta L}{c_0}$$

$$\Delta L = \Omega \cdot R \cdot \Delta t_1 = R \cdot \Delta \varphi$$

$$\Delta t_1 c_0 = 2\pi R - \Omega R \cdot \Delta t_1$$

$$\Rightarrow \Delta t_1 = \frac{2\pi R}{c_0 + \Omega R}$$

Čas, ki ga žarec 2 potrebuje, da pride od izvora do detektorja pa je podobno:

$$\Delta t_2 = \frac{2\pi R + \Delta L}{c_0}, \Delta L = \Omega R \cdot \Delta t_2$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = \frac{2\pi R}{c_0 - \Omega R} > \Delta t_1$$

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t_2 - \Delta t_1$$

Med obema signaloma nastane fazni zamik

$$\Delta \phi = \omega \cdot (\Delta t_1 + \Delta t_2) = \omega (\Delta t_2 - \Delta t_1) = \omega \left(\frac{2\pi R}{c_0 - \Omega R} - \frac{2\pi R}{c_0 + \Omega R} \right)$$

$$= \omega \cdot 2\pi R \cdot \frac{2\Omega R}{(c_0 - \Omega R)(c_0 + \Omega R)}$$

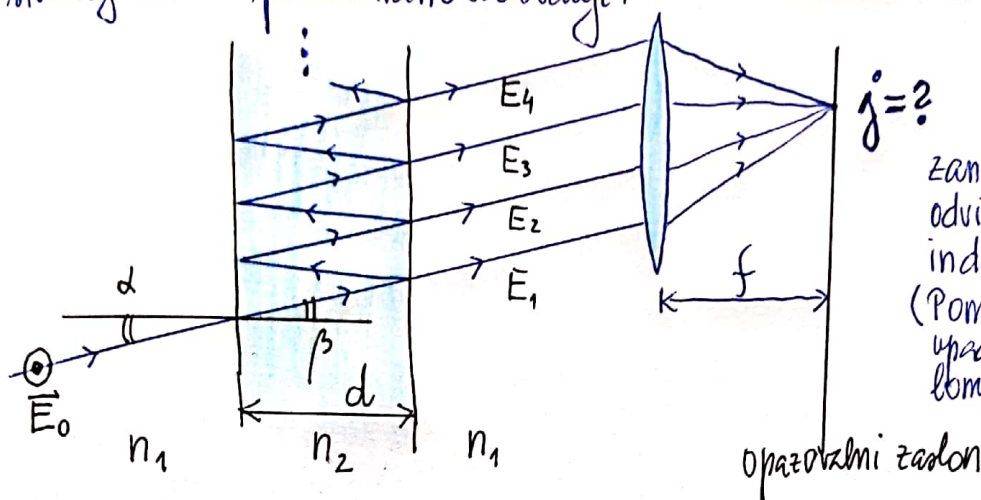
$$\boxed{\Delta \phi = \frac{4\pi R^2 \omega \Omega}{c_0^2 - \Omega^2 R^2} \approx \frac{4\omega \Omega \cdot A}{c_0^2}}$$

$A = \pi R^2$
površina interferometra
Rezultat velja tudi za druge oblike!

Efektivno površino interferometra A lahko močno povečamo, če namestimo veliko krožnih obročev, kar dosežemo z uporabo optičnega vlakna, ki ga navijemo v veliko število ovojev. Tvorimo naprave, ki uporabne za dolgotrajno zaznavanje v najnovejših napravah ($\Delta \phi = \int \Omega dt$) in danes nadomeščajo mehanske girokope v brezpilotskih letalcih... (Fiber-optic gyroscope). Njihova glavna prednost je kompaktnost, majhnost (ni pomiknih mehanskih delov) in robustnost.

Primer: vidna svetloba, $\omega = 2\pi \frac{c_0}{\lambda}$, $\lambda = 5 \cdot 10^{-7} \text{ m} \Rightarrow \omega = 2\pi \cdot 3 \cdot 10^8 / 5 \cdot 10^{-7} \text{ Hz} \approx 4 \cdot 10^{15} \text{ Hz}$
Vzemimo, da ima girokopa efektivno površino $A = 10^{-3} \text{ m}^2$
$$\Delta \phi = \frac{16 \cdot 10^{15} \cdot 10^{-3} \cdot \Omega}{9 \cdot 10^{16} \text{ mm}^2} \cdot \Omega = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \Omega$$

Ravno valovanje upada na plast snovi z lomnim količnikom n_2 , ki jo loči in delno obdaja snov z lomnim količnikom n_1 . Na mejah prilepi do odbite in prepustitve svetlobe v skladu s Fresnelovimi enačbami. Analizirali bomo situacijo za TE polarizirano valovanje.



Zanimna nas je odvisnost od n_1, n_2 in debeline plasti d . (Pomembu je tudi upadni kot α oz. lomni kot β .)

Za amplitudno odbojnost in prepustnost za TE valovanje velja:

na prvi meji 1→2
$$r_{12} = \frac{n_1 \cos \alpha - n_2 \cos \beta}{n_1 \cos \alpha + n_2 \cos \beta} ; t_{12} = 1 + r_{12}$$

na drugi meji 2→1
$$r_{21} = \frac{n_2 \cos \beta - n_1 \cos \alpha}{n_2 \cos \beta + n_1 \cos \alpha} ; t_{21} = 1 + r_{21}$$

vidimo, da velja $r_{21} = -r_{12}$

Na desni strani, za plastjo moramo rešiti polja različnih prispevkov: direktni, ki se prepusti iz 1→2 in nato iz 2→1, direktni, ki se prepusti na meji 12, nato odbije na meji 21 in potem še enkrat odbije na meji 21 in šele nato prepusti čez mejo 21 ...

$$E_1 = t_{21} (t_{12} E_0) = t_{21} t_{12} E_0$$

$$E_2 = t_{21} (r_{21} \cdot r_{21} e^{i\phi}) t_{12} \cdot E_0$$

$$E_3 = t_{21} (r_{21} \cdot r_{21} e^{i\phi} r_{21} r_{21} e^{i\phi}) E_0$$

$$E_N = t_{21} (r_{21}^2)^N e^{iN\phi} \cdot t_{12} \cdot E_0$$

Celotno izhodno polje torej lahko zapišemo kot

$$E_T = E_1 + E_2 + E_3 + E_4 + \dots$$

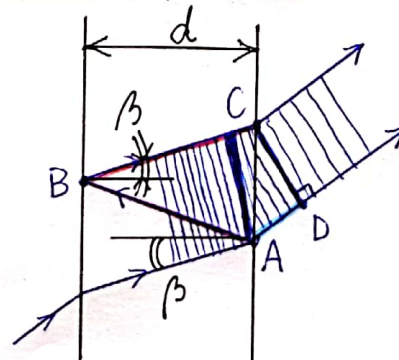
$$= E_0 t_{21} t_{12} [1 + r_{21}^2 e^{i\phi} + (r_{21}^2)^2 e^{i2\phi} + (r_{21}^2)^3 e^{i3\phi} + \dots]$$

dobimo neskončno geometrijsko vrsto oblike

$$y = a(1 + x + x^2 + x^3 + \dots) = \frac{a}{1-x}$$

Valovanje E_2 , poleg tega, da se dvakrat odbije znotraj plasti, doživi še dodatni fazi zamik

$$\phi = k_0 \cdot 2 \cdot d \cdot \cos \beta \cdot n_2$$



$$\phi = (\overline{ABC} - \overline{AD}) / k_0 \cdot n_2 = \Delta L \cdot k_0 \cdot n_2$$

$$\Delta L = 2d \cos \beta \leftarrow \text{(izpeljava na vajah.)}$$

Dobimo torej

$$E_T = \frac{E_0 t_{21} t_{12}}{1 - (r_{21})^2 e^{i\phi}} = t$$

Tovrstno izhodno polje je posledica interferenčne aktivnosti delnih valovov.

(39)

Zanimas, kakšna je gostota prepuščenega energijskega toka glede na vpadno. Ker je snov na levi in desni od plasti enaka, in kot nujno sledi $\Rightarrow T = \frac{j_t}{j_0} = |t|^2$

$$T = \frac{j_t}{j_0} = \frac{(t_{21} t_{12})(t_{21} t_{12})^*}{(1 - (r_{21})^2 e^{i\phi})(1 - (r_{21})^2 e^{-i\phi})}$$

za dielektrik:

$$T = \frac{t_{21}^2 t_{12}^2}{(1 - r_{21}^2 e^{i\phi})(1 - r_{21}^2 e^{-i\phi})}$$

če je plast iz dielektričnega materiala, sta izraza za r_{12}, r_{21} ter t_{12}, t_{21} realna.
 $\Rightarrow r_{12}^* = r_{12}, t_{12}^* = t_{12}, \dots$

uporabimo še $t_{21} = 1 + r_{21} = 1 - r_{12}, t_{12} = 1 + r_{12} = 1 - r_{21}, r_{12}^2 = r_{21}^2 = R$

reflektivnost na meji

$$T = \frac{(1 - r_{12})^2 (1 + r_{12})^2}{1 + (r_{21}^2)^2 - r_{21}^2 (e^{i\phi} + e^{-i\phi})}$$

$$T = \frac{(1 - R)^2}{1 + (R^2)^2 - 2R^2 \cos \phi} = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R \cos \phi}$$

$$T = \frac{(1 - R)^2}{1 + R^2 - 2R(1 - 2\sin^2(\phi/2))}$$

uporabimo $\cos \phi = 1 - 2\sin^2(\phi/2)$
 (glej stran 34 zgoraj desno)

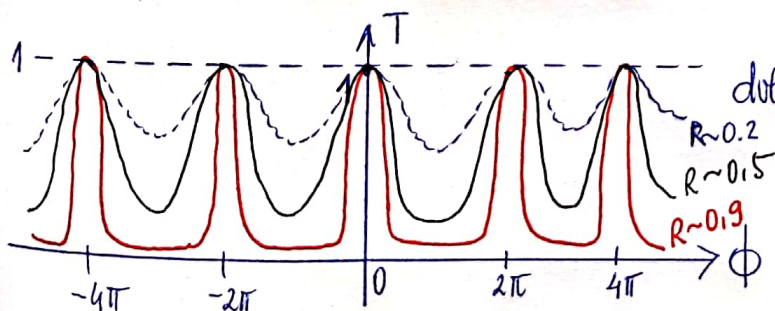
$$T = \frac{(1 - R)^2}{(1 - R)^2 + 4R \sin^2(\phi/2)}$$

delimo v števcu in imenovalcu z $(1 - R)^2$

$$T = \frac{1}{1 + \left(\frac{4R}{(1 - R)^2}\right) \sin^2(\phi/2)}$$

$$= \frac{1}{1 + F \sin^2(\phi/2)}$$

Airyeva funkcija



↑ koeficient finese
 določa kontrast funkcije $T(\phi)$

$$F = \frac{4R}{(1 - R)^2}$$

Tanka plast deluje kot frekvenčni filter. Pri filmu debelini d dobro prepušča ($T=1$!!!) tiste frekvence, za katere velja

$$\phi = M \cdot 2\pi, M = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow T=1$$

$$\phi = 2 \cdot k_0 \cdot n_2 \cdot d \cdot \cos \beta = M \cdot 2\pi$$

$$2 \cdot \frac{2\pi}{\lambda_0} \cdot n_2 \cdot d \cdot \cos \beta = M \cdot 2\pi, \quad \frac{\lambda_0}{n_2} = \lambda_2$$

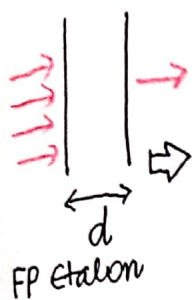
$$\Delta L = 2 \cdot d \cdot \cos \beta = M \cdot \lambda_2$$

$$\underline{\underline{\Delta L = M \cdot \lambda_2}}$$

valovna
 dolžina
 v plati

Talrat je izpolnjevan konstruktivna interferenca za prepuščeno svetlobo in se nič svetlobe ne odbije. ($R=1-T=0$). Osebitu odboja!

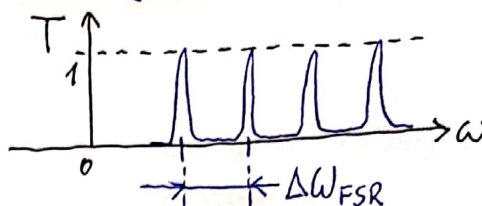
Napravo, v kateri lahko spreminjamo širino d in s tem reguliramo valovno dolžino, ki jo sistem 100% prepušča, rečemo **Fabry-Perot interferometer** oz. Fabry-Perotov spektrometer. Uporabljamo ga za spektralno analizo = spektroskopijo (na primer v astronomiji). Lahko pa z njim tudi pretvamo svetlobo in zožimo njun spekter (denimo v laserskih resonatorjih - v tem primeru napravi rečemo tudi Fabry-Perotov etalon).



$$\phi = 2 \cdot k_0 \cdot n_2 \cdot d \cdot \cos \beta$$

$$\phi = 2 \cdot \frac{\omega}{c_0} n_2 \cdot d \cdot \cos \beta$$

$$T = T(\omega)$$



Območje spektra ki ga lahko analiziramo, se razteza od enega do sorodnjega maksimuma in ga imenujemo **prostorsko spektralno območje** (FSR).

$$\Delta \phi = 2\pi = \Delta \omega_{FSR} \left(\frac{2}{c_0} n_2 \cdot d \cdot \cos \beta \right) \quad \text{če vzamemo } \beta = 0!$$

$$\Rightarrow \Delta \omega_{FSR} = \frac{\pi c_0}{n_2 d} \Rightarrow \Delta \nu_{FSR} = \frac{c_0}{2 \cdot n_2 \cdot d}$$

Po navadi nas zanima spektralno območje na dani valovni dolžini $\lambda = \frac{c_0}{\nu}$

$$\Delta \lambda_{FSR} = -\frac{c_0}{\nu^2} \Delta \nu_{FSR} = -\left(\frac{c_0}{\nu}\right)^2 \frac{\Delta \nu_{FSR}}{c_0} = -\lambda^2 \frac{\Delta \nu_{FSR}}{c_0}$$

↑
valovna dolžina v vakuumu

$$|\Delta \lambda_{FSR}| = \frac{\lambda^2}{2 n_2 d}$$

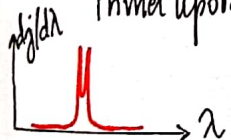
Primer: $d = 0.1 \text{ mm}$, $n_2 = 0$ (dve zrcalni plošči, vmes je zrak, s piezoelektričnim mehanizmom reguliramo d)

$$\Delta \nu_{FSR} = \frac{3 \cdot 10^8}{2 \cdot 10^{-4}} \text{ Hz} \approx 10^{12} \text{ Hz} = 1 \text{ THz}$$

$$\text{Na območju vidne svetlobe to pomeni: } \Delta \lambda_{FSR} = \frac{(5 \cdot 10^{-7} \text{ m})^2}{2 \cdot 10^{-4} \text{ m}} = \frac{25 \cdot 10^{-14}}{2 \cdot 10^{-4}} \approx 10^{-9} \text{ m} = 1 \text{ nm}$$

To pomeni, da lahko analiziramo spektralne podatnosti znotraj območja 1 nm širinega dela spektra!

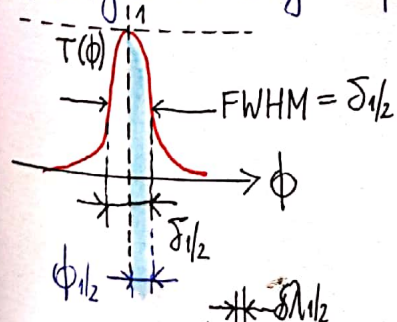
Primer uporabe: H_α dublet - ena od prvih eksperimentalnih evidenc elektronskega spina.



Balmerjeva serija - H_α ustreza prehodu vodika $n=3 \rightarrow n=2$ (656.28 nm)
Zaradi interakcije med spinom elektrona S in orbitalno vrteno količino L ($W \propto \vec{S} \cdot \vec{L} \propto \vec{u}_S \cdot \vec{u}_L$)
pa je navedena črta razcepljena na dve v razmiku $\Delta \lambda = 0.016 \text{ nm}$ ($\Delta \nu = 10 \text{ GHz}$)

Ekspiriment naredimo tako, da z nekim drugim svetlom izberemo iz spektra to svetlobo v okolici črte H_α . Potem pa to svetlobo še nadalje analiziramo s FP spektrometrom.

Druge pomembne stvari pri tovrstni spektroskopiji pa je še "ostrina" transmissijskih maksimumov. Le ta namreč določa, koliko merstkih "kanalov" imamo na voljo znotraj intervala $\Delta \nu_{FSR}$. Se pravi da definira resolucijo FP spektrometra. Zanima nas spektralni območje, na katerem vrednost T iz $T=1$ pade na vrednost $T=1/2$. (FWHM)

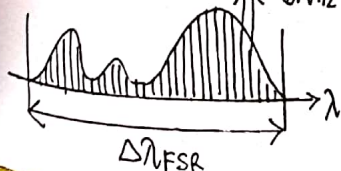


$$T = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow F \cdot \sin^2 \left(\frac{\phi}{2} \right) \approx F \cdot \left(\frac{\phi}{2} \right)^2 = 1 \quad \left[F = \frac{4R}{(1-R)^2} \right]$$

$$\left(\frac{\phi}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{F}} = \sqrt{\frac{(1-R)^2}{4R}} = \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}} \Rightarrow \phi_{1/2} = \frac{(1-R)}{\sqrt{R}} \Rightarrow \Delta \phi_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}}$$

$$\phi = k_0 \cdot d \cdot n_2 \cdot 2 = \frac{2\omega}{c_0} d \cdot n_2 \quad \left[= \frac{2 \cdot 2\pi \nu}{c_0} \cdot d \cdot n_2 \right]$$

$$\Rightarrow \Delta \phi_{1/2} = 2\phi_{1/2} = \frac{2(1-R)}{\sqrt{R}} = \frac{4\pi d n_2}{c_0} (\Delta \nu_{1/2}) \Rightarrow \Delta \nu_{1/2} = \frac{(1-R)}{2\sqrt{R}} \frac{c_0}{\pi n_2 d}$$



$$\text{Finera interferometra} \quad \left[F = \frac{\Delta \nu_{FSR}}{\Delta \nu_{1/2}} \right] = \frac{c_0 \pi n_2 d}{2 \cdot d \cdot n_2 \cdot c_0} \left[\frac{2\sqrt{R}}{(1-R)} \right] = \frac{\pi}{2} \sqrt{F}$$