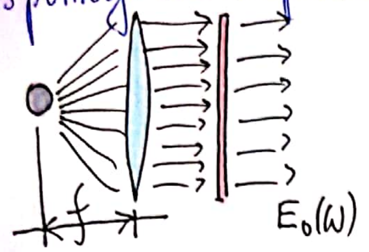
FRESNELOV UKLON

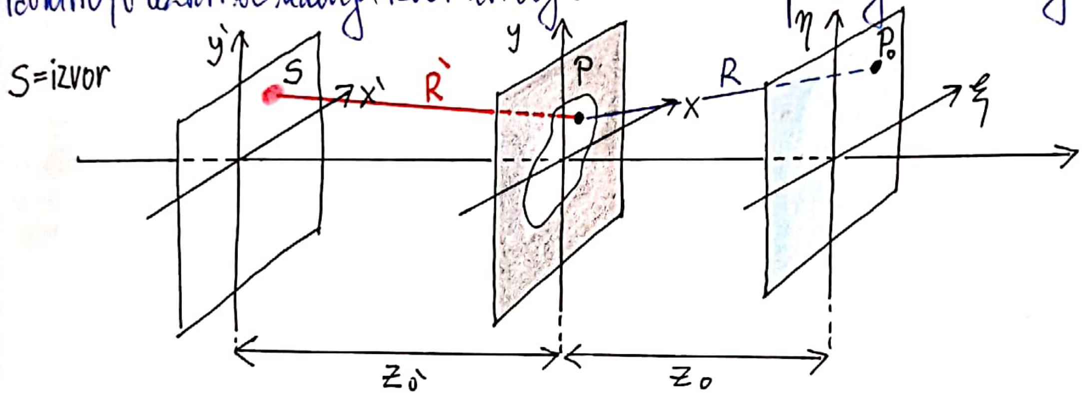
Doslej smo predpostavljali, da je opazno polje, ki pade na objektni zaslon xy povsod konstantno (E_0). To v praksi dosežemo tako, da za osvetljevanje uporabimo kolimirano lasersko svetlobo, ali pa tako, da točkasti izvor svetlobe kolimiramo s pomočjo leče (in potem še z ustreznim spektralnim filtrom ustvarimo monokromatsko val.)



Če imamo opravka s kakšnim drugačnim izvorom, ki ga uporabimo za osvetljevanje, pa je vpadno polje na objektnem zaslonu v splošnem funkcija kraja:

$$E_0 = E_0(x,y)$$

Privzemimo, da izvor svetlobe leži v ravnini x'y' in da oddaja krogelno valovanje. Med ravnino, v kateri se nahaja izvor in objektno ravnino pa naj bo razdalja z_0'.



$$E(\xi,\eta,z) = ?$$

$$E_0(x,y,0) = E_0'\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)$$

V tem primeru uklonski integral zapišemo kot:

$$\boxed{E(\xi,\eta,z) = \left(\frac{i}{\lambda}\right) E_0' \iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\left(\frac{e^{ikR'}}{R'}\right)\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) dx\,dy}$$

$f(x,y)$ = aperturna funkcija

Za smerne faktorje (Kirchhoffov uklonski integral) smo spet privzeli, da v zgornjo formulo prinesejo faktor 1 (oziroma 2). Izraza za R in R' razvijemo v Taylorjevo vrsto

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + z_0^2 \Rightarrow R = \underbrace{R_0 - \frac{\xi x}{R_0} - \frac{\eta y}{R_0}} + \boxed{\frac{x^2+y^2}{2R_0}} + \ldots$$

Pri Fraunhoferjevem uklonu smo upoštevali le prve tri člene, četrtega pa smo zanemarili. Pri Fresnelovem uklonu pa upoštevamo tudi četrti člen. Hkrati ob tem izraz za R zapišemo malo drugače.

$$R^2 = z_0^2\left(1 + \frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{z_0^2}\right)$$

$$R = z_0 + \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{z_0} + \ldots$$

Spomnimo se $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{1}{2}u - \frac{1}{8}u^2 + \frac{1}{16}u^3 - \ldots$

Členi, ki smo jih v zgornjem izrazu zanemarili, so zanemarljivi, če velja za vse vrednosti x in y, kjer je odprtina:

$$k\left(\frac{1}{8}\frac{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]^2}{z_0^3}\right) \ll 2\pi \quad , \quad k = 2\pi/\lambda \quad , \quad (x-\xi)^2+(y-\eta)^2 \leq d^2$$

dimenzija odprtine = d

$$(d^4/z_0^3) \ll 8\cdot\lambda \quad \text{oz.} \quad \boxed{(d/z_0)^4 \ll 8\cdot\frac{\lambda}{z_0}}$$

Primer: $z_0 = 1\,m$, $\lambda = 500\,nm$. Navedenemu pogoju zadostimo, ko velja $(d/z_0)^4 \gg 8(5\cdot10^{-7}m/1m) = 4\cdot10^{-6}$

Kar pomeni $d \ll z_0\sqrt[4]{4\cdot10^{-6}} \cong 1m(0.04) = 4\,mm$. Navedene vrednosti ustrezajo Fresnelovemu številu

$$F = \frac{d^2}{z_0\lambda} \ll \frac{16\cdot10^{-6}}{1\cdot5\cdot10^{-7}} \leq 30$$

(Pri Fraunhoferjevem uklonu $F \ll 1$)

Imeli smo $R \approx z_0 + \frac{1}{2}\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{z_0}$. Podobno zapišemo $R' \approx z_0' + \frac{1}{2}\frac{(x-x')^2+(y-y')^2}{z_0'}$

Oba izraza nato vstavimo v uklonsko formulo in dobimo:

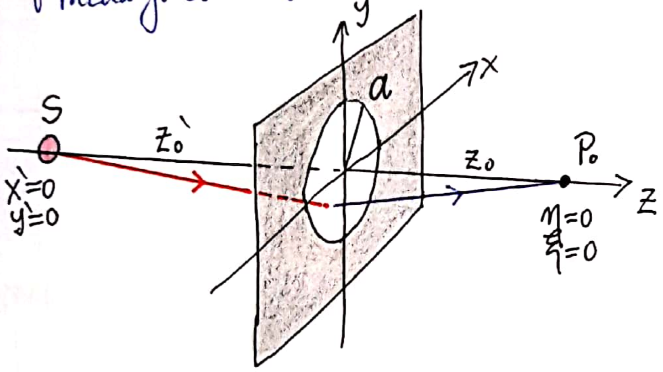
$$\boxed{E(\xi,\eta,z) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{E_0' e^{ikz_0'} e^{ikz_0}}{z_0' z_0}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{(ik/2z_0')[(x-x')^2+(y-y')^2]}\, e^{(ik/z_0 2)[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2]}\, dx\,dy}$$

člene v imenovalcu smo ponovno aproksimirali kar z z_0' oz. z_0.

Zgornji izraz je za (analitično) računanje precej težji, kot Fraunhoferjev uklon. Zato bomo obravnavali le dva primera: Fresnelove conske plošče in uklon na pravokotni reži oz. ostrem robu.

FRESNELOVA CONSKA PLOŠČA

V objektni ravnini imamo okroglo režo s polmerom a. Os z poteka čez sredino reže. Točkasti izvor svetlobe je na osi z v razdalji z_0' pred režo. Zanima nas intenziteta svetlobe na osi z v razdalji z_0 za režo.



$$E(P_0) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{E_0' e^{ik(z_0'+z_0)}}{z_0' z_0}\iint f(x,y)\, e^{\frac{ik}{2z_0'}(x^2+y^2)}\, e^{\frac{ik}{2z_0}(x^2+y^2)}\, dx\,dy$$

$dx\,dy = 2\pi\rho\, d\rho$, $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \rho < a \\ 0 & \rho > a \end{cases}$, $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$

$$E(P_0) = \left(\frac{2\pi i}{\lambda}\right)\frac{E_0' e^{ik(z_0'+z_0)}}{z_0' z_0}\int_0^a e^{\frac{ik\rho^2}{2}\left(\frac{1}{z_0'}+\frac{1}{z_0}\right)}\rho\, d\rho$$

vpeljemo $\frac{1}{L} = \frac{1}{z_0'} + \frac{1}{z_0}$

Dobimo integral

$\int_0^a e^{\frac{ik\rho^2}{2L}}\rho\, d\rho$, vpeljemo $u = ik\rho^2/2L \Rightarrow du = ik\rho\, d\rho/L$ oz. $\rho\, d\rho = (L\, du)/ik$

$$= \frac{L}{ik}\int_0^{\frac{ika^2}{2L}} e^u du = \frac{L}{ik}\left[e^{\frac{ika^2}{2L}} - 1\right] = \frac{L}{ik} e^{\frac{ika^2}{4L}}\left[e^{\frac{ika^2}{4L}} - e^{-\frac{ika^2}{4L}}\right] = \frac{2iL}{ik} e^{\frac{ika^2}{4L}} \sin\left(\frac{ka^2}{4L}\right) = \frac{L\lambda}{\pi} e^{\frac{ika^2}{4L}} \sin\left(\frac{ka^2}{4L}\right)$$

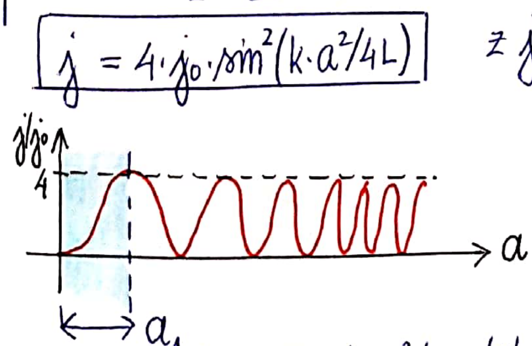
Od tod sledi izraz za polje $\mathbf{E(P_0)} = \left[2iLE_0' e^{ik(z_0'+z_0+a^2/4L)} \sin\left(\frac{ka^2}{4L}\right)\right]\frac{1}{z_0 z_0'}$

Za gostoto energijskega toka j potem dobimo

$$j \propto |E(P_0)|^2 = (4 L^2 E_0'^2)[\sin^2(\frac{ka^2}{4L})]/z_0^2 z_0'^2 = \frac{4L^2 E_0'^2}{L^2(z_0'+z_0)^2}\sin^2\left(\frac{ka^2}{4L}\right)$$

Če upoštevamo še $\frac{1}{L} = \frac{1}{z_0} + \frac{1}{z_0'}$ oz. $z_0 z_0' = z_0' L + z_0 L = L(z_0'+z_0) \Rightarrow (z_0 z_0')^2 = L^2(z_0'+z_0)^2$

$\boxed{j = 4 \cdot j_0 \cdot \sin^2(k \cdot a^2/4L)}$ z j_0 smo označili izraz $\frac{E_0'^2}{(z_0'+z_0)^2}$ → to predstavlja gostoto energijskega toka, ki bi jo v točki P_0 ustvarjal izvor S, če ne bi bilo reže.

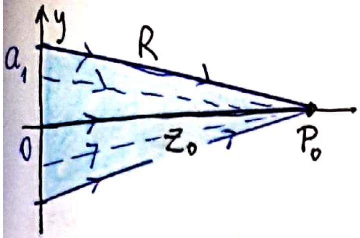


v maksimumih dobimo v točki P_0 štirikrat večjo intenziteto, kot pri direktnem osvetljevanju!

prva Fresnelova cona. $ka_1^2/4L = (\pi/2)$, $\frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a_1^2}{4L} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{a_1 = \sqrt{\lambda \cdot L}}$ POLMER PRVE FRESNELOVE CONE

Prva Fresnelova cona svetlobo vedno zbira. Deluje torej kot zbiralna leča. To izkoriščamo pri t.i. kameri na luknjico (camera obscura). Sekundarni sferični valovi, ki izvirajo iz območja znotraj prve Fresnelove cone, med seboj konstruktivno interferirajo. To pomeni da je njihov relativni fazni zamik manjši od π.

Račun naredimo za $z_0' = \infty \Rightarrow L = z_0$ in $a_1^2 = \lambda \cdot z_0$



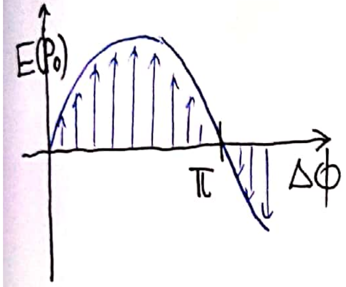
$$R^2 = z_0^2 + a_1^2 = z_0^2 + \lambda \cdot z_0$$

Fazni zamik za žarek oz valovanje, ki izvira iz roba cone je

$$\phi_1 = k \cdot R = k\sqrt{z_0^2 + \lambda z_0}$$

Fazni zamik za valovanje, ki izvira iz sredine cone pa je

$$\phi_0 = k \cdot z_0$$



Veljati mora:

$$\Delta\phi = \phi_1 - \phi_0 = \pi \quad , \text{ potem bo veljalo } (\phi - \phi_0) < \pi \ \forall \rho < a_1$$

$$k(R - z_0) = \pi$$

$$(R - z_0) = \frac{\pi\lambda}{2\pi} = \frac{\lambda}{2}$$ zakasnitev za manj kot pol valovne dolžine

$$a = a_1 \Rightarrow R = \sqrt{z_0^2 + \lambda z_0}$$

$$R - z_0 = \sqrt{z_0^2 + \lambda z_0} - z_0 = z_0\sqrt{(1 + \lambda/z_0)} - z_0$$

$$= \cancel{z_0} + \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{8}\frac{\lambda^2}{z_0} + \frac{1}{16}\frac{\lambda^3}{z_0^2} \dots - \cancel{z_0}$$

$$\approx \frac{1}{2}\lambda \checkmark$$

Če širino reže povečujemo na območje $a > a_1$, se pojavi destruktivna interferenca (polje v protifazi) med sekundarnimi valovi, ki izvirajo iz centralnega dela in tistimi iz robnih delov. Zato začne gostota svetlobnega toka j pojemati. To se dogaja na območju t.i. druge Fresnelove cone, ki se razteza

pri minimumu $j(a)$

$$\frac{k a_2^2}{4 \cdot L} = 2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

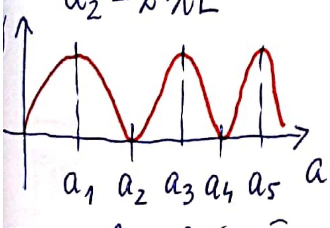
$$\frac{2\pi}{\lambda}\frac{a_2^2}{4 \cdot L} = \frac{2\pi}{2} = 2 \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$a_2^2 = 2 \cdot \lambda L$$

$$a_1 = \sqrt{\lambda L} < a < \sqrt{2\lambda L} = a_2$$ druga Fresnelova cona

$$\boxed{a_{N-1} = \sqrt{(N-1)\lambda L} < a < \sqrt{N\lambda \cdot L}}$$ N-ta Fresnelova cona

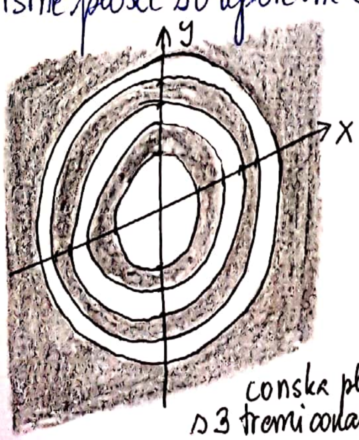
$N = 1, 2, 3, 4, \dots$



Na območju od $a_2 = \sqrt{2\lambda L}$ do $a_3 = \sqrt{3\lambda L}$ vrednost j spet raste. Nato na območju $a_3 = \sqrt{3\lambda L} < a < \sqrt{4\lambda L} = a_4$ spet pojema, ...

Fresnelova leča: Če odstranimo v ravnini xy le liste dele oz. kolobarje oz. cone, ki so ali lihe ali pa samo sode, dobimo le konstruktivno interferenco. Taka naprava (conska plošča) potem zbira svetlobo na podoben način, kot klasična leča. Gostota svetlobnega toka v točki P_0 je pri uporabi conske plošče dosti večja, kot bi bila, če bi izvor S točko P_0 direktno osvetljeval. Površne plošče so uporabne za fokusiranje, kadar nimamo možnosti izdelave leč (žarki X, ...)

Glavna slabost je njihova kromatična aberacija $f_L = f_L(\lambda)$



conska plošča
s 3 tremi conami $N = 1, 3, 5$

$$\frac{1}{z_0'} + \frac{1}{z_0} = \frac{1}{f_L} = \frac{1}{L} \quad , \quad L = (a_1^2/\lambda)$$

$$z_0' \to \infty \quad \boxed{f_L = a_1^2/\lambda}$$, goriščna razdalja pri dani vrednosti a_1.

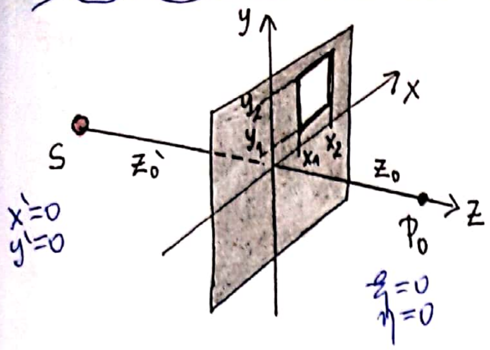
$$a_{N+1}^2 - a_N^2 = \lambda(N+1)L - \lambda N \cdot L = \lambda \cdot L \quad , \quad N \to \infty$$

za velike vrednosti a lahko to zapišemo: $a_{N+1}^2 - a_N^2 = \underbrace{(a_{N+1} + a_N)}_{2\bar{a}}\underbrace{(a_{N+1} - a_N)}_{\Delta a}$

$$\Rightarrow 2\bar{a}\Delta a = \lambda \cdot L = a_1^2$$

$$\Rightarrow f_L = \frac{a_1^2}{\lambda} = \frac{2\bar{a}\Delta a}{\lambda}$$ goriščna razdalja conske leče z velikim številom plošč.

FRESNELOV UKLON NA ROBU IN NA PRAVOKOTNI REŽI



Os z izberemo tako, da točkasti izvor svetlobe S in opazovalna točka P_0 ležita na njej. Pravokotna reža pa se razprostira na območju $x_1<x<x_2$ in $y_1<y<y_2$.

Podobno, kot pri Fresnelovih conah, dobimo

$$E(P_0)=\left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{E_0' e^{ikz_0'} e^{ikz_0}}{z_0' z_0}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{\frac{ik(x^2+y^2)}{2}\left(\frac{1}{z_0'}+\frac{1}{z_0}\right)}\,dx\,dy$$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & x_1<x<x_2,\ y_1<y<y_2\\ 0, & \text{sicer}\end{cases}$$

$$E(P_0)\propto\int_{x_1}^{x_2} e^{\frac{ikx^2}{2L}}dx\int_{y_1}^{y_2}e^{\frac{iky^2}{2L}}dy\ ,\qquad \frac{1}{L}=\frac{1}{z_0'}+\frac{1}{z_0}$$

vpeljemo novi spremenljivki: $u=\sqrt{\frac{k}{\pi L}}\,x$, $v=\sqrt{\frac{k}{\pi L}}\cdot y \Rightarrow$

$$E(P_0)\propto\int_{u_1}^{u_2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)u^2}du\int_{v_1}^{v_2}e^{i\left(\frac{\pi}{2}\right)v^2}dv$$

Ta integrala izrazimo s t. i. Fresnelovimi integrali $S(x)$ in $C(x)$.

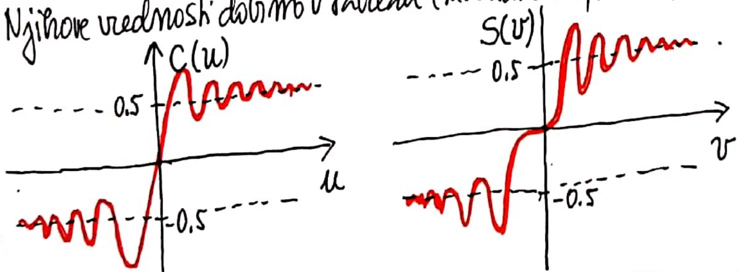
Fresnelovi integrali

$$\left.\begin{aligned}C(u)&=\int_0^u\cos\left(\tfrac{1}{2}\pi x^2\right)dx\\ S(v)&=\int_0^v\sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x^2\right)dx\end{aligned}\right\}$$ to sta dve transcendentni funkciji

$$\Rightarrow\int_0^u e^{i\frac{\pi}{2}x^2}dx=C(u)+iS(u)=\left(\frac{1+i}{2}\right)\mathrm{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}(1-i)}{2}u\right)$$

$$\mathrm{erf}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-x^2}dx$$

Njihove vrednosti dobimo v tabelah (Mathematica, Matlab, ...)

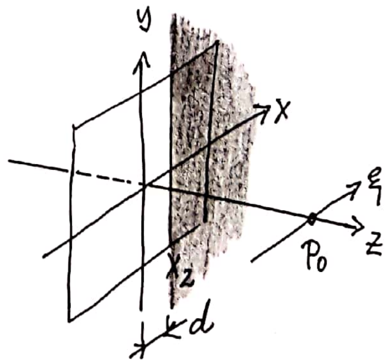


Tipične vrednosti:
$C(-\infty)=-\frac{1}{2}$, $C(0)=0$, $C(\infty)=1/2$
$S(-\infty)=-1/2$, $S(0)=0$, $C(\infty)=1/2$

Obe funkciji $C(u)$ in $S(v)$ sta lihi!

Fresnelovo uklonsko sliko torej lahko zapišemo kot

$$E(P_0)\propto\Big[C(u)+iS(u)\Big]\Big|_{u_1}^{u_2}\cdot\Big[C(v)+iS(v)\Big]\Big|_{v_1}^{v_2}$$

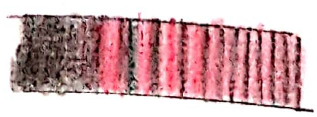


Na osnovi rezultata lahko obravnavamo tudi uklon na ravnem robu.
To ustreza 1D primeru $x_1=-\infty\Rightarrow u_1=-\infty$ in $x_2=d\Rightarrow u_2=\sqrt{\frac{k}{\pi L}}\,d$

$$E(P_0)\propto\left[C(u_2)+iS(u_2)+\tfrac{1}{2}+i\tfrac{1}{2}\right]$$

$$j(P_0)\propto|E(P_0)|^2\propto\left(\sqrt{\left[C(u_2)+\tfrac{1}{2}\right]^2+\left[S(u_2)+\tfrac{1}{2}\right]^2}\right)^2=\left(C(u_2)+\tfrac{1}{2}\right)^2+\left(S(u_2)+\tfrac{1}{2}\right)^2$$

Zanima nas odvisnost $j(d)$ – namesto da zaslon miruje in spreminjamo opazovalno točko P_0 vzdolž osi ξ, točko P_0 fiksiramo in si mislimo da se pomika rob v smeri osi x.

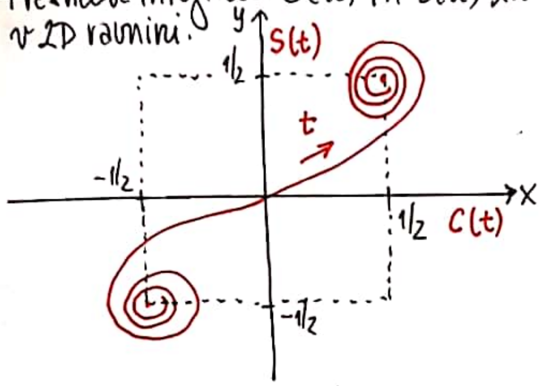


negativne vrednosti d ustrezajo situaciji, ko je točka P_0 v geometrijski senci.

! Dimenzija "odprtine" je v tem primeru v principu ∞, zato Fraunhoferjevega režima ne moremo doseči.

CORNUjeva oz. EULERJEVA SPIRALA (Clotoida)

Fresnelove integrale $C(u)$ in $S(u)$ lahko prikažemo tako, da narišemo krivuljo $(C(t), S(t))$ v 2D ravnini:



dolžina krivulje $ds = \sqrt{[C(t)]^2 + [S(t)]^2}\, dt$

$$s = \int_0^t \sqrt{C^2(t) + S^2(t)}\, dt \propto t$$

strmina krivulje glede na horizontalno os

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin(\frac{1}{2}\pi\, ^2)}{\cos(\frac{1}{2}\pi\, ^2)} = tg\left(\frac{\pi}{2}t^2\right) = tg\theta \qquad R_K = \text{krivinski r.}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}t^2, \text{ ukrivljenost } \varkappa = \frac{d\theta}{dt} = \pi \cdot t = \left(\frac{1}{\text{krivinski radij}}\right)$$

Ukrivljenost je sorazmerna z dolžino trajektorije (poti). To je pomembno pri cestnih zavojih, roller coasterjih, ...)

$t \to \infty$, $C(\infty) = S(\infty) = 1/2$

:STA: $t \to -\infty$, $C(-\infty) = S(-\infty) = -1/2$

Če vozimo po spirali s konstantno hitrostjo v, potem kotna hitrost $\omega = \frac{v}{R_K}$ = dev linearno narašča

INTERFERENCA SVETLOBE – INTERFEROMETRI

Uklon in interferenca sta pravzaprav manifestacija enega in istega pojava - superpozicije optičnega polja. Pri poglavju o uklonu so nas zanimali predvsem uklonski vzorci oz. slike. V poglavju o interferenci pa se bomo bolj posvetili aplikacijam = INTERFEROMETROM.

Polje še vedno obravnavamo kot skalarno količino (To v eksperimentih zahteva, da imajo vsa valovanja enako polarizacijo). $E = E(\vec{r}, t)$

INTERFERENČNI VZOREC DVEH RAVNIH VALOVANJ:

$$\mathbf{E_1} = E_{10}e^{i\vec{k}_1\vec{r} - i\omega t + i\delta_1}; \quad \mathbf{E_2} = E_{20}e^{i\vec{k}_2\vec{r} - i\omega t + i\delta_2}; \quad E_{10}, E_{20} \in \mathbb{R}$$

Valovanji imata enako frekvenco oz valovno dolžino. Privzamemo, da sta E_{10} in E_{20} realni števili.
Celotno optično polje je potem:

$$E = E_1 + E_2 = E_{10}e^{i\vec{k}_1\vec{r} - i\omega t + i\delta_1} + E_{20}e^{i\vec{k}_2\vec{r} - i\omega t + i\delta_2}$$

$$= E_{10}e^{i\phi_1 - i\omega t} + E_{20}e^{i\phi_2 - i\omega t}; \quad \phi_1 = \vec{k}_1\vec{r} + \delta_1; \quad \phi_2 = \vec{k}_2\vec{r} + \delta_2$$

Zanima nas gostota svetlobnega toka

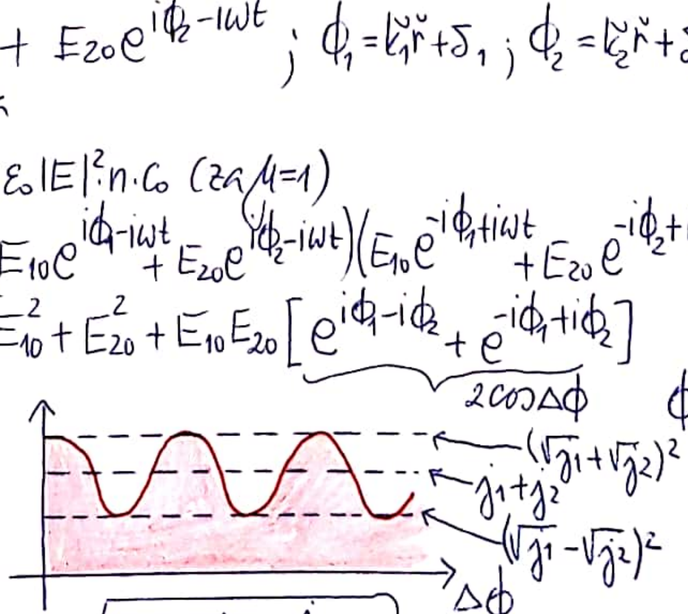
$$j = |\langle \vec{S} \rangle| = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 |E|^2 c = \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E|^2 n \cdot c_0 \quad (\text{za } \mu = 1)$$

$$j \propto (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = \left(E_{10}e^{i\phi_1 - i\omega t} + E_{20}e^{i\phi_2 - i\omega t}\right)\left(E_{10}e^{-i\phi_1 + i\omega t} + E_{20}e^{-i\phi_2 + i\omega t}\right)$$

$$= E_{10}^2 + E_{20}^2 + E_{10}E_{20}\Big[\underbrace{e^{i\phi_1 - i\phi_2} + e^{-i\phi_1 + i\phi_2}}_{2\cos\Delta\phi}\Big] \qquad \phi_1 - \phi_2 = \Delta\phi$$

$$\Rightarrow \boxed{j = j_1 + j_2 + 2\sqrt{j_1 j_2}\cos\Delta\phi}$$

to odvisnost v eksperimentih vidimo le, če se $\Delta\phi$ ne spreminja s časom. (KOHERENCA →)



Vidljivost oz. **kontrast** interferenčnega vzorca $\boxed{v = \frac{j_{MAX} - j_{MIN}}{j_{MAX} + j_{MIN}}}$ $0 < v < 1$ območje vrednosti

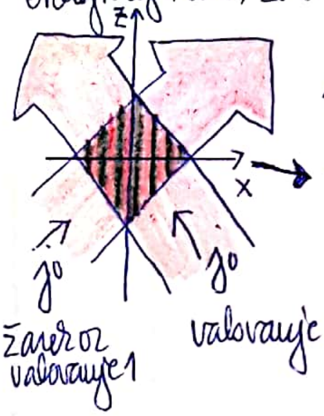
Posebni primer: $E_{10} = E_{20} = E_0 \Rightarrow j_1 = j_2 = j_0$

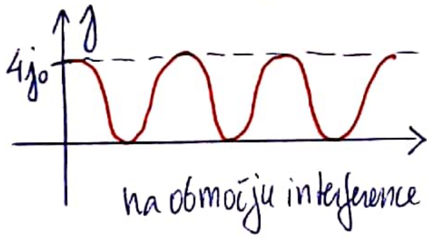
$$j = 2j_0 + 2j_0 \cos\Delta\phi$$
$$= 2j_0(1+\cos\Delta\phi)$$
$$\boxed{j = 4j_0 \cos^2(\Delta\phi/2)}$$

uporabili smo zveze

$$\cos^2(\Delta\phi/2) + \sin^2(\Delta\phi/2) = 1$$
$$\cos^2(\Delta\phi/2) - \sin^2(\Delta\phi/2) = \cos(\Delta\phi)$$
$$\Rightarrow 1 + \cos\Delta\phi = 2\cos^2(\Delta\phi/2)$$
$$1 - \cos\Delta\phi = 2\sin^2(\Delta\phi/2)$$

Kako pa je z ohranitvijo energijskega toka?
Na nekaterih mestih se j poveča, na nekaterih zmanjša. Gre za prerazporeditev. Povprečni energijski tok čez veliko območje prostora je $\langle j \rangle = \frac{1}{2}(4 \cdot j_0) = 2j_0$, kar ustreza gostoti energijskega toka začetnih dveh valovanj.





zapišimo:

$$E_1 = E_0 e^{ik_\perp x} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$$
$$E_2 = E_0 e^{-ik_\perp x} e^{ik_z z} e^{-i\omega t}$$
$$\vec{k}_1 = (k_\perp, 0, k_z), \quad k_2 = (-k_\perp, 0, k_z)$$

⇓ interferenca

$$E = E_1 + E_2 = E_0 e^{ik_z z - i\omega t}(e^{ik_\perp x} + e^{-ik_\perp x})$$
$$= E_0 e^{ik_z z - i\omega t} \, 2\cos(k_\perp x)$$

$$j \propto |E|^2 = 4 \cdot E_0^2 \cos^2(k_\perp \cdot x) \Rightarrow 4 \cdot j_0 \cos^2 k_\perp x = j$$

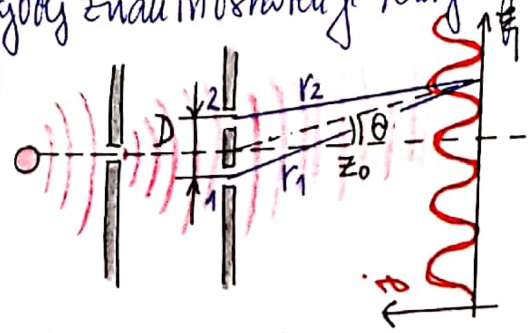
V večini interferometričnih naprav eno valovanje razdelimo na dva enaka dela. Naprave delimo v dve kategoriji:

A) Interferometri, pri katerih razdelimo valovno fronto valovanja (Youngov poskus, ...)

B) Interferometri, pri katerih razdelimo amplitudo valovanja (Michelsonov interf., ...)

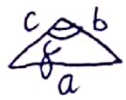
A) INTERFERENCA Z DELITVIJO VALOVNE FRONTE

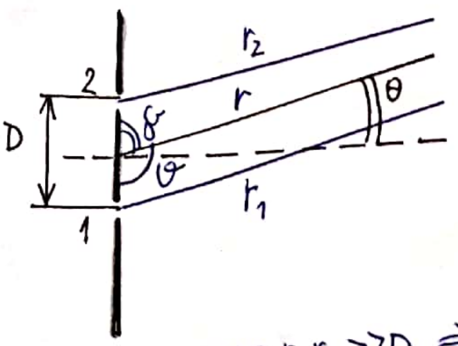
Najbolj znan in osnoven je Youngov poskus (1802, Thomas Young, GB, fizik)



Zato, da dobimo koherentno upadno valovanje, svetlobo iz monokromatskega izvora speljemo skozi ozko režo. Potem jo (simetrično) posvetimo na zaslon z dvema ozkima režama in opazujemo interferenco na oddaljenem zaslonu. (Problem je ekvivalenten Fraunhoferjevemu uklonu na dveh ozkih režah.)

$$\Delta\phi = k(r_1 - r_2) = k \cdot \Delta r$$

kosinusni izrek  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\delta$



$$r_1^2 = r^2 + (D/2)^2 - 2r(D/2)\cos\vartheta$$
$$r_2^2 = r^2 + (D/2)^2 - 2r(D/2)\cos\delta$$

$\vartheta = \pi - \delta \Rightarrow$
$\cos\vartheta = -\cos\delta$

$$r_1^2 = r^2 + (D/2)^2 + 2r(D/2)\cdot\cos\delta$$
$$r_2^2 = r^2 + (D/2)^2 - 2r(D/2)\cdot\cos\delta$$

enačbi odštejemo

$$\Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = 2 \cdot 2r \cdot (D/2)\cos\delta = 2r \cdot D \cdot \cos\delta$$
$$r_1^2 - r_2^2 = 2r \cdot D \cdot \sin\theta$$

$\delta = \frac{\pi}{2} - \theta$
$\cos\delta = \sin\theta$

za $r_1, r_2 \gg D \Rightarrow r_1^2 - r_2^2 = (r_1 - r_2)(r_1 + r_2) \approx 2r \cdot \Delta r = 2r \cdot D \cdot \sin\theta \Rightarrow \boxed{\Delta r \approx D \cdot \sin\theta}$

$$j = 4\cdot j_0\cdot\cos^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 4\cdot j_0\cdot\cos^2\left(\frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right) = 4\cdot j_0\cos^2\left(\frac{kD\cdot\sin\theta}{2}\right)$$

Maksimume intenzitete dobimo pri $\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \dots = N\cdot\pi$
(konstruktivna interferenca)

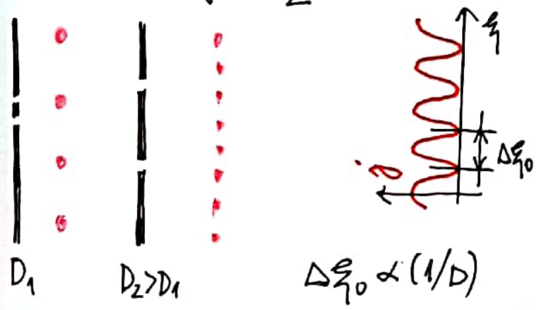
$$\Rightarrow \frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2} = k\cdot\Delta r\cdot\frac{1}{2} = N\cdot\pi$$
$$\Rightarrow \Delta r = D\cdot\sin\theta = N\left(\frac{2\pi}{k}\right) = N\cdot\lambda, \quad N=0,1,2,3\dots$$

Minimume intenzitete pa pri $\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right) = (2N+1)\frac{\pi}{2}$, $N=0,1,2,\dots$
(destruktivna interferenca)

$$\Rightarrow \frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2} = k\cdot\frac{\Delta r}{2} = (2N+1)\frac{\pi}{2}$$
$$\Rightarrow \Delta r = D\cdot\sin\theta = (2N+1)\left(\frac{2\pi}{k}\right)\cdot\frac{1}{2} = (2N+1)\cdot\frac{\lambda}{2}$$
$N=0,1,2,3\dots$

Periodični vzorec, ki se pojavi v oddaljenem polju oz. na oddaljenem zaslonu, se ponavlja s periodo $\Delta\xi_0$, ki je podana z izrazom

$$\Delta\left(\frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right) = \pi \Rightarrow k\cdot D\cdot\Delta(\sin\theta) = 2\pi,$$
$$\theta \ll 1 \Rightarrow k\cdot D\,\Delta\theta = 2\pi$$
$$k\cdot D\cdot\left(\frac{\Delta\xi_0}{z_0}\right) = 2\pi \Rightarrow \Delta\xi_0 = \left(\frac{\lambda z_0}{D}\right)$$



Bliže kot so reže (D), bolj razmaknjeni so uklonski maksimumi in obratno.

$$D = 1\,\mu m,\ z_0 = 1m \Rightarrow \Delta\xi_0 = \frac{5\cdot10^{-7}m\cdot 1m}{10^{-6}m} = 0{,}5\,m$$
$$D = 1\,mm,\ z_0 = 1m \Rightarrow \Delta\xi_0 = \frac{5\cdot10^{-7}\cdot 1m}{10^{-3}m} = 0{,}5\,mm$$

Pokažimo, da je dobljeni rezultat ekvivalenten sistemu, ki smo ga dobili pri obravnavi Fraunhoferjevega uklona. Za sistem N rež širine d v medsebojni razmiki D smo imeli:

$$j = j_0\left(\frac{\sin^2\left(\frac{N\cdot k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right)}\right)\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin\left(\frac{k\cdot d\cdot\sin\theta}{2}\right)}{\left(\frac{k\cdot d\cdot\sin\theta}{2}\right)}\right)^2}_{\approx 1}$$ glej stran 26!

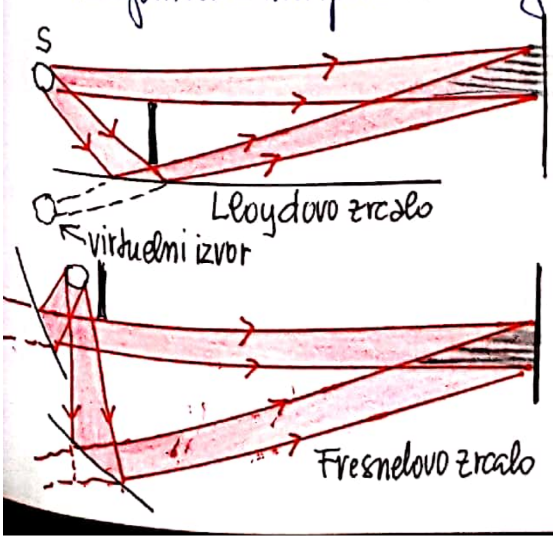
Če so reže ozke,
velja $\delta = k\cdot d\cdot\sin\theta \ll \Delta = k\cdot D\cdot\sin\theta$
Takrat ima strukturni faktor približno vrednost

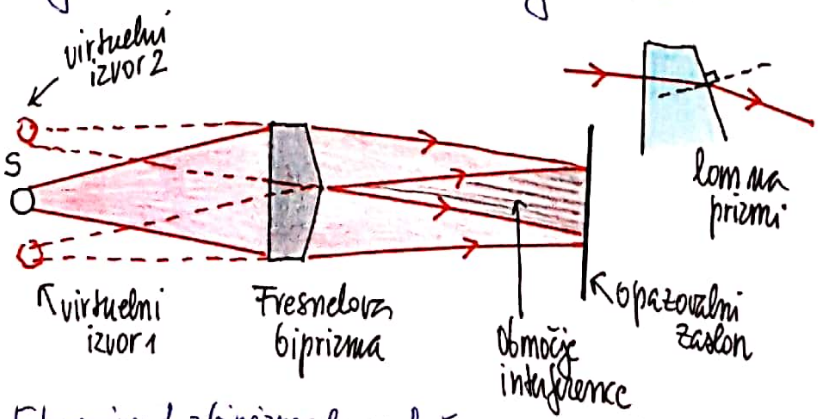
dve reži
N=2 $\Rightarrow j = j_0\cdot\frac{\sin^2(2k\cdot D\cdot\sin\theta/2)}{\sin^2(k\cdot D\sin\theta/2)} = j_0\frac{\left(2\cancel{\sin\left(\frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right)\right)^2}{\cancel{\sin^2(kD\sin\theta/2)}} = 4\cdot j_0\cdot\cos^2\left(\frac{k\cdot D\cdot\sin\theta}{2}\right)$

Dobljeni izraz je ekvivalenten sistemu zgoraj. ✓

ALTERNATIVE

Ker se pri Youngovemu eksperimentu težko izognemo podrobnostim povezanim s končno širino reže (d), so Youngovi sodobniki poskušali analogni interferenčni vzorec ustvariti tudi na druge načine.





Eksperiment z biprizmo lepo pokažemo z uporabo razširjenega laserskega snopa!