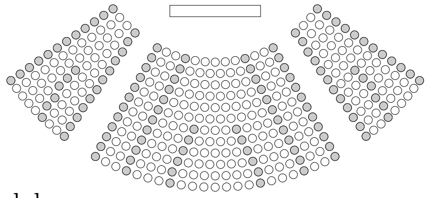
Matematika 3 (FIZ): 2. kolokvij

17. 1. 2020 $18^{00} - 20^{00}$

Čas pisanja je 120 minut. Možno je doseči 100 točk. Vse odgovore dobro utemeljite. Veliko uspeha!



Sedež (VFP)

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Izračunajte integral vektorskega polja $\vec{R} = \begin{bmatrix} -yz \\ xz \\ z^2 \end{bmatrix}$ po robu valja:

$$x^2 + y^2 \leq 1\,,\ \ 1 \leq z \leq 2\,,$$

orientiranem tako, da normala kaže navzven (z drugimi besedami, izračunajte iztok iz valja).

Rešitev: *Prvi način*: neposredno. Rob valja razdelimo na spodnjo ploskev P_1, zgornjo ploskev P_2 in plašč P_3. Vse troje parametriziramo:

$$\begin{array}{lll} P_1\colon & x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = 1 & ;\ \ 0 \leq \rho \leq 1,\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ P_2\colon & x = \rho\cos\varphi\,,\ y = \rho\sin\varphi\,,\ z = 2 & ;\ \ 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \varphi < 2\pi \\ P_3\colon & x = \cos\varphi\,,\ y = \sin\varphi\,,\ z = z & ;\ \ 1 \leq z \leq 2,\ 0 \leq \varphi < 2\pi \end{array}$$

Pri P_1 in P_2 velja:

$$\vec{r}_\rho = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix}\ .$$

Parametrizacija ploskve P_1 je torej nasprotna orientaciji roba valja, parametrizacija ploskve P_2 pa je skladna z orientacijo roba valja. Pri P_3 pa velja:

$$\vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{bmatrix}\ ,\quad \vec{r}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ;\quad \vec{r}_\rho \times \vec{r}_\varphi = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix}$$

in orientacija je spet skladna z orientacijo roba valja.
Če ploskve P_1, P_2 in P_3 orientiramo skladno s parametrizacijami, velja:

$$\iint_{P_1} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\, dP = \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi<2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} -\rho\sin\varphi \\ \rho\cos\varphi \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle = \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi<2\pi}} \rho\, d\rho\, d\varphi = \pi\,,$$

$$\iint_{P_2} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\, dP = \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi<2\pi}} \left\langle \begin{bmatrix} -2\rho\sin\varphi \\ 2\rho\cos\varphi \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho \end{bmatrix} \right\rangle = \iint_{\substack{0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi<2\pi}} 4\rho\, d\rho\, d\varphi = 4\pi\,,$$

$$\iint_{P_3} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\, dP = \iint_{\substack{0\leq\varphi<2\pi \\ 1\leq z\leq 2}} \left\langle \begin{bmatrix} -z\sin\varphi \\ z\rho\cos\varphi \\ z \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = 0\,.$$

Iskani integral le torej enak:

$$-\iint_{P_1} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\, dP + \iint_{P_2} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\, dP + \iint_{P_3} \langle \vec{R}, \vec{N} \rangle\, dP = 3\pi\,.$$

Drugi način: uporabimo Gaussov izrek – iskani integral je enak:

$$\iiint_V \operatorname{div}\vec{R}\, dV = \iiint_{\substack{x^2+y^2\leq 1 \\ 1\leq z\leq 2}} 2z\, dz\,,$$

kjer je V poln valj. Z uporabo cilindričnih koordinat:

$$x = \rho\cos\varphi\,,\quad y = \rho\sin\varphi\,,\quad z = z\,,\quad J = \rho\quad;\quad 0 \leq \rho \leq 1\,,\ 0 \leq \varphi < 2\pi\,,\ 1 \leq z \leq 2$$

dobimo, da je iskani integral enak:

$$\iiint_{\substack{0\leq\rho\leq 1 \\ 0\leq\varphi<2\pi \\ 1\leq z\leq 2}} 2\rho z\, d\rho\, dz = 3\pi\,,$$

kar je isto kot prej.

2. naloga (25 točk)

Poišči rešitev diferencialne enačbe $yy'' = y'^2 + yy'$, ki zadošča začetnima pogojema $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$.

Rešitev: Po uvedbi $y' = v$, $y'' = v\,\frac{dv}{dy}$ in deljenju z v dobimo

$$y\,\frac{dv}{dy} = y + v$$

(zaradi začetnega pogoja v okolici izhodišča ne more biti $v = 0$). Dobili smo linearno enačbo. Najprej rešimo homogeni del

$$y\,\frac{dv_H}{dy} = v\,, \qquad \frac{dv_H}{v_H} = \frac{dy}{y}\,, \qquad \ln\frac{v_H}{C} = \ln|y|\,, \qquad v_H = C|y| \;\longrightarrow\; Cy\,,$$

nato pa poiščemo še splošno rešitev:

$$v = yz\,, \qquad \frac{dv}{dy} = z + y\,\frac{dz}{dy}\,, \qquad \frac{dz}{dy} = \frac{1}{y}\,, \qquad z = \ln|y| + C\,, \qquad v = y\big(\ln|y| + C\big)\,.$$

Končno rešimo še:

$$\frac{dy}{dx} = y\big(\ln|y| + C\big)\,, \qquad \frac{dy}{y\big(\ln|y| + C\big)} = dx\,, \qquad \ln\frac{\ln|y| + C}{D} = x\,, \qquad y = \pm e^{D\,e^x - C}\,.$$

Ker je $y(0) < 0$, velja negativni predznak, torej je

$$y = -e^{D\,e^x - C}\,, \qquad y' = -D\,e^{x + D\,e^x - C}\,.$$

Iz začetnih pogojev dobimo $C = D = -2$, torej je iskana rešitev

$$y = -e^{-2(e^x - 1)}\,.$$

3. naloga (25 točk)

Dan je sistem navadnih diferencialnih enačb

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \\ -1 & -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}.$$

a) Poišči splošno rešitev sistema diferencialnih enačb.

b) Pokaži, da je vsaka rešitev sistema enačb ravninska krivulja, in določi enačbo ravnine, v kateri leži rešitev sistema z

$$x(0) = 4 \quad y(0) = 0 \quad z(0) = -1\,.$$

Rešitev:
Edina lastna vrednost je $\lambda = 1$. Dimenzija $\ker(A - I) = 2$, dimenzija $\ker(A - I)^2 = 3$, tako da imamo dva lastna, in en korenski. Vzememo npr. korenski vektor

$$v_1^{(1)} = (1, 0, 0) \to v_1^{(2)} = (1, 1, -1) \ (\textit{lastni})$$

in še en lastni

$$v_2^{(1)} = (2, -1, 0)$$

Splošna rešitev je potem

$$\vec{x}(t) = Ae^t(1, 1, -1) + Be^t((1, 0, 0) + t(1, 1, -1)) + Ce^t(2, -1, 0)\,.$$

Označimo $\vec{x}(t) = e^t\vec{q}$, kjer velja $\dot{q} = B(1, 1, -1)$, $\ddot{\vec{q}} = 0$. Dobimo

$$\dot{\vec{x}} = e^t\vec{q} + e^t\dot{\vec{q}} \quad \ddot{\vec{x}} = e^t\vec{q} + 2e^t\dot{\vec{q}} \quad \vec{x}^{(3)} = e^t\vec{q} + 3e^t\dot{\vec{q}}$$

Velja

$$(\dot{\vec{x}} \times \ddot{\vec{x}}) \cdot \vec{x}^{(3)} = (e^{2t}\vec{q} \times \dot{\vec{q}}) \cdot (e^t\vec{q} + 3e^t\dot{\vec{q}}) = 0\,,$$

tako, da je torzija enaka 0 in je krivulja res ravninska.
Pri danih začetnih pogojih je $A = B = C = 1$ in imamo krivujo

$$\vec{x}(t) = e^t(4 + t, t, -1 - t) = e^t\vec{q},$$

binormala je v smeri $\vec{q} \times \dot{\vec{q}} = (1, 3, 4)$, tako da je iskana ravnina

$$x + 3y + 4z = 0\,.$$

4. naloga (25 točk)

Valjast stolp polmera 2 m hočemo pokriti z rotacijsko simetrično streho. Streha naj se začne na robu valja, visoka pa mora biti $\sqrt{3}$ m in na vrhu naj ima luknjo polmera 1 m.

a) Dokaži, da je cena strehe enaka

$$2\pi \int_1^2 r\, c(r)\, \sqrt{1 + h'(r)^2}\, dr\,,$$

kjer je $c(r)$ cena strehe na enoto površine v odvisnosti od oddaljenosti od rotacijske osi, $h(r)$ pa je funkcija, ki opisuje obliko strehe, t.j. višino strehe v odvisnosti od oddaljenosti od rotacijske osi.

b) Določi obliko strehe, pri kateri doseže cena strehe ekstremno vrednost, če je $c(r) = \dfrac{1}{r^2}$.

Rešitev: a) Za $r \in [1, 2]$ označimo s $h(r)$ višino strehe. Cena strehe je enaka ploskovnemu integralu $I(h) = \iint_S c\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\, dP$, kjer je S ploskev, podana eksplicitno v obliki $\vec{r}(x, y) = \big(x, y, h\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\big)$. Izračunamo

$$EG - F^2 = 1 + \left(\frac{\partial}{\partial x} h\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} h\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)\right)^2 = 1 + h'\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)^2$$

in sledi

$$I(h) = \iint_{1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2} c\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big) \sqrt{1 + h'\big(\sqrt{x^2+y^2}\,\big)^2}\, dx\, dy\,.$$

Z uvedbo standardnih polarnih koordinat dobimo željeni rezultat.

b) Formula za ceno iz prejšnje točke nam da že enkrat zintegrirano E-L enačbo

$$A = -\frac{h'}{r\sqrt{1 + h'^2}}\,.$$

Izrazimo h', integriramo še enkrat in dobimo

$$h(r) = B + \frac{\sqrt{1 - A^2 r^2}}{A}\,.$$

Upoštevamo robne pogoje $h(2) = 0$, $h(1) = \sqrt{3}$ in po krajšem računu dobimo $A = \frac{1}{2}$, $B = 0$, torej

$$h(r) = 2\sqrt{1 - \frac{r^2}{4}} = \sqrt{4 - r^2}\,.$$