ELEKTROMAGNETNO VALOVANJE V PREVODNIH SNOVEH

Zanima nas valovanje v homogeni, izotropni, neurabid prevodni snovi.

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\ ,\quad \vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}\ ,\quad \rho_e = 0\ ,\quad \vec{j}_e = \sigma\cdot\vec{E}$$

električna prevodnost

$$\left[\frac{A}{m^2}\frac{m}{V} = \frac{A/V}{m} = \frac{\Omega^{-1}}{m} = \frac{S}{m}\right]$$ Siemens (nemški elektro inženir in industrij.)

kovine: $\sigma > 10^6 S$ ($10^8 S$ grafen)
izolatorji: $\sigma < 10^{-6} S$ ($10^{-21} S$ PET)

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0(\mathrm{div}\,\vec{E}) = 0$$
$$\mathrm{div}\,\vec{B} = \mu\mu_0(\mathrm{div}\,\vec{H}) = 0$$
$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0\frac{\partial\vec{H}}{\partial t}$$

Amperov zakon pa se spremeni (glede na primer $\sigma = 0$)

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} + \sigma\cdot\vec{E}$$

Kot običajno, izvedemo operacijo rotorja na Faradayevem zakonu

$$\underbrace{\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{E})} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right) - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\mathrm{grad}\underbrace{(\mathrm{div}\,\vec{E})}_{=0} - \nabla^2\vec{E} = -\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$$

$$\boxed{\nabla^2\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} + \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}}$$

TELEGRAFSKA ENAČBA
(analogno enačbo dobimo tudi za $\vec{B}$)

Ker v enačbi poleg drugega odvoda po času nastopa tudi prvi odvod po času, pričakujemo, po analogiji z mehanskimi sistemi, da bo v snovi prišlo do dušenja valovanja oz. na razdaljo do slabljenja (atenuacije).

Iščemo rešitev v obliki $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t + i\delta}$ $\Rightarrow$

$$-k^2\vec{E} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0(-\omega^2\vec{E}) + \mu\mu_0\sigma(-i\omega)\vec{E}$$

$$k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2 + i\mu\mu_0\sigma\omega$$, drugi člen množimo z $\frac{\varepsilon\varepsilon_0\omega}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\varepsilon\mu + i\cdot\frac{\omega^2}{c_0^2}\frac{(\varepsilon\varepsilon_0)^{-1}\sigma\mu}{(\omega\varepsilon)}$$

definirali smo $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$ (valovno število v vakuumu)

$$k^2 = k_0^2\left(\varepsilon\mu + i\frac{(\varepsilon\varepsilon_0)^{-1}\sigma\mu}{\omega}\right)$$

$$k^2 = k_0^2\left(\varepsilon\mu + i\frac{\sigma\mu}{\varepsilon_0\omega}\right)$$

$$k^2 = k_0^2\mathcal{N}^2$$

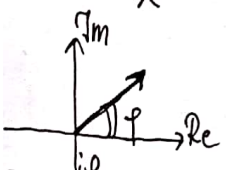
$$\boxed{k = k_0\cdot\mathcal{N}}$$

Kompleksni lomni količnik $\mathcal{N} = n' + in''$

$$\boxed{\mathcal{N}^2 = \varepsilon\mu + i\frac{\sigma\mu}{\varepsilon_0\omega} = (n' + in'')^2}$$

Sedaj nas zanimata realni in imaginarni del lomnega količnika n' in n''.

$$\mathcal{N}^2 = \underbrace{\varepsilon\mu}_{x} + i\underbrace{\frac{\sigma\mu}{\varepsilon_0\omega}}_{y} = x + iy = (n' + in'')^2$$ iščemo rešitve te enačbe (koren kompl. števila)



$z = |z|e^{i\varphi}$
$\sqrt{z} = \sqrt{|z|}\,e^{i\varphi/2}$

$$x + iy = n'^2 - n''^2 + 2in'n''$$

1) $n'^2 - n''^2 = x$ 2) $y = 2n'n''$

dobimo 2 enačbi za 2 neznanki n' in n'' v odvisnosti od x in y

iz enačbe 2) izrazimo $n'' = y/2n'$ in to vstavimo v enačbo 1)

$$n'^2 - \frac{y^2}{(2n')^2} = x$$

$n'^2 - \left(\frac{y}{2n'}\right)^2 = x \Rightarrow 4(n'^2)^2 - y^2 = 4(n')^2 \cdot x$, $n'^2 = u$ vpeljemo

$$4u^2 - y^2 = 4\cdot u\cdot x$$

$$4u^2 - 4xu - y^2 = 0$$

$x = \varepsilon\mu$

$y = \frac{\sigma\mu}{\varepsilon_0\omega}$

$$u_{1/2} = n'^2 = \frac{4x \pm \sqrt{(4x)^2 + 4\cdot 4\cdot y^2}}{2\cdot 4} = \frac{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

negativni predznak ni smiseln, ker gre za navadne materiale ($\varepsilon\mu > 0$)

$$\boxed{n'^2 = (x + \sqrt{x^2+y^2})/2}$$

to sedaj vstavimo nazaj v prvotno zvezo $n'' = \frac{y}{2n'}$, oziroma, bolj enostavno je če celoten račun ponovimo še ob upoštevanju zveze $n' = \frac{y}{2n''}$

$n'^2 - n''^2 = x \Rightarrow \left(\frac{y}{2n''}\right)^2 - n''^2 = x$, $n''^2 = w$

$$\left(\frac{y^2}{4w} - w\right) = x \Rightarrow y^2 - 4w^2 = 4wx$$

$$4w^2 + 4wx - y^2 = 0$$

$$w_{1,2} = n''^2 = \frac{-4x \pm \sqrt{(4x)^2 + 4\cdot 4y^2}}{4\cdot 2} = \frac{-x + \sqrt{x^2+y^2}}{2}$$

$$\boxed{n''^2 = (-x + \sqrt{x^2+y^2})/2}$$

SLABLJENJE

Z krajšanjem dobimo rezultat

$$n'^2 = \left(\varepsilon\mu + \sqrt{(\varepsilon\mu)^2 + \frac{\mu^2\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0^2}}\right)/2 \quad \text{in} \quad n''^2 = \left(-\varepsilon\mu + \sqrt{(\varepsilon\mu)^2 + \left(\frac{\mu\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}\right)/2$$

Pogosto nas zanimajo nemagnetne snovi in vzamemo $\mu = 1$

$$\mathcal{N}^2 = \varepsilon + i\left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right) = \varepsilon' + i\varepsilon''$$

imaginarni del dielektrične permitivnosti

realni del dielektrične permitivnosti

KOMPLEKSNA DIELEKTRIČNOST

$$n'^2 = \left(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)^2}\right)/2 \quad \text{in} \quad n''^2 = \left(\sqrt{\varepsilon^2 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)^2} - \varepsilon\right)/2$$

Če dobljeni kompleksni lomni količnik vstavimo v valovno enačbo, dobimo za $\vec{k} \parallel z$:

$$\tilde{E} = \tilde{E}_0 e^{ik_0\mathcal{N}z - i\omega t + i\delta} = \tilde{E}_0 e^{ik_0 n' z} e^{ik_0(in'')z} e^{-i\omega t} e^{i\delta}$$

$$= \tilde{E}_0 e^{ik_0 n' z - i\omega t + i\delta} \cdot e^{-k_0 n'' z}$$

ta člen opisuje slabljenje z globino in ga pišemo tudi $e^{-\kappa z}$

KOŽNI POJAV V KOVINAH

Če imamo zelo prevoden material $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} >> \varepsilon$, potem lahko izraz za slabljenje

* zapišemo kot $n'' \approx \sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} \Rightarrow \kappa = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}} = \sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\,\omega\sqrt{\sigma/2\omega\varepsilon_0} = \sqrt{\mu_0\omega\sigma/2}$

vdorna globina $d = \kappa^{-1} = (\mu_0\omega\sigma/2)^{-1/2}$, večina izmeničnega toka teče po zunanjem robu žice.

baker: $\zeta = 0.017\,\Omega mm^2/m$

$\frac{1}{\zeta} \Rightarrow \sigma = 0.7\cdot 10^8\,\frac{S}{m}$

$d = \sqrt{2\zeta/\mu_0\omega}$

$\Rightarrow$

$\nu = 50$ Hz $\Rightarrow d \sim 10$ mm

1 MHz $\Rightarrow d \sim 60\,\mu m$

10 GHz $\Rightarrow d \sim 0.6\,\mu m$

10^{16} Hz $\Rightarrow d \sim 0.6$ nm ($\lambda = 30$ nm)

za vidno svetlobo je vdorna globina v kovinah reda velikosti 1 nm !

Problem prozornih elektrod: rabimo tanko plast (< 100 nm) dokaj slabe kovine (ITO) (sončne celice....)