2 Razvoji v vrste

2.1 Absorpcijski koeficient odvisen od toka

Kako izgleda absorpcija, če je koeficient absorpcije odvisen od gostote toka?

$$\mu = \mu_0 + \xi j = \mu_0(1 + kj) \tag{1}$$

$$\mathrm{d}j = -\mu j \,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$$\frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}x} = -\mu_0 j - \mu_0 k j^2 \tag{3}$$

Direktna rešitev

Lahko direktno integriramo (parcialni ulomki):

$$\int_{j_0}^{j} \frac{\mathrm{d}j}{j(\mu_0 + \mu_0 k j)} = -x \tag{4}$$

$$-\mu_0 x = \int_{j_0}^{j} \frac{1}{j} - \frac{k}{1+kj} \,\mathrm{d}j = \ln\frac{j}{j_0} - \ln\frac{1+kj}{1+kj_0} \tag{5}$$

Iz tega lahko izluščimo odvisnost

$$j = j_0 \frac{e^{-\mu_0 x}}{1 + kj_0(1 - e^{-\mu_0 x})} \tag{6}$$

Razvoj v vrsto

Če je popravek k majhen, lahko razvijemo pod integralom:

$$\frac{\mathrm{d}j}{j(\mu_0 + \mu_0 k j)} \approx \frac{1}{\mu_0}\frac{\mathrm{d}j}{j}(1 - kj + \cdots) = -\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

$$-\mu_0 x = \int_{j_0}^{j} \frac{\mathrm{d}j}{j} - k\,\mathrm{d}j = \ln\frac{j}{j_0} - k(j - j_0) \tag{8}$$

Enačba za j je transcendentna, lahko pa jo obrnemo in naredimo iteracijo:

$$\ln\frac{j}{j_0} = -\mu x + k(j - j_0) \tag{9}$$

$$j^{(0)} = j_0 e^{-\mu_0 x} \tag{10}$$

$$j^{(1)} = j_0 e^{-\mu_0 x + kj_0(e^{-\mu_0 x} - 1)} \tag{11}$$

Iteracija

Alternativno lahko celotno enačbo razumemo kot iteracijo. Fizikalni ekvivalent iteracije je ta, da najprej svetloba potuje skozi "nedotaknjeno" sredstvo, v naslednji iteraciji snov spremeni svoj absorpcijski koeficient glede na trenutno gostoto toka, in potem to lahko ponovimo večkrat, če želimo. Iteracija mora po intuiciji konvergirat, če je v realni snovi pojav stabilen.

$$\frac{\mathrm{d}j}{j} = -\mu_0 \,\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$j^{(0)} = j_0 e^{-\mu_0 x} \tag{13}$$

$$\frac{\mathrm{d}j}{j} = -\mu_0(1 + kj^{(0)}(x))\,\mathrm{d}x = -\mu_0\,\mathrm{d}x - k\mu_0 j_0 e^{-\mu_0 x}\,\mathrm{d}x \tag{14}$$

$$j^{(1)} = j_0 e^{-\mu_0 x - kj_0(1-e^{-\mu_0 x})} \tag{15}$$

V obeh primerih dobimo isti rezultat. Rezultat je sicer precej grd (dvojni eksponenti), ampak kadar osnovni integral ni rešljiv, je iteracija dobrodošla alternativa. Opazimo, da tu nismo razvijali v potenčno vrsto ampak le iterirali, prav tako smo en j pustili na levi v ulomku. Iteracijo lahko delamo na različne načine, pri čemer dobimo različno zaporedje funkcij, ki pa (če je iteracija konvergentna), konvergirajo k isti funkciji.

2.2 Kodre 27/1

Taylorjev razvoj za $\tan(x)$ na tri načine.

Lihost nam pomaga, pove nam, da bodo sodi členi nič. Tukaj začnemo pazit na ostanke – o notacija vodi evidenco o redu napake, tako da vedno vemo, kako daleč moramo razvit.

Direkten razvoj

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \tag{16}$$

$$f(0) = 0 \tag{17}$$

$$f'(0) = \frac{1}{\cos^2 x}\Big|_{x=0} = 1 \tag{18}$$

$$f''(0) = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}\Big|_{x=0} = 0 \tag{19}$$

$$f'''(0) = \frac{2}{\cos^2 x} + 6\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}\Big|_{x=0} = 2 \tag{20}$$

Več nočemo, dobili smo

$$y = x + \frac{2}{3!}x^3 + o(x^5) \tag{21}$$

Kvocient vrst

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7) \tag{22}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6) \tag{23}$$

Pri kvocientu bomo uporabili še en razvoj,

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - o(x^3) \tag{24}$$

Na vsaki stopnji moramo slediti, kakšnega reda je napaka, višje člene pa sproti zmečemo stran.

$$\tan x = (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7))(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)) = \tag{25}$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7))(1 - (-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6)) + (-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o(x^6))^2) \tag{26}$$

$$= (x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7))(1 + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{4} + o(x^6)) \tag{27}$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^2}{2}(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}) + \frac{5x^4}{4\cdot 6}(x - \frac{x^3}{3!}) + o(x^7) \tag{28}$$
$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^3}{2} - \frac{x^5}{12} + \frac{5x^5}{24} + o(x^7) \tag{29}$$
$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^7) \tag{30}$$

Preko integrala inverzne funkcije

Začnemo z

$$x = \arctan y = \int_0^y \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^y (1 - u^2 + u^4 - u^6 + o(u^8))\,\mathrm{d}u \tag{31}$$

Integriramo:

$$x = y - \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{5}y^5 - \frac{1}{7}y^7 + o(y^9)) \tag{32}$$

Vrsto obrnemo iterativno - višji členi v y so manjši popravki (kot je običajno za Taylorja), zato lahko najprej izrazimo y:

$$y = x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 + \frac{1}{7}y^7 + o(y^9) \tag{33}$$
$$y = x + \frac{1}{3}\left[x + \frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5\right]^3 - \frac{1}{5}\left[x + \frac{1}{3}y^3\right]^5 + \frac{1}{7}\left[x\right]^7 + o(y^9) \tag{34}$$
$$y = x + \frac{1}{3}\left[x^3 + 3x^2(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5) + 3x(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5)^2\right] - \frac{1}{5}\left[x^5 + 5x^4\frac{1}{3}y^3 + 10x^3(\frac{1}{3}y^3)^2\right] + \frac{1}{7}x^7 + o(y^9) \tag{35}$$
$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \left[x^2(\frac{1}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5) + x(\frac{1}{9}y^6)\right] - \left[x^4\frac{1}{3}y^3\right] + \frac{1}{7}x^7 + o(y^9) \tag{36}$$
$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + (\frac{1}{3}x^2y^3 - \frac{1}{5}x^7) + (\frac{1}{9}x^7) - \frac{1}{3}x^7 + \frac{1}{7}x^7 + o(y^9) \tag{37}$$
$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^2\left[x + \frac{y^3}{3}\right]^3 - \frac{1}{5}x^7 + \frac{1}{9}x^7 - \frac{1}{3}x^7 + \frac{1}{7}x^7 + o(y^9) \tag{38}$$
$$y = x + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^2\left[x^3 + 3x^2\frac{y^3}{3}\right] - \frac{88}{315}x^7 + o(y^9) \tag{39}$$
$$y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{1}{3}x^7 - \frac{88}{315}x^7 + o(y^9) \tag{40}$$
$$y = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(y^9) \tag{41}$$

Vmes smo sproti stran metali tiste člene, ki že v najnižjem redu presežejo $o(y^9)$.

2.3 Langevinova funkcija

Razvij v vrsto funkcijo

$$f(x) = \coth x - \frac{1}{x}. \tag{42}$$

Predvsem moramo dobiti Laurentovo vrsto za hiperbolični kotangens:

$$g(x) = \coth x, \tag{43}$$

pri čemer ne želimo računati odvodov. V veliko primerih potrebujemo deljenje vrst, ki se vedno zreducira na geometrijsko vrsto:

$$\frac{1}{1 \mp x} = 1 \pm x + x^2 \pm x^3 + \cdots \tag{44}$$

Razvoj kvocienta

Ideja: poznamo vrsti za hiperbolični sinus in kosinus, lahko delimo funkciji. Pazimo seveda, da vzamemo dovolj členov za željeni red. Enostavno je slediti redu ostanka z $o()$ notacijo.

$$\begin{aligned}
g(x) = \frac{\cosh x}{\sinh x} &= \frac{1 + x^2/2! + x^4/4! + o(x^6)}{x + x^3/3! + x^5/5! + o(x^7)} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + x^2/2! + x^4/4! + o(x^6)\right)\left(1 + x^2/3! + x^4/5! + o(x^6)\right)^{-1} \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + x^2/2! + x^4/4! + o(x^6)\right)\left(1 - (x^2/3! + x^4/5!) + (x^2/3! + x^4/5!)^2 + o(x^6)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + x^2/2! + x^4/4! + o(x^6)\right)\left(1 - x^2/3! + 7x^4/360 + o(x^6)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - x^2/3! + 7x^4/360 + x^2/2!(1 - x^2/3! + 7x^4/360) + x^4/4!(1 - x^2/3! + 7x^4/360) + o(x^6)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 - x^2/3! + 7x^4/360 + x^2/2! - x^4/12 + x^4/4! + o(x^6)\right) \\
&= \frac{1}{x}\left(1 + x^2/3 - x^4/45 + o(x^6)\right) \\
&= x^{-1} + x/3 - x^3/45 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Razvoj odvoda

Cilj: manj računskih operacij kot v prejšnjem načinu zaradi trivialnega števca! Poenostavimo:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \coth x \\
g'(x) &= -\frac{1}{\sinh^2 x} = -\frac{2}{\cosh 2x - 1} = \\
&= -\frac{2}{(2x)^2/2! + (2x)^4/4! + (2x)^6/6! + o(x^8)} = \\
&= -\frac{1}{x^2}\left(1 + 2(2x)^2/4! + 2(2x)^4/6! + o(x^6)\right)^{-1} = \\
&= -\frac{1}{x^2}\left(1 - (2(2x)^2/4! + 2(2x)^4/6!) + (2(2x)^2/4! + 2(2x)^4/6!)^2 + o(x^6)\right) = \\
&= -\frac{1}{x^2}\left(1 - x^2/3 - 2x^4/45 + x^4/9 + o(x^6)\right) = \\
&= -\frac{1}{x^2}\left(1 - x^2/3 + 3x^4/45 + o(x^6)\right) = \\
&= -x^{-2} + 1/3 - 3x^2/45 + o(x^4) \\
g(x) &= \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t = x^{-1} + x/3 - x^3/45 + o(x^5)
\end{aligned}$$

Picardova iteracija

Namesto $g(x) = \coth x$ si ogledamo diferencialno enačbo, katere rešitev je ta funkcija:

$$g' = 1 - g^2 \tag{45}$$

Ideja iteracijske metode je, da namesto, da jo rešujemo kot diferencialno enačbo v enem kosu, v desno stran vstavljamo prejšnje približke in z integracijo dobimo izboljšani približek.

Tokrat ista diferencialna enačba velja tudi za $\tanh x$, tako da se vprašamo, kako bomo ven dobili drugo, manj pohlevno rešitev. Če vstavljamo prvi približek $g^{(0)} = x$, pridemo gladko to vrste za

$\tanh x$. Spomnimo se še, da je za to funkcijo začetna vrednost $\tanh(0) = 0$, kar potrebujemo pri zapisu integrala.

$$
\begin{aligned}
g^{(0)}(x) &= x \\
g^{(1)}(x) &= \int_0^x (1 - g^{(0)}(t)^2)\,\mathrm{d}t = x - \tfrac{1}{3}x^3 \\
g^{(2)}(x) &= \int_0^x (1 - g^{(1)}(t)^2)\,\mathrm{d}t = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 - \tfrac{1}{63}x^7 \\
g^{(3)}(x) &= \int_0^x (1 - g^{(2)}(t)^2)\,\mathrm{d}t = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 - \tfrac{17}{315}x^7 + o(x^9)
\end{aligned}
$$

Za $\coth x$ pa vemo, da vodilni člen razvoja sploh ni Taylorjevega tipa ampak x^{-1}. Naredimo nekaj poskusov, da vidimo, kaj je narobe, če se zapodimo v problem rutinsko brez razmisleka.

Če ignoriramo pravila za konvergenco iteracije in poskusimo z začetnim približkom x^{-1}, imamo več težav. Prva je, da nimamo spodnje meje integrala (tam je singularnost) in moramo goljufati s tem, da vemo, da je funkcija liha in integracijske konstante ni. Druga težava je, da iteracija divergira, kot tudi pričakujemo, saj popravki očitno niso majhni:

$$
\begin{aligned}
g^{(0)}(x) &= x^{-1} \\
g^{(1)}(x) &= x^{-1} + x \\
g^{(2)}(x) &= x^{-1} - x - \tfrac{x^3}{3} \\
g^{(3)}(x) &= x^{-1} + 3x - \tfrac{x^3}{9} + o(x^5) \\
g^{(4)}(x) &= x^{-1} - 5x - \tfrac{79x^3}{27} + o(x^5) \\
g^{(5)}(x) &= x^{-1} + 11x - \tfrac{517x^3}{81} + o(x^5)
\end{aligned}
$$

Iteracijo lahko "popravimo" tako, da singularni del v naprej izpostavimo:

$$g(x) = x^{-1}h(x) \tag{46}$$

$$h' = x + (1 - h)\left(\tfrac{h}{x}\right) \tag{47}$$

Ker smo samo izpostavili x^{-1}, vemo, da mora biti vodilni člen $h(0) = 1$, kar je pomembno za spodnjo mejo integrala, naslednji neničelni pa je kvadratičen. Upamo, da smo s tem konvergenco nekoliko "ukrotili". Pa poglejmo:

$$
\begin{aligned}
h^{(0)}(x) &= 1 \\
h^{(1)}(x) &= 1 + \tfrac{1}{2}x^2 \\
h^{(2)}(x) &= 1 + \tfrac{1}{4}x^2 - \tfrac{1}{16}x^4 \\
h^{(3)}(x) &= 1 + \tfrac{3}{8}x^2 + 0x^4 + o(x^6) \\
h^{(4)}(x) &= 1 + \tfrac{5}{16}x^2 - \tfrac{9}{256}x^4 + o(x^6) \\
h^{(5)}(x) &= 1 + \tfrac{11}{32}x^2 - \tfrac{1}{64}x^4 + o(x^6) \\
h^{(6)}(x) &= 1 + \tfrac{21}{64}x^2 - \tfrac{105}{4096}x^4 + o(x^6)
\end{aligned}
$$

Sedaj imamo situacijo, ko koeficienti vrste sicer konvergirajo k pravim vrednostim (primerjajte s koeficienti iz prejšnjih dveh postopkov), prav tako sama krivulja konvergira k pravi, ne moremo pa s končnim številom korakov dobiti pravilnih koeficientov, saj prave vrednosti dosežejo šele v limiti.

Kot zanimivost opazimo, da so števci pri drugem členu enaki kot v prejšnji divergentni vrsti, smo pa pridobili potence števila 2, ki zagotovijo konvergenco. Ta postopek pospeševanja konvergence spominja na pospeševanje številskih vrst, pri katerih iz slabo konvergentnega zaporedja delnih vsot ustvarimo zaporedje s hitrejšo konvergenco.

S to situacijo še nismo povsem zadovoljni, zato poskušamo vrsto do konca ukrotiti. Izpostavimo sedaj še več singularnosti, tako da prisilimo vodilni člen $h(x) = x$:

$$g(x) = x^{-2}h(x) \tag{48}$$
$$h' = x^2 + 2\left(\frac{h}{x}\right) - \left(\frac{h}{x}\right)^2 \tag{49}$$

Tokrat pa nam je postreženo z zelo hitro in čisto konvergenco:

$$\begin{aligned}
&h^{(0)}(x) = x\\
&h^{(1)}(x) = x + \tfrac{x^3}{3}\\
&h^{(2)}(x) = x + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^5}{45}\\
&h^{(3)}(x) = x + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^5}{45} + \tfrac{2}{945}x^7 - \tfrac{1}{18225}x^9\\
&h^{(4)}(x) = x + \tfrac{x^3}{3} - \tfrac{x^5}{45} + \tfrac{2}{945}x^7 - \tfrac{1}{4725}x^9 + o(x^{11})
\end{aligned}$$

Z deljenjem z x^2 potem trivialno sledi vrsta za $\coth x$.

Iteracijska metoda za določanje vrste je lahko zelo učinkovita in ponavadi edina, ki ne zahteva deljenja vrst, se je pa pametno najprej prepričati, da je najnižji red v razvoju dovolj visok.

Recipročna vrsta $\tanh x$

Zdaj, ko smo iz iteracije poceni dobili vrsto za $\tanh x$, jo lahko tudi takoj obrnemo (spet potrebujemo deljenje vrst):

$$\begin{aligned}
g(x) = \tanh^{-1} x &= \left(x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 - \tfrac{17}{315}x^7 + o(x^9)\right)^{-1} =\\
&= \tfrac{1}{x}\left(1 - \tfrac{1}{3}x^2 + \tfrac{2}{15}x^4 - \tfrac{17}{315}x^6 + o(x^8)\right)^{-1} =\\
&= \tfrac{1}{x}\Big(1 + \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{15}x^4 + \tfrac{17}{315}x^6\right) + \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{15}x^4 + \tfrac{17}{315}x^6\right)^2 + \left(\tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{15}x^4 + \tfrac{17}{315}x^6\right)^3 + o(x^8)\Big) =\\
&= \tfrac{1}{x}\left(1 + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{2}{15}x^4 + \tfrac{17}{315}x^6 + \tfrac{1}{9}x^4 - 2\tfrac{1}{3}\tfrac{2}{15}x^6 + \tfrac{1}{27}x^6 + o(x^8)\right) =\\
&= \tfrac{1}{x}\left(1 + \tfrac{1}{3}x^2 - \tfrac{1}{45}x^4 + \tfrac{2}{945}x^6 + o(x^8)\right) =\\
&= x^{-1} + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{45}x^3 + \tfrac{2}{945}x^5 + o(x^7)
\end{aligned}$$

Dvojni koti

Precej prebrisana možnost, ki ne zahteva deljenja (le vrsto za $\tanh x$), je tudi ta, da izkoristimo zvezo za dvojne kote (če ne izgleda znano, trigonometrični namig: $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$, recipročna vrednost tega, ter po hiperbolično minus v plus):

$$\coth x = \tfrac{1}{2}\coth\tfrac{x}{2} + \tfrac{1}{2}\tanh\tfrac{x}{2} \tag{50}$$
$$\coth x - \tfrac{1}{2}\coth\tfrac{x}{2} = \tfrac{1}{2}\tanh\tfrac{x}{2} \tag{51}$$

Ker poznamo vrsto na desni, lahko izluščimo koeficiente vrste za $\coth x$ po členih, razen singularnega člena, ki se v razliki na levi krajša in ga moramo poznati v naprej (predpostavka, da vemo prvi člen x^{-1} tiči tudi v ostalih zgornjih preračunih). Postavimo zvezo med koeficienti obeh vrst:

$$\tanh x = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \tag{52}$$

$$\coth x = \tfrac{1}{x} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{53}$$

$$\coth x - \tfrac{1}{2}\coth\tfrac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (1 - 2^{-1-n}) x^n \tag{54}$$

$$\tfrac{1}{2}\tanh\tfrac{x}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (2^{-1-n}) x^n \tag{55}$$

Primerjava členov vrne:

$$b_n = a_n \frac{1 - 2^{-1-n}}{2^{-1-n}} \tag{56}$$

$$a_n = b_n (2^{1+n} - 1)^{-1} \tag{57}$$

Dobili smo torej direktno zvezo, ki členoma eksplicitno preračuna vrsto ene funkcije v vrsto druge funkcije:

$$\tanh x = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{2}{15}x^5 - \tfrac{17}{315}x^7 + o(x^9) \tag{58}$$

$$\coth x = \tfrac{1}{x} + 1(2^2 - 1)^{-1}x - \tfrac{1}{3}(2^4 - 1)^{-1}x^3 + \tfrac{2}{15}(2^6 - 1)^{-1}x^5 - \tfrac{17}{315}(2^8 - 1)^{-1}x^7 + o(x^9) \tag{59}$$

$$= \tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{45}x^3 + \tfrac{2}{15\cdot 63}x^5 - \tfrac{17}{315\cdot 255}x^7 + o(x^9) \tag{60}$$

Takih čudežev v splošnem ni pričakovati, razen, kadar za funkcijo veljajo kakšne posebne funkcijske zveze.

Izposojanje iz trigonometrije

Če bi slučajno imeli pri roki vrsto za $\cot x$ (kotangens), bi lahko po vzoru znane korespondence med hiperboličnimi in trigonometričnimi funkcijami vsakemu drugemu členu obrnili predznak in bi dobili pravo vrsto. To lahko tudi obrnemo in direktno zapišemo vrsto za kotangens:

$$\cot x = \tfrac{1}{x} - \tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{45}x^3 - \tfrac{2}{15\cdot 63}x^5 - \tfrac{17}{315\cdot 255}x^7 + o(x^9) \tag{61}$$

2.4 Kodre 27/2

Narišimo in razvijmo Debyjevo specifično toploto:

$$c_V = \frac{3R}{M} D(T/\Theta) \tag{62}$$

$$D(x) = 12x^3 \int_0^{1/x} \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u - 1} - \frac{3}{x(e^{1/x} - 1)} \tag{63}$$

Limita pri velikih x – v tem primeru je zgornja meja integrala majhna in lahko integrand razvijemo v vrsto. Rabimo ga dvakrat, še za drugi del, tako da je bolje razviti kar tole:

$$\frac{1}{e^u - 1} \approx \frac{1}{u + u^2/2 + u^3/6 + o(u^4)} = \frac{1}{u}(1 + u/2 + u^2/6 + o(u^3))^{-1} = \tag{64}$$

$$\frac{1}{u}(1 - (u/2 + u^2/6 + o(u^3)) + (u/2 + u^2/6 + o(u^3))^2 + o(u^3)) = \tag{65}$$

$$\frac{1}{u}(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{12} + o(u^3)) \tag{66}$$

Vstavimo v integral:

$$\int_0^{1/x} \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u-1} \approx \int_0^{1/x} u^2(1-\frac{u}{2}+\frac{u^2}{12}+o(u^3))\,\mathrm{d}u \tag{67}$$

$$= \frac{1}{3x^3}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{60x^5}+o(x^{-6}) \tag{68}$$

$$D(x) = 12x^3\left[\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{8x^4}+\frac{1}{60x^5}+o(x^{-6})\right]-3x^{-1}\left[x(1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}+o(x^{-3}))\right] = \tag{69}$$

$$= 12\left[\frac{1}{3}-\frac{1}{8x}+\frac{1}{60x^2}+o(x^{-3})\right]-3\left[1-\frac{1}{2x}+\frac{1}{12x^2}+o(x^{-3})\right] = \tag{70}$$

$$= 1-\frac{1}{20x^2}+o(x^{-3}) \tag{71}$$

Dobili smo asimptotski razvoj funkcije $D(x)$. Druga limita $x \to 0$ pa zahteva asimptotski razvoj integrala, saj gre zgornja meja integrala blizu neskončnosti. Zapišimo takole:

$$D(x) = 12x^3\int_0^\infty \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u-1}-\frac{3}{x(e^{1/x}-1)}-12x^3\int_{1/x}^\infty \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u-1} \tag{72}$$

Prvi integral v igri je samo konstanta. Pripada eni izmed najbolj slavnih funkcij – Riemannovi Zeta funkciji:

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \frac{u^{s-1}\,\mathrm{d}u}{e^u-1} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s} \tag{73}$$

Sode vrednosti ζ funkcije so izrazljive s potencami števila π – poseben primer je Eulerjeva rešitev Baslovega problema, $\sum_{n=1}^\infty n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$.

$$\int_0^\infty \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u-1} = \Gamma(4)\zeta(4) = 6\frac{\pi^4}{90} = \frac{\pi^4}{15} \tag{74}$$

Ta rezultat lahko izpeljemo sami izpostavljanjem e^u in razvojem imenovalca v geometrijsko vrsto. Drugi in tretji člen gresta proti 0 hitreje kot vsaka potenca x, tako da je približno

$$D(x) \approx \frac{4\pi^4}{5}x^3 \tag{75}$$

Če je čas: kaj pa preostanek? Poglejmo:

$$f(x) = -\frac{3}{x(e^{1/x}-1)}-12x^3\int_{1/x}^\infty \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u-1} = -12x^3\left[\frac{1}{4x^4(e^{1/x}-1)}+\int_{1/x}^\infty \frac{u^3\,\mathrm{d}u}{e^u-1}\right] \tag{76}$$

Najbolj nas lahko moti $e^{1/x}$, ki okrog ničle nima Taylorjeve vrste. Hkrati pa je ta prispevek prisoten v obeh členih. Če se slučajno odšteje, moramo zapisat tako, da to lahko zaznamo. Prvi člen izgleda kot integral funkcije spremenljivke $u = 1/x$, izvrednoten od $1/x$ do ∞. Integral česa, ugotovimo z odvajanjem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\frac{u^4}{4(e^u-1)} = \frac{u^3}{e^u-1}-\frac{u^4e^u}{4(e^u-1)^2} \tag{77}$$

$$0-\frac{1}{4x^4(e^{1/x}-1)} = \int_{1/x}^\infty \frac{u^3}{e^u-1}-\frac{u^4e^u}{4(e^u-1)^2}\,\mathrm{d}u \tag{78}$$

S tem uspemo prepisat ostanek $f(x)$ takole:

$$f(x) = -3x^3\int_{1/x}^\infty \frac{u^4e^u}{(e^u-1)^2}\,\mathrm{d}u = -3x^3\int_{1/x}^\infty \frac{u^4e^u}{(e^u-1)^2}\,\mathrm{d}u = -3x^3\int_0^x \frac{t^{-6}e^{1/t}\,\mathrm{d}t}{(e^{1/t}-1)^2} \tag{79}$$

2.5 Razvij v vrsto funkcijo $E_1(x)$

Eksponentni integral je definiran kot

$$E_1(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t. \tag{80}$$

Razvij ga v asimptotsko vrsto.

Razvoja v asimptotsko vrsto se lahko lotimo na dva načina. Predvsem hočemo določeni integral, tako da se moramo znebiti x iz meje. To naredimo s premikom $u = t - x$:

$$E_1(x) = \int_0^\infty \frac{e^{-x}e^{-u}}{u+x}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty \frac{e^{-u}}{1+(u/x)}\,\mathrm{d}u. \tag{81}$$

Imenovalec razvijemo v geometrijsko vrsto:

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x}\int_0^\infty e^{-u}\left(1 - \frac{u}{x} + \frac{u^2}{x^2} - \frac{u^3}{x^3} + o(x^{-4})\right)\mathrm{d}u \tag{82}$$

Zdaj prav pride integral $\int_0^\infty e^{-x}x^n\,\mathrm{d}x = n!$:

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x}\left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + o(x^{-4})\right) \tag{83}$$

$$E_1(x) = e^{-x}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + o(x^{-5})\right) \tag{84}$$

Drugi način je, da se lotimo per partes – integriramo eskponentni del in odvajamo potenčnega:

$$E_1(x) = -\frac{e^{-t}}{t}\Big|_x^\infty - \int_x^\infty \frac{(-1)(-1)e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{e^{-x}}{x} - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2}\,\mathrm{d}t \tag{85}$$

Ponavljamo:

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{-e^{-t}}{t^2}\Big|_x^\infty + \int_x^\infty \frac{(-1)(-2)e^{-t}}{t^3}\,\mathrm{d}t \tag{86}$$

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\frac{-e^{-t}}{t^3}\Big|_x^\infty - 2\int_x^\infty \frac{(-1)(-3)e^{-t}}{t^4}\,\mathrm{d}t \tag{87}$$

$$E_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-x}}{x^2} + 2\frac{e^{-x}}{x^3} - 6\frac{e^{-x}}{x^4} + \cdots \tag{88}$$

2.6 Kodre 27/6

Izpelji asimptotično vrsto za $1 - \mathrm{erf}(x)$. Po zamenjavi $x^2 = u$ je postopek enak kot pri eksponentnem integralu $E_1(x)$.

Definicija:

$$f(x) = 1 - \mathrm{erf}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{89}$$

Asimptotske vrste pogosto dobimo iz določenih integralov, pod katerimi integrand razvijemo v vrsto. Tega ne moremo narediti s prosto spodnjo mejo. Sledimo namigu in uvedimo $u = t^2$:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{x^2}^\infty \frac{e^{-u}}{2\sqrt{u}}\,\mathrm{d}u \tag{90}$$

Prestavimo mejo integrala, da dobimo določeni integral, $v = u - x^2$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_0^\infty \frac{e^{-v}}{\sqrt{v+x^2}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\int_0^\infty e^{-v}(1+v/x^2)^{-1/2}\,\mathrm{d}v = \tag{91}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\int_0^\infty e^{-v}\left(1-\frac{1}{2}\frac{v}{x^2}+\frac{3}{8}\frac{v^2}{x^4}-\frac{5}{16}\frac{v^3}{x^6}+\cdots\right)\mathrm{d}v \tag{92}$$

Izkoristimo integrale $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n!$.

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\left(1-\frac{1}{2}\frac{1!}{x^2}+\frac{3}{8}\frac{2!}{x^4}-\frac{5}{16}\frac{3!}{x^6}+\cdots\right) \tag{93}$$

Alternativno lahko prestavimo integral takoj:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(u+x)^2}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}\int_0^\infty e^{-2ux-u^2}\,\mathrm{d}u \tag{94}$$

Uvedemo $2ux=t$, da bomo za velike x blizu točke, okrog katere razvijamo:

$$f(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{2x}\int_0^\infty e^{-t-t^2/4x^2}\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\int_0^\infty e^{-t}\left(1-\frac{t^2}{4x^2}+\frac{1}{2!}\frac{t^4}{(4x^2)^2}+\cdots\right)\mathrm{d}t= \tag{95}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{e^{-x^2}}{x}\left(1-\frac{2!}{4x^2}+\frac{1}{2!}\frac{4!}{(4x^2)^2}+\cdots\right) \tag{96}$$

Če vrsti primerjamo, sta seveda enaki, je pa zanimivo primerjati različne načine izražanja koeficientov – v prvem primeru smo jih dobili iz vrste za recipročni koren, v drugem pa iz vrste za eksponentno funkcijo.

2.7 Kodre 27/3

Iz polinomske aproksimacije izpelji vrsto za gostoto samo.

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{\rho_0}+a(T-T_0)+b(T-T_0)^2+c(T-T_0)^3+o((T-T_0)^4) \tag{97}$$

Za manj pisanja takoj uvedemo $T-T_0=t$, ter zadevo obrnemo:

$$\rho=\rho_0\frac{1}{1+\rho_0 at+\rho_0 bt^2+\rho_0 ct^3+o(t^4)} \tag{98}$$

Uporabimo znani razvoj za geometrijsko vrsto:

$$\rho=\rho_0(1-(\rho_0at+\rho_0bt^2+\rho_0ct^3+o(t^4))+(\rho_0at+\rho_0bt^2+\rho_0ct^3+o(t^4))^2-(\rho_0at+\rho_0bt^2+\rho_0ct^3+o(t^4))^3+o(t^4)) \tag{99}$$

Stran zmečemo člene, ki bodo presegli željeno natančnost ot^4 ter uvedemo $A=\rho_0 a$, $B=\rho_0 b$, $C=\rho_0 c$:

$$\rho=\rho_0(1-(At+Bt^2+Ct^3)+((At)^2+2ABt^3)-(At)^3+o(t^4)) \tag{100}$$

$$\rho=\rho_0(1-At+(A^2-B)t^2-(A^3-2AB+C)t^3+o(t^4)) \tag{101}$$

2.8 Besslove funkcije

Razvij Besslove funkcije v potenčno vrsto z nastavkom. Velja Besslova diferencialna enačba:

$$x^2y''(x)+xy'(x)+(x^2-n^2)y(x)=0. \tag{102}$$

Seveda vsaka diferencialna enačba drugega reda potrebuje dva začetna pogoja. Če si pogojev ne izberemo, bomo imeli v rešitvi dva prosta parametra.

Poglejmo si najprej lažji del, za $n=0$. Izberimo tudi začetna pogoja $y(0)=1$ in $y'(0)=0$, da bo funkcija soda. Nastavek:

$$y(x) = 1 + ax^2 + bx^3 + cx^4 + o(x^5) \tag{103}$$

Vstavimo v DE:

$$x^2(2a+6bx+12cx^2+o(x^3))+x(2ax+3bx^2+4cx^3+o(x^4))+x^2(1+ax^2+bx^3+cx^4+o(x^5)) = 0 \tag{104}$$

Grupiramo po stopnjah:

$$x^2(2a + 2a + 1) + x^3(6b + 3b) + x^4(12c + 4c + a) + o(x^5) = 0 \tag{105}$$

Členoma dobimo

$$a = -\frac{1}{4}, \quad b = 0, \quad c = -\frac{a}{16} = \frac{1}{64} \tag{106}$$

in torej

$$y(x) = 1 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{64}x^4 + o(x^5). \tag{107}$$

Red napake je v resnici še za eno višji, ker vidimo, da bodo vsi lihi členi enaki nič.

2.8.1 Splošen razvoj

Če $n \neq 0$, napademo na podoben način, ampak potrebujemo v splošnem vse člene:

$$y(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^6) \tag{108}$$

Vstavimo:

$$\begin{align}
&x^2(2a_2 + 6a_3x + 12a_4x^2 + 20a_5x^3 + o(x^4))+ \tag{109}\\
&x(a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + o(x^5))+ \tag{110}\\
&(x^2 - n^2)(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + o(x^6)) = 0 \tag{111}
\end{align}$$

$$\begin{align}
&x^0(-n^2a_0)+ \tag{112}\\
&x^1(a_1 - n^2a_1)+ \tag{113}\\
&x^2(2a_2 + 2a_2 - n^2a_2 + a_0)+ \tag{114}\\
&x^3(6a_3 + 3a_3 - n^2a_3 + a_1)+ \tag{115}\\
&x^4(12a_4 + 4a_4 - n^2a_4 + a_2)+ \tag{116}\\
&x^5(20a_5 + 5a_5 - n^2a_5 + a_3) + o(x^6) = 0 \tag{117}
\end{align}$$

Dobimo sistem enačb za koeficiente:

$$\begin{align}
-n^2a_0 &= 0 \tag{118}\\
(1 - n^2)a_1 &= 0 \tag{119}\\
(2^2 - n^2)a_2 &= -a_0 \tag{120}\\
(3^2 - n^2)a_3 &= -a_1 \tag{121}\\
(l^2 - n^2)a_l &= -a_{l-2} \tag{122}
\end{align}$$

Če gledamo enačbe po vrsti, vidimo, da morajo biti vsi koeficienti 0, dokler ne pridemo do člena, kjer je preostali oklepaj enak 0. Prvi neničelni člen je torej a_n, ki hkrati predstavlja prosti parameter (normalizacijsko konstanto). Hkrati opazimo, da so lihi in sodi členi povsem neodvisni, kar skupaj s prejšnjim argumentom pokaže, da so te funkcije bodisi v celoti sode, bodisi v celoti lihe. Dejstvo, da so Besslove funkcije v najnižjem redu oblike x^n je ena izmed njihovih glavnih značilnosti.

Ker je diferencialna enačba drugega reda, vemo, da obstaja še druga, linearno neodvisna rešitev. Naša analiza tega ne podpira, saj dobimo le eno serijo rešitev (le en prost parameter, a_n). Odgovor je seveda, da druga rešitev nima potenčne vrste okrog ničle, ker ima tam pol (potrebujemo Laurentovo vrsto).