Solucionario del capítulo 2:

Exercício 2.7.1 (a) Prove que todo espaço normado de dimensão finita n sobre $\mathbb{K}$ é isomorfo ao espaço euclidiano $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$.
(b) Prove que se E e F são espaços normados, sobre o mesmo corpo, de mesma dimensão finita, então E e F são isomorfos.

a) Recordemos la norma $\|\cdot\|_2$:

$$\|(a_1, \ldots, a_n)\|_2 = (|a_1| + \ldots |a_n|)^{1/2}$$

Sea $\mathbb{K}$ de dimensión finita n, i.e: $\exists \mathcal{B} = \{a_1, \ldots, a_n\}$ $\mathbb{K}$-base normada de E.
Y sea $\|\cdot\|$ su norma.

$\cdot\ T(a_i) = e_i$

Definimos: $T : (E, \|\cdot\|) \to (\mathbb{K}^n, \|\cdot\|_2)$

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i a_i \mapsto T(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . T(a_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . e_i$$

$\cdot$ T es T.L:

$$x, \lambda y \Rightarrow x = \sum \alpha_i a_i\ ,\ y = \sum \beta_i a_i \Rightarrow x + \lambda y = \sum_{i=1}^{n} [\alpha_i + \lambda \beta_i] \cdot a_i$$

$$\Rightarrow T(x+\lambda y) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \lambda \beta_i) e_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i + \lambda \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i = T(x) + \lambda T(y)$$

$\cdot$ T es sobre: Sea: $y = \sum \alpha_i e_i \Rightarrow \exists x \in E / x = \sum \alpha_i a_i$ y

$$T(x) = \sum \alpha_i T(a_i) = \sum_{\alpha_i} \alpha_i e_i = y$$

• T es iny: Sean $x, y \in E \,/\, T(x) = T(y)$

Luego: $x = \sum \alpha_i e_i \Rightarrow \sum \alpha_i e_i = \sum \beta_i e_i \Rightarrow \sum (\alpha_i - \beta_i) e_i = 0$

y $= \sum \beta_i e_i \Rightarrow \alpha_i = \beta_i : \forall i \Rightarrow x = y.$

Luego: T es biy $\Rightarrow \exists T^{-1} : \mathbb{K}^n \to E$. ¿$T^{-1}$ es lineal?

Sea $x, y \in \mathbb{K}^n \Rightarrow \exists x_1, y_1 \in E \,/\, T(x_1) = x \wedge T(y_1) = y$

Luego: $T^{-1}(x + \lambda y) = T^{-1}(T(x_1) + \lambda T(y_1)) = T^{-1}(T(x_1 + \lambda y_1)) = x_1 + \lambda y_1$

$= T^{-1}(x) + \lambda T^{-1}(y)$.

$\therefore T^{-1}$ es lineal $\Rightarrow T$ es un isomorfismo.

Resolvámoslo de otra manera:

• Sabemos que todas las normas en $\mathbb{K}^n$ son equivalentes en $\mathbb{K}^n$. Entonces:

$\exists c_1, c_2 > 0 : \quad c_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \quad : \forall x \in \mathbb{K}^n.$

• Luego, por el lema 1.1.5: Sea $B = \{x_1, \dots, x_n\}$ la base de E

$\Rightarrow \exists b_1, b_2 > 0 : b_1 \|a\|_1 \leq \|x\| \leq b_2 \|a\|_1 \,/\, a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \wedge x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$

Luego: Con el T que habíamos definido y probado que era lineal y biyectivo.

Entonces: $T(x) = a$

Luego $\|x\| \le b_2 \|a\|_1 \le b_2 c_2 \|a\|_2$, $c_1 b_1 \|a\|_2 \le \|x\|$

$\Rightarrow \exists d_1, d_2 \;/\; d_1 = \frac{1}{b_1 c_1}, \; d_2 = \frac{1}{b_2 c_2} \;/\; d_2 \|x\| \le \|T(x)\|_2 \le d_1 \|x\|$

$\therefore$ Por el corolario 2.1.3: T es un isomorfismo

b) Por (a) hemos podido encontrar:

$T_1 : E \to \mathbb{K}^n$ isomorfismo

$T_2 : F \to \mathbb{K}^n$ isomorfismo

$\Rightarrow \exists T : T_2^{-1} \circ T_1 : E \to F$ isomorfismo

$\Rightarrow E \approx F$

Exercício 2.7.2 Todo operador linear cujo domínio é um espaço normado de dimensão finita é contínuo.

$\beta = \{x_1, \dots, x_n\}$ base de E. Luego sea $x \in E \Rightarrow x = \sum \alpha_i x_i \;/\; \|x\| \le 1$

$\Downarrow$

$\exists c > 0 :$

$\left[\sum |\alpha_i|\right] \le \|x\| \le 1$

$\Rightarrow \|T(x)\| = \|\sum \alpha_i T(x_i)\| \le \sum |\alpha_i| \|T(x_i)\|$

Sea $C = \max\{\|T(x_i)\| : \forall i : 1, \dots, n\}$

$\Rightarrow \|T(x)\| \le C \cdot \sum |\alpha_i| \le C$

$\Rightarrow \sup\{\|T(x)\| : x \in E \wedge \|x\| \le 1\} \Rightarrow$ Por el Teo. 2.1.1:

$\Rightarrow T$ es continua

Exercício 2.7.3 Mostre que para todo espaço normado de dimensão infinita E e todo espaço normado $F \neq \{0\}$, existe um operador linear descontínuo $T: E \longrightarrow F$.

Como E es un e.v. finito dimensional, entonces posee una base de Hamel por el Axioma de eleccion. $\beta = \{\beta_i\}_{i \in I}$ / I es arbitrario infinito.

Como I es infinito, Tomaremos una subsecuencia de los indices: $(i_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$

$$u_n = \beta_{i_n} \ / \ u_n \neq 0_E$$

Y como $F \neq \{0\} \Rightarrow \exists y \in F / y \neq 0_F$. Eligiremos ese y

Definimos: $T|_\beta : \beta \to F$. Luego lo vamos a extender.

$$T(u_n) = n y \quad (n \in \mathbb{N}) \ \wedge \ T(\beta) = 0 : \forall \beta \in \beta - (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

Ahora, extendemos a Todo E. Sea $x \in E \Rightarrow x = \sum_{\beta \in \beta} \{\lambda_\beta\} \cdot \beta$ / $\{\lambda_\beta\}$ casi-finita

$\Rightarrow T(x) = \sum_{\beta \in \beta} \{\lambda_\beta\} T(\beta)$ $\quad$ finito $F \subseteq \beta$

$\therefore T$ está bien definida. Sup: $x = \sum_{\beta \in \beta} \{\lambda_\beta\} \cdot \beta \ \wedge \ x = \sum_{\beta \in \beta} \{\alpha_\beta\} \cdot \beta$ / $\{\lambda_\beta\}, \{\alpha_\beta\}$ casi-finitas

$\Rightarrow T(x) = \sum_{\beta \in \beta} \{\lambda_\beta\} T(\beta)$

$\Rightarrow T(x) = \sum_{\beta \in \beta} \{\alpha_\beta\} T(\beta)$

Pero $x - x = 0 = \sum_{\beta \in \beta} \{\lambda_\beta - \alpha_\beta\} \cdot \beta$ y como β es l.i.

$\Rightarrow \lambda_\beta = \alpha_\beta : \forall \beta \in \beta \Rightarrow T$ esta bien definida

Sea $x, y \in E \Rightarrow x = \sum_{\beta \in B} \{\lambda_\beta\}\beta \wedge y = \sum_{\beta \in B} \{\alpha_\beta\}\beta$

$\Rightarrow x + y = \sum_{\beta \in B} \{\lambda_\beta + \alpha_\beta\}\beta$

Como $\{\lambda_\beta\} \wedge \{\alpha_\beta\}$ son casi finitas i.e.: $\exists F \subseteq B$ finito / $\lambda_\beta = 0 : \forall \beta \in B - F$

$\exists G \subseteq B$ finito / $\alpha_\beta = 0 : \forall \beta \in B - G$

Definimos: $\gamma_\beta = \begin{cases} \lambda_\beta & : \beta \in F - G \\ \alpha_\beta & : \beta \in G - F \\ 0 & : \beta \in B - (F \cup G) \\ \lambda_\beta + \alpha_\beta & : \beta \in F \cap G \end{cases}$ es casi nula

$$\Rightarrow x + y = \sum_{\beta \in B} \{\lambda_\beta + \alpha_\beta\}\beta = \sum_{\beta \in F - G} \{\lambda_\beta + \alpha_\beta\}\beta + \sum_{\beta \in G - F} \{\lambda_\beta + \alpha_\beta\}\beta + \sum_{\beta \in F \cap G} \{\lambda_\beta + \alpha_\beta\}\beta$$

$$+ \sum_{\beta \in B - (F \cap G)} \{\lambda_\beta + \alpha_\beta\}\beta = \sum_{\beta \in B} \{\gamma_\beta\} \cdot \beta$$

$$\Rightarrow T(x + y) = \sum_{\beta \in B} \{\gamma_\beta\} T(\beta) = \sum_{\beta \in B} \{\lambda_\beta\} T(\beta) + \sum_{\beta \in B} \{\alpha_\beta\} T(\beta) + T(x) + T(y)$$

Exercício 2.7.4 Seja E um espaço normado sobre $\mathbb{C}$. Se φ é um funcional linear descontínuo em E, mostre que $\{\varphi(x) : x \in E \text{ e } \|x\| \leq 1\} = \mathbb{C}$.

$\varphi : E \to \mathbb{C}$

Sea $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ arbitrario (con $r > 0$). Como

$\sup\{|\varphi(x)| : x \in E \wedge \|x\| \leq 1\} = \infty$ (Pues φ es discontinuo)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in E,\ \|x_0\| \leq 1 \ /\ |\varphi(x_0)| \geq r$

Como $\varphi(x_0) \neq 0$, Tenemos: $\left|\varphi\left(\dfrac{rx_0}{|\varphi(x_0)|}\right)\right| = \left|r\dfrac{\varphi(x_0)}{|\varphi(x_0)|}\right| = r$

De ahí: $\varphi\left(\dfrac{rx_0}{|\varphi(x_0)|}\right) = re^{i\alpha}$ para algún $0 \leq \alpha < 2\pi$. Por lo Tanto:

$$\varphi\left(\frac{rx_0 e^{i(\theta-\alpha)}}{|\varphi(x_0)|}\right) = e^{i(\theta-\alpha)} \cdot re^{i\alpha} = re^{i\theta} = z$$

Y como:

$$\left\|\frac{rx_0 e^{i(\theta-\alpha)}}{|\varphi(x_0)|}\right\| = \frac{r\|x_0\|}{|\varphi(x_0)|} \leq 1 \cdot \|x_0\| \leq 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{C} = \{\varphi(x) : x \in E \wedge \|x\| \leq 1\}$$

Exercício 2.7.5 Sejam E um espaço normado, F um espaço de Banach e G um subespaço de E. Se $T: G \longrightarrow F$ é linear e contínua, mostre que existe uma única extensão linear contínua de T ao fecho de G. Mostre também que a norma da extensão coincide com a norma de T e que se T é uma isometria linear, então a extensão também é.

¡Ya conocemos la forma de T para G, así que encontraremos para $\overline{G}$!

Definimos para $\overline{G}$

Sea $x \in \overline{G} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq G \;/\; \|x_n - x\| \to 0$

Entonces: $T^*: \overline{G} \to F \;/\; T^*(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$ donde $\|x_n - x\| \to 0$

Sea $(x_n), (y_n) \subseteq G \;/\; \|x_n - x\| \to 0 \;\wedge\; \|y_n - x\| \to 0$

Y como $\|T(x_n) - T(y_n)\| = \|T(x_n - x + x - y_n)\| = \|T(x_n - x) + T(x - y_n)\|$

$\leq \|T(x_n - x)\| + \|T(y_n - x)\|$

Luego, como T es continuo $\Rightarrow \exists\, C_1, C_2 > 0 \;/\; \|T(x_n - x)\| \leq C_1\|x_n - x\|$

$\|T(y_n - x)\| \leq C_2\|y_n - x\|$

$\Rightarrow 0 \leq \lim \|T(x_n) - T(y_n)\| \leq \lim C_1\|x_n - x\| + C_2\|y_n - x\| = 0$

$\Rightarrow \lim T(x_n) = \lim T(y_n)$

$\Rightarrow T^*$ esta bien definida

• T^* es lineal:

Sea $x, y \in \overline{G} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq G \,/\, \|x_n - x\| \to 0$

$\exists (y_n) \subseteq G \,/\, \|y_n - y\| \to 0$

$\Rightarrow$ Como T es cont. $\Rightarrow T(x+\lambda y) = T(\lim x_n + \lambda y_n) = \lim T(x_n + \lambda y_n)$

$= \lim T(x_n) + \lambda \lim T(y_n) = T(x) + \lambda T(y).$

• T^* es continua.

Sea $x \in \overline{G} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq G \,/\, \|x_n - x\| \to 0$

luego: $\|T^*(x)\| = \|\lim T(x_n)\| = \lim \|T(x_n)\|$

y como: $\exists C > 0 : \|T(x_n)\| \leq C\|x_n\|$

$\Rightarrow \lim \|T(x_n)\| \leq C \lim \|x_n\| = C.\|x\|$

$\Rightarrow T^*$ es continua.

Sup: $\exists \varphi : \overline{G} \to F \,/\, \varphi(x) = T(x) : \forall x \in G$ donde φ es lineal y continua.

Sea $x \in \overline{G} \Rightarrow \exists (x_n) \in G \,/\, \|x_n - x\| \to 0$

$\Rightarrow \|\varphi(x) - T^*(x)\| = \|\varphi(\lim x_n) - \lim T(x_n)\| = \|\lim \varphi(x_n) - T(x_n)\|$

$= \lim \| \varphi(x_n) - T(x_n) \| = \lim \| T(x_n) - T(x_n) \| = \lim \| T(0) \| = \lim \|0\| = 0$

$\Rightarrow \varphi(x) = T^*(x) \;:\; \forall x \in \overline{G} \quad \Rightarrow T^*$ es única

P.P.: $\|T\| = \|T^*\|$

Es claro que $\|T\| \leq \|T^*\|$

Como $\|T^*\| = \sup\{ |T^*(x)| : x \in \overline{G} \wedge \|x\| < 1 \}$

$T(\cancel{x}) = \lim T(x_n)$

$\|T(x)\| = \lim |T(x_n)|$

$x_n \leftarrow x^n_i$

$x^n_i \in G$

$\|T^*\| - \frac{1}{n} < |T^*(x_n)|$

$\|T^*\| - \frac{1}{n} < |T^*(\lim_{i \to \infty} x^n_i)|$

$< |\lim_{i \to \infty} T^*(x^n_i)|$

$< \lim_{i \to \infty} |T(x^n_i)|$

$\|x^n_i\| < \frac{1}{i} + \|x_n\|$

Fijamos: $i \;\|x$

$\Rightarrow \|x_{n_i}\| < \frac{1}{m} + L$

Exercício 2.7.6 Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E, F)$ uma isometria linear. Mostre que $T(E)$ é fechado em F.

Sea $x^* \in \overline{T(E)} \Rightarrow \exists\, (T(x_n)) \subseteq T(E) \,/\, T(x_n) \to x^*$

Como $(T(x_n))$ es conv. $\Rightarrow (T(x_n))$ es de Cauchy . i.e:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N : \quad \|T(x_n) - T(x_m)\| < \varepsilon$

Como T es una isometría lineal:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N :$

$\|x_n - x_m\| = \|T(x_n - x_m)\| = \|T(x_n) - T(x_m)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow (x_n) \subseteq E$ es de Cauchy y como E es de Banach

$\Rightarrow \exists\, x \in E \,/\, x_n \to x$

Afirm: $T(x) = x^*$

$\|T(x) - x^*\| = \|T(x) - T(x_n) + T(x_n) - x^*\| \leq \|T(x) - T(x_n)\| + \|T(x_n) - x^*\|$

$= \|T(x - x_n)\| + \|T(x_n) - x^*\| = \|x - x_n\| + \|T(x_n) - x^*\| \to 0 + 0$

$\Rightarrow \|T(x) - x^*\| = 0 \Rightarrow T(x) = x^*$

$\Rightarrow x^* \in T(E)$ $\quad \therefore \overline{T(E)} = T(E)$ $\quad \therefore T(E)$ es cerrado en F

Exercício 2.7.7 (a) Prove que se um espaço normado E é isomorfo a um espaço de Banach, então E é espaço de Banach.
(b) Mostre que o item (a) não vale em espaços métricos, isto é, existem espaços métricos homeomorfos M e N com M completo e N não-completo.
(c) Como você explica a discrepância entre os itens (a) e (b)?

b) Basta tomar a $M = N = C([0,1])$ y con $f : Id$.

f es biy, continua y $f^{-1} = id$ es cont. $\Rightarrow$ M es homeomorfa a N. Pero (M, d_M). Con d_M la métrica de:

$$d_M(f,g) = \sup\{|(f-g)(t)| : t \in [0,1]\}$$

(M, d_M) es completo.

Pero (N, d_N) con d_N la métrica de: $d(f,g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|\,dt$

Este no es completo. Tomemos: $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$

$$f_n(t) = \begin{cases} -2nt + 2 & : 0 \le t \le 1/n \\ 0 & : \frac{1}{n} < t \le 1 \end{cases}$$

Es claro que $(f_n) \subseteq C([0,1])$

Resta suc. es de Cauchy:

Tomamos $m > n$: $\left(\frac{1}{n} > \frac{1}{m}\right)$

$$d(f_m, f_n) = \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|\,dt = \int_0^{1/m} [(-2mt+2) - (-2nt+2)]\,dt$$

$$+ \int_{1/m}^{1/n} [0 - (-2nt+2)]\,dt + \int_{1/n}^{1} 0 + 0\,dt$$

$$= \int_0^{1/m} (2n-2m)t\,dt + \int_{1/m}^{1/n} 2nt - 2\,dt = (n-m)\,t^2\Big|_0^{1/m} + nt^2 - 2t\Big|_{1/m}^{1/n}$$

$$= (n-m)\left(\frac{1}{m^2}\right) + \left[n\cdot\frac{1}{n^2} - 2\frac{1}{n}\right] - \left[n\cdot\frac{1}{m^2} - 2\frac{1}{m}\right]$$

$$= \frac{n-m}{m^2} + \left(-\frac{1}{n}\right) - \left(\frac{n-2m}{m^2}\right) = \frac{1}{m^2}(m) - \frac{1}{n} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}$$

Y como $\left(\frac{1}{n}\right)$ es de Cauchy $\Rightarrow$ (f_n) es de Cauchy.

AFIR: $f_n \to f$ / $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. / $f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \le 1 \end{cases}$

Si pues: $d(f_n, f) = \int_0^t |f_n(t) - f(t)|\,dt = \int_0^{1/n} |2 - 2nt|\,dt = 2t - nt^2\Big|_0^{1/n}$

$= \frac{1}{n}$ $\to$ $d(f_n, f) \to 0$

Pero f no es continua en $[0,1]$, pues no es continua en $\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow f_n \to f$ / $f \notin C([0,1])$

$\therefore (N, d_N)$ no es completo

Exercício 2.7.8 (a) Sejam E e F espaços normados e $T: E \longrightarrow F$ linear e contínuo. Mostre que

$$\|T\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| = \sup_{\|x\|<1} \|T(x)\|$$
$$= \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| \text{ para todo } x \in E\}.$$

(b) Prove que $T \mapsto \|T\|$ é uma norma em $\mathcal{L}(E,F)$.

a) $\|T\|_1 = \sup_{x\neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|}$, $\|T\|_2 = \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\|$, $\|T\|_3 = \sup_{\|x\|\leq 1} \|T(x)\|$

$\|T\|_4 = \inf\{C : \|T(x)\| \leq C\|x\| : \forall x \in E\}$

• Como $\{\|T(x)\| : \|x\| = 1 \wedge x \in E\} \subseteq \{\|T(x)\| : \|x\| \leq 1 \wedge x \in E\}$

$\Rightarrow \|T\|_2 \leq \|T\|_3$ ✓

• Sea $x \in E \Rightarrow$ Fijemos un C / $\|T(x)\| \leq C\|x\|$

Luego si $\|x\| \leq 1 \Rightarrow \|T(x)\| \leq C$

$\Rightarrow \|T\|_3 \leq C$ y como $\|T\|_3$ es una cota inferior $\Rightarrow \|T\|_3 \leq \|T\|_4$ ✓

• Sea $x \in E$:

Si : $x \neq 0$: $\frac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|T\|_1$

$\Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\|_1 \|x\|$

Si: $x = 0 \rightarrow T(x) = 0$

$\Rightarrow \|T(x)\| = 0 \leq \|T\|_1 \|x\| = 0$

$\Rightarrow \|T(x)\| \leq \|T\|_1 \|x\| : \forall x \in E \rightarrow \|T\|_4 \leq \|T\|_1$ ✓

• Sea $x \neq 0 \Rightarrow \left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1 \rightarrow \left\|T\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq \|T\|_2$

$\Rightarrow \frac{1}{\|x\|}\|T(x)\| \leq \|T\|_2 \rightarrow \|T\|_1 \leq \|T\|_2$

$\therefore \|T\|_1 = \|T\|_2 = \|T\|_3 = \|T\|_4$

b) $T \in \mathcal{L}(E,F)$

$$\|\cdot\| : \mathcal{L}(E,F) \to \mathbb{R}$$
$$T \mapsto \|T\|$$

N1) Como:

$0 \leq \|T(x)\| : \forall x \in E$

$\Rightarrow 0 \leq \|T(x)\| : \forall x \in E \wedge \|x\| = 1 \Rightarrow 0 \leq \|T\|$

• Si $T = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \Rightarrow T(x) = 0 : \forall x \in E \Rightarrow T(x) = 0 : \forall x \in E \wedge \|x\| = 1 \Rightarrow \|T\| = 0$

• Si $\|T\| = 0 \Rightarrow \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} = 0 : \forall x \neq 0 \Rightarrow \|T(x)\| = 0 : \forall x \neq 0 \Rightarrow T(x) = 0 : \forall x \neq 0$

$\Rightarrow T(x) = 0 : \forall x \in E \Rightarrow T = 0_{\mathcal{L}(E,F)}$

N2) Sea $T \in \mathcal{L}_{(E,F)}$, $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\Rightarrow \|\lambda T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|\lambda T(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{|\lambda| \|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \sup_{x \neq 0} \frac{\|T(x)\|}{\|x\|} = |\lambda| \|T\|$$

N3) Sea $T, G \in \mathcal{L}_{(E,F)}$

$$\Rightarrow \|T + G\| = \sup_{\|x\|=1} \|T(x) + G(x)\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T(x)\| + \sup_{\|x\|=1} \|G(x)\| = \|T\| + \|G\|$$

Exercício 2.7.9 Sejam $T \in \mathcal{L}(E,F)$ e $R \in \mathcal{L}(F,G)$. Prove que $R \circ T \in \mathcal{L}(E,G)$ e $\|R \circ T\| \leq \|R\| \cdot \|T\|$. Dê um exemplo em que $\|R \circ T\| < \|R\| \cdot \|T\|$.

$T: E \to F \quad , R: F \to G$

$R \circ T : E \to G$

• $R \circ T$ es lineal: Sea $x, y \in E \wedge \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow R \circ T(x + \lambda y) = R(T(x) + \lambda T(y)) = R \circ T(x) + \lambda R \circ T(y) \Rightarrow R \circ T$ es lineal

• $R \circ T$ es continua

Como: $\|T(x)\| \leq C_1 \|x\| : \forall x \in E \Rightarrow \|R \circ T(x)\| = \|R(T(x))\| \leq C_2 \|T(x)\| \leq \underbrace{C_1 C_2}_{C} \|x\|$

Como: $\|R(x)\| \leq C_2 \|x\| : \forall x \in F \Rightarrow \exists C > 0 / \|R \circ T(x)\| \leq C \|x\| : \forall x \in E$

$\Rightarrow R \circ T$ es continua $\therefore R \circ T \in \mathcal{L}(E,F)$

• Sup: $\|T\| = 0 \vee \|R\| = 0$

Para $\|T\| = 0 \Rightarrow T = 0_{\mathcal{L}(E,F)} \Rightarrow T(x) = 0 : \forall x \in E \Rightarrow R \circ T(x) = 0 \cdot \forall x \in E$

$\Rightarrow \|R \circ T\| = 0$. Analogo para $\|R\| = 0 \Rightarrow \|R \circ T\| \leq \|R\| \, \|T\|$

Ahora, para el caso donde $\|T\| \neq 0 \vee \|R\| \neq 0$

Sea $x \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\|R \circ T(x)\|}{\|x\|}$

• Sup: $T(x) \neq 0 \Rightarrow \dfrac{\|R \circ T(x)\|}{\|T(x)\|} \cdot \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|R\| \cdot \dfrac{\|T(x)\|}{\|x\|} \leq \|R\| \|T\|$

$\Rightarrow \|R \circ T\| \leq \|R\| \|T\|$

• Si $T(x) = 0 \Rightarrow R \circ T(x) = R(0) = 0 \Rightarrow \|R \circ T(x)\| = 0 \leq \|R\| \|T\|$

$\therefore \|R \circ T\| \leq \|R\| \|T\|$

Exercício 2.7.10 Sejam E e F espaços normados sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$. Mostre que $E' \times F'$ e $(E \times F)'$ são isometricamente isomorfos considerando-se em $E \times F$ a norma $\|\cdot\|_\infty$ e em $E' \times F'$ a norma $\|\cdot\|_1$ (veja as definições das normas no Exercício 1.8.12).

Exercício 2.7.11 (Um funcional linear contínuo que não atinge a norma) Seja

$$\varphi \colon c_0 \longrightarrow \mathbb{K}\ ,\ \varphi((a_j)_{j=1}^{\infty}) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_j}{2^j}.$$

Prove que:

(a) $\varphi \in (c_0)'$ (não se esqueça de provar, primeiro, que φ está bem definido).

(b) $\|\varphi\| = 1$.

(c) Não existe $x \in c_0$ tal que $\|x\| \leq 1$ e $\|\varphi\| = |\varphi(x)|$.

Exercício 2.7.12 Sejam E e F espaços normados e $T\colon E \longrightarrow F$ um operador linear contínuo.
(a) Prove que o *núcleo de* T, definido por $\ker(T) = \{x \in E : T(x) = 0\}$, é um subespaço fechado de E.
(b) Prove que a *imagem de* T, definida por $\operatorname{Im}(T) = \{T(x) : x \in E\}$, é um subespaço de F. Fechado?

a) $\ker(T)$ es subespacio:

Sea $x, y \in \ker(T) \Rightarrow T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = 0 + \lambda . 0 = 0 \Rightarrow x + \lambda y \in \ker(T)$

$\ker(T)$ es cerrado:

Sea $x \in \overline{\ker(T)} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq \ker(T) / x_n \to x$.

Luego: $\|T(x)\| = \|T(x) - T(x_n) + T(x_n)\| \leq \|T(x - x_n)\| + \|T(x_n)\|$

Como T es cont. $\Rightarrow \lim \|T(x)\| \leq \lim \|T(x - x_n)\| + \lim \|T(x_n)\| = \|T(\lim x_n - x)\| + \lim \|0\|$
$= \|T(0)\| + 0 = \|0\| + 0 = 0 + 0 = 0$

$\Rightarrow \|T(x)\| = 0$

$\Rightarrow T(x) = 0 \quad \therefore x \in \ker(T) \qquad \therefore \ker T = \overline{\ker(T)}$

b) $\operatorname{Im}(T)$ es un subespacio.

Sea $x, y \in \operatorname{Im}(T) \Rightarrow \exists x^* \,\&\, y^* \in E / T(x^*) = x, T(y^*) = y$

$\Rightarrow \exists x^* + \lambda y^* \in E$ (E subespacio) $/ T(x^* + \lambda y^*) = T(x^*) + \lambda T(y^*) = x + \lambda y$

$\Rightarrow x + \lambda y \in \operatorname{Im}(T)$

¿$\operatorname{Im}(T)$ es cerrado? ¡No!, pues basta tomar

$F = C_0$, $E = C_{00}$, $T = id$
$\Rightarrow T(C_{00}) = C_{00}$ y $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$
$T: (E, \|\cdot\|_\infty) \to (F, \|\cdot\|_\infty)$ es continuo

$\Rightarrow$ Pero $C_{00} = T(E)$ no es cerrado.

Exercício 2.7.13* Considere $X = \mathbb{R}^2$ munido com a norma $\|(x,y)\| := (x^4 + y^4)^{1/4}$. Calcule explicitamente a norma de cada funcional $\varphi \in X'$.

Tomemos: $\varphi \in X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$

$\mathbb{R}^2$ es generado por $\{\underbrace{(1,0)}_{e_1}, \underbrace{(0,1)}_{e_2}\} \Rightarrow$ Sea $a = \varphi(e_1) \wedge b = \varphi(e_2)$

Sea $(x,y) \in \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \varphi(x,y) = \varphi(xe_1 + ye_2) = x\varphi(e_1) + y\varphi(e_2) = ax + by$

Por definición: $\|\varphi\|_{X'} = \max\{ax+by : (x^4+y^4)^{1/4} = 1\}$

Define: $g(x,y) = x^4 + y^4 \wedge f(x,y) = ax+by$.

Aplicando: El Teorema de los Multiplicadores de Lagrange en el punto máximo (x_m, y_m) de la función f sobre el vínculo g, se tiene

$$(a,b) = \nabla f = \lambda \nabla g(x_m, y_m) = \lambda (x_m^3, y_m^3)$$

$\Rightarrow a = \lambda x_m^3$, $b = \lambda y_m^3$ $\wedge$ $\|\varphi\|_{X'} = ax_m + by_m = \lambda x_m^4 + \lambda y_m^4 = \lambda$

Por otro lado: $\lambda^{4/3} x_m^4 + \lambda^{4/3} y_m^4 = |a|^{4/3} + |b|^{4/3}$

y como: $x_m^4 + y_m^4 = 1$, se tiene: $\|\varphi\|_{X'} = \lambda = \left(|a|^{4/3} + |b|^{4/3}\right)^{3/4}$

Exercício 2.7.14* (Aplicação quociente) Sejam M um subespaço fechado do espaço normado E e $\pi\colon E \longrightarrow E/M$ dada por $\pi(x) = [x]$ (veja Exercício 1.8.14). Prove que:

(a) $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ para todo $x \in E$.

(b) Dados $x \in E$ e $\varepsilon > 0$, existe $y \in E$ tal que $\pi(x) = \pi(y)$ e $\|y\| \leq \|\pi(x)\| + \varepsilon$.

(c) A imagem da bola unitária aberta de E por π é a bola unitária aberta de E/M.

(d) $\pi \in \mathcal{L}(E, E/M)$, $\ker(\pi) = M$ e π é uma aplicação aberta.

(e) Se $M \neq E$, então $\|\pi\| = 1$.

(f) Para todo espaço normado F e todo operador linear contínuo $T\colon E \longrightarrow F$ existe um único operador linear contínuo $\tilde{T}\colon E/M \longrightarrow F$ tal que $T = \tilde{T} \circ \pi$. Mais ainda, $\|T\| = \|\tilde{T}\|$.

Exercício 2.7.15 (Teorema do Isomorfismo) Sejam E e F espaços de Banach e $T \in \mathcal{L}(E,F)$. Prove que se $T(E)$ é fechado em F então $T(E)$ é isomorfo a $E/\ker(T)$.

P.P: $T(E) \approx E/\ker(T)$

$T : E \to T(E)$ es sobreyectiva

Definamos la relación de equivalencia:

$x \sim y \iff x - y \in \ker(T)$. Luego: $[x] = \{ y \in E \,/\, x \sim y \}$.

$E/_{\ker(T)} = \{ [x] \,/\, x \in E \}$

$\|T(x)\| \leq C\|x\| \cdot \forall x \in E$

Definamos: $\varphi : E/_{\ker(t)} \to T(E)$

$[x] \mapsto \varphi([x]) = T(x)$ donde $x \in E$.

· Sea: $y \in [x] \Rightarrow T(x) - T(y) = T(x-y) = 0$, pues $x - y \in \ker(T)$

$\Rightarrow T(x) = T(y)$

es decir: $\varphi([x]) = \varphi([y])$. Luego φ está bien definido

· φ es sobre, pues:

Sea $y \in T(E) \Rightarrow \exists\, x \in E \,/\, T(x) = y$. Luego ese mismo $x \in E$ cumple:

$\varphi([x]) = y$.

• φ es inyectiva, pues:

Sea $[x], [y] \in E/\ker(T)$ / $\varphi([x]) = \varphi([y])$

$\Rightarrow T(x) = T(y)$

$\Rightarrow T(x-y) = 0 \Rightarrow x-y \in \ker(T)$

$\Rightarrow [x] = [y]$

• φ es lineal:

Sean $[x], [y] \in E/\ker(T) \Rightarrow \varphi([x] + \lambda [y]) = \varphi([x+\lambda y])$

$= T(x+\lambda y) = T(x) + \lambda T(y) = \varphi([x]) + \lambda \varphi([y])$

Exercício 2.7.16 Sejam E e F espaços normados. Se $T \in \mathcal{L}(E;F)$ e existe $c > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq c\|x\|$ para todo $x \in E$, mostre que o operador inverso T^{-1} existe e é contínuo.

• Probaremos que T es inyectiva. $\quad T^{-1} : Im(T) \to E$

Sea $x, y \in E$ / $T(x) = T(y)$

$0 = \|T(x) - T(y)\| = \|T(x-y)\| \geq c\|x-y\| \Rightarrow \|x-y\| = 0 \Rightarrow x = y$

$\Rightarrow \exists T^{-1} : Im(T) \to E$

Es fácil probar que T^{-1} es lineal.

Sea $T(x) \in Im(T) \Rightarrow \|T^{-1} \circ T(x)\| = \|T^{-1}(T(x))\| = \|x\| \leq \frac{1}{c}\|T(x)\|$

$\forall T(x) \in Im(T) \Rightarrow T^{-1}$ es continua

Exercício 2.7.17 Sejam E e F espaços normados. Mostre que um operador linear $T\colon E \longrightarrow F$ é contínuo se, e somente, se $T(A)$ é limitado em F sempre que A for limitado em E (veja a definição de conjunto limitado no Exercício 1.8.9).

($\Rightarrow$) Trivial por el Teorema 2.1.1.

($\Leftarrow$) Tomaremos: $B = \{x \in E : \|x\| \leq 1\}$ es claramente limitado en E.

Luego: $T(B) = \{T(x) : x \in B\}$ es limitado, i.e:

$\exists M > 0 \;/\; \|T(x)\| \leq M : \forall x \in B$

$\Rightarrow \sup\{\|T(x)\| : x \in E \wedge \|x\| \leq 1\} \leq M < \infty$

Luego $T : E \to F$ es continua. (Teo. 2.1.1.)

Exercício 2.7.18 Sejam E e F espaços normados. Mostre que se $T\colon E \longrightarrow F$ é isomorfismo isométrico, então $\|T\| = 1$. Por outro lado, encontre um espaço de Banach E e um isomorfismo topológico $T\colon E \longrightarrow E$ com $\|T\| = 1$, que não é isomorfismo isométrico.

Exercício 2.7.19 Mostre que quaisquer dois espaços dentre os espaços $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_1)$, $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ e $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ não são isomorfos isometricamente.

Exercício 2.7.20 (Operadores de posto finito) Diz-se que um operador linear contínuo $T: E \longrightarrow F$ é de *posto finito* se a imagem de T é um subespaço de dimensão finita de F.

(a) Prove que T é de posto finito se, e somente, se existem $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in E'$ e $y_1, \ldots, y_n \in F$ tais que $T = \varphi_1 \otimes y_1 + \cdots + \varphi_n \otimes y_n$.

(b) Prove que o conjunto dos operadores lineares contínuos de posto finito de E em F é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(E, F)$. Fechado?

Exercício 2.7.21 Diz-se que um subespaço M de um espaço vetorial E tem *deficiência finita* se existir um número finito de vetores $x_1, \ldots, x_n$ em $E - M$ tais que $E = [M \cup \{x_1, \ldots, x_n\}]$. Mostre que o núcleo de um funcional linear não-nulo $T \colon E \longrightarrow \mathbb{K}$ tem (em E) deficiência finita com $n = 1$.

Exercício 2.7.22 Sejam $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Mostre que $\ell_p \subseteq \ell_q$ e que a inclusão $\ell_p \hookrightarrow \ell_q$ é um operador linear contínuo. Determine a norma dessa inclusão.

Exercício 2.7.23 Considere o conjunto

$$cs = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sum_{j=1}^{\infty} a_j \text{ converge} \right\}.$$

(a) Mostre que cs é um espaço normado com as operações usuais de sequências e com a norma $\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right|$.

(b) Prove que cs é isomorfo isometricamente ao espaço c das sequências convergentes definido no Exercício 1.8.27.

* La norme esta bien definida pues como $\sum_{j=1}^{\infty} a_j < \infty$

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} a_j < \infty : \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right| < \infty : \forall n \in \mathbb{N}$

a) CS con las operaciones usuales de sequencias es claramente un espacio vectorial.

Demostraremos que $\|\cdot\|$ es una norme.

N1) Como : $0 \leq |x| : \forall x \in \mathbb{K} \Rightarrow 0 \leq |a_j| : \forall j \in \mathbb{N}$ donde $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in CS$

$\Rightarrow 0 \leq \sum_{j=1}^{n} |a_j| : \forall n \in \mathbb{N} \wedge (a_j) \in CS \Rightarrow 0 \leq \|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| : \forall (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in CS$

$0 = (a_j)_{j\in\mathbb{N}} \in CS \Leftrightarrow a_j = 0 : \forall j \in \mathbb{N}$

$\Leftrightarrow |a_j| = 0 : \forall j \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{n} |a_j| = 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = 0$

N2) Sea $(a_j)_{j\in\mathbb{N}} \wedge \lambda \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \|\lambda (a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = \|(\lambda a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda a_j| \right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |\lambda| |a_j| \right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ |\lambda| \sum_{j=1}^{n} |a_j| \right\}$

$= |\lambda| \sup_{n\in\mathbb{N}} \left\{ \sum_{j=1}^{n} |a_j| \right\} = |\lambda| \|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\|$

* Me hechie de norme, pero sirve igual XD *

N3) Sea $(a_j), (b_j) \in cs$

$\Rightarrow \|(a_j)+(b_j)\| = \|(a_j+b_j)\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{j=0}^{n} a_j+b_j\right|$

fijando n $\Rightarrow \left|\sum_{i=0}^{n} a_i+b_i\right| = \left|\sum_{i=0}^{n} a_i + \sum_{i=0}^{n} b_i\right| \leq \left|\sum_{i=0}^{n} a_i\right| + \left|\sum_{i=0}^{n} b_i\right|$

$\leq \|(a_i)\| + \|(b_i)\|$

$\rightarrow \|(a_j)+(b_j)\| \leq \|(a_i)\| + \|(b_i)\|$

b) Recordemos: $c = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} : a_j \in \mathbb{K} : \forall j \in \mathbb{N} \wedge \lim_{j\to\infty} a_j$ existe en $\mathbb{K}\}$

Definimos: $T: cs \to c$

$(a_n) \mapsto T(a_n) = \left(\sum_{u=1}^{n} a_u\right)_{n\in\mathbb{N}}$

- T está bien definida

Sea $(a_n) \in cs \Rightarrow \sum_{u=1}^{\infty} a_u < \infty \Rightarrow T(a_n) = \sum_{u=1}^{n} a_u \Rightarrow \lim_{n\to\infty} T(a_n) = \sum_{u=1}^{\infty} a_u < \infty$

$\Rightarrow T(a_n)$ es conv. $\Rightarrow T(a_n) \in c$

- T es inyectiva.

Sea $(a_n), (b_n) \in cs$ / $T(a_n) = T(b_n) \Rightarrow \left(\sum_{u=1}^{n} a_u\right) = \left(\sum_{u=1}^{n} b_u\right)$

Entonces para $n=1$: $a_1 = b_1$

$n=2$: $\Rightarrow a_1+a_2 = b_1+b_2 \Rightarrow a_2 = b_2$

Hip Ind es válido para n:

$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n+1} a_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{k+1} = \sum_{k=1}^{n} b_k + b_{k+1} \Rightarrow a_{k+1} = b_{k+1}$

$\Rightarrow (a_n) = (b_n)$

- T es sobreyectiva: Sea $a = (a_j) \in C \Rightarrow \exists \lim_{j \to \infty} a_j$

Definimos: $S = (S_n) \in CS$ /

$S_1 = a_1$
$S_2 = a_2 - a_1$
$S_3 = a_3 - a_2$

i.e.: $S_1 = a_1$
$S_{n+1} = a_{n+1} - a_n \; : \forall n \in \mathbb{N}$

Para $n \geq 1$:

$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} S_j = S_1 + \sum_{j=2}^{n} S_j = S_1 + \sum_{j=1}^{n-1} S_{j+1} = a_1 + \sum_{j=1}^{n-1} a_{j+1} - a_j = a_n$

$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{\infty} S_j = \lim_{n \to \infty} a_n < +\infty \Rightarrow (S_n) \in CS \quad \wedge \; T(S_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} S_j \right) = (a_n)$

Luego T es biyectiva.

- T es lineal:

Sea $(x_n), (y_n) \in CS \wedge k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow T((x_n) + \lambda(y_n)) = T(x_n + \lambda y_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k + \lambda y_k \right) = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \right) + \lambda \left(\sum_{k=1}^{n} y_k \right) = T(x_n) + \lambda T(y_n)$

- Demostraremos que T es un isomorfismo:

Recordemos la norma en cs : $\|(a_n)\|_{cs} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right|$

Recordemos la norma en c : $\|(a_n)\|_{c} = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

Sea $(a_n) \in cs$

$\Rightarrow T(a_n) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k \right) \in c \quad \Rightarrow \|T(a_n)\|_c = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = \|(a_n)\|_{cs} \quad (*)$

$\Rightarrow \exists\, C = 1 > 0 \;/\; C\|x\| \leq \|T(x)\| \leq C_1 \|x\| \quad : \forall x \in cs$

$\Rightarrow$ T es un isomorfismo y por $(*)$ es un isomorfismo isométrico.

Exercício 2.7.24 Considere o conjunto

$$bs = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right| < \infty \right\}.$$

(a) Mostre que bs é um espaço normado com as operações usuais de sequências e com a norma $\left\|(a_j)_{j=1}^{\infty}\right\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=1}^{n} a_j \right|$.

(b) Prove que bs é isomorfo isometricamente a ℓ_∞.

Exercício 2.7.25 Sejam E, F, G espaços normados e $A\colon E \times F \longrightarrow G$ uma aplicação bilinear. Considere em $E \times F$ qualquer uma das normas do Exercício 1.8.12. Prove que as seguintes condições são equivalentes:

(a) A é contínua.
(b) A é contínua na origem.
(c) $\sup\{\|A(x,y)\| : x \in B_E, y \in B_y\} < \infty$.
(d) Existe $C \geq 0$ tal que $\|A(x,y)\| \leq C\|x\| \cdot \|y\|$ para todos $x \in E$ e $y \in F$.

$(E, \|\cdot\|_E), (F, \|\cdot\|_F), (G, \|\cdot\|_G)$

- $\|(x,y)\|_1^{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$
- $\|(x,y)\|_2^{E\times F} = (\|x\|_E^2 + \|y\|_F^2)^{1/2}$
- $\|(x,y)\|_\infty^{E\times F} = \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$

a) $\Rightarrow$ b) Trivial

b) $\Rightarrow$ c)

Sea $x \in B_E \wedge y \in B_y \Rightarrow \|x\|_E \leq 1, \|y\|_F \leq 1 \Rightarrow \|(x,y)\|_\infty^{E\times F} \leq 1$

De la continuidad de A en el origen: $\exists \delta > 0 / \|(x,y)\|_\infty^{E\times F} < \delta \Rightarrow \|A(x,y)\|_F < 1$

Si $\|(x,y)\|_\infty \leq 1 \Rightarrow \frac{\delta}{2}\|(x,y)\|_\infty < \delta \Rightarrow \|\frac{\delta}{2}(x,y)\|_\infty < \delta$

$\Rightarrow \frac{\delta}{2}\|A(x,y)\|_F = \|A(\frac{\delta}{2}(x,y))\|_F < 1 \Rightarrow \|A(x,y)\|_F < \frac{2}{\delta}$

$\Rightarrow \sup\{\|A(x,y)\|_F : x \in B_E \wedge y \in B_y\} \leq \frac{2}{\delta} < +\infty$

c) $\Rightarrow$ d): Sea $x \in E \wedge y \in F$.

Si $x = 0 \vee y = 0 \Rightarrow A(x,y) = 0$, pues: $A(x-x, y) = A(0,y) = \underbrace{A(x,y) - A(x,y)}_{=0}$

Analogamente para la otra coordenada $\Rightarrow \|A(x,y)\| = 0 \leq C\|x\|\|y\| = 0 : \forall C \geq 0$

Ahora suponemos que: $x \neq 0 \wedge y \neq 0$

$\Rightarrow \frac{x}{\|x\|} \in B_E \wedge \frac{y}{\|y\|} \in B_F \Rightarrow \sup\{\|A(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})\| : \frac{x}{\|x\|} \in B_E \wedge \frac{y}{\|y\|} \in B_F\} < \infty$

$\Rightarrow$ Basta tomar $C > 0$ cota superior:

$$\|A(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|})\| \leq C \Rightarrow \frac{1}{\|x\|} \cdot \frac{1}{\|y\|} \|A(x,y)\| \leq C$$

$$\Rightarrow \|A(x,y)\| \leq C\|x\|\|y\| \quad : \forall x \in E, \forall y \in F$$

d) $\Rightarrow$ a): Sea $(x,y) \in E \times F \Rightarrow x \in E \wedge y \in F$

Sea $\varepsilon > 0$: Tomamos: $(a,b) \in E \times F / \|(x,y) - (a,b)\| < \delta / C+1$

$\Rightarrow \|x - a\|_E < \frac{\delta}{C+1} \quad \|y - b\|_F < \delta/_{C+1}$, donde: $\delta = \min\{\frac{\varepsilon}{3(\|x\|+1)}, \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}, \frac{\varepsilon}{3(\|y\|+1)}\}$

$\Rightarrow \|A(x,y) - A(a,b)\| = \|A(x,y) - A(x,b) + A(x,b) - A(a,b)\|$

$= \|A(x, y-b) + A(x-a, b)\| \leq \|A(x,y-b)\| + \|A(x-a,b)\|$

$\leq C(\|x\|\|y-b\| + \|x-a\|\|b\|)$

$= C[\|x\|\|y-b\| + \|x-a\|\|y-b-y\|] \leq C[\|x\|\|y-b\| + \|x-a\|(\|y-b\| + \|y\|)]$

$= C[\|x\|\|y-b\| + \|x-a\|\|y-b\| + \|x-a\|\|y\|]$

$< \|x\| \cdot \frac{\varepsilon}{3(\|x\|+1)} + (\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}})^2 + \frac{\varepsilon}{3(\|y\|+1)} \cdot \|y\| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$

$\therefore$ A es continua.

Exercício 2.7.26 Seja $1 \leq p < \infty$. Se $(b_j)_{j=1}^{\infty}$ é uma sequência numérica tal que $\sum_{j=1}^{\infty} a_j b_j < \infty$ para toda sequência $(a_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_p$, mostre que $(b_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_{p^*}$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$.

Exercício 2.7.27 Sejam E, F espaços de Banach e $T, T_1, T_2, \ldots,$ operadores em $\mathcal{L}(E, F)$ tais que $T_n(x) \longrightarrow T(x)$ para todo $x \in E$. Mostre que, para todo compacto $K \subseteq E$, $\sup_{x \in K} \|T_n(x) - T(x)\| \longrightarrow 0$.

Exercício 2.7.28 Complete os detalhes do Exemplo 2.4.3.

Exercício 2.7.29* Prove a seguinte versão mais forte do Lema 2.4.1: Sejam E espaço de Banach, F espaço normado e $T \in \mathcal{L}(E;F)$. Se existirem $R, r > 0$ tais que $\overline{T(B_E(0;R))} \supseteq B_F(0;r)$, então $T(B_E(0;R)) \supseteq B_F(0;r)$.

Exercício 2.7.30 Sejam $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ duas normas em um espaço vetorial E tais que $(E,\|\cdot\|_1)$ e $(E,\|\cdot\|_2)$ são completos.
(a) Suponha que $\|x_n\|_1 \longrightarrow 0$ sempre implique que $\|x_n\|_2 \longrightarrow 0$. Prove que as duas normas são equivalentes (veja definição no Exercício 1.8.3). Em particular, a convergência de uma sequência (não necessariamente para zero) em uma das normas implica em convergência (para o mesmo limite) na outra norma.
(b) Se existe c tal que $\|x\|_1 \le c\,\|x\|_2$ para todo $x \in E$, então as duas normas são equivalentes.
(c) Se a topologia gerada pela norma $\|\cdot\|_1$ está contida na topologia gerada por $\|\cdot\|_2$, então as duas normas são equivalentes. Em particular, as topologias geradas pelas duas normas coincidem.

Exercício 2.7.31 Sejam E um espaço de Banach e $T\colon E \longrightarrow E'$ um operador linear tal que $T(x)(y) = T(y)(x)$ para todos $x, y \in E$. Prove que T é contínuo.

Recordemos el Teorema del Gráfico Cerrado.

Sean E y F espacios de Banach y $T: E \to F$ un operador lineal. Entonces:
T es continuo $\iff$ $G(T)$ es cerrado en $E \times F$.

E es de Banach por hipótesis y $F = E'$ es de Banach pues $\mathbb{R}$ es de Banach

P.D.: $G(T)$ es cerrado en $E \times E'$

Sea: $(x,y) \in \overline{G(T)} \Rightarrow \exists (x_n, T(x_n)) \subseteq G(T) \,/\, (x_n, T(x_n)) \to (x,y)$

AFIR: $y = T(x)$. Tomando la norma en $E \times E'$ como $\|\cdot\|_\infty$

Sea $\varepsilon > 0$: $\exists n \in \mathbb{N} \,/\, n \geq N$

se cumple: $\|(x_n, T(x_n)) - (x,y)\| = \|(x_n - x, T(x_n) - y)\|_\infty < \varepsilon$

- $(x_n) \to x \wedge T(x_n) \to y \Rightarrow T(x_n)(z) \to y(z) : \forall z \in E$

Luego, sea $z \in E$. Entonces: fijando $z \Rightarrow T(z) \in \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ es continua

- $T(x_n)(z) = T(z)(x_n) \to T(z)(x) = T(x)(z)$

Por unicidad del límite: $y = T(x) \Rightarrow (x,y) \in G(T)$

$\therefore \overline{G(T)} = G(T) \Rightarrow G(T)$ es cerrado en $E \times E'$

$\therefore T$ es continua

Exercício 2.7.32* Sejam E um espaço de Banach e $T: E \longrightarrow E'$ um operador linear tal que $T(x)(x) \geq 0$ para todo $x \in E$. Prove que T é contínuo.

Aplicaremos de nuevo el Teorema del Gráfico cerrado.

· Sea $(x, \varphi) \in \overline{G(T)} \Rightarrow \exists (x_n, T(x_n)) \subseteq G(T) \,/\, (x_n, T(x_n)) \to (x, \varphi)$

Ya habíamos probado que $x_n \to x \wedge T(x_n) \to \varphi \,/\, (x_n) \subseteq E \wedge (T(x_n)) \subseteq E'$

Fijemos $y \in E$:

$\Rightarrow (T(x_n) - T(y))(x_n - y) = T(x_n - y)(x_n - y) \geq 0$

$\Rightarrow (\varphi - T(y))(x - y) \geq 0$

· Sea $z = y - x \Rightarrow (\varphi - T(z+x))(z) \geq 0 \quad \forall z \in E$

Se sigue que: $(\varphi - T(x))(z) = \varphi(z) - T(x)(z) \geq T(z)(z) \geq 0 \quad \forall z \in E$

$\to \varphi = T(x)$

Exercício 2.7.33 Verifique que, no Teorema do Gráfico Fechado, a implicação

$$T \text{ contínuo } \Longrightarrow G(T) \text{ fechado em } E \times F$$

continua válida para operadores lineares entre espaços normados não necessariamente completos.

De hecho, esto es válido hasta en espacios Topológicos.

$[G(T)]^c = \{(x,y) \,/\, y \neq T(x) : \forall x \in E \wedge \forall y \in F\}$

· Sea $(x,y) \in [G(T)]^c$

$\Rightarrow y \neq T(x) \Rightarrow \|y - T(x)\| \neq 0 \Rightarrow \varepsilon < \dfrac{\|y - T(x)\|}{2}$. $B_\varepsilon(y) \cap B_\varepsilon(T(x)) = \emptyset$

Luego: Como T es continua $\Rightarrow \exists\, \delta > 0 \,/\, T(B_\delta(x)) \subseteq B_\varepsilon(T(x))$

$\Rightarrow B_\varepsilon(y) \cap T(B_\delta(x)) = \emptyset$ (*)

Y como $B_\varepsilon(y)$ es abierto en F $\wedge$ $B_\delta(x)$ es abierto en E

$\Rightarrow B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y)$ es abierto en $E \times F$ que contienen. (Se puede demostrar fácil usando $\|\cdot\|_\infty$)

$$\Rightarrow [G(T)]^c \subseteq \bigcup_{(x,y) \in G(T)^c} B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y)$$

· Sea $(a,b) \in \displaystyle\bigcup_{(x,y) \in G(T)^c} B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y) \Rightarrow \exists\, (x,y) \in G(T)^c \,/\, (a,b) \in B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y)$

AFIRM: $b \neq T(a)$, pues si fuese iguales:

$\Rightarrow T(a) \in T(B_\delta(x))$ y $b \in B_\varepsilon(y) \Rightarrow T(B_\delta(x)) \cap B_\varepsilon(y) \neq \emptyset$ $\Leftarrow$ ($\Leftarrow$) (*)

$\Rightarrow (a,b) \in [G(T)]^c$

$\therefore [G(T)]^c = \bigcup B_\delta(x) \times B_\varepsilon(y) \Rightarrow [G(T)]^c$ es abto en $E \times F$

$(x,y) \in [G(T)]^c$ $\therefore G(T)$ es cerrado en $E \times F$.

Exercício 2.7.35 Sejam E um espaço de Banach, F um espaço normado e $T : E \longrightarrow F$ um operador linear de gráfico fechado. Mostre que se o operador inverso T^{-1} existe e é contínuo, então a imagem $\mathrm{Im}(T)$ é subespaço fechado de F.

Exercício 2.7.36 Seja $(x_j)_{j=1}^{\infty}$ uma sequência no espaço de Banach E tal que $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$ para todo $\varphi \in E'$. Mostre que $\sup_{\|\varphi\|\leq 1} \sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty$.

Definimos:

$$u: E' \to \ell_1$$
$$\varphi \mapsto u(\varphi) = (\varphi(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$$

- u está bien definido, pues: $\sum_{j=1}^{\infty} |\varphi(x_j)| < \infty \Rightarrow (\varphi(x_j))_{j\in\mathbb{N}} \in \ell_1$
- u es lineal:

$\lambda \in \mathbb{K}$, $\varphi, \psi \in E' \Rightarrow u(\varphi + \lambda\psi) = (\varphi + \lambda\psi(x_j))_{j\in\mathbb{N}} = (\varphi(x_j) + \lambda\psi(x_j))_{j\in\mathbb{N}}$

$$= (\varphi(x_j))_{j\in\mathbb{N}} + \lambda(\psi(x_j))_{j\in\mathbb{N}} = u(\varphi) + \lambda u(\psi)$$

Como E' es de Banach y ℓ_1 también. Entonces probaremos que u tiene gráfico cerrado en $E' \times \ell_1$.

Sea $(a, b) \in \overline{G(u)} \Rightarrow \exists (a_n, u(a_n)) \subseteq G(u) \,/\, (a_n, u(a_n)) \to (a, b)$

Tomando $\|\cdot\|_{\varphi}$ en $E' \times \ell$

$\Rightarrow a_n \to a \;\wedge\; u(a_n) \to b$

AFIR: $b = u(a)$

$$\|b - u(a)\|_F = \|b - u(a_n) + u(a_n) - u(a)\|_F \leq \|b - u(a_n)\|_F + \|a_n(x_j) - a(x_j)\|_F$$

Fijemos $j \in \mathbb{N}$ y variemos n:

$\Rightarrow 0 \leq \| b - u(a) \|_F \leq \| b - u(a_n) \|_F + \| e_n(x_j) - a(x_j) \|_F \to 0 + \| a(x_j) - e(x_j) \|_F$

$= 0 + 0$

$\Rightarrow b = u(a)$

$\Rightarrow \overline{G(u)} = G(u) \Rightarrow G(u)$ es cerrado en $E^j \times \ell_1$

$\Rightarrow u$ es continua

$\Rightarrow \sup_{\|\varphi\| \leq 1} \left| \sum_{k=1}^{\infty} \varphi(x_k) \right| < \infty$