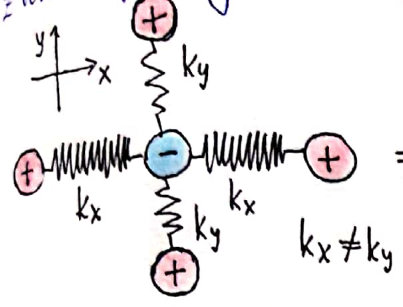
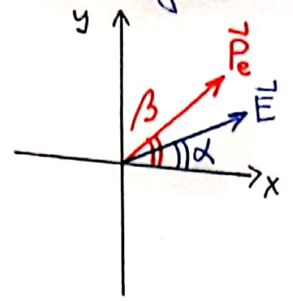
OPTIČNO ANIZOTROPNE SNOVI (optična dvolomnost)

Anizotropne snovi imajo v različnih smereh različne lastnosti. V optično anizotropnih snoveh je inducirana polarizacija, ki nastane zaradi prisotnosti zunanjega polja, odvisna ne le od velikosti, ampak tudi od smeri tega polja. V Lorentzovem modelu snovi, si lahko predstavljamo, da je kroglica negativnega naboja pripeta v mrežo sosednjih fiksnih nabojev z vzmetmi, ki imajo v horizontalni smeri drugačno konstanto vzmeti, kot tiste v vertikalni smeri.



$\Rightarrow$



$$P_x = (\varepsilon_{xx}-1)\varepsilon_0 E_x$$
$$P_y = (\varepsilon_{yy}-1)\varepsilon_0 E_y$$
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{P_y}{P_x} = \frac{(\varepsilon_{yy}-1)E_y}{(\varepsilon_{xx}-1)E_x} = \frac{(\varepsilon_{yy}-1)}{(\varepsilon_{xx}-1)}\operatorname{tg}\alpha$$

Osnovna posledica opisane anizotropije je ta, da smer inducirane polarizacije $\vec{P}_e$ ni več vzporedna z smerjo optičnega električnega polja $\vec{E}$. Posledično tudi smer vektorja gostote električnega polja $\vec{D}$ ni več vzporedna z smerjo $\vec{E}$. V splošnem tovrstno povezavo opišemo kot

$$\tilde{\vec{D}} = \varepsilon_0\tilde{\vec{E}} + \tilde{\vec{P}}_e = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon}\tilde{\vec{E}} \quad , \quad \underline{\varepsilon} = \text{tenzor drugega ranga} = \text{dielektrični tenzor}$$

(tenzor dielektrične permitivnosti)

Podobno lahko zapišemo $\tilde{\vec{B}} = \mu_0\underline{\mu}\vec{H}$. V nadaljevanju se bomo zaradi enostavnosti zanimali za snovi, v katerih velja $\mu \equiv 1$. Obenem bomo predpostavili tudi, da smo izven območja absorpcije in so posledično vse komponente tenzorja $\underline{\varepsilon}$ realne. To v praksi pomeni, da bomo obravnavali prozorne snovi z anizotropno strukturo. Tipično so to minerali, kot na primer kalcit, sljuda, ... Zaradi njegove povezave z energijo elektromagnetnega polja mora biti tenzor $\underline{\varepsilon}$ Hermitski in pozitivno definiten. To pomeni, da je tenzor simetričen in ga je vedno možno diagonalizirati. Vse njegove lastne vrednosti so realne in pozitivne.

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad , \text{lastni KS } XYZ \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{XX} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{YY} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{ZZ} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{XX}, \varepsilon_{YY}, \varepsilon_{ZZ} > 0$$

LOMNI KOLIČNIK

Privzemimo, da se po anizotropni snovi širi ravno potujoče sinusno valovanje z valovnim vektorjem $\vec{k}$. Zanima nas, kakšna je ustrezna fazna hitrost oz. lomni količnik v odvisnosti od smeri valovnega vektorja ter od polarizacije valovanja. (Privzamemo $\rho_e=0$, $j_e=0$, $\sigma=0$)

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\vec{E}} &= \vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} \\ \tilde{\vec{D}} &= \vec{D}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} \\ \tilde{\vec{B}} &= \mu_0\tilde{\vec{H}} = \vec{B}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} \\ \tilde{\vec{S}} &= \tilde{\vec{E}}\times\tilde{\vec{H}} = \vec{S}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}-i\omega t} \end{aligned}\right\}$$

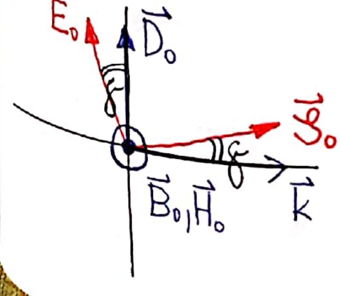
veljati mora $\operatorname{div}\tilde{\vec{B}} = 0 \Rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{B}_0 = 0 \Rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{k}$

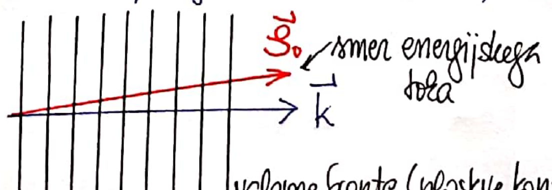
$$\operatorname{div}\tilde{\vec{D}} = 0 \Rightarrow i\vec{k}\cdot\vec{D}_0 = 0 \Rightarrow \vec{D}_0 \perp \vec{k}$$

$$\operatorname{rot}\tilde{\vec{E}} = -\frac{\partial\tilde{\vec{B}}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}\times\vec{E}_0 = i\omega\vec{B}_0 \Rightarrow \vec{B}_0 \perp \vec{E}_0$$

$$\mu_0\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{rot}\tilde{\vec{B}} = \mu_0\cdot\frac{\partial\tilde{\vec{D}}}{\partial t} \Rightarrow i\vec{k}\times\vec{B}_0 = -i\omega\vec{D}_0 \Rightarrow \vec{D}_0 \perp \vec{B}_0$$

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \text{ (Poyntingov vektor)} \Rightarrow \vec{S} \perp \vec{E}_0 , \vec{S} \perp \vec{B}_0$$





valovne fronte (ploskve konstantne faze)

smerni vektorji

$$\vec{S} = S\cdot\vec{t}$$

$$\boxed{\vec{k} = k\cdot\vec{s}}$$

V anizotropni snovi EMV ostaja tranzverzalno valovanje $\vec{e}$ s stališča vektorjev $\vec{k} \perp \vec{D}_0 \perp \vec{B}_0$. Električna poljska jakost $\vec{E}$ pridobi tudi longitudinalno komponento vzdolž smeri valovnega vektorja $\vec{k}$. Zato še vedno velja zveza $\operatorname{div} \vec{D} = 0$, ne velja pa več zveza $\operatorname{div} \vec{E} = 0$. Posledično tudi valovna enačba za $\vec{E}$, kakor smo jo navajeni zapisati v izotropnih snoveh, ne velja več.

Maxwellove enačbe ($\rho_e = j = \sigma = 0$)

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}\vec{B} = \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad \vec{D} = \varepsilon_0 \underline{\varepsilon} \vec{E}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rot}(\operatorname{rot}\vec{E}) = -\frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{B}) = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{rot}\vec{H}) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underline{\varepsilon}\vec{E})$$

$$i\vec{k} \times (i\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{-1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\underline{\varepsilon}\vec{E}) = \frac{\omega^2}{c_0^2} \cdot \underline{\varepsilon}\vec{E} = k_0^2 \underline{\varepsilon}\vec{E}$$

, vpeljali smo $k_0 = \frac{\omega}{c_0}$

uporabimo zvezo $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$

$$-\left((\vec{k}\vec{E})\vec{k} - k^2\vec{E}\right) = k_0^2 \underline{\varepsilon}\vec{E}$$

$$k^2\vec{E} - (\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k} = k_0^2 \underline{\varepsilon}\vec{E}$$

$$\boxed{k^2\vec{E} - k_0^2 \underline{\varepsilon}\vec{E} = (\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k}}$$

V izotropni snovi je izraz na desni enak 0 in velja $k = k_0\sqrt{\varepsilon} = k_0 n$. Tudi v anizotropni snovi lomni količnik n definiramo na podoben način.

$k = k_0 \cdot n$ ← lomni količnik

$\vec{k} = k_0 \cdot n \cdot \vec{s}$, $\vec{s}$ = smerni vektor valovnih front

To je vektorska enačba, ki v resnici pomeni, da imamo tri skalarne enačbe (za 3 smeri). Za nadaljnji izračun si izberemo, da so to smeri XYZ v koordinatnem sistemu, v katerem je tenzor $\underline{\varepsilon}$ diagonalen, se pravi $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}&: (\vec{k}\cdot\vec{E})k_x = (k^2 - k_0^2\varepsilon_{xx})E_x \quad / \cdot k_x \\ \mathbf{Y}&: (\vec{k}\cdot\vec{E})k_y = (k^2 - k_0^2\varepsilon_{yy})E_y \quad / \cdot k_y \\ \mathbf{Z}&: (\vec{k}\cdot\vec{E})k_z = (k^2 - k_0^2\varepsilon_{zz})E_z \quad / \cdot k_z \end{aligned}$$

← množimo obe strani enačbe

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\left(\frac{k_x^2}{k^2 - k_0^2\varepsilon_{xx}}\right) = E_x k_x$$

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\left(\frac{k_y^2}{k^2 - k_0^2\varepsilon_{yy}}\right) = E_y k_y$$

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\left(\frac{k_z^2}{k^2 - k_0^2\varepsilon_{zz}}\right) = E_z k_z$$

enačbe seštejemo

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{k_j^2}{k_0^2(n^2 - \varepsilon_{jj})}\right) = (\vec{k}\cdot\vec{E})$$

Ker vemo, da ima v anizotropnem materialu optično polje tudi longitudinalno komponento, velja $(\vec{k}\vec{E}) \neq 0$, zato lahko enačbo na obeh straneh delimo s tem izrazom.

$$\frac{n^2}{n^2} \quad \boxed{\sum_{j=1}^{3}\frac{(k_j/k_0)^2}{(n^2 - \varepsilon_{jj})} = 1}$$

$k_j = k_0 \cdot n \cdot s_j$; $\vec{s} = (s_x, s_y, s_z)$

množimo še v števcu in imenovalcu z n^2 in upoštevamo $(k_j/k_0 n) = s_j \Rightarrow$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{s_j}{n^2 - \varepsilon_{jj}}\right) = \frac{1}{n^2}}$$

<u>Fresnelova enačba</u> za izračun lomnega količnika v anizotropnem materialu

V snovi izberemo smer propagacije valovnih front $\vec{s}$ (smerni vektor) in poiščemo koordinate vektorja $\vec{s}$ glede na koordinatni sistem, v katerem ima tenzor $\underline{\varepsilon}$ diagonalno obliko (lastni KS tenzorja $\underline{\varepsilon}$). Dobimo enačbo 4-reda za n oziroma komponente s_j v lastnem sistemu vstavimo v Fresnelovo enačbo. Dobimo enačbo 4-reda za n oziroma kvadratno enačbo za n^2. Obstajata dve različni pozitivni rešitvi za n, ki predstavljata dve možni vrednosti lomnega količnika za izbrano smer $\vec{s}$. Vsaki izmed njiju ustreza drugačna polarizacija EMV oz. druga smer vektorja $\vec{D}_0$ v izrazu $\vec{D} = \vec{D}_0 e^{i\vec{k}\vec{r} - i\omega t}$. Ugotovimo, da za ti dve lastni polarizaciji velja $\vec{D}_{01} \perp \vec{D}_{02}$ oz. $(\vec{D}_{01} \cdot \vec{D}_{02}) = 0$.

Rešitvam za n, ki ju dobimo iz Fresnelove enačbe pri danem $\vec{s}$, rečemo **lastna lomna količnika**. Označimo ju kot n_1 in n_2. Ustrezna vektorja $\vec{D}_{10}$ in $\vec{D}_{20}$ pa imenujemo lastni polarizaciji. Pokazali bomo, da sta **lastni polarizaciji** linearni in med seboj ortogonalni.

$$\vec{s} \Rightarrow \begin{cases} n_1, n_2 \\ \vec{D}_{01} \perp \vec{D}_{02} \end{cases}$$

DOKAZ
uporabimo:

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k} = \underbrace{k_0^2 n^2}_{k^2}\vec{E} - k_0^2 \underline{\varepsilon}\vec{E} \quad , \text{ upoštevamo } \varepsilon_0\underline{\varepsilon}\vec{E} = \vec{D}$$

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k} = k^2\vec{E} - \frac{k_0^2\vec{D}}{\varepsilon_0} \Big/ \frac{n^2}{n^2} \quad \text{drugi člen množimo z } \frac{n^2}{n^2}$$

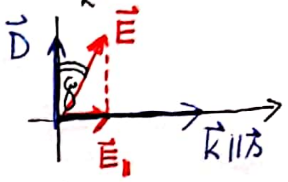
$$(\vec{k}\vec{E})\vec{k} = k^2\vec{E} - k^2\vec{D}/\varepsilon_0 n^2$$

$$* \quad \frac{(\vec{k}\vec{E})\vec{k}}{k^2} = \left(\vec{E} - \frac{\vec{D}}{n^2\varepsilon_0}\right) = \vec{E}_{\parallel}$$

v izrazu na desni strani prepoznamo longitudinalno komponento vektorja $\vec{E}$, pri čemer je $\vec{s} = \frac{\vec{k}}{k}$

$$\vec{E}_{\parallel} = (\vec{s}\cdot\vec{E})\vec{s} = \left[\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)\vec{E}\right]\left[\left(\frac{\vec{k}}{k}\right)\right] = \frac{(\vec{k}\vec{E})\vec{k}}{k^2} \checkmark$$

vektor $\vec{E}$ lahko zapišemo kot vsoto longitudinalne in transverzalne komponente (glede na $\vec{s}$).



$$\vec{E} = \vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp} \, , \quad \vec{E}_{\parallel} = (\vec{k}\vec{E})\vec{k}/k^2$$

če enačbo * obrnemo $\Rightarrow$

$$\vec{E}_{\perp} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} = \vec{E} - \frac{(\vec{k}\vec{E})\vec{k}}{k^2}$$

$$\frac{\vec{D}}{n^2\varepsilon_0} = \vec{E} - \vec{E}_{\parallel} = \vec{E}_{\perp} \Rightarrow \boxed{\vec{D} = n^2\varepsilon_0\vec{E}_{\perp}} \Rightarrow \vec{D}_{01} = n_1^2\varepsilon_0\vec{E}_{1\perp} \text{ in } \vec{D}_{02} = n_2^2\varepsilon_0\vec{E}_{2\perp}$$

sedaj si oglejmo izraza:

$$\vec{E}_1\vec{D}_2 = \sum_{ij} E_{1i}\varepsilon_{ij}E_{2j} \quad \text{in} \quad \vec{E}_2\vec{D}_1 = \sum_{ij} E_{2i}\varepsilon_{ij}E_{1j} = \sum_{ij} E_{1i}\varepsilon_{ji}E_{2j} = \sum_{ij} E_{1i}\varepsilon_{ij}E_{2j}$$

preimenujemo $i \to j$, $j \to i$

ker je tenzor ε simetričen $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$

Od tod sledi

$$\vec{E}_1\vec{D}_2 - \vec{E}_2\vec{D}_1 = \sum_{ij} E_{1i}\varepsilon_{ij}E_{2j} - \sum_{ij} E_{1i}\varepsilon_{ij}E_{2j} = 0$$

upoštevamo še $\vec{E}\vec{D} = (\vec{E}_{\parallel} + \vec{E}_{\perp})\vec{D} = 0 + \vec{E}_{\perp}\vec{D}$
in za $\vec{E}_{\perp}$ uporabimo zgoraj dobljeno povezavo z $\vec{D}_{\perp}$ oz. $\vec{D}$.

$$(\vec{E}_{1\perp}\vec{D}_2 - \vec{E}_{2\perp}\vec{D}_1) = 0$$

$$\left(\frac{\vec{D}_1}{n_1^2\varepsilon_0}\right)\vec{D}_2 - \left(\frac{\vec{D}_2}{n_2^2\varepsilon_0}\right)\vec{D}_1 = 0 \Rightarrow \frac{\vec{D}_1\vec{D}_2}{\varepsilon_0}\left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2}\right) = 0 \, ,$$

ker velja za lastna lomna količnika $n_1 \neq n_2$
$\Rightarrow \vec{D}_1\cdot\vec{D}_2 = 0$ oz. $\vec{D}_{10} \perp \vec{D}_{20}$ ✓

kadar pa sta n_1 in n_2 enaka, ima v splošnem $\vec{D}$ lahko poljubno smer (degenerirana situacija). Vendar tudi takrat po navadi izberemo $\vec{D}_{10} \perp \vec{D}_{20}$.

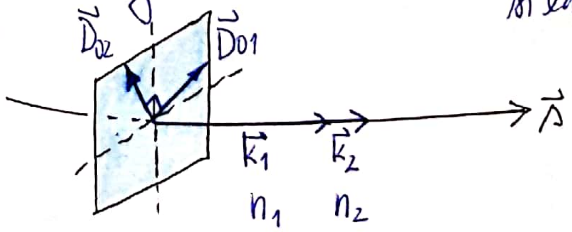
Vidimo tudi, da sta vektorja $\vec{D}_1$ in $\vec{D}_2$ oziroma razmerje med njima realna

$$\frac{\vec{D}_1}{\vec{D}_2} = \frac{n_1^2\varepsilon_0\vec{E}_{1\perp}}{n_2^2\varepsilon_0\vec{E}_{2\perp}} \in \mathbb{R}$$

kar pomeni, da sta lastni polarizaciji $\vec{D}_1$ in $\vec{D}_2$ linearni (Jonesov kalkulus) ✓

V optično anizotropni snovi se lahko vzdolž izbrane smeri $\vec{s}$ propagirata dve linearno polarizirani lastni valovanji, ki sta med seboj ortogonalni ($\vec{D}_{01} \perp \vec{D}_{02}$) in imata vsako svojo fazno hitrost $c_1 = (c_0/n_1)$ in $c_2 = (c_0/n_2)$, ki ju določata lastna lomna količnika n_1 in n_2.

Pri določanju smeri $\vec{D}_{01}$ in $\vec{D}_{02}$ ter ustreznih lomnih količnikov si lahko pomagamo z grafičnim pripomočkom imenovanim optična indikatrisa oz. indeksni elipsoid.



$$\vec{k}_1 = k_0 n_1 \vec{s}$$
$$\vec{k}_2 = k_0 n_2 \vec{s}$$

OPTIČNA INDIKATRISA

Optična indikatrisa oz. indeksni elipsoid je povezan z grafično predstavitvijo tenzorja ε. Kot vemo, lahko povprečno energijo oz. energijsko gostoto EMV zapišemo kot:

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 = \frac{1}{2}(\vec{D}_0 \vec{E}_0) \quad \text{v izotropni snovi}$$

V anizotropni snovi je analogni izraz

$$\langle w \rangle = \frac{1}{2}(\vec{D}_0 \vec{E}_0) = \frac{1}{2}(\vec{D}_0 \underline{\varepsilon}^{-1} \vec{D}_0)\frac{1}{\varepsilon_0}$$

upoštevali smo: $\vec{D}_0 = \underline{\varepsilon}\varepsilon_0 \vec{E}_0$ oz. $\vec{E}_0 = \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D}_0$

$$2\varepsilon_0\langle w \rangle = \vec{D}_0 \underline{\varepsilon}^{-1} \vec{D}_0$$

V lastnem koordinatnem sistemu tenzorja $\underline{\varepsilon}$ to zvezo zapišemo:

$$2\varepsilon_0 \langle w \rangle = \frac{D_x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{D_y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{D_z^2}{\varepsilon_{zz}}$$

$\underline{\varepsilon}^{-1}$ = inverzni dielektrični tenzor oz. impermeabilnostni tenzor.

$$\underline{\varepsilon}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\varepsilon_{xx}} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}_{XYZ}$$

Če uvedemo še renormalizacijo koordinat $\vec{r} = \vec{D}/\sqrt{2\varepsilon_0\langle w \rangle}$ dobimo:

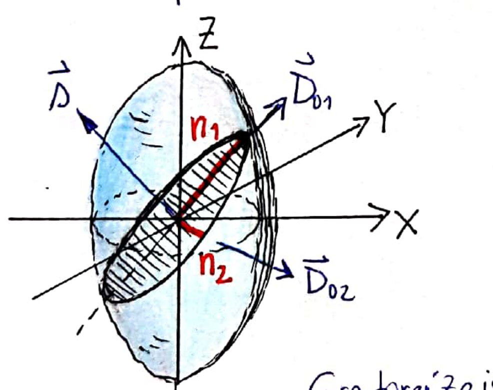
$$\boxed{\frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}} = 1}$$

To je enačba elipsoida, ki opisuje ploskve konstantne vrednosti $\langle w \rangle$ v anizotropnem mediju z lastnimi osmi XYZ.

PRAVILO INDIKATRISE:

Kako ugotovimo smer lastnih polarizacij $\vec{D}_{01}$ in $\vec{D}_{02}$ ter lastnih vrednosti lomnih količnikov n_1 in n_2, če poznamo optično indikatriso neke snovi.

RECEPT: V prostoru indikatrise izberemo smerni vektor $\vec{s}$. Nato narišemo ploskev pravokotno na $\vec{s}$, ki gre čez središče elipsoida (indikatrise). Presečišče elipsoida in navedene ploskve je elipsa. Njene glavne osi predstavljajo smeri lastnih polarizacij $\vec{D}_{01}$ in $\vec{D}_{02}$, dolžina ustreznih polosi pa ustreznim lomnim količnikom n_1 in n_2.



S pomočjo tega "recepta" lahko nazorno hitro ugotovimo, kakšno obnašanje EMV lahko pričakujemo.

Če navedeni "recept" matematično formuliramo ⇒

Iščemo ekstreme funkcije r^2 pri pogoju (vezani ekstremi!)

$\vec{s}\cdot\vec{r} = 0$ (točke ležijo na zgoraj omenjeni ploskvi)

in $\left(\frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}}\right) = 1$ (točke ležijo na elipsoidu)

Gre torej za iskanje ekstremov funkcionala $F(x,y,z)$

$$F = (x^2+y^2+z^2) + 2\lambda_1(x s_x + y s_y + z s_z) + \lambda_2\left(\frac{x^2}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y^2}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z^2}{\varepsilon_{zz}} - 1\right),$$

ki jih dobimo, ko velja

λ_1, λ_2, Lagrangeova multiplikatorja

$\nabla F = 0$ oz. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial z} = 0$

Dokaz, da navedeni "recept" deluje

$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \Rightarrow x + \lambda_1 s_x + \lambda_2 x/\varepsilon_{xx} = 0 \quad /\cdot x \quad /\cdot s_x$

$\frac{\partial F}{\partial y} = 0 \Rightarrow y + \lambda_1 s_y + \lambda_2 y/\varepsilon_{yy} = 0 \quad /\cdot y \quad /\cdot s_y$

$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \Rightarrow z + \lambda_1 s_z + \lambda_2 z/\varepsilon_{zz} = 0 \quad /\cdot z \quad /\cdot s_z$

A) enačbe množimo z x, y oz z in seštejemo

$$x^2 + \lambda_1 s_x x + \lambda_2 x^2/\varepsilon_{xx} = 0$$
$$y^2 + \lambda_1 s_y y + \lambda_2 y^2/\varepsilon_{yy} = 0$$
$$z^2 + \lambda_1 s_z z + \lambda_2 z^2/\varepsilon_{zz} = 0$$

$$r^2 + \lambda_1 \underbrace{(\vec{s}\vec{r})}_{0} + \lambda_2(\cdot 1) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -r^2$$

B) enačbe zmnožimo z s_x, s_y, s_z in seštejemo

$$x \cdot s_x + \lambda_1 s_x^2 + \lambda_2 x \cdot s_x/\varepsilon_{xx} = 0$$
$$y \cdot s_y + \lambda_1 s_y^2 + \lambda_2 y \cdot s_y/\varepsilon_{yy} = 0$$
$$z \cdot s_z + \lambda_1 \cdot s_z^2 + \lambda_2 z \cdot s_z/\varepsilon_{zz} = 0$$

$$\underbrace{\vec{s}\cdot\vec{r}}_{0} + \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2\left(\frac{x \cdot s_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y s_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z \cdot s_z}{\varepsilon_{zz}}\right) = 0$$

$$\lambda_1 = -\lambda_2\left(\frac{x s_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y s_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z \cdot s_z}{\varepsilon_{zz}}\right)$$

Sedaj vstavimo dobljeni vrednosti za λ_1 in λ_2 nazaj v prvotno enačbo za $(\partial F/\partial x) = 0$, $(\partial F/\partial y) = 0$ in $(\frac{\partial F}{\partial z}) = 0$.

Vstavimo vrednosti $\lambda_2 = -r^2$ in $\lambda_1 = r^2\left(\frac{x\Delta_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y\Delta_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z\Delta_z}{\varepsilon_{zz}}\right)$ v sistem enačb, dobimo

$$x + r^2\left(\frac{x\Delta_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y\Delta_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z\Delta_z}{\varepsilon_{zz}}\right)\Delta_x - \frac{r^2 x}{\varepsilon_{xx}} = 0$$

$$y + r^2\left(\frac{x\Delta_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y\Delta_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z\Delta_z}{\varepsilon_{zz}}\right)\Delta_y - \frac{r^2 y}{\varepsilon_{yy}} = 0$$

$$z + r^2\left(\frac{x\Delta_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y\Delta_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z\Delta_z}{\varepsilon_{zz}}\right)\Delta_z - \frac{r^2 z}{\varepsilon_{zz}} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} x(1-r^2/\varepsilon_{xx}) + r^2\left(\frac{x\Delta_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y\Delta_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z\Delta_z}{\varepsilon_{zz}}\right)\Delta_x &= 0 \\ y(1-r^2/\varepsilon_{yy}) + r^2\left(\quad -||- \quad \right)\Delta_y &= 0 \\ z(1-r^2/\varepsilon_{zz}) + r^2\left(\quad -||- \quad \right)\Delta_z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

označimo $r_i = x, y, z \Rightarrow$ in $\vec{\Delta}_i = \Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$

$$\vec{r}_i\left(1 - \frac{r^2}{\varepsilon_{ii}}\right) + r^2\left(\frac{x\Delta_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{y\Delta_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{z\Delta_z}{\varepsilon_{zz}}\right)\vec{\Delta}_i = 0$$

$$\vec{r}_i\left[\frac{r^2}{\varepsilon_{ii}} - 1\right] = r^2\Big[\underbrace{\sum_i \frac{r_i\Delta_i}{\varepsilon_{ii}}}_{\text{vsota po } i}\Big]\vec{\Delta}_i$$

Dobljeni set enačb pa je v vektorski obliki analogen enačbi za $\vec{D}$, ki jo dobimo iz Maxwellovih enačb.

Spomnimo se: $(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k} = k^2\vec{E} - k_0^2\underline{\varepsilon}\vec{E}$

$$\varepsilon_0\underline{\varepsilon}\vec{E} = \vec{D} \qquad \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$
$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\underline{\varepsilon}^{-1}\cdot\vec{D}$$

$$k^2(\vec{\Delta}\vec{E})\vec{\Delta} = k^2\frac{1}{\varepsilon_0}\underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D} - k_0^2\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{D}\Big/\frac{n^2}{n^2}$$

$$k^2\left(\frac{\vec{\Delta}}{\varepsilon_0}\underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D}\right)\vec{\Delta} = k^2\frac{1}{\varepsilon_0}\underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D} - k^2\vec{D}/\varepsilon_0 n^2$$

$$(\vec{\Delta}\underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D})\vec{\Delta} = \underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D} - \vec{D}/n^2 = \frac{1}{n^2}(n^2\underline{\varepsilon}^{-1}\vec{D} - \vec{D}) = \frac{1}{n^2}(n^2\underline{\varepsilon}^{-1} - 1)\vec{D}$$

upoštevamo diagonalno obliko ε^{-1}.

$$n^2\Big[\underbrace{\sum_i \frac{\Delta_i D_i}{\varepsilon_{ii}}}\Big]\vec{\Delta}_i = \vec{D}_i\left[\frac{n^2}{\varepsilon_{ii}} - 1\right] \quad \checkmark$$

$$\sum = \frac{\Delta_x D_x}{\varepsilon_{xx}} + \frac{\Delta_y D_y}{\varepsilon_{yy}} + \frac{\Delta_z D_z}{\varepsilon_{zz}}$$

Če $\vec{D}$ zamenjamo z $\vec{r}$ in $|r|$ z n dobimo enake enačbe kot zgoraj.

PLOSKEV VALOVNEGA VEKTORJA

Kljub temu, da je indikatrisa zelo nazorna, pa z njo težko kaj konkretno izračunamo. Za bolj konkretni račun se direktno lotimo reševanja Maxwellovih enačb oz. enačbe

$$(\vec{k}\cdot\vec{E})\vec{k} = (k^2 - k_0^2\underline{\varepsilon})\vec{E}$$

to je sistem treh enačb za 3 komponente vektorja $\vec{E}$, ki bo imel rešitve le, če bo determinanta ustrezne matrike sistema enaka 0.

Enačbe spet zapišimo v lastnem sistemu tenzorja $\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$

Za komponento v smeri osi x dobimo:

$$(k_x E_x + k_y E_y + k_z E_z)k_x = k^2 E_x - k_0^2\varepsilon_{xx}E_x$$

$$k_x^2 E_x + k_x k_y E_y + k_x k_z E_z - k^2 E_x + k_0^2\varepsilon_{xx}E_x = 0$$

$$k^2 E_x - k_0^2\varepsilon_{xx}E_x - k_x^2 E_x - k_x k_y E_y - k_x k_z E_z = 0 \quad \text{, upoštevamo } k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$(k_y^2 + k_z^2 - k_0^2\varepsilon_{xx})E_x - k_x k_y E_y - k_x k_z E_z = 0$$

Podobno dobimo še

$$-k_y k_x E_x + (k_x^2 + k_z^2 - k_0\varepsilon_{yy})E_y - k_y k_z E_z = 0$$

in

$$-k_z k_x E_x - k_z k_y E_y + (k_x^2 + k_y^2 - \varepsilon_{zz}k_0^2)E_z = 0$$

zapišimo ustrezno matriko M sistema enačb

$$M\cdot\vec{E} = \begin{bmatrix} k_y^2 + k_z^2 - k_0^2\varepsilon_{xx} & -k_x k_y & -k_x k_z \\ -k_y k_x & k_x^2 + k_z^2 - k_0^2\varepsilon_{yy} & -k_y k_z \\ -k_z k_x & -k_z k_y & k_x^2 + k_y^2 - k_0^2\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{bmatrix} = 0$$

Zato, da bomo dobili sploh rešitve, mora veljati $\boxed{\det M = 0}$

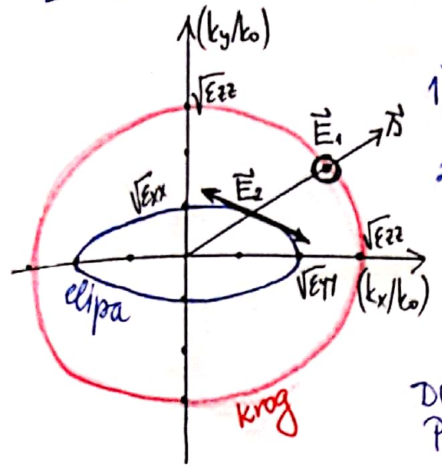
Nadaljnjega izračuna se lotimo za nekaj preprostejših smeri, denimo $\vec{k} = (k_x, k_y, 0)$ (ravnina xy)

Za $\vec{k}=(k_x,k_y,0)$ dobimo matriko sistema

$$M=\begin{bmatrix} k_y^2-k_0^2\varepsilon_{xx} & -k_xk_y & 0 \\ -k_xk_y & k_x^2-k_0^2\varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_x^2+k_y^2-k_0^2\varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Z zahtevo $\det M=0$ dobimo enačbo:

$$(k_x^2+k_y^2-k_0^2\varepsilon_{zz})\left[(k_y^2-k_0^2\varepsilon_{xx})(k_x^2-k_0^2\varepsilon_{yy})-k_x^2k_y^2\right]=0$$



Imamo dve možni rešitvi za k v odvisnosti od $\varepsilon_{xx},\varepsilon_{yy},\varepsilon_{zz}$.

1) $k_x^2+k_y^2=k_0^2\varepsilon_{zz}$ opisuje krog s polmerom $k_0\sqrt{\varepsilon_{zz}}$. Ustrezni lastni vektor $\vec{E}$ ima smer osi z.

2) $(k_y^2-k_0^2\varepsilon_{xx})(k_x^2-k_0^2\varepsilon_{yy})=k_x^2k_y^2$

$\cancel{k_x^2k_y^2}-k_0^2\varepsilon_{xx}k_x^2-k_0^2\varepsilon_{yy}k_y^2+k_0^4\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}=\cancel{k_x^2k_y^2}$

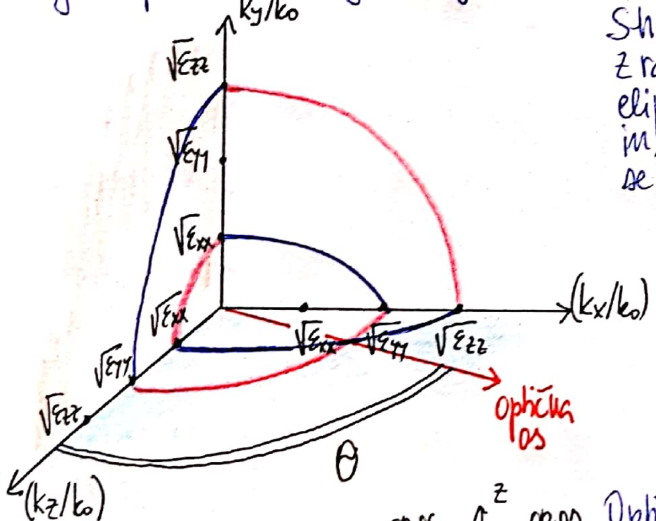
$k_0^2\varepsilon_{xx}k_x^2+k_0^2\varepsilon_{yy}k_y^2=k_0^2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}k_0^2$, delimo z izrazom na desni

$$\frac{k_x^2}{k_0^2\varepsilon_{yy}}+\frac{k_y^2}{k_0^2\varepsilon_{xx}}=1$$

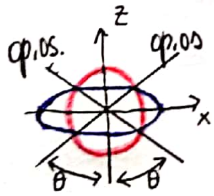
Ta izraz opisuje elipso z polosjo $k_0\sqrt{\varepsilon_{yy}}$ v smeri x ter polosjo $k_0\sqrt{\varepsilon_{xx}}$ v smeri y.

DOGOVOR!
Po navadi KS orientiramo tako, da velja $\varepsilon_{xx}<\varepsilon_{yy}<\varepsilon_{zz}$.

Podobno situacijo = krog + elipsa, dobimo tudi v drugih dveh ravninah. Le da tam pride v eni izmed njih do sekanja med krogom in elipso. V splošnem dobimo v 3D neko dvojno ploskev, ki jo imenujemo ploskev valovnega vektorja.



Shema rešitev za vse 3 ravnine.
Z rdečo barvo so označeni krogi, z modro pa elipse. V ravnini xz, to je ravnina največje in najmanjše vrednosti dielektrične konstante $(\varepsilon_{xx},\varepsilon_{zz})$, se krog in elipsa sekata.
V smeri presečišča dobimo posebej odlikovano smer, ki ji rečemo optična os. Za valovanje, ki se širi v smeri optične osi, se material obnaša, kot da bi bil izotropen = lomni količnik ima eno samo vrednost, ki je enaka za vse polarizacije EMV.



Optični osi sta v ravnini dve, saj so razmere pri negativnih in pozitivnih vrednostih $\vec{k}$ enake. V splošnem imamo torej dve optični osi, ki sta nagnjeni pod kotom θ glede na os največje dielektrične konstante. Rečemo, da je material optično dvoosen.

SMER OPTIČNE OSI!
Če upoštevamo zvezo $\vec{k}=k_0n\vec{s}$, $\vec{k}=(k_x,0,k_z)$ dobimo v ravnini xz za rešitve zveze:

1) $k_x^2+k_z^2=k_0^2\varepsilon_{yy} \Rightarrow (k_0ns_x)^2+(k_0ns_z)^2=k_0^2\varepsilon_{yy} \Rightarrow n^2(s_x^2+s_z^2)=\varepsilon_{yy} \Rightarrow n_1=\sqrt{\varepsilon_{yy}}$

2) $\frac{k_x^2}{k_0^2\varepsilon_{zz}}+\frac{k_z^2}{k_0^2\varepsilon_{xx}}=1 \Rightarrow \frac{(k_0ns_x)^2}{k_0^2\varepsilon_{zz}}+\frac{(k_0ns_z)^2}{k_0^2\varepsilon_{xx}}=1 \Rightarrow \frac{s_x^2}{\varepsilon_{zz}}+\frac{s_z^2}{\varepsilon_{xx}}=\frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{1}{n_2}=\sqrt{\frac{s_x^2}{\varepsilon_{zz}}+\frac{s_z^2}{\varepsilon_{xx}}}$

Če zapišemo $\vec{s}=(\sin\theta,0,\cos\theta)$, potem vrednost kota θ, ki podaja optično os dobimo, ko velja $n_1=n_2$ oz $(1/n_1)=(1/n_2)$ oz $(1/n_1)^2=\left(\frac{1}{n_2}\right)^2$

$$\frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{xx}}=\frac{1}{n_2^2}=\frac{1}{n_1^2}=\frac{1}{\varepsilon_{yy}} \Rightarrow \frac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{zz}}+\frac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{xx}}=\frac{1}{\varepsilon_{yy}} \Rightarrow \theta$$

Hitro lahko razberemo, da je v primeru rotacijsko simetričnega materiala, ko velja $\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{yy}$, ε_{zz}, rešitev za θ vrednost $\theta=0$. V tem primeru je optična os samo ena sama in kaže v smeri rotacijske osi z. Optična indikatrisa v takem materialu je rotacijski elipsoid. Rečemo da je material optično enoosen.

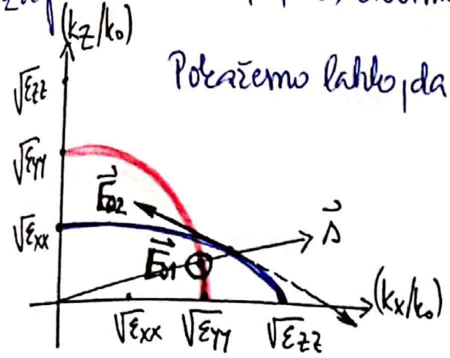
Zanima nas tudi, kakšna je smer optičnega polja $\vec{E}$, ki ustreza eni in drugi rešitvi. Smer dobimo tako da dobljene vrednosti za k_x in k_z vstavimo nazaj v matrično enačbo in poiščemo še ustrezno rešitev za $\vec{E}$.

Za primer $\vec{k}=(k_x,0,k_z)$ dobimo, da rešitvi $k_x^2+k_y^2=k^2=k_0\sqrt{\varepsilon_{yy}}$ ustreza $\vec{E}_{01}=E_0(0,1,0)$

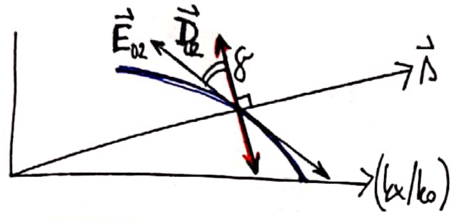
To je optično polje usmerjeno pravokotno na ravnino xy, kar hkrati predstavlja tangentno smer na ploskev valovnega vektorja v 3D.

Pokažemo lahko, da drugi rešitvi $\frac{k_x^2}{k_0^2\varepsilon_{zz}}+\frac{k_z^2}{k_0^2\varepsilon_{xx}}=1$

ustreza optično polje $\vec{E}_{02}$, ki je usmerjeno v tangentni smeri glede na elipso, ki jo opisuje zgornja enačba. To je tangentna smer v ravnini XZ.



Pri ploskvi vrednosti oz. smeri valovnega vektorja v 3D pa je optično električno polje $\vec{E}$ orientirano v dveh ortogonalnih tangentnih smereh glede na dvojno ploskev valovnega vektorja. $\vec{E}_{01}$, $\vec{E}_{02}$, za ustrezna vektorja $\vec{D}_{01}$ in $\vec{D}_{02}$ pa vemo, da sta pravokotna na valovni vektor $\vec{k}$. ⇒



⟶ Med vektorjema $\vec{E}_{02}$ in $\vec{D}_{02}$ je v splošnem nek kot δ.

Za $\vec{k}=(k_x,0,k_z)$ dobimo matriko sistema:

$$M\cdot\vec{E}=\begin{bmatrix} k_z^2-k_0^2\varepsilon_{xx} & 0 & -k_xk_z \\ 0 & k_x^2+k_z^2-k_0^2\varepsilon_{yy} & 0 \\ -k_xk_z & 0 & k_x^2-k_0^2\varepsilon_{zz}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_x\\E_y\\E_z\end{bmatrix}=0$$

1) Prva rešitev je oblike $k_x^2+k_z^2=k_0^2\varepsilon_{yy}$. To pomeni, da ima polje lahko poljubno y komponento.
$\Rightarrow \vec{E}_{01}=E_0(0,1,0)$

2) Druga rešitev je oblike: $\frac{k_x^2}{k_0^2\varepsilon_{zz}}+\frac{k_z^2}{k_0^2\varepsilon_{xx}}=1$, za to rešitev velja
$\vec{E}_{02}=(E_x,0,E_z)$; $\frac{E_z}{E_x}=\frac{-\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\cdot\frac{k_x}{k_z}$
kar predstavlja tangentno smer na elipso.

---

dokaz

$\frac{k_z^2}{k_0^2\varepsilon_{xx}}+\frac{k_x^2}{k_0^2\varepsilon_{zz}}=1$, pišimo kar $\frac{k_x}{k_0}=x$ in $\frac{k_z}{k_0}=z$

$\frac{z^2}{\varepsilon_{xx}}+\frac{x^2}{\varepsilon_{zz}}=1 \Rightarrow \varepsilon_{zz}z^2+\varepsilon_{xx}\cdot x^2=\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}$

sedaj izrazimo odvisnost $z=z(x)$, da dobimo eksplicitni zapis elipse

$z^2=(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx}\cdot x^2)/\varepsilon_{zz}$

$z=\sqrt{\varepsilon_{xx}-\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\right)x^2} \Rightarrow z^2-\varepsilon_{xx}=-\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\right)x^2$ ⊛

tangentno smer na to elipso podaja odvod (dz/dx)

$$\frac{dz}{dx}=\frac{-2\cdot\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\right)x}{2\sqrt{\varepsilon_{xx}-\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\right)x^2}}=-\frac{x}{z}\cdot\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}$$

Če sedaj preverimo matriko sistema

M in zapišemo enačbo za E_x in E_z pa dobimo:

$(k_z^2-k_0^2\varepsilon_{xx})E_x-k_xk_z\cdot E_z=0$, če obe strani delimo s k_0^2 ⇒ in uporabimo izraz ⊛ ⇒

$$(z^2-\varepsilon_{xx})E_x-xzE_z=0 \Rightarrow \frac{E_z}{E_x}=\frac{z^2-\varepsilon_{xx}}{xz}=\frac{-\left(\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\right)x^2}{xz}=-\frac{\varepsilon_{xx}}{\varepsilon_{zz}}\cdot\frac{x}{z}\ \checkmark$$

S tem smo pokazali da je smer optičnega polja $\vec{E}$ res tangentna na elipso v prostoru valovnega vektorja $(k_x,0,k_z)$.