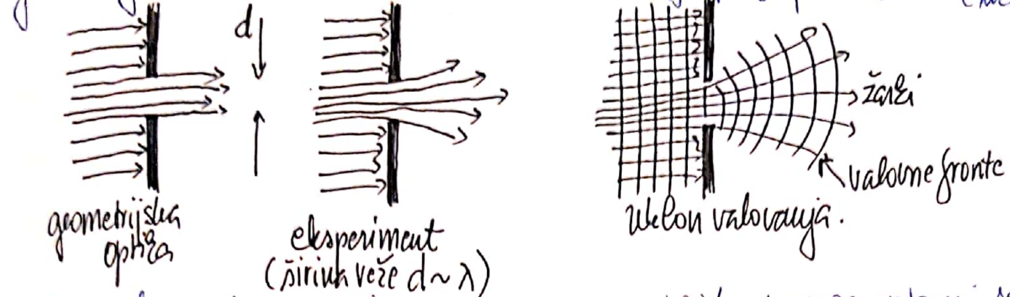
UKLON SVETLOBE (SKALARNA TEORIJA UKLONA)

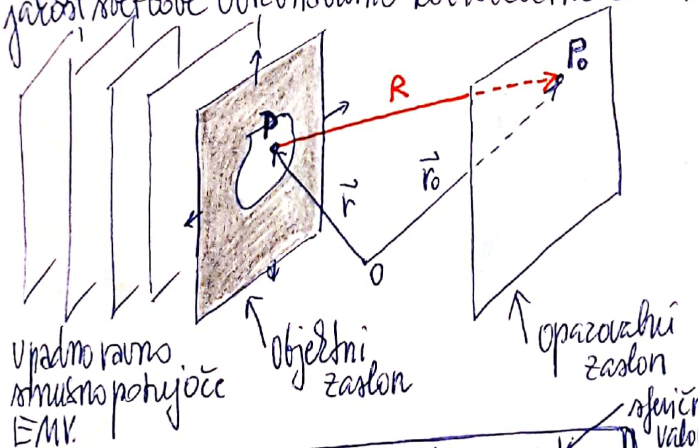
Kadar se svetloba širi skozi odprtine ali mimo ovir, ki imajo dimenzije podobnega reda, kot je valovna dolžina svetlobe ($d \sim \lambda$), opazimo energ. od najbolj značilnih valovnih pojavov = uklon. V geometrijski optiki pričakujemo, da se žarki svetlobe ne morejo širiti na območje geometrijske sence za oviro. Tovrstno obnašanje pa je po drugi strani značilno za valovanja (npr. na vodni gladini)



Poleg tega, da se valovanje širi na območje geometrijske sence za ovirami, se v njem pojavijo tudi ojačitve in oslabitve, oz. pri svetlobi temne in svetle linije. Le-te so posledica interference.

HUYGENS-FRESNELOV UKLONSKI INTEGRAL

Okoli leta 1816 je Fresnel (Augustin-Jean Fresnel, fizik, F) združil Huygensov princip opisa širjenja svetlobe s sekundarnimi sferičnimi valovi (Christiaan Huygens, fizik, NL) in Youngov opis interference na dveh režah (Thomas Young, GB) v t.i. Huygens-Fresnelovo uklonsko teorijo. V tej teoriji zanemarimo polarizacijo oz. vektorsko naravo polja in električno poljsko jakost svetlobe obravnavamo kot skalarno količino $E(\vec{r},t)$.



Zanima nas vrednost polja v točki $\mathbf{P_0}$ na opazovalnem zaslonu, do katere vodi vektor $\vec{r}_0$ v odvisnosti od vrednosti polja v točki $\mathbf{P}$ na objektnem zaslonu, do katere vodi vektor $\vec{r}$.
Po Huygensovem principu iz točke P izhaja sferično valovanje, katerega amplitudo določa vpadno polje, ki pada na objektni zaslon. Če je vpadno polje ravno valovanje, velja $E(\vec{r}) = E_0 \ \forall \ \vec{r}$.
Prispevke vseh sekundarnih polj moramo sešteti po vseh točkah objektnega zaslona (princip superpozicije ⇒ interferenca)

$$\boxed{E_{P_0} = E(\vec{r}_0) = \iint_A C(\vec{r}) E_0 \left(\frac{e^{ikR(\vec{r})}}{R(\vec{r})} \right) dS}$$

sferični valovi (samo krajevni del.)

integriramo po površini odprtine A

Konstanta, ki jo je Fresnel določil na osnovi eksperimentov in ima vrednost $[(i/\lambda) \cdot \chi(\vec{r})]$, pri čemer ima smerni faktor večinoma vrednost $\chi \approx 1$
(Ta faktor oz. vrednost $C(\vec{r})$ je teoretično izpeljal Kirchhoff leta 1882)

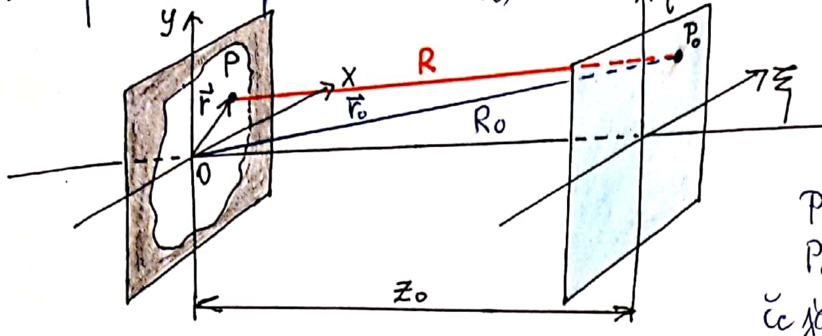
$$C(\vec{r}) \approx \left(\frac{i}{\lambda}\right)$$

Namesto, da integriramo sekundarno polje samo na območju odprtine A, lahko vpeljemo t.i. aperturno funkcijo $f(\vec{r})$, ki ima vrednost 1 tam, kjer je odprtina, in vrednost 0 sicer. Potem lahko integriramo po celotni 2D ploskvi, ki ustreza objektnemu zaslonu. Pri tem ni nujno, da je objektni zaslon samo prozoren ali neprozoren, lahko tudi delno prepušča svetlobo...
Polje v ravnini objektnega zaslona potem zapišemo:

$$\boxed{E(\vec{r}) = f(\vec{r}) \cdot E_0}$$

APERTURNA FUNKCIJA $f(\vec{r})$

Objektno ravnino opišemo kot ravnino s koordinatama x, y; opazovalno ravnino pa kot ravnino s koordinatama ξ in η. Izhodišči obeh koordinatnih sistemov pa ležita na skupni osi z (optična os sistema).



$P : \vec{r} = (x, y, 0)$

$P_0 : \vec{r}_0 = (\xi, \eta, z_0)$

Če je tipična razsežnost reže $d \ll z_0$, velja da je $C(\vec{r}) = \text{konst} \approx (i/\lambda)$

$$E(\xi,\eta,z_0) = \frac{i}{\lambda}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, E_0 \left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) dx\,dy$$

V izrazu za krogelne valove nastopa razdalja R med točko P in P_0, za katero velja

$$R^2 = (\xi-x)^2 + (\eta-y)^2 + z_0^2 \Rightarrow R = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+z_0^2}$$

V odvisnosti od tega, kako natančno obravnavamo izraz za $R = R(x, y, \xi, \eta, z_0)$ v uklonskem integralu, razlikujemo med različnimi uklonskimi približki. Najbolj znana približka sta Fraunhoferjev (Joseph Ritter von Fraunhofer, fizik, D) in Fresnelov približek.

FRAUNHOFERJEV UKLON

V tem približku v zgoraj zapisanem integralu upoštevamo le linearne člene, kar je upravičeno, če velja, da lahko ostale člene pri razvoju kvadratnega korena več ali manj zanemarimo:

$$R = \sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y^2)+z_0^2} = \sqrt{\underbrace{\xi^2+\eta^2+z_0^2}_{R_0^2} - 2\xi x - 2\eta y + x^2+y^2} = \sqrt{R_0^2\left(1-\frac{2\xi x}{R_0^2} - \frac{2\eta y}{R_0^2} + \frac{x^2+y^2}{R_0^2}\right)}$$

$$\approx \underbrace{R_0 - \frac{\xi x}{R_0} - \frac{\eta y}{R_0}}_{\text{V Fraunhoferjevem uklonu upoštevamo le te člene}} + \frac{x^2+y^2}{2R_0} + \dots$$

Fresnelov uklon

Zanemarili smo vse člene višjega reda!

$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 \dots$

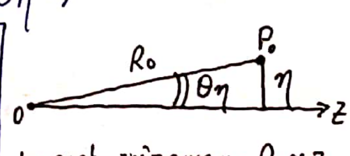
Ustrezni člen, ki opisuje sferične monokromatske valove, potem zapišemo

$$\left(\frac{e^{ikR}}{R}\right) \approx \frac{e^{ikR_0}\, e^{-ik\frac{\xi x}{R_0}}\, e^{-ik\frac{\eta y}{R_0}}}{R_0}$$

Člen v imenovalcu se dosti počasneje spreminja kot v števcu (ker je pomnožen še z faktorjem k). Zato tam odvisnost od x, y, ξ in η povsem zanemarimo.

Vpeljemo še t.i. smerne oz. uklonske kote: $\sin\theta_\xi \approx \theta_\xi = \frac{\xi}{R_0}$ in $\sin\theta_\eta \approx \theta_\eta = \frac{\eta}{R_0}$ in z njimi povezane prostorske frekvence $\omega_\xi = k\theta_\xi$ in $\omega_\eta = k\cdot\theta_\eta \Rightarrow$

$$\boxed{E(\omega_\xi,\omega_\eta) = \left(\frac{i}{\lambda}\right)\frac{e^{ikR_0}\cdot E_0}{R_0}\iint_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, e^{-i\omega_\xi x}\, e^{-i\omega_\eta y}\, dx\,dy}$$



pogosto pišemo $R_0 \approx z_0$

Uklonska slika nekega objekta je v Fraunhoferjevem približku enaka 2D Fourierovi transformaciji aperturne funkcije tega objekta!

FRESNELOVO ŠTEVILO

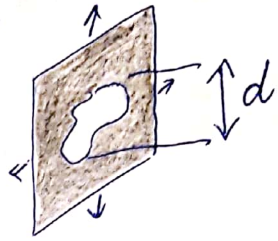
Zanima nas, kdaj navedeni približek lahko uporabimo "v praksi". Spomnimo se, v razvoju izraza za R smo zanemarili člen $(x^2+y^2)/2R_0$. Ta člen v izrazu za sferične valove nastopa v členu $e^{ik(x^2+y^2)/2R_0}$ in torej prinaša nek dodatni fazni zamik. Če naj bo res zanemarljiv, mora veljati

$$\frac{k(x^2+y^2)}{2R_0} \ll 2\pi \quad \forall\, x,y$$

$$\frac{k \cdot d^2}{2R_0} \ll 2\pi$$

$$\frac{\cancel{2\pi}}{\lambda}\cdot\frac{d^2}{R_0} \ll \cancel{2\pi} \Rightarrow \boxed{F = \frac{d^2}{\lambda R_0} \ll 1}$$

privzamemo da je $(x^2+y^2)_{max} = d^2$, pri čemer d meri tipično razsežnost odprtine v objektnem zaslonu.



Fresnelovo število

$$\Rightarrow R_0 \gg (d^2/\lambda)$$

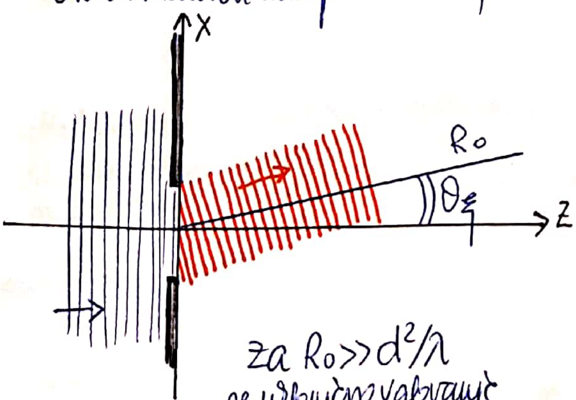
Tipične vrednosti $R_0 \approx z_0$ morajo torej biti dosti večje od dimenzij odprtine, zato Fraunhoferjevemu približku rečemo tudi PRIBLIŽEK DALJNJEGA POLJA.

Primeri: $\lambda = 500\,\text{nm} = 5\cdot 10^{-7}\,\text{m} \Rightarrow$

$d = 1\,\mu\text{m} \Rightarrow R \gg \frac{10^{-12}}{5\cdot 10^{-7}}\,\text{m} = 2\cdot 10^{-6}\,\text{m} = 2\,\mu\text{m}$, $d = 10\,\mu\text{m} \Rightarrow R \gg 200\,\mu\text{m}$, $d = 100\,\mu\text{m} \Rightarrow R \gg 2\,\text{cm}$

$d = 1\,\text{mm} \Rightarrow R \gg 2\,\text{m}$ (eksperiment)

Preden se lotimo obravnave izbranih primerov, si oglejmo še interpretacijo približnosti Fraunhoferjevega približka. Če si zamislimo enodimenzionalni primer reže, ki se razteza v smeri osi x



za $R_0 \gg d^2/\lambda$ se uklonjeno valovanje manifestira kot del ravnega valovanja.

Fazni zamik ~~sferičnih~~ sekundarnih valov, ki izvirajo z območja reže se spreminja kot

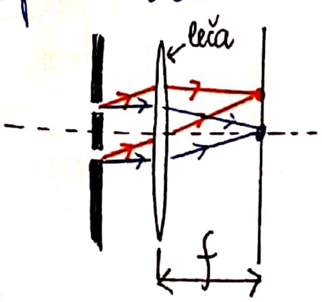
$$\Delta\phi = \frac{k\xi x}{R_0}$$

Če opazujemo, kakšno vrednost $\Delta\phi(x)$ imajo valovi, ki potujejo v smeri $\theta_\xi \approx (\xi/R_0)$ glede na os z, vidimo da velja

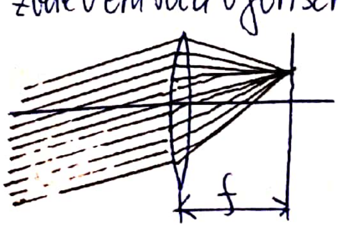
$$\Delta\phi = k\theta_\xi \cdot x$$

Kar ustreza ravnemu valovanju.

Zaradi zgoraj zapisanega za opazovanje Fraunhoferjevega uklona ni nujno, da zaslon postavimo zelo daleč za objektno ravnino ($R_0 \gg d^2/\lambda$). Namesto tega lahko za objektni zaslon postavimo zbiralno lečo in uklonsko sliko opazujemo v njeni goriščni ravnini.

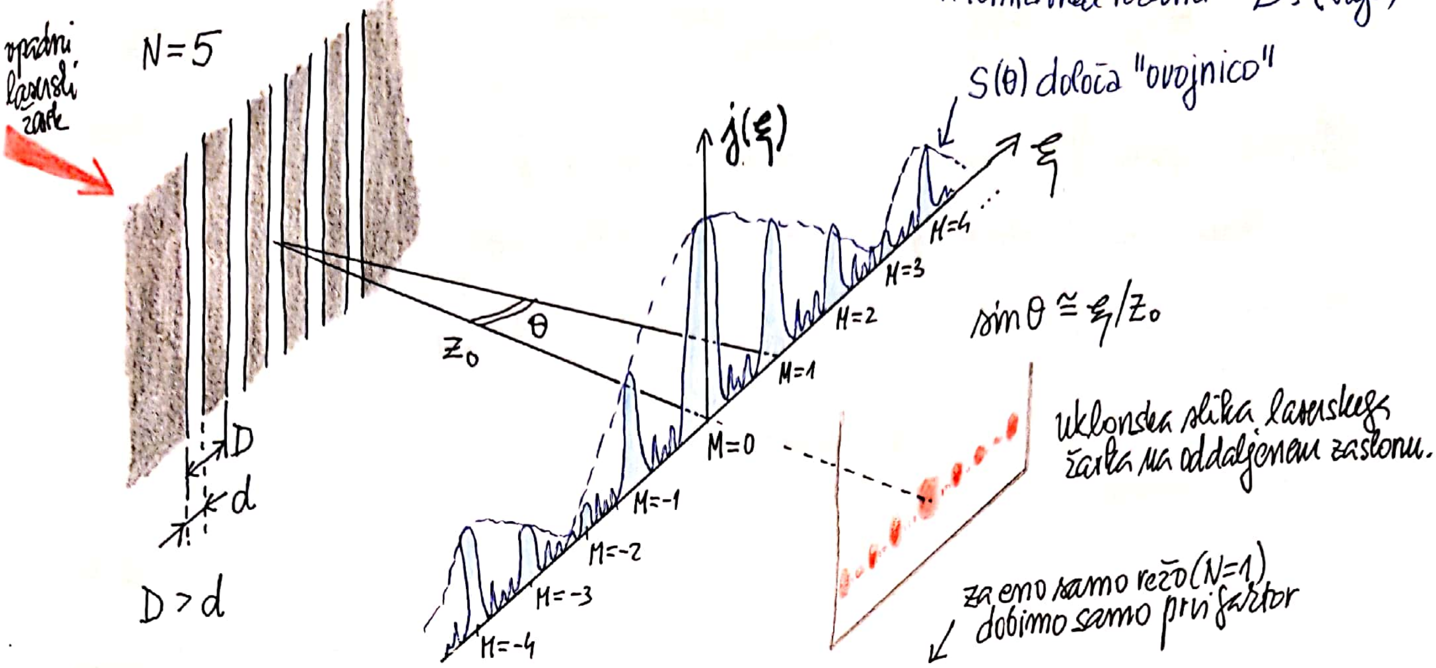


Vemo namreč, da zbiralna leča snop vzporednih žarkov zbere v eni točki v goriščni ravnini leče.



Tak sistem je analogna "naprava" za izračun 2D Fourierove transformacije nekega delnoprozornega objekta ali vzorca (pattern recognition).

Primer 1: Fraunhoferjev uklon na sistemu N vzporednih rež. Širina posamične reže $=d$. Razmik med režami $=D$. (vaje)



za eno samo režo (N=1) dobimo samo prvi faktor

$$\left.\begin{aligned}\delta &= k\cdot d\cdot \sin\theta\\ \Delta &= k\cdot D\cdot \sin\theta\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{j(\theta) = S(\theta)\cdot M(\theta) = j_0\cdot \underbrace{\left(\frac{\sin\delta/2}{\delta/2}\right)^2}_{S(\theta)\ \text{strukturni faktor}}\cdot\underbrace{\left(\frac{\sin(N\Delta/2)}{\sin(\Delta/2)}\right)^2}_{M(\theta)\ \text{mrežni faktor}}}\ ;\ N=1,2,3\ldots \text{rež}$$

rezultat za $N=1,2,3\ldots$ rež

$S(\theta)$ strukturni faktor odvisen od širine posamične reže

$M(\theta)$ mrežni faktor odvisen od medsebojne razporeditve rež

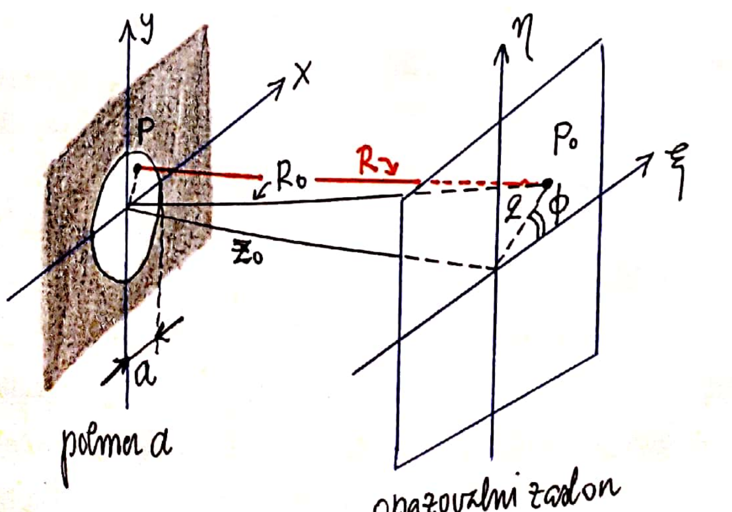
Glavne vrhove v uklonski sliki ($j(\theta)$) dobimo, kadar velja $(\Delta/2) = M\cdot\pi$ oz. $\Delta = 2M\pi$, $M = 0,1,2,\ldots \Rightarrow \sin(\Delta/2) = 0$ v imenovalcu

$$\Delta = k\cdot D\cdot\sin\theta = 2\cdot M\cdot\pi$$

$$\boxed{D\cdot\sin\theta = \frac{2\cdot M\cdot\pi\lambda}{2\pi} = M\cdot\lambda}$$

Med posamičnimi glavnimi maksimumi dobimo še stranske maksimume. Le-teh je $(N-2)$. V našem primeru $N=5$ imamo torej med glavnimi maksimumi še tri stranske oz. vmesne maksimume.

Primer 2: Fraunhoferjev uklon na okrogli reži s polmerom a:



- lego točke P v ravnini xy opišemo v polarnih koordinatah ρ in φ kot

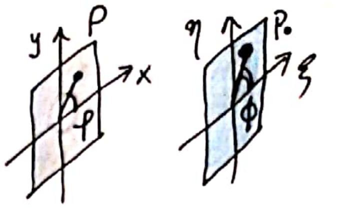
$$x = \rho\cos\varphi \qquad P=(x,y)$$
$$y = \rho\sin\varphi$$

- lego točke P_0 v ravnini $\xi\eta$ pa v polarnih koordinatah ϱ in ϕ kot

$$\xi = \varrho\cos\phi \qquad P_0=(\xi,\eta)$$
$$\eta = \varrho\cdot\sin\phi$$

- potem izračunamo Fraunhoferjev uklonski integral

$ds = dxdy = \rho\, d\rho\, d\varphi$ ploskovni element objektnega zaslona



$$E(\varrho,\phi,z_0) = \frac{i}{\lambda}\cdot E_0 \cdot \frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} e^{-i\omega_\xi x}\, e^{-i\omega_\eta y}\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

upoštevamo $\omega_\xi = \left(\frac{\xi}{R_0}\right)k$ in $\omega_\eta = \left(\frac{\eta}{R_0}\right)k \Rightarrow \omega_\xi = k\cdot\left(\frac{\varrho}{R_0}\right)\cos\phi$ in $\omega_\eta = k\left(\frac{\varrho}{R_0}\right)\sin\phi$, $\omega = k\left(\frac{\varrho}{R_0}\right)$

$$\omega_\xi x + \omega_\eta y = \omega\cos\phi\,\rho\cos\varphi + \omega\sin\phi\,\rho\sin\varphi = \omega\rho\underbrace{(\cos\phi\cos\varphi + \sin\phi\sin\varphi)}_{=\cos(\varphi-\phi)=\cos(\phi-\varphi)}$$

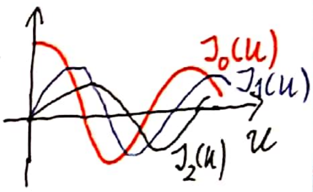
$$E(\varrho,\phi,z_0) = \frac{iE_0}{\lambda}\cdot\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} e^{-i\omega\rho\cos(\varphi-\phi)}\,\rho\, d\rho\, d\varphi$$

uvedemo novo spremenljivko $\tilde\varphi = \varphi - \phi \Rightarrow d\varphi = d\tilde\varphi$
(Ni pomembno od kod začnemo šteti kot φ, pomembna je le razlika med φ in ϕ)

$$E(\varrho,\phi,z_0) = \frac{iE_0}{\lambda}\cdot\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_0^{2\pi}\int_0^{a} e^{-i\omega\rho\cos\tilde\varphi}\,\rho\, d\rho\, d\tilde\varphi$$

Integralni zapis Besselovih funkcij (F. W. Bessel, GE) prve vrste:

$$J_m(u) = \frac{(+i)^{-m}}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(mv+u\cos v)}\,dv \Rightarrow J_0(u) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{iu\cos v}\,dv$$



Rekurzijska formula za Besselove funkcije

$$\frac{d}{du}\left(u^{m+1}J_{m+1}(u)\right) = u^{m+1}J_m(u) \quad \text{oziroma ekvivalentno} \quad \frac{d}{du}\left(u^m J_m(u)\right) = u^m J_{m-1}(u) \quad *$$

Te zveze uporabimo pri integriranju.

$$E(\varrho,z_0) = \frac{iE_0}{\lambda}\cdot\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_0^{a}\rho\, d\rho\,\frac{2\pi}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\omega\rho\cos\tilde\varphi}\,d\tilde\varphi = \left(\frac{2\pi i E_0}{\lambda}\right)\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_0^{a}\rho\, d\rho\, J_0(\omega\rho)(-1)\cdot\frac{\omega^2}{\omega^2}$$

vpeljemo $\omega\rho = u$, $du = \omega\cdot d\rho$, $\rho\omega = u$

$$= \left(\frac{-2\pi i E_0}{\lambda\omega^2}\right)\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\int_0^{\omega a} J_0(u)\,u^1\,du \quad \text{uporabimo } *$$

$$= \frac{-2\pi i E_0}{\omega^2\lambda}\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\left[u^1 J_1(u)\right]_0^{\omega a}$$

$$= \frac{-2\pi i E_0}{\omega^{\cancel{2}}\lambda}\,\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\cdot(\cancel{\omega}a)\cdot J_1(\omega a)$$

$$= \frac{-2\pi i E_0}{\omega\lambda}\cdot\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\, a\cdot J_1(\omega a)$$

Sedaj vstavimo nazaj izraz $\omega = k\cdot\left(\frac{\varrho}{R_0}\right)$ in izraz predelamo v

$$E(\varrho,z_0) = \frac{-2\pi i}{\lambda}\cdot\frac{E_0 R_0}{k\cdot\varrho\cdot R_0}\, e^{ikR_0}\cdot a\cdot J_1(\omega a)\cdot\frac{a}{a}$$

$$= \underbrace{E_0\left(\frac{e^{ikR_0}}{R_0}\right)\left(\frac{i}{\lambda}\right)}_{C}(\pi a^2)\left[\frac{2J_1(ka\varrho/R_0)}{(ka\varrho/R_0)}\right] = C(\pi a^2)\left[\frac{2J_1(ka\varrho/R_0)}{(ka\varrho/R_0)}\right]$$

površina reže $A = \pi a^2$

vpeljemo še $(\varrho/R_0) = \sin\theta$ in dobimo za gostoto energ. toka na zaslonu, če privzamemo $R_0(\varrho,z_0)\approx z_0$, naslednji končni izraz ($j\propto|E|^2$)

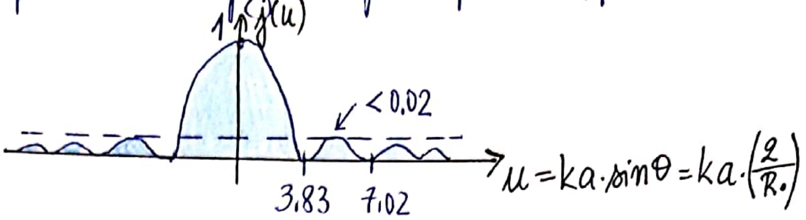
$$\boxed{j = j_0\left(\frac{2J_1(ka\cdot\sin\theta)}{ka\cdot\sin\theta}\right)^2}$$

Airyeva funkcija oz. **Airyev disk**.
(George Biddell AIRY, astronom + matematik, GB)

Zanimajo nas podrobnosti Airyevega diska: Ker velja $\lim_{u\to 0}\left(\frac{J_1(u)}{u}\right) = 1/2 \Rightarrow j(\theta=0)=j_0$
Od tod vidimo, da parameter j_0 meri gostoto energijskega toka v sredini diska. Proti robovom pa intenziteta pojema in potem pade na 0, pa spet naraste, itd.

Ničle $J_1(u)=0$

$u=0,\ u=3.83,\ u=7.02, \dots$

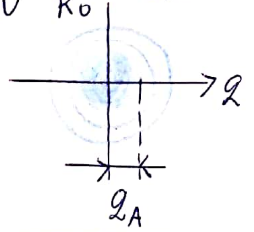


= Svetel krog z vedno šibkejšimi zunanjimi obroči.

Zanima nas polmer notranjega kroga oz. diska:

$$u(\varrho_A)=3.83 \Rightarrow u = \left(\frac{k a\cdot \varrho_A}{R_0}\right) = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot\frac{a\varrho_A}{R_0} = 3.83 \Rightarrow \varrho_A = \underbrace{\left(\frac{3.83}{\pi}\right)}_{1.22}\left(\frac{\lambda R_0}{2a}\right)$$

$$\boxed{\varrho_A = 1.22\left(\frac{\lambda R_0}{2a}\right)}$$



LOČLJIVOST (RESOLUCIJA) OPTIČNIH NAPRAV

Pri napravah na osnovi leče vedno uporabljamo leče z določenim premerom $D=2a$. Na detektor (slikovni) pade le del svetlobe, ki gre skozi lečo. Leče torej delujejo kot okrogle zaslonke s polmerom a.

Če, denimo, preslikujemo oddaljen predmet, nastane slika v goriščni ravnini $\Rightarrow R_0=f$. Na slikovnem detektorju pa za točkasti predmet vidimo kot okrogli disk s polmerom

$$\varrho_A \approx 1.22\,\frac{f\cdot\lambda}{D} = 1.22\cdot\lambda\left(\frac{f}{D}\right) = 0.61\,\frac{\lambda}{NA}$$

razmerje med polmerom leče $(D/2)$ in goriščno razdaljo f imenujemo numerična apertura

$$NA = \left(\frac{(D/2)}{f}\right) \lesssim 1$$

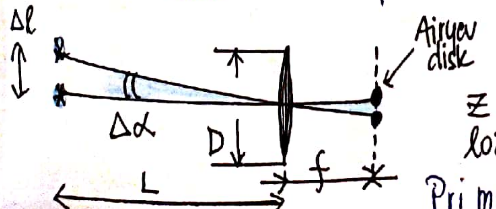
Če imamo dve oddaljeni točkasti telesi, bo v slikovni ravnini vsako izmed njih ustvarilo Airyev disk. Ko se bosta diska začela prekrivati, telesa na sliki ne bomo mogli več ločiti med sabo.

Rayleighjev kriterij pravi, da bomo objekta na sliki ločili med sabo, če bo veljalo

$$(\Delta\varrho_A) \geq 1.22\cdot\left(\frac{\lambda}{NA}\right) \gtrsim \lambda$$

To pomeni, da je minimalna razlika zornih kotov $\Delta\alpha_{min} = \frac{\Delta\varrho_{A\,min}}{f} \gtrsim 1.22\,\frac{\lambda}{D}$

Kotna resolucija teleskopov je tem večja, čim manjša je λ in tem večji je D.



Z teleskopom $D=5\,m$ na Zemlji in $\lambda=500\,nm$ lahko na Luni $L=384000\,km$ ločimo podrobnosti $\Delta l_{min} = \left(\frac{\lambda}{D}\right)\cdot L \simeq 40\,m$

Pri mikroskopih je podobno. Tam je predmet blizu goriščne ravnine $\Rightarrow \Delta l_{min} \approx \lambda$