Osnovni pojmi

Splošen zapis za katerekoli koordinate:
$\vec{e}_\alpha = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_\alpha}$
$d\vec{r} = \sum \frac{\partial \vec{r}}{\partial x_\alpha} dx_\alpha$
$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \sum \dot{x}_\alpha \vec{e}_\alpha$
Bazni vektorji:
$\hat{i} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial x}$ $\hat{j} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial y}$ $\hat{k} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial z}$

Polarne koordinate za en delec:
$\vec{r} = r\cos\varphi \hat{i} + r\sin\varphi \hat{j}$
$\vec{e}_r = \cos\varphi \hat{i} + \sin\varphi \hat{j}$
$\vec{e}_\varphi = -r\sin\varphi \hat{i} + r\cos\varphi \hat{j}$
$|\vec{e}_r| = 1 \qquad |\vec{e}_\varphi| = r \qquad \vec{e}_r \cdot \vec{e}_\varphi = 0$
$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2)$
$\vec{a} = \vec{e}_r\left(\ddot{r} - \dot{\varphi}^2 r\right) + \vec{e}_\varphi\left(\ddot{\varphi} + 2\frac{\dot{\varphi}\dot{r}}{r}\right)$
Pozor:
Radij se lahko spreminja in je funkcija nečesa drugega, primer, točka, v valju. Takrat raje zapiši navadne koordinate.

Sferične koordinate
$\vec{r} = r\cos\varphi\sin\vartheta \hat{i} + r\sin\varphi\sin\vartheta \hat{j} + r\cos\vartheta \hat{k}$
$\vec{e}_r = \cos\varphi\sin\vartheta \hat{i} + \sin\varphi\sin\vartheta \hat{j} + \cos\vartheta \hat{k}$
$\vec{e}_\vartheta = r\cos\varphi\cos\vartheta \hat{i} + r\sin\varphi\cos\vartheta \hat{j} - r\sin\vartheta \hat{k}$
$\vec{e}_\varphi = -r\sin\varphi\sin\vartheta \hat{i} + r\cos\varphi\sin\vartheta \hat{j}$
$|\vec{e}_r| = 1 \qquad |\vec{e}_\vartheta| = r \qquad |\vec{e}_\varphi| = r\sin\vartheta$
$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0$
$T = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + \dot{\varphi}^2 r^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2 r^2)$

Reševanje nalog:
V primeru, da naloga ni mišljena za reševanje z Lagrangevim formalizmom, zapiši sile v vseh vektorskih smereh z njihovimi baznimi vektorji. Oz zapiši 2. NZ za sistem.

Neinercialni koordinatni sistemi

Lasten sistem je označen z črticamo, medtem ko je celoten sistem označen brez črtic.

$\frac{d\vec{e}'_\alpha}{dt} = \vec{\omega}' \times \vec{e}'_\alpha$
$\vec{r}' = \sum x'_\alpha \vec{e}'_\alpha = \vec{r} - \vec{R}$
Relativna hitrost, ki deluje na delec. v celotnem sistemu.
$\vec{v}_{\text{rel}} = \sum \dot{x}'_\alpha \vec{e}'_\alpha$
Hitrost, ki ga čuti delec v lastnem sistemu.
$\dot{\vec{r}}' = \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{\omega}' \times \vec{r}'$
Pospešek, ki ga čuti delec v lastnem sistemu.
$\ddot{\vec{r}}' = \vec{a}_{\text{rel}} + 2\vec{\omega}' \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}') + \dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}'$
Sistemska sila, ki jo občuti delec:
$\vec{F}_s =$
$-m\ddot{\vec{R}} - m\vec{v}_{\text{rel}} - 2m\vec{\omega}' \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\omega}' \times (\vec{\omega}' \times \vec{r}') - m\dot{\vec{\omega}}' \times \vec{r}'$
$m\vec{a}_{\text{rel}} = m\sum \ddot{x}_\alpha \vec{e}_\alpha = \sum \vec{F} + \vec{F}_s$

Vrteči sistem:
Koordinate telesa v lastnem sistemu so:
$\hat{i}' = \cos(\Omega t)\hat{i} + \sin(\Omega t)\hat{j}$
$\hat{j}' = -\sin(\Omega t)\sin\varphi \hat{i} + \cos(\Omega t)\sin\varphi \hat{j} + \cos\varphi \hat{k}$
$\hat{k}' = \sin(\Omega t)\cos\varphi \hat{i} - \cos(\Omega t)\cos\varphi \hat{j} + \sin\varphi \hat{k}$
Kjer je omega hitrost vrtenja celotnega sistema.

$\vec{\Omega} = \Omega\cos\varphi \hat{j}' + \Omega\sin\varphi \hat{k}'$
$\vec{R} = -R\hat{k}' \qquad \dot{\vec{R}} = \vec{\Omega} \times \vec{R}$
$\ddot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \left(\dot{\vec{r}}' + \dot{\vec{R}}\right) =$
$\vec{a}_{\text{rel}} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} + \vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \left(\vec{r}' + \vec{R}\right)$
$m\vec{a}_{\text{rel}} = \sum \vec{F} - 2m\vec{\Omega} \times \vec{v}_{\text{rel}} - m\vec{\Omega} \times \vec{\Omega} \times \left(\vec{r}' + \vec{R}\right)$

Uporabna substitucija pri reševanju takih nalog, kjer dobimo gibanje v x in y smeri oz dve diferencialni enačbi. Seštejemo ju in uporabimo substitucijo:
$\zeta = x + iy$

V primeru, da je sistem nagnjen, torej da $\hat{k} \neq \hat{k}'$ z Eulerjevo rotacijo najdi smer med ω in ω'.

Pomembne količine

1 delec
$\vec{F} = m\ddot{\vec{r}}$
$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

$\vec{p} = m\vec{v}$
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$
$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

$A = \int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{r}$
$T = \frac{1}{2}m\vec{v} \cdot \vec{v}$

Sila je konzervativna, če $\vec{F} = -\nabla U$.
$\vec{F}$ konzervativna $\iff \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}$ (v 3D po parih xy, yz, xz).
$\vec{F}$ konzervativna $\iff A = \int_\gamma \vec{F} \cdot \vec{r} = -\Delta U$ neodvisno od poti.

Sistem N delcev
$\vec{r}_T = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{\sum m_i}$
$\vec{P} = \sum \vec{p}_i = M\dot{\vec{r}}_T$
$\frac{d\vec{P}}{dt} = M\vec{a}_T = \vec{F}^{(z)}$
$\vec{L} = \sum \vec{l}_i = \vec{r}_T \times M\vec{v}_T + \sum \vec{r}'_i \times m\vec{v}'_i$
$\dot{\vec{L}} = \vec{M}^{(z)} + \vec{M}^{(n)} = \sum \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{(z)} + \sum_{j<i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{F}_{ij}$
Če so sile centralne $\left(\vec{F}_{ij} = F_{ij}\frac{\vec{r}_i - \vec{r}_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\right)$, je $\vec{M}^{(n)} = 0$.

$A = A^{(z)} + A^{(n)}$
$T = \frac{1}{2}Mv_T^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i'^2$
$V = \sum_i V_i + \frac{1}{2}\sum_{ij, i\neq j} V_{ij}$

Virialni teorem (sistem N delcev)
$2\langle T\rangle = \frac{1}{2}\langle \sum_{ij, i\neq j} \frac{\partial V_{ij}}{\partial r_{ij}} r_{ij}\rangle - \langle \sum_i \vec{F}_i^z \cdot \vec{r}_i\rangle$
$V(\vec{r}) = \alpha r^n \quad \Longrightarrow \quad 2\langle T\rangle = n\langle V\rangle$

Vezi

Vezi so zveze med različnimi koordinatami. Npr, da ima naš sistem preveč komponent, ki bi jih lahko vključili, zapišemo vezi, oziroma zveze med dvema koordinatama, da si Lagrangevo funkcijo poenostavimo. **Generalizirane koordinate:**
So koordinate, ki smo jih izrazili iz vezi in bomo nato gledali njihovo odvisnost v E-L enačbi.

Lagrangev formalizem

$\sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{(a)} - m_i\vec{a}_i\right)\delta\vec{r}_i = 0 \qquad$ (D'Alembertov princip)
V primeru, da kakšna sila ni potencialna, uvedemo:
$Q_j = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{(a)} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j}$
$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad j = 1, 2 \dots N$

Če so vse sile potencialne, torej, Če $\vec{F}_i = -\nabla_i V, \forall i$.
Dobimo Lagrangev formalizem:
$L = T - V$
In rešujemo sistem enačbe za vsako koordinato posebej: $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0$

Če $\frac{\partial L}{\partial q_i}$=0, potem $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = konst. = p_i$ (posplošeni impulz, q_i pravimo ciklična koordinata).

Konstanta gibanja:
Če $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$, potem $H = \sum_j \dot{q}_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - L = konst.$.
Če $V \neq V(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)$, potem $H = T + V$.

Lagrangeva funkcija je nedoločena do $\frac{d}{dt}F(q_1, \ldots, q_n, t)$.

Izrek Emmy Noether

Imejmo enoparametrično preslikavo koordinat $q_i \mapsto Q_i(s,t)$.
Ta ustreza zvezni simetriji L, če $\frac{\partial L(Q_i(s,t),\dot{Q}_i(s,t),t)}{\partial s} = 0$.
Tedaj obstaja ohranjena količina $\sum_i \frac{\partial L}{\partial q_i}\frac{\partial Q_i}{\partial s}|_{s=0}$.

Hamiltonov princip

$S(L) = \int_{t_1}^{t_2} L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t)\, dt \quad$ (akcija)
Enačbe gibanja ustrezajo minimumu funkcionala akcije S.

Problem dveh teles

Imamo $m_1, m_2, \vec{r}_1, \vec{r}_2$.
$M\vec{r}_t = (m_1 + m_2)\vec{r}_t = m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$
$m = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \quad \vec{r}_t = \frac{1}{m_1+m_2}(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2$
$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad \Longrightarrow \quad \vec{r}_i = \vec{r}_t - \frac{m_i}{M}\vec{r}$

$L = \frac{1}{2}Mv_t^2 + \frac{1}{2}m|\dot{\vec{r}}|^2 - V(\vec{r}, \dot{\vec{r}})$
$\vec{p}_t = M\vec{v}_t = konst.$

Centralni potencial

Imamo $V = V(r)$. Za katerega velja, da je:
$\vec{F} = -\nabla V = -\frac{dV}{dr}\frac{\vec{r}}{r}$
Gibalna količina je konstantna. $\vec{L} = konst.$
$\vec{L} \cdot \vec{r} = 0 \quad \Longrightarrow \quad$ Gibanje je ravninsko.

Definirajmo $\vec{L} = L\hat{e}_z$. (gibalna količina)
Lagrangeva funkcija je enaka:$L = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - V(r)$
Ker je odvisnost zgolj od r, je:
$p_\varphi = mr^2\dot{\varphi} = l = konst.$
$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2}r^2\dot{\varphi} = konst.$ (2. Keplerjev zakon)

Definirajmo efektivni potencial kot:
$V_{\text{ef}} = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + V(r)$
Celotna energija takega sistema je: $H = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{ef}}$

In ker je kinetični del energije večji kot nič, sledi:
$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 \geq 0 \implies H \geq V_{\text{ef}} \implies$ kvalitativna določitev orbit.

Pogosto uporabna substitucija $u = \frac{1}{r}$.
Pogosto uporabno $\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}$

Reševanje nalog s potenciali:
Če rešujemo nalogo s potenciali, najprej zapišemo celotno energojo kot $H = T + V_{\text{eff}}$, kjer je $V_{\text{eff}} = \frac{p_{phi}^2}{2mr^2} + V(r)$. In nato rešujemo problem za različne množice rešitev. Ne smemo pozabiti, da je: $\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2}\frac{d}{d\varphi}$.

Keplerjev problem

Imamo $V(r) = -\frac{k}{r}$.
$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mk\frac{\vec{r}}{r} = konst.$ (Laplace-Runge-Lenzov vektor)
$\vec{A} \cdot \vec{L} = 0$
$r = \frac{l^2}{mk\left(1+\frac{A}{mk}\cos\varphi\right)} = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\varphi}$
$\varepsilon = \frac{A}{mk} = \sqrt{1 + \frac{2Hl^2}{k^2m}}$

$\varepsilon = 0$ - krožnica - $H = -\frac{mk^2}{2l^2}$, $\quad \varepsilon < 1$ - elipsa - $H < 0$
$\varepsilon = 1$ - parabola - $H = 0$, $\quad \varepsilon > 1$ - hiperbola - $H > 0$

Uporabna substitucija, v primeru, da je potencial r^n ko je $n \in \mathbb{N} \quad \frac{dr}{dt} = r'\dot{\varphi}$.

Sipanje delcev

Sipalni tok, ki bo prišel iz neke razdalje r do tarče.
Curek delcev ima vhodni parameter b.
$dI_{\text{vh}} = j\, dS = j2\pi b\, db$
Sipalni tok, ki se bo sipal na tarči.
$dI_{\text{iz}} = j\sigma(\Omega)\, d\Omega$
Sipalni presek v odvisnosti od začetega parametra in kota sipanja, pod katerim odleti delec stran od tarče.
$\sigma(\vartheta) = \frac{b}{\sin\vartheta}|\frac{db}{d\vartheta}| \quad$ (diferencialni sipalni presek)
Pri taki nalogi moramo ponavadi izraziti b kot funkcijoθ in jo nato odvajati po θ.
Totalni sipalni presek pa definiramo kot:
$\sigma_{\text{tot}} = \int \sigma(\Omega)\, d\Omega = \pi b_{\max}^2$

Kjer je $b_{\max}$ velikost tarče.

Togo telo

$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = r_{ij} = konst.$

Eulerjevi koti

Če se telo vrti okoli določene lege, lahko to opišem z Eulerjevimi koti:

Zasuk okoli $\hat{k}$:

$$T(\varphi) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{precesija}, \vec{r} \to \vec{r}'')$$

Zasuk okoli $\hat{i''}$:

$$U(\vartheta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{bmatrix} \qquad (\text{nutacija}, \vec{r}'' \to \vec{r}''')$$

Zasuk okoli $\hat{k''}$:

$$V(\psi) = \begin{bmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (\text{rotacija}, \vec{r}''' \to \vec{r}')$$

$R = V(\psi)U(\vartheta)T(\varphi) \qquad$ (pasivna rotacija)

Za vsako rotacijo $R\ \exists\vec{n} \neq 0 : R\vec{n} = \vec{n}$, torej obstaja os rotacije.

V lastnem sistemu S':
$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\vec{e}_3 + \dot{\vartheta}\vec{e}_1'' + \dot{\psi}\vec{e}_3' = (\sin\vartheta\sin\psi\,\dot{\varphi} + \cos\psi\,\dot{\vartheta})\vec{e}_1' + (\sin\vartheta\cos\psi\,\dot{\varphi} - \sin\psi\,\dot{\vartheta})\vec{e}_2' + (\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})\vec{e}_3'$

Če npr, če se stožec kotali: $\vec{V_p} = 0 = \dot{\phi} \times \vec{R} + \dot{\psi} \times \vec{r}$

Kinetična energija iz Eulerjevih kotov

$$T = \frac{1}{2}(J_x\omega_x^2 + J_y\omega_y^2 + J_z\omega_z^2)$$

Če je vrtavka osnosimetrična velja (J,J,J'):

$$T = \frac{1}{2}J(\dot{\phi}^2\sin(\vartheta) + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J'(\dot{\phi}\cos(\vartheta) + \dot{\psi})^2$$

In še:

$$2J = J' + \int 2z^2 dm$$

Prosta precesija

Zanjo ne potrebujemo računati Eulerjevih enačb ampak jo lahko dobimi iz Eulerjevih kotov. Iz enačbe za $\vec{\omega}$ lahko zapišemo, da je:
$\vec{\omega} = (\sin\vartheta\sin\psi\,\dot{\varphi} + \cos\psi\,\dot{\vartheta})\vec{e}_1' + (\sin\vartheta\cos\psi\,\dot{\varphi} - \sin\psi\,\dot{\vartheta})\vec{e}_2' + (\cos\vartheta\,\dot{\varphi} + \dot{\psi})\vec{e}_3'$, kjer je $\dot{\varphi}$ precesija vrtavke, $\dot{\vartheta}$ pa nutacija vrtavke. To vstavimo v Euler Lagrangevo enačbo, da ugotovimo, zveze med njimi. ($T = \sum \frac{1}{2} J_i \omega_i^2$)

Togo telo z 1 nepremično točko

Po Eulerjevem izreku je gibanje takega telesa ob vsakem času rotacija okoli neke osi.
$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

$\vec{L} = \sum_i m_i\left[(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)\vec{\omega} - (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})\vec{r}_i\right] = \underline{L}\vec{\omega}$

$$\underline{L} = \int \rho\, dV \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

$\vec{L}' = R\vec{L}$ in $\vec{\omega}' = R\vec{\omega} \implies \underline{J}' = R\underline{L}R^T$
$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\vec{\omega}\underline{J}\vec{\omega}$

Delajmo v lastnem sistemu telesa.
$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{neinerc.}} + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{M}$
$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{neinerc.}} = \sum_\alpha J_{\alpha\alpha}\dot{\omega}_\alpha \vec{e}_\alpha$

Eulerjeve enačbe

$J_1\dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 = M_1$
$J_2\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 = M_2$
$J_3\dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 = M_3$

Vpeta osno simetrična vrtavka

Uporabljamo Eulerjeve kote.
$J_1 = J_2 \neq J_3$

Če zapišemo Lagrangevo funkcijo za tako vrtavko, dobimo, da je:
$L = \frac{1}{2}J_1(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 - mgz =$
$= \frac{1}{2}J_1(\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2}J_3(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi})^2 - mgl\cos\vartheta$

Konstante gibanja so enake:
$p_\psi = J_3(\dot{\psi} + \cos\vartheta\,\dot{\varphi}) = J_3\omega_3 = konst = J_1 a$
$p_\varphi = (J_1\sin^2\vartheta + J_3\cos^2\vartheta)\dot{\varphi} + J_3\cos\vartheta\,\dot{\psi} = konst. = J_1 b$

Celotna energija pa se glasi:
$E = T + V = konst.$

Odvisnosti kotov so:
$\dot{\varphi} = \frac{b - a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$
$\dot{\psi} = \frac{J_1}{J_3}a - \frac{b - a\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\cos\vartheta$

Osnovna enačba vrtavke

$\tilde{E} = \frac{1}{2}J_1\dot{\vartheta}^2 + \tilde{V}(\vartheta) = E - \frac{1}{2}J_3\omega_3^2 = konst.$
$\tilde{V}(\vartheta) = \frac{1}{2}\frac{(b - a\cos\vartheta)^2}{\sin^2\vartheta} + mgl\cos\vartheta$
$\implies \dot{\vartheta}^2 = \frac{2}{J_1}(\tilde{E} - \tilde{V}(\vartheta))$

Pogosto uporabna substitucija $u = \cos\vartheta$.
$\alpha = \frac{2\tilde{E}}{J_1}$ in $\beta = \frac{2mgl}{J_1}$
$t = \sqrt{\frac{J_1}{2}}\int_{\vartheta(0)}^{\vartheta(t)} \frac{d\vartheta}{\sqrt{\tilde{E} - \tilde{V}(\vartheta)}} = -\int_{u(0)}^{u(t)} \frac{du}{\sqrt{f(u)}}$
$f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2$
S pogojem $f(u) \geq 0$ kvalitativno določimo obnašanje vrtavke.

Hamiltonov formalizem

Namesto s q_i delamo s $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$.
$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}$ (iz EL enačbe)

Hamiltonove enačbe

$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$
$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$
$\frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}$

Nabit delec v magnetnem polju

V Lagrangevemu formalizmu lahko upoštevamo tudi potenciale U za katere velja
$F_i = -\frac{\partial U(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U(q_i, \dot{q}_i, t)}{\partial \dot{q}_i}$.

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \qquad \vec{E} = -\nabla\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$
$U = e\varphi - e\vec{v} \cdot \vec{A}$
$\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = -\nabla_{\vec{r}}U + \frac{d}{dt}\nabla_{\vec{v}}U$

$L = \frac{1}{2}mv^2 - U = \frac{1}{2}mv^2 - e\varphi + e\vec{v} \cdot \vec{A}$
$\vec{p} = \nabla_{\vec{v}}L = m\vec{v} + e\vec{A}$
$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{1}{2}mv^2 + e\varphi = \frac{|\vec{p} - e\vec{A}|^2}{2m} + e\varphi$

Poissonovi oklepaji

$\{f, g\} = \sum_i\left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}\right)$
$\{f, \lambda g + \mu h\} = \lambda\{f, g\} + \mu\{f, h\}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}$
$\{f, g\} = -\{g, f\}$
$\{f, gh\} = \{f, g\}h + \{f, h\}g$
$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$
$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t}$
f konstanta gibanja $\left(\frac{df}{dt} = 0\right) \implies \{H, f\} = \frac{\partial f}{\partial t}$

$\{q_i, q_j\} = 0$
$\{p_i, p_j\} = 0$
$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$
$\{l_i, l_j\} = \varepsilon_{ijk}l_k$

Majhna nihanja

$L = \frac{1}{2}\sum_{ij} w_{ij}(\underline{q})\dot{q}_i\dot{q}_j - V(\underline{q})$
Naj bo $\underline{q}^0$ ravnovesne lega sistema in $\underline{\eta} = \underline{q} - \underline{q}^0$.
$\implies V(\underline{q}) = V(\underline{q}^0) + \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{\underline{q}^0}\eta_i\eta_j + \cdots$
$\implies w_{ij}(\underline{q}) = w_{ij}(\underline{q}^0) + c\ldots$

Definiramo $T_{ij} = w_{ij}(\underline{q}_0)$ in $V_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{ij}\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\Big|_{\underline{q}^0}$.
$\implies \tilde{L} = T - (V - V_0) = \frac{1}{2}(\dot{\underline{\eta}}^T\underline{\underline{T}}\,\dot{\underline{\eta}} - \underline{\eta}^T\underline{\underline{V}}\,\underline{\eta})$
$\implies \sum_j T_{ij}\ddot{\eta}_j + \sum_j V_j\eta_j = 0$

Lastna nihanja $\eta_i = C\alpha_i e^{i\omega t}$
$\implies \underline{\underline{V}}\,\underline{a} = \omega^2\underline{\underline{T}}\,\underline{a}$
$\implies$ Lastne frekvence ω_k in lastni vektorji $\underline{a}_k$ ($\underline{\underline{A}}$).

Splošno nihanje $\eta_i(t) = \sum_{k=1}^n a_{ki}\alpha_k(t)$
Izberemo $\underline{a}_k$ tako, da $\underline{a}_i^T\underline{\underline{T}}\,\underline{a}_j = \delta_{ij}$
$\implies \underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{T}}\,\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}$ in $\underline{\underline{A}}^T\underline{\underline{V}}\,\underline{\underline{A}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
$\implies \alpha_k = C_k\cos(\omega_k t + \delta_k)$

Reševanje nalog:
Zapišemo matriko za T in V in nato rešujemo enačbo

$$\det(\mathrm{V} - T) = 0 \tag{1}$$

Iz česar dobimo lastne vrednosti λ_k in $\vec{a_k}$. Rešitev enačbe, pa je oblike

$$\eta(t) = \sum \alpha_k(t)\vec{a_k} \tag{2}$$

kjer je α_k rešitev posamezne enačbe
$(A_k\sin(\lambda_k t) + B_k\cos(\lambda_k t))$

Lagrangev formalizem za zvezno sredstvo

$\mathcal{L}(u, u_x, u_t, t) = \mathcal{T} - \mathcal{V}$ (lagrangian na volumen)
$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t} + \frac{d}{dx}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u} = 0$
$\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_t}$ (posplošeni impulz)
$H = \int (\pi u_t - \mathcal{L})\, dV = \int \mathcal{H}\, dV$

Kanonične transformacije

Transformacija $q_i \to Q_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$ in $p_i \to P_i(\underline{q}, \underline{p}, t)$ je kanonična, če ohranja Poissonove oklepaje. Tedaj:
$\dot{Q}_i = \frac{\partial H}{\partial P_i} + \frac{\partial Q_i}{\partial t}$
$\dot{P}_i = -\frac{\partial H}{\partial Q_i} + \frac{\partial P_i}{\partial t}$

Hamilton-Jacobijev formalizem

$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)\, dt$ $S(q_2, t_2)$ si predstavljamo kot funkcijo končne točke. Integral teče po klasični poti $q(t)$, ki ustreza gibalnim enačbam.
$\frac{\partial S}{\partial q} = p$ (oziroma $\nabla S(\vec{r}) = \vec{p}$)
$H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$

Vektorski produkti

Smer vektorja: $\dot{r} = \frac{\dot{\vec{r}}\vec{r}}{r}$

Diferencialne enačbe

Enačba dušenega nihanja:

$$\dddot{\phi} + 2\beta\dot{\phi} + \omega_0^2\phi = 0$$

Nastavek $= \phi = A\cos(\omega t)e^{-\beta t}$ (ω_0 in ω sta različni. Nastavek odvajaš in ga vstaviš v enačbo, da ugotoviš ω. A dobiš iz začetnih pogojev.

Enačba z kompleksnim delom:

$$\ddot{\zeta} + Ai\dot{\zeta} - B\zeta = 0$$

Nastavek $= \zeta = \zeta_0 e^{-iut}$
Nastavek odvajaš in vstaviš v enačbo, da ugotoviš u. ζ_0 ugotoviš iz začetnih pogojev.

Enačba hiperboličnega nihanja:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0$$

Nastavek : $x = Ae^{\lambda t}$
Nastavek odvajaš in ga vstaviš v enačbo, da ugotoviš λ. A dobiš iz začetnih pogojev.

Enačbe ploskev

Elipsa:
$x^2(1+b) + y^2(1-b) = a$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ **Hiperbola:**
$x^2(1+b) - y^2(1-b) = a$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ **Parabola:**
$y^2 = 2px$