4 Vektorski račun

4.1 Magnetno polje polneskončne žice

Določi magnetno polje polneskončne žice.

Najprej moramo omeniti, da tak tok ne ohranja naboja oziroma potrebuje vir naboja v robu žice. To ni problem, če ta rezultat vzamemo kot polje segmenta sestavljene večkotne zanke.

Začnemo z Biot-Savartovim zakonom. Računajmo brez eksplicitne izbire koordinatnega sistema. Žica naj bo v smeri $\hat{\boldsymbol{a}}$, naš položaj je pa $\mathbf{r}$. Parametrizacija žice je torej $\mathbf{r}' = t\hat{\boldsymbol{a}}$.

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t\hat{\boldsymbol{a}} \times (\hat{\boldsymbol{r}} - t\hat{\boldsymbol{a}})}{||\mathbf{r} - t\hat{\boldsymbol{a}}||^3} = \frac{I}{4\pi}\hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{r}} \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{(r^2 + t^2 - 2t\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})^{3/2}} \tag{1}$$

t je naša spremenljivka. Imenovalec dopolnimo do popolnega kvadrata in razrešimo:

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{((t - \mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})^2 + r^2 - (\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})^2)^{3/2}} = \frac{I}{4\pi}\hat{\boldsymbol{a}} \times \hat{\boldsymbol{r}}\int_{-\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}}^\infty \frac{\mathrm{d}u}{(u^2 + \underbrace{r^2 - (\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})^2}_{\rho^2})^{3/2}} \tag{2}$$

Prepoznali smo $\rho^2 = ||\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}||^2$, pravokotno razdaljo od žice.

Ustrezen integral poiščemo v tabelah.

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}\frac{u}{\rho^2\sqrt{\rho^2 + u^2}}\Bigg|_{-\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}}^\infty = \frac{I}{4\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}}{||\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}||^2}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\rho^2 + (\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}})^2}}\right) \tag{3}$$

$$\mathbf{H} = \frac{I}{4\pi}\frac{\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}}{||\hat{\boldsymbol{a}} \times \mathbf{r}||^2}\left(1 + \frac{\mathbf{r}\cdot\hat{\boldsymbol{a}}}{r}\right) \tag{4}$$

Pri tem smo uporabili $\cos^2 + \sin^2 = 1$ na vektorskem in skalarnem produktu.

4.2 Kodre 54/2

Izračunaj magnetno polje v osi tanke krožne tokovne zanke. Dokaži, da je integral poljske jakosti po osi enak I.

Integral poljske jakosti po osi mora biti I po Amperovem zakonu (zanka skozi neskončnost). Preverili bomo tudi z integralom.

Biot-Savartov zakon:

$$H(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\oint \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{||\mathbf{r} - \mathbf{r}'||^3} \tag{5}$$

$$\mathbf{r} = (0, 0, z), \quad \mathbf{r}' = (R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0) \tag{6}$$

$$H(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, 0) \times (-R\cos\varphi, -R\sin\varphi, z)}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{7}$$

$$H_z(z) = \frac{I}{2}\frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{8}$$

Integral (uporabimo $z = R\tan t$):

$$\int_{-\infty}^\infty H_z\,\mathrm{d}z = I\int_0^\infty \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z = I\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{(R^2 + R^2\tan^2 t)^{3/2}}\frac{R}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \tag{9}$$

$$= I\int_0^{\pi/2} \frac{R^2}{R^3(\cos^{-2} t)^{3/2}}\frac{R}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = I\int_0^{\pi/2} \cos t\,\mathrm{d}t = I \tag{10}$$

4.3 Kodre 54/7

Izračunaj magnetno poljsko jakost v središču in v gorišču eliptične žične zanke, po kateri teče tok I

Sredina elipse

Za sredino elipse začnemo pri integralu iz prejšnje naloge, s tem da zanko raztegnemo:

$$\mathbf{r} = (0, 0, z), \quad \mathbf{r}' = (a\cos\varphi, b\sin\varphi, 0) \tag{11}$$

$$H(\mathbf{r}) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi(-a\sin\varphi, b\cos\varphi, 0)\times(-a\cos\varphi, -b\sin\varphi, z)}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + z^2)^{3/2}} \tag{12}$$

$$H(z) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi ab}{(a^2\cos^2\varphi + b^2\sin^2\varphi + z^2)^{3/2}} \tag{13}$$

Podrobnosti: Integrale s kotno funkcijo pod korenom prepoznamo kot eliptične integrale, ki nimajo analitične izražave. Navedimo eliptična integrala prve in druge vrste:

$$\boxed{K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}, \quad \boxed{E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,\mathrm{d}\varphi} \tag{14}$$

Seveda lahko verjamemo Mathematici/Bronštejnu. Lahko pa se vprašamo, kako dejansko pridemo do rezultata v takem primeru. Naš izraz moramo predelati v obliko, v kateri lahko prepoznamo definicijo eliptičnih integralov. Poglejmo:

$$H(z) = \frac{Iab}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(a^2 + (b^2-a^2)\sin^2\varphi + z^2)^{3/2}} = \frac{Iab}{\pi(a^2+z^2)^{3/2}}\int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1 + \frac{b^2-a^2}{a^2+z^2}\sin^2\varphi)^{3/2}} \tag{15}$$

Uvedemo $k^2 = \frac{a^2-b^2}{a^2+z^2}$.
Iščemo:

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\varphi}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{3/2}} \tag{16}$$

Glavna ideja je per partes, saj bi radi z odvajanjem dobili dodatno potenco v imenovalcu. Začnemo torej z integralom tipa $\int(1-k^2\sin^2\varphi)^{1/2}\,\mathrm{d}x$. Za per partes bo treba odvajat korenski del. Če integriramo samo $\mathrm{d}\varphi$, bomo dobili φ, kar ni koristno. Zato razbijemo integral na dva dela, I_1 in I_2:

$$I_1 = \int \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \tag{17}$$

$$I_2 = \int \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi \tag{18}$$

$$E(k) = \int \frac{1-k^2\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\mathrm{d}\varphi = (1-k^2)I_1 + I_2 \tag{19}$$

Na prvem pokažemo, kaj smo naredili:

$$I_1 = \int \underbrace{\frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}}_{u}\underbrace{\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi}_{\mathrm{d}v} \tag{20}$$

$$= \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}(-\cos\varphi) - \int \frac{(-\cos\varphi)\left[\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi) - \sin\varphi(-k^2\sin\varphi\cos\varphi)\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}^3}\,\mathrm{d}\varphi \tag{21}$$

$$= -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int \frac{\cos\varphi\left[\cos\varphi(1-k^2\sin^2\varphi) + \sin\varphi(k^2\sin\varphi\cos\varphi)\right]}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}^3}\,\mathrm{d}\varphi \tag{22}$$

$$= -\frac{\cos\varphi\sin\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}^3}\,\mathrm{d}\varphi \tag{23}$$

Per partes na prvih dveh integralih:

$$I_1 = \frac{-\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} + \int \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}^3}\,\mathrm{d}\varphi \tag{24}$$

$$I_2 = \frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}} - (k^2-1)\int \frac{\sin^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}^3}\,\mathrm{d}\varphi \tag{25}$$

Če vse to izvrednotimo od 0 do $\pi/2$, lahko z ustrezno uteženim seštevanjem $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi$ v števcih integranda naš integral izrazimo z I_1 in I_2:

$$I_0 = I_1 - \frac{1}{k^2-1}I_2 = \frac{1}{1-k^2}\big((1-k^2)I_1 + I_2\big) = I_3 = \frac{E(k)}{1-k^2}, \tag{26}$$

kjer smo opazili tudi, da iz I_1 in I_2 z ustreznimi utežmi lahko sestavimo $E(k)$.

$$H(z) = \frac{Iab}{\pi(a^2+z^2)^{3/2}\frac{z^2+b^2}{z^2+a^2}}E(k) \tag{27}$$

$$H(0) = \frac{I}{\pi b}E(\sqrt{1-b^2/a^2}) = \frac{I}{\pi b}E(e) \tag{28}$$

V limiti $k \to 0$ velja $E(0) = \frac{\pi}{2}$, kar da pravilno limito $H(0) = \frac{I}{2r}$, prepoznali smo pa tudi ekscentričnost $e = \sqrt{1-b^2/a^2}$.

Gorišče elipse

Za gorišče centralna parametrizacija elipse ni primerna. Goriščna oblika kliče po polarnih koordinatah:

$$r = \frac{p}{1-e\cos\varphi} \tag{29}$$

Goriščni parameter lahko izrazimo s $p = b^2/a$, ekscentričnost pa $e = c/a = \sqrt{1-(b/a)^2}$.
V tej obliki imamo

$$\mathbf{r} = (0,0,0) \tag{30}$$

$$\mathbf{r}' = \hat{\boldsymbol{e}}_r r \tag{31}$$

$$\mathrm{d}\mathbf{r}' = (\,\mathrm{d}\hat{\boldsymbol{e}}_r)r + \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial r}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = (\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi r + \hat{\boldsymbol{e}}_r\frac{\partial r}{\partial\varphi})\,\mathrm{d}\varphi \tag{32}$$

$$-\,\mathrm{d}\mathbf{r}' \times \mathbf{r}' = \hat{\boldsymbol{e}}_z r^2\,\mathrm{d}\varphi \tag{33}$$

Biot-Savart:

$$H(0) = \frac{I}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{r^2\,\mathrm{d}\varphi}{r^3} = \frac{I}{4\pi p}\int_0^{2\pi}(1-e\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = \frac{I}{2p} = \frac{Ia}{2b^2} \tag{34}$$

4.4 70/2

Opiši tok v okolici ravne vrtinčne niti, ki nosi cirkulacijo C, in jo primerjaj z magnetnim poljem ravne žice.

Cirkulacija je definirana kot integral skalarnega produkta po zaključeni zanki.

$$\Gamma = \oint \mathbf{v} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = 2\pi R v_\varphi \tag{35}$$

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{2\pi R}\hat{\boldsymbol{e}}_\varphi \tag{36}$$