GEOMETRIJSKA OPTIKA

~1000 AD (Arabci), Grki, lomne lastnosti snovi - lomni količnik n.
v homogeni snovi so žarki ravni, na mejah med snovmi se razcepijo v več žarkov.
v nehomogeni snovi se krivijo.

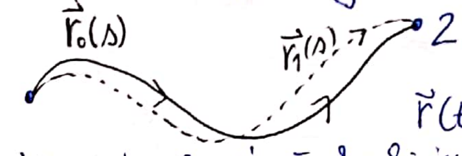
KAKO?
↓
Pierre de Fermat (1607 - 1665, F, matematik)

$$\boxed{S = \int_1^2 n(\vec{r})\, ds = \min \text{ (stacionarna)}}$$

Princip minimalne optične poti oz minimalne optične akcije.

njegova predpostavka je bila, da je to trajektorija, za katero svetloba porabi najmanj časa. Hitrost svetlobe so prvič zanesljivo izmerili leta 1676 (opazovanje mrkov Jupitrovih lun)

$$dt = \frac{ds}{c} = \frac{ds}{(c_0/n)} = \frac{n\,ds}{c_0} = \min$$



$\vec{r}(t)$ oz. $\vec{r}(s) = ?$

POVEZAVA Z VALOVNO OPTIKO (Born&Wolf)
do zgornjega pogoja lahko formalno pridemo tudi, ko obravnavamo valovne fronte in žarke v valovni optiki, ko analiziramo limito $\lambda \to 0$.

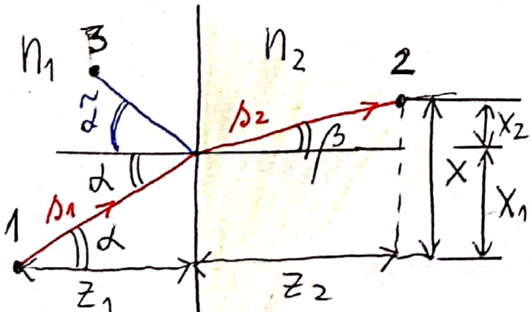
iščemo trajektorijo žarka, ki ima med točkama 1 in 2 najmanjšo oz. stacionarno optično pot. $\vec{r} = \vec{r}_0(s) + \varepsilon \cdot \vec{r}_1(s)$, $\vec{r}_0$ = rešitev

$$\frac{dS}{d\varepsilon} = 0$$

ds = fizična pot oz. interval fizične poti
$n\,ds$ = optična pot oz. interval optične poti

Problem je analogen principu minimalne akcije v klasični mehaniki. Zato govorimo o Lagrangeovi oz Hamiltonovi optiki.

Primer: Lomni zakon na osnovi Fermatovega principa



izberemo točki 1 in 2 na nasprotnih straneh meje. Fiksni parametri so z_1, z_2 in X.
iščemo vrednost x_1 (prehodno točko), ki nam bo dala najmanjšo skupno optično pot od točke 1 do točke 2.

$$S = n_1 \cdot s_1 + n_2 \cdot s_2 = \min = n_1\sqrt{z_1^2 + x_1^2} + n_2\sqrt{z_2^2 + x_2^2}$$

$$S = n_1\sqrt{z_1^2 + x_1^2} + n_2\sqrt{z_2^2 + (X - x_1)^2}$$ iščemo minimum glede na x_1

$$\frac{dS}{dx_1} = 0 = \frac{n_1 \cdot 2 \cdot x_1}{2\sqrt{z_1^2 + x_1^2}} + \frac{2(-1)(X - x_1)}{2\sqrt{z_2^2 + (X - x_1)^2}} = 0$$

$$\frac{x_1 \cdot n_1}{\sqrt{z_1^2 + x_1^2}} = \frac{(X - x_1) \cdot n_2}{\sqrt{z_2^2 + (X - x_1)^2}} = \frac{x_2 \cdot n_2}{\sqrt{z_2^2 + x_2^2}}$$

$$\boxed{n_1 \cdot \sin\alpha = n_2 \cdot \sin\beta}$$

Podobno lahko pokažemo, da minimum za pot med 1 in 3 dobimo, ko je $\sin\alpha = \sin\tilde{\alpha}$ od koder sledi $\boxed{\tilde{\alpha} = \alpha}$

ŽARKOVNA ENAČBA

Kaj pa, če se lomni količnik spreminja zvezno kot $\boxed{n = n(\vec r) = n(x,y,z)}$, $\vec r = \vec r(t) = ?$
Numerično se takega problema lahko lotimo, tako da snov razdelimo na majhne elemente in na mejah med njimi uporabimo lomni/odbojni zakon.
Kaj pa analitično?
V tem primeru uporabimo Euler-Lagrangeove enačbe za minimum funkcionala S:

$$\min = S = \int_1^2 n(x,y,z)\,ds = \int_1^2 n(x,y,z)|\vec v|\,dt = \int_1^2 \underbrace{n(x,y,z)\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}}_{L(x,y,z,\dot x,\dot y,\dot z,\cancel{t})}\,dt, \quad \dot x = \frac{dx}{dt}, \dots$$

eksplicitne odvisnosti ni

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot x}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$ in podobno za y in z

$$\frac{d}{dt}\left(n\cdot\frac{2\dot x}{2\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}}\right) = \left(\frac{\partial n}{\partial x}\right)\cdot\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2} \quad \Big/ \frac{dt}{ds}$$

trik: množimo obe strani z dt/ds

uporabimo: $\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt = ds$

$$\frac{d}{dt}\left(\quad -||- \quad\right)\cdot\frac{dt}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x}\cdot\frac{\left(\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}\,dt\right)}{ds}$$

$$\frac{d}{ds}\left(\quad -||- \quad\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{dx/dt}{\sqrt{\dot x^2+\dot y^2+\dot z^2}}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{dx}{dt\sqrt{\quad}}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$

$$\frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{dx}{ds}\right) = \frac{\partial n}{\partial x}$$ in podobno za y in z $\Rightarrow$

$$\boxed{\vec\nabla n = \frac{d}{ds}\left(n\cdot\frac{d\vec r}{ds}\right)}$$

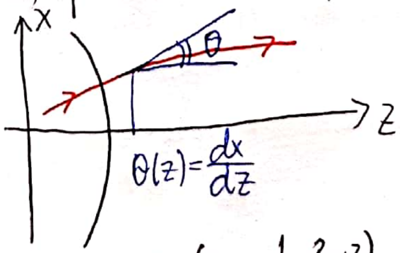
od koder dobimo trajektorijo optičnega žarka $\vec r = \vec r(s)$, ki jo lahko, na osnovi $n(\vec r)$ prevedemo na $\vec r = \vec r(t)$

---

primeri:

1) $n = \text{konst} \Rightarrow \vec\nabla n = 0 \Rightarrow 0 = n\cdot\frac{d^2\vec r}{ds^2} \Rightarrow \boxed{\vec r = \vec a_0 + \vec a_1 s}$ ravni žarek
$\vec a_0$ = točka 1
$\vec a_1$ pa ima smer od 1 proti 2.

2) plastovita snov s paraboličnim profilom lomnega količnika ($n = n(x)$, trajektorija v ravnini xz)



$$n(x) = n_0\left(1 - \tfrac{1}{2}\alpha x^2\right)$$

v tem primeru je TRAJEKTORIJA ŽARKA $x(z) = ?$

Preden se lotimo tega problema, vpeljimo še približek

$$\frac{dx}{dz} \ll 1, \quad ds = \sqrt{dx^2+dz^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dz}\right)^2 + 1}\,dz \approx dz$$

$$dx = \left(\frac{dx}{dz}\right)dz = \theta\,dz$$

Zaradi tega velja $\sin\theta \approx \operatorname{tg}\theta \approx \theta$ (OBOSNI oz PARAKSIALNI PRIBLIŽEK)
Žarkovna enačba potem preide v

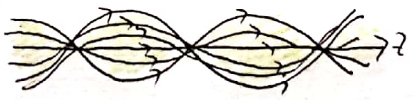
$$\frac{d}{dz}\left(n(x)\cdot\frac{dx}{dz}\right) = \frac{dn}{dx} = \frac{d}{dz}\left(n(x)\cdot\theta\right)$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dz^2}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{dn}{dx} = \boxed{\frac{1}{n(x)}\frac{dn}{dx}}$$

$$\frac{d^2x}{dz^2} = \frac{1\cdot n_0}{n_0(1-\frac{1}{2}\alpha x^2)}\left(-\alpha^2 x\right) \approx \frac{-\alpha^2 n_0}{n_0}x = -\alpha^2 x$$ (če velja $\frac{1}{2}\alpha x^2 \ll 1$ lahko v imenovalcu zanemarimo)

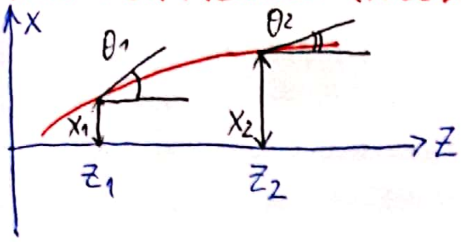
rešitve te enačbe so oscilatorne funkcije: $x(z) = x_0\cos\alpha z + \left(\frac{\theta_0}{\alpha}\right)\sin\alpha z$, $\underbrace{\theta_0 = \frac{dx}{dz}(z=0),\ x(z=0) = x_0}_{\text{začetni pogoji}}$

$$\frac{dx}{dz} = \theta(z) = -\alpha x_0 \sin\alpha z + \theta_0\cos\alpha z$$



optično valovodno delovanje

TRANSFORMACIJSKE (ABCD) MATRIKE V OBOSNEM PRIBLIŽKU



optični žarek pri izbrani točki vzdolž optične osi z opišemo z dvema parametroma:
- naklonskim kotom žarka glede na optično os $\theta = \frac{dx}{dz}$
- oddaljenostjo žarka od optične osi x

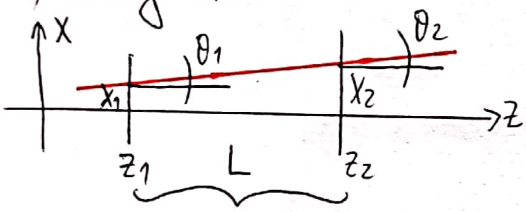
Ta dva parametra združimo v dvodimenzionalni vektor $R(z)=\begin{pmatrix} x(z) \\ \theta(z)\end{pmatrix}$
Želimo povezati $x(z_2)$ in $\theta(z_2)$ z $x(z_1)$ in $\theta(z_1)$, če vemo kakšne so spremembe snovi med točkama z_1 in z_2.

$$x_2 = A\cdot x_1 + B\cdot\theta_1 \qquad \theta_2 = C\cdot x_1 + D\theta_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ \theta_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1\end{bmatrix} = M_T\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1\end{bmatrix}$$

M_T je transformacijska oz. prehodna matrika ustreznega "optičnega medija" oz. optičnega elementa.

Primeri:

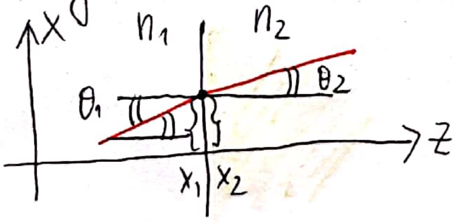
1) Homogena snov s konstantnim n



velja: $\theta_2=\theta_1$ in $x_2 = x_1 + (z_2-z_1)\cdot\theta_1 = x_1 + L\cdot\theta_1$

$$x_2 = 1\cdot x_1 + L\cdot\theta_1 \qquad \theta_2 = 0\cdot x_1 + 1\cdot\theta_1 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1, & L \\ 0, & 1\end{bmatrix}$$

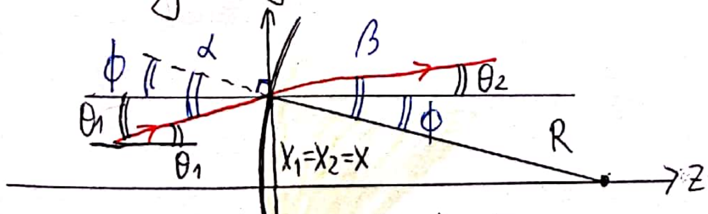
2) Meja-ravna-med materialoma z n_1 in n_2. Gledamo žarek tik pred in tik za mejo!



$x_2 = x_1 = x$
$n_1\cdot\sin\theta_1 = n_2\cdot\sin\theta_2 \Rightarrow n_1\cdot\theta_1 = n_2\cdot\theta_2$

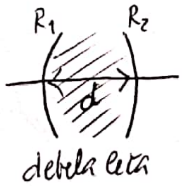
$$x_2 = 1\cdot x_1 + 0\cdot\theta_1 \qquad \theta_2 = 0\cdot x_1 + \frac{n_1}{n_2}\cdot\theta_1 \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ 0, & n_1/n_2\end{bmatrix}$$

3) Ukrivljena meja med materialoma z n_1 in n_2. Krivinski radij R.



$\sin\phi \approx \phi = \frac{x}{R}$
dodatna zahteva $\phi \ll 1$!
(žarki so blizu optične osi)

$\alpha = \theta_1 + \phi$
$\beta = \theta_2 + \phi$
$n_1\alpha = n_2\cdot\beta$



debela leča

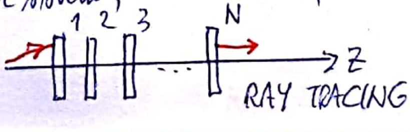
$n_1(\theta_1+\phi) = n_2(\theta_2+\phi)$
$n_1\theta_1 + n_1\phi = n_2\theta_2 + n_2\phi$
$n_2\theta_2 = (n_1-n_2)\phi + n_1\cdot\theta_1$
$\theta_2 = \left(\frac{n_1-n_2}{n_2}\right)\frac{x}{R} + \frac{n_1}{n_2}\cdot\theta_1$

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 1\cdot x_1 + 0\cdot\theta_1 \\ \theta_2 &= \left(\frac{n_1-n_2}{n_2}\cdot\frac{1}{R}\right)x_1 + \frac{n_1}{n_2}\cdot\theta_1\end{aligned}\right\} \Rightarrow M = \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{n_1-n_2}{n_2}\cdot\frac{1}{R}, & \frac{n_1}{n_2}\end{bmatrix}$$

v limiti $R\to\infty$ dobimo prejšnji izraz. ✓

R štejemo pozitivno, če je površina konveksna glede na smer z osi, in negativno, če je površina konkavna.

Če imamo več elementov nanizanih enega za drugim, celotni učinek sistema dobimo tako, da zmnožimo transformacijske matrike v ustreznem vrstnem redu.



$$\begin{bmatrix} x_N \\ \theta_N\end{bmatrix} = \tilde{M}\cdot\begin{bmatrix} x_1 \\ \theta_1\end{bmatrix}, \qquad \tilde{M} = M_N \dots M_3\cdot M_2\cdot M_1$$