3 Diferencialne enačbe in variacijski račun

3.1 Kodre 30/9

Gumijast trak z dolžino 10 m in s prožnostnim modulom 500 N/cm^2 ter gostoto 1.5 g/cm^3 obesimo za en konec. Za koliko se raztegne zaradi lastne teže?

Na vsak košček traka deluje lastna teža, ki jo uravnovesi razlika nateznih napetosti. x merimo od spodnjega roba navzgor po neraztegnjenem traku.

$$F(x + \mathrm{d}x) - F(x) = \mathrm{d}F = \rho g S \,\mathrm{d}x \Rightarrow F = \rho g S x \tag{1}$$

Hkrati velja Hookov zakon:

$$F = SE\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{2}$$

kjer je $\mathrm{d}y$ prispevek koščka k raztezku. Integriramo:

$$y = \int_0^l \mathrm{d}y = E^{-1}\rho g \frac{l^2}{2} \tag{3}$$

3.2 Kodre 30/11 – Epruveta s plinom

Zataljeno cevko, napolnjeno s plinom, hitro vrtimo okrog prečne osi. Zanima nas profil gostote plina z razdaljo od sredine.

Naloga je podobna nalogi iz KF, z razliko, da imamo ohranitev mase plina v epruveti, ter da je plin za razliko od tekočine stisljiv.

Za diferencialno širok košček tekočine velja:

$$(\rho S \,\mathrm{d}x)\Omega^2 x = F(x + \mathrm{d}x) - F(x) = S \,\mathrm{d}p \tag{4}$$

Prav bo prišla plinska enačba $p = \rho \frac{R}{M} T$. Preuredimo:

$$\Omega^2 x \,\mathrm{d}x = \frac{R}{M} T \frac{\mathrm{d}\rho}{\rho} \tag{5}$$

$$\rho = \rho_0 e^{\Omega^2 M/(RT) x^2/2} = \rho_0 e^{k^2 x^2/2} \tag{6}$$

kjer je $k^2 = \Omega^2 M/RT$. V osnovi nam to že pove profil, seveda je pa odvisno, koliko mase imamo sprva v epruveti:

$$m = S \int_0^R \rho(x) \,\mathrm{d}x \tag{7}$$

Ta integral (Dawsonov integral) sicer ni izračunljiv analitično, lahko pa ga poiščemo v tabelah, ali pa poračunamo v približku.

3.3 $2\times$ vpeta vzmet

Enakomerno navito dolgo vijačno vzmet z maso 1 kg s koeficientom 100 N/m nataknemo na enako dolgo valjasto vodilo in jo na obeh koncih pritrdimo nanj. Vzmet se vodilu prilega, vendar po njem prosto drsi. Za koliko se premakne srednja točka vzmeti, ko sistem postavimo pokonci? k velja le za celotno vzmet.

Za diferencialno majhen košček neraztegnjene debeline $\mathrm{d}x$ velja:

$$F = (kl/\,\mathrm{d}x)\,\mathrm{d}y = kl\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \tag{8}$$

Napetost vzmeti F se spreminja z višino, ker mora razlika sil držat še težo koščka:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \frac{mg}{l} \tag{9}$$

x merimo od zgoraj navzdol!

Tu se zdaj razlikujeta primera, ko je vzmet zgoraj vpeta ali pa ne. Če je zgoraj vpeta, potem sila na vrhu ni 0 ampak neznana F_0:

$$F = F_0 - mg\frac{x}{l} \tag{10}$$

Če to vstavimo v Hookov zakon, dobimo zvezo med raztezkom y in neznano silo F_0:

$$y = \int_0^l \frac{F}{kl}\,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{F_0 - mgx/l}{kl}\,\mathrm{d}x = \frac{F_0}{k} - \frac{mg}{2k} \tag{11}$$

raztezek (povesek) na sredi je pa:

$$y_{1/2} = \int_0^{l/2} \frac{F_0 - mgx/l}{kl}\,\mathrm{d}x = \frac{F_0}{2k} - \frac{mg}{8k} \tag{12}$$

Če je vzmet zgoraj vpeta (neraztegnjena, kadar ni postavljena pokonci), je pogoj $y = 0$ in

$$F_0 = \tfrac{1}{2}mg \tag{13}$$

sredina pa se povesi za:

$$y_{1/2} = \frac{mg}{4k} - \frac{mg}{8k} = \frac{mg}{8k} \tag{14}$$

Če vzmet *ni* vpeta, potem je $F_0 = 0$. Takrat je celoten skrček:

$$y = -\frac{mg}{2k} \tag{15}$$

zgornja polovička pa se skrči za

$$y_{1/2} = -\frac{mg}{8k} \tag{16}$$

Ker se zdaj zgornji del vzmeti premakne (od koder merimo razdalje), je povesek sredine:

$$-(y - y_{1/2}) = \frac{mg}{2k} - \frac{mg}{8k} = \frac{3mg}{8k} \tag{17}$$

3.4 Vrtež stožca

Vzamemo gumijast prisekani polstožec s polmeroma $2R$ in R ter višino L. Za koliko se zasuka, če nanj delujemo z navorom M? Podan imamo strižni modul gume G.

Strižni modul določa tangentno silo na enoto ploščine v odvisnosti od deformacije:

$$\frac{F}{S} = G\frac{\delta l}{h} \tag{18}$$

Ker je doprinos sile k navoru odvisen od polmera, deformacija pa od skupne debeline, moramo sestaviti prispevke po vrsti. Najprej za obroč debeline $\mathrm{d}r$ in polmera r:

$$\frac{\mathrm{d}F}{2\pi r\,\mathrm{d}r} = G\frac{r\,\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \tag{19}$$

$$\mathrm{d}M = r\,\mathrm{d}F = 2\pi G r^3 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z}\,\mathrm{d}r \tag{20}$$

Iz tega lahko izpeljemo navor za ploščo debeline r (srednji r – polmer na neki višini).

$$M = 2\pi G \frac{1}{4} r^4 \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} \tag{21}$$

Navori po 3. Newtonovem zakonu delujejo paroma med plastmi, tako da ima cel stožec isti navor. Akumuliran zasuk:

$$\varphi = \int_0^L \frac{4M}{2\pi G r^4}\,\mathrm{d}z = \int_0^L \frac{4M}{2\pi G(2R - z/LR)^4}\,\mathrm{d}z \tag{22}$$

Uvedemo $t = 2 - z/L,\ \mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}z/L$,

$$\varphi = -\int_2^1 \frac{4M}{2\pi G R^4 t^4} L\,\mathrm{d}t = -\frac{4ML}{2\pi G R^4}(2^{-3} - 1)/3 \tag{23}$$

$$\varphi = \frac{7ML}{12\pi G R^4} \tag{24}$$

3.5 Vesoljsko dvigalo

Obravnavaj vesoljsko dvigalo, ki visi na neki višini R – kakšna je natezna sila v odvisnosti od dolžine in višine vpetja, ter na kateri višini moramo vpeti, da centrifugalna sila deluje kot protiutež.

Za vsak košček štrika lahko zapišemo ravnovesje sil:

$$\rho S(g(r) - \Omega^2 r)\,\mathrm{d}r = \,\mathrm{d}F \tag{25}$$

Integracija tega nam pravzaprav da potencial:

$$\int_{r_1}^{r} \rho S(g(r) - \Omega^2 r)\,\mathrm{d}r = F(r) \tag{26}$$

Uvedemo:

$$V(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2}\Omega^2 r^2 \tag{27}$$

$$\rho S(V(r_2) - V(r_1)) = F(r) \tag{28}$$

Na vrhu ne potrebujemo vpetja, če je tam sila nič, iščemo torej pogoj:

$$V(r_1) = V(r_2) \tag{29}$$

Kar smo dobili, je v bistvu energijski zakon (prvi integral enačbe gibanja, tako kot Bernoullijeva enačba), pri čemer v vrtečem se koordinatnem sistemu dobimo še centrifugalni potencial. Maksimum potenciala je pri geostacionarni orbiti, kjer tudi točkasto telo lahko mirno kroži na fiksni višini.

3.6 Poišči maksimum funkcije $1 + xy$ na enotskem krogu

Poišči maksimum funkcije $f(x, y) = 1 + xy$ na enotskem krogu $x^2 + y^2 = 1$.

Eksplicitno

Izrazimo $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Takoj, ko to naredimo, izločimo točki $(\pm 1, 0)$. Če je ekstrem tam, ga je treba obravnavat posebej. Hkrati imamo opravka z dvema vejama, ki ju opisuje $\pm$. Vstavimo to v funckijo:

$$f(x) = 1 + xy = 1 \pm x\sqrt{1 - x^2} \tag{30}$$

Odvajamo in enačimo z 0:

$$f'(x) = \pm\left(\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right) = 0 \tag{31}$$

$$\sqrt{1-x^2} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} \tag{32}$$

$$1 - x^2 = x^2 \Rightarrow x = \pm\sqrt{1/2} \tag{33}$$

Skupaj s plusminusom pri y dobimo štiri točke:

$$(\pm\sqrt{1/2}, \pm\sqrt{1/2}) \tag{34}$$

pri čemer sta zdaj plusminusa neodvisna. V pricipu moramo tudi vse štiri še preverit. Če bi bil ekstrem v $(\pm 1, 0)$, bi to obravnavali z obratnim izražanjem $x = \pm\sqrt{1-y^2}$.

Implicitno (Langrangev multiplikator)

Namesto, da skrčimo število parametrov, lahko enega dodamo – Lagrangev multiplikator.

$$g(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(x^2 + y^2 - 1) = 1 + xy - \lambda(x^2 + y^2) \quad (+\lambda) \tag{35}$$

Odvod po λ itak vedno le vrne vez, tako da tega ne potrbujemo, s tem si tudi potem hitro eliminiramo ekstra člen, ki nič ne naredi (premik vezi za konstanto "nima veze").
Dobimo torej sistem:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = y - 2\lambda x = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x - 2\lambda y = 0 \tag{37}$$

$$1 = x^2 + y^2 \tag{38}$$

Iz prvih dveh enačb hitro dobimo $x = 2\lambda y = 4\lambda^2 x$, od koder sledi, da je bodisi $x = 0$, ali pa $\lambda = \pm 1/2$. Primer $x = 0$ odpade, ker bi moral zaradi prvih dveh enačb bit hkrati tudi $y = 0$, to pa se ne sklada z vezjo.
Ostala dva primera pa:

$$\lambda = +\frac{1}{2} \tag{39}$$

$$y = x \tag{40}$$

$$1 = 2x^2 = 2y^2 \tag{41}$$

$$(x, y) = (\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}) \tag{42}$$

$$(x, y) = (-\sqrt{1/2}, -\sqrt{1/2}) \tag{43}$$

Z drugo lambdo dobimo pa preostali dve (antisimetrični) rešitvi.

Parametrično

Kadar lahko vez opišemo parametrično, je to najboljši način. V tem primeru je najbolj očitna parametrizacija kar polarna:

$$x = \cos\varphi, y = \sin\varphi \tag{44}$$

Če to vstavimo s svojo funkcijo, pride

$$f(\varphi) = 1 + \sin\varphi\cos\varphi = 1 + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \tag{45}$$

Ekstrem:

$$f'(\varphi) = \cos 2\varphi = 0 \Rightarrow 2\varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi \tag{46}$$

oziroma

$$\varphi = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \tag{47}$$

kar je točno to, kar smo iskali.

3.7 Enačba ovojnice (astroida)

Poišči enačbo ovojnice tetiv dolžine l med ordinato in absciso.

Primer ustreza drsenju palice ob dveh stenah v pravem kotu oziroma drsenje vrat pri nekaterih vrstah avtobusov.
Naj bosta odseka na oseh a in b. Velja torej

$$a^2 + b^2 = l^2 \tag{48}$$

Implicitne (segmentne) oblike nosilk so:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \tag{49}$$

oziroma

$$f(x, y, a) = \frac{x}{a} + \frac{y}{\sqrt{l^2 - a^2}} - 1 \tag{50}$$

Enačbo ovojnice (kavstike) dobimo iz stacionarne točke po a:

$$\frac{\partial f}{\partial a} = -\frac{x}{a^2} + \frac{ya}{(l^2 - a^2)^{3/2}} = 0 \tag{51}$$

Če še malo preoblikujemo in dopišemo še osnovno enačbo premic, ki mora tudi hkrati veljat, dobimo par:

$$\frac{x}{a^3} = \frac{y}{(l^2 - a^2)^{3/2}}; \qquad \frac{x}{a} + \frac{y}{(l^2 - a^2)^{1/2}} = 1 \tag{52}$$

Sedaj moramo eliminirat a. Prvo enačbo dvotretjinimo (nima prostega člena, zato smo izbrali njo):

$$(l^2 - a^2)x^{2/3} = a^2 y^{2/3} \tag{53}$$

$$a^2(y^{2/3} + x^{2/3}) = l^2 x^{2/3} \tag{54}$$

$$a = l\frac{x^{1/3}}{\sqrt{y^{2/3} + x^{2/3}}} \tag{55}$$

Za $(l^2 - a^2)^{1/2}$ bi lahko vstavljali, ampak spomnimo se, da je to b, in b dobimo samo z menjavo $x \leftrightarrow y$, $a \leftrightarrow b$. Vstavimo to v segmentno premico:

$$\frac{x}{l\frac{x^{1/3}}{\sqrt{y^{2/3}+x^{2/3}}}} + \frac{y}{l\frac{y^{1/3}}{\sqrt{y^{2/3}+x^{2/3}}}} = 1 \tag{56}$$

$$\frac{x^{2/3} + y^{2/3}}{\sqrt{y^{2/3} + x^{2/3}}} = l \tag{57}$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = l^{2/3} \tag{58}$$