1 Risanje funkcij

1.1 Kodre 20/26

Skiciraj krivuljo za Gaussov integral

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

Limite:

- Funkcija je liha
- Integral pozitivne funkcije: naraščajoča
- $x \to 0: \quad \mathrm{erf}(0) = 0$
- $x \to \inf: \quad \mathrm{erf}(\inf) = 1$ (Gaussovka "normirana").
- $x \to 1: \quad \mathrm{erf}(1) = 0.84$ (iz tabel)
- Odvod: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2}$

Spomnimo se na:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} \sigma 2^{-1/2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{2\sigma^2}\Gamma(1/2) = \sqrt{2\pi\sigma^2} \tag{2}$$

Alternativa:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r\,\mathrm{d}r = 2\pi \tag{3}$$

Znotraj σ je 68 % verjetnosti. Ampak je za pretvorit, $t^2 = x^2/(2\sigma^2)$, $\mathrm{d}t = \mathrm{d}x/\sqrt{2\sigma^2}$:

$$0.68 = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{-x^2/2\sigma^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1/\sqrt{2}}^{1/\sqrt{2}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \mathrm{erf}(1/\sqrt{2}) \tag{4}$$

1.2 Kodre 19/8

Za $x \geq 0$ skiciraj funkcijo

$$y = x \ln x - x + 1 \tag{5}$$

- $y(\infty) \to \infty$
- $\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{1/x} = 0$
- $y(0) = 1$
- $y(1) = 0$
- $y'(0) = 1 + \ln x - 1 \to -\infty$
- $y'(1) = 0$
- $y(e) = 1$

Zanimivost: povezava z Γ funkcijo oziroma faktorialom. Ta funkcija je hkrati tudi

$$\int_1^x \ln t \,\mathrm{d}t \approx \sum_1^x \ln t = \ln x! \tag{6}$$

$$x! \approx e^{x\ln x - x + 1} = e x^x e^{-x} = e(x/e)^x \tag{7}$$

Stirlingova formula (bolj natančen predfaktor):

$$x! \asymp \sqrt{2\pi x}(x/e)^x \tag{8}$$

1.3 Skiciraj funkcijo

Skiciraj funkcijo

$$f(x) = \frac{x}{e^{-x}-1} + \frac{x}{2} \tag{9}$$

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(\frac{2}{e^{-x}-1} + 1\right) = \frac{x}{2}\frac{2 + e^{-x} - 1}{e^{-x}-1} = -\frac{x}{2}\frac{\cosh x/2}{\sinh x/2} \tag{10}$$

- Produkt dveh lihih funkcij je soda funkcija
- Za majhne argumente: $\frac{\sinh x}{x} \to 1$: $f(x) \approx -\cosh\frac{x}{2} \approx -1 - \frac{x^2}{8}$
- Za $\pm$ velike argumente: $\tanh x \to \pm 1$: $f(x) \approx -\frac{|x|}{2}$.

1.4 Kodre 20/22

Skiciraj funkcijo, katerih odvod je sorazmeren funkciji

$$\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = cf(x) \tag{11}$$

Nariši smerno polje. Primeri za $c > 0$ in $c < 0$. Primeri tudi za $f(0) > 0$ in $f(0) < 0$. Integriramo tudi ročno:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = Cy, \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = -C\,\mathrm{d}x, \quad y = y_0 e^{cx} \tag{12}$$

1.5 Kodre 23/6

Ura ima nihalo, ki je lahek drog z maso 1 kg na koncu. Nihajni čas je približno 2 sekundi, ura pa zaostaja za 1 minuto na dan. Za koliko je treba skrajšati nihalo?

$$t_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{13}$$

$$\ln t_0 = \ln 2\pi + \frac{1}{2}\ln l - \frac{1}{2}\ln g \tag{14}$$

$$\frac{\delta t_0}{t_0} = \frac{1}{2}\frac{\delta l}{l} - \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\delta g}{g}}_{0} \tag{15}$$

$$\frac{\delta l}{l} = 2\frac{\delta t_0}{t_0} = 1.39 \times 10^{-3} \tag{16}$$

Vmes smo uporabili logaritemski diferencial za relativne popravke.

1.6 Kodre 23/11

Natančnost meritve upora z Wheatstonovim mostičkom. Kako je če je drsnik na sredini žice, ali pa na razdalji x?

Potenciala v točkah, ki ju povezuje ampermeter, morata biti enaka. Na eni strani imamo referenčni upornik R_0 in neznani upornik R_x, na drugi strani pa $R_1 = Rx$ in $R_2 = R(1-x)$ kjer je $x = l_1/l$ relativni položaj drsnika.

$$R_0 I_A = R_1 I_B \tag{17}$$
$$R_x I_A = R_2 I_B \tag{18}$$

$$R_x = R_0 \frac{1-x}{x} \tag{19}$$

$$\ln R_x = \ln R_0 + \ln(1-x) - \ln x \tag{20}$$

$$\frac{\delta R_x}{R_x} = -\frac{\delta x}{1-x} - \frac{\delta x}{x} = -\frac{\delta x}{x(1-x)} \tag{21}$$

Imamo $x = 0.5$, $\delta x = 0.3\,\mathrm{mm}/1\,\mathrm{m}$ in $\frac{\delta R_x}{R_x} = 1.2 \times 10^{-3}$.

1.7 Kodre 23/12

Wheatstonov mostiček za merjenje temperature.

Nadaljujemo prejšnjo nalogo.
Zdaj imamo $\alpha = R^{-1}\,\mathrm{d}R/\,\mathrm{d}T = 0.004\,\mathrm{K}^{-1}$. Prejšnjo zvezo torej poenostavimo na

$$\frac{\delta R_x}{R_x} = \alpha \delta T = -\frac{\delta x}{x(1-x)} \approx -4\delta x = -4\frac{\delta l}{l} \tag{22}$$

Dolžina stopinje je tako $\delta l = \alpha l/4 = 1\,\mathrm{mmK}^{-1}$.

1.8 Kodre 23/13

Počrnjena ploščica visi v evakuirani posodi s temperaturo $293\,\mathrm{K}$, skozi okence pa svetimo nanjo s svetlobnim tokom, katerega gostota je $j_0 = 0.1\,\mathrm{Wm}^{-2}$; svetloba vpada pravokotno. Za koliko se pri tem poskusu segreje ploščica nad temperaturo posode?

Bilanca moči. Zunanjost sveti na ploščico s svetlobno močjo:

$$P_{in} = 2S\sigma T_0^4 + S j_0. \tag{23}$$

Segreto telo nazaj sveti v okolico:

$$P_{out} = 2S\sigma (T + \delta T)^4. \tag{24}$$

Izenačimo in razvijemo:

$$2S\sigma(T_0 + \delta T)^4 - 2S\sigma T_0^4 = S j_0 \tag{25}$$
$$(T_0 + \delta T)^4 - T_0^4 = \frac{j_0}{2\sigma} \tag{26}$$
$$4T_0^3 \delta T = \frac{j_0}{2\sigma} \tag{27}$$
$$\delta T = \frac{j_0}{8\sigma T_0^3} = 8.8\,\mathrm{mK} \tag{28}$$

1.9 Kodre 23/14

Na 5 cm debelo stekleno ploščo z lomnim kvocientom 1.5 pada s kotom $\alpha = 60°$ curek svetlobe. Za koliko se premakne prepuščeni žarek, če ploščo zavrtimo za 0.5° okrog osi, ki je pravokotna na curek?

Narišemo skico, vpadni kot α, lomni kot β, kot med podaljškom vpadnega žarka in lomljenim žarkom $\alpha - \beta$, hipotenuza dolžine $l = h/\cos\beta$, kateta $x = l\sin(\alpha-\beta) = h\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta}$. Imamo torej sistem enačb:

$$x = h\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} \tag{29}$$

$$\sin\alpha = n\sin\beta \tag{30}$$

Iščemo pa $\mathrm{d}x/\mathrm{d}\alpha$. Imamo dve možnosti. Ena je, da izrazimo vse z α pred diferenciranjem:

$$x = h(\sin\alpha - \cos\alpha\tan\beta) = h\left(\sin\alpha - \cos\alpha\frac{\sin\alpha/n}{\sqrt{1-\sin^2\alpha/n^2}}\right) \tag{31}$$

Odvajamo:

$$\delta x = h\left(\cos\alpha + \frac{\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \frac{\cos^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - (-\frac{1}{2})\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}^3}(-2\sin\alpha\cos\alpha)\right)\delta\alpha \tag{32}$$

$$\delta x = h\left(\cos\alpha - \frac{\cos 2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}} - \frac{\sin^2 2\alpha}{4\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}^3}\right)\delta\alpha \tag{33}$$

$$\delta x = h\left(\cos\alpha - \frac{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)n^2 + \sin^4\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}^3}\right)\delta\alpha \tag{34}$$

Lažja rešitev je, če odvajamo, preden rešujemo sistem:

$$\delta x = h\frac{\cos(\alpha-\beta)(\delta\alpha-\delta\beta)}{\cos\beta} + h\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}\sin\beta\delta\beta \tag{35}$$

$$\cos\alpha\delta\alpha = n\cos\beta\delta\beta \tag{36}$$

Zdaj lahko eliminiramo diferencial $\delta\beta$:

$$\delta x = h\left(\frac{\cos(\alpha-\beta)(1-\cos\alpha/(n\cos\beta))}{\cos\beta} + \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\beta}\sin\beta\frac{\cos\alpha}{n\cos\beta}\right)\delta\alpha = 4.03\,\mathrm{cm}\delta\alpha = 0.035\,\mathrm{cm} \tag{37}$$

Rešitvi sta ekvivalentni, v drugem primeru si β izračunamo vnaprej.

1.10 Kodre 24/2

Preizkusi Fermatovo načelo na odboju na zrcalu.

Definiramo vektorje, naj bosta začetek in konec na xz ravnini:

$$A(x_1, 0, z_1), \quad B(x_2, 0, z_2), \quad C(x, y). \tag{38}$$

Vsota poti:

$$s = s_1 + s_2 = ||A-C|| + ||B-C|| = \sqrt{(x_1-x)^2 + y^2 + z_1^2} + \sqrt{(x_2-x)^2 + y^2 + z_2^2} \tag{39}$$

Variacija po x in y bo nič, ko bo ekstremalno. $s_{1,2}$ v imenovalcu nočemo razpisat, ker bo preveč:

$$\frac{\partial s}{\partial x} = 0 = -\frac{x_1 - x}{s_1} - \frac{x_2 - x}{s_2} \tag{40}$$

$$\frac{\partial s}{\partial y} = 0 = -\frac{y}{s_1} - \frac{y}{s_2} \tag{41}$$

Druga je trivialno rešena z $y = 0$. Prva enačba pa je pravzaprav enakost sinusov vpadnih kotov $\sin\alpha_1 + (-\sin\alpha_2) = 0$, da pa:

$$x = \frac{x_1/s_1 + x_2/s_2}{1/s_1 + 1/s_2}. \tag{42}$$

1.11 Kodre 24/9

Štejemo rentgensko svetlobo. Najprej gredo skozi 2 cm neobčutljivo plast, potem pa skozi 5 cm detekcijsko plast. Pri katerem absorpcijskem koeficientu jih zaznamo največ?

Najbolje je delat s fluksom fotonov v odvisnosti od prostora. V eni plasti se absorbira delež fotonov:

$$j(x + \mathrm{d}x) - j(x) = -(\mu\,\mathrm{d}x)j(x) \tag{43}$$

Po deljenju z $\mathrm{d}x$ dobimo diferencialno enačbo, ki jo lahko rešimo:

$$\frac{\mathrm{d}j}{j} = -\mu, \quad j = j_0 e^{-\mu x}. \tag{44}$$

Razlika fluksov ob x_1 in ob x_2 je tisto, kar je bilo zaznano:

$$j_x = j_0(e^{-\mu x_1} - e^{-\mu(x_1+x_2)}) \tag{45}$$

Ekstrem:

$$\frac{\mathrm{d}j_x}{\mathrm{d}\mu} = j_0(-x_1 e^{-\mu x_1} + (x_1 + x_2)e^{-\mu(x_1+x_2)}) = 0 \tag{46}$$

$$x_1 = (x_1 + x_2)e^{-\mu x_2} \to \mu = -\frac{1}{x_2} \ln \frac{x_1}{x_1 + x_2} \tag{47}$$