Resumen del Capítulo 1.

Definiciones:

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$

La función módulo: $a \in \mathbb{K} \mapsto |a| \in \mathbb{R}$ satisface:

- $|a| \geq 0 : \forall a \in \mathbb{K} \wedge |a| = 0 \iff a = 0$
- $|a . b| = |a| . |b| : \forall a, b \in \mathbb{K}$
- $|a + b| \leq |a| + |b| : \forall a, b \in \mathbb{K}$

Ya teniendo una norma en $\mathbb{K}$, podemos definir en un E $\mathbb{K}$-e.v. una norma:

$$\| \cdot \| : E \to \mathbb{R} \quad \text{que satisface:}$$

N1) $\|x\| \geq 0 : \forall x \in E \wedge \|x\| = 0 \iff x = 0_E$

N2) $\|a x\| = |a| \|x\| : \forall a \in \mathbb{K} \wedge \forall x \in E$

N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| : \forall x, y \in E$

$(E, \| \cdot \|)$ es un $\mathbb{K}$-e.v. métrico.

Podemos formar una métrica en base a nuestra norma $d(x,y) = \|x - y\|$.

Puede verificar fácilmente que cumple con las condiciones de métrica

De esta observación viene la pregunta.

Si de una norma siempre podemos generar una métrica. Entonces:

¿Todas las métricas serán generadas por una norma?

La respuesta es: ¡No!

¡Recordemos la definición de métrica en un E $\mathbb{K}$-e.v.!

Definición: $d: E \times E \to \mathbb{R}$

$x \times y \mapsto d(x,y)$

Se le conoce como métrica si satisface:

M1) $d(x,y) \geq 0 \ : \forall x,y \in E \ \wedge \ d(x,x) = 0 \iff x = 0_E$

M2) $d(x,y) = d(y,x) : \forall x,y \in E$

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \ : \forall x,y,z \in E$

Ejm:

Sea $E = S = \{ s = (s_j)_{j\in\mathbb{N}} \ / \ s_j \in \mathbb{K} : \forall j \in \mathbb{N} \}$. Definiremos una métrica en S.

$$d: S \times S \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$s \times t \mapsto d(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|}$$

¡OJO!: $d: S\times S \to \mathbb{R}$ está bien definida, porque es convergente por el Criterio de Comparación

N1) Como: $|s_j - t_j| \geq 0 : \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|} \geq 0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2^j} \cdot \dfrac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|} \geq 0 : \forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow d(s,t) \geq 0 : \quad \Rightarrow \quad d(s,t) \geq 0 : \forall s,t \in S$

• Si $s = t \Rightarrow d(s,t) = 0$, pues: $|s_j - t_j| = 0 : \forall j \in \mathbb{N}$

Si $d(s,\tau)=0 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j-\tau_j|}{1+|s_j-\tau_j|} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j-\tau_j|}{1+|s_j-\tau_j|} = 0 \; : \forall j \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow |s_j-\tau_j| = 0 \; : \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow s_j = \tau_j \; : \forall j \in \mathbb{N} \Rightarrow s=\tau$

N2)

$$d(s,\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j-\tau_j|}{1+|s_j-\tau_j|} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|\tau_j-s_j|}{1+|\tau_j-s_j|} = d(\tau,s)$$

$\Rightarrow d(s,\tau) = d(\tau,s) \; : \forall s,\tau \in S$

N3) Recordemos la función: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \frac{x}{1+x}$

Sabemos que f es diferenciable $\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} \geq 0 \; : \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ es creciente. Es decir:

Como $|a+b| \leq |a|+|b| \Rightarrow f(|a+b|) \leq f(|a|+|b|)$

$$\Rightarrow \frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j-\tau_j|}{1+|s_j-\tau_j|} \leq \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j-r_j|}{1+|s_j-r_j|} + \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|r_j-\tau_j|}{1+|r_j-\tau_j|} \; : \forall j \in \mathbb{N}$$

Entonces habiendo definido : $s=(s_j)$, $\tau=(\tau_j)$, $r=(r_j)$

$\Rightarrow d(s,\tau) \leq d(s,r) + d(r,\tau) : \forall s,\tau,r \in S$

$\Rightarrow (S,d)$ es $\mathbb{K}$-espacio métrico.

Este ejemplo es perfecto para probar que no toda métrica es generada por una norma.

¡Proposición: Sea $(X,\|\cdot\|)$ $\mathbb{K}$-e.v. normado. Entonces la métrica inducida por $\|\cdot\|$ satisface:

- $d(x+z, y+z) = d(x,y) \quad : \forall x,y,z \in X$
- $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x,y) \quad : \forall x,y \in X$ y $\forall \alpha \in \mathbb{K}$

PROOF: ¡Ejercicio!

Supongamos que la métrica d del ejemplo anterior es heredada por una norma $\|\cdot\|$, entonces debe cumplir que: $d(2s, 2\tau) = 2\,d(s,\tau)$, pero

$$d(2s,2\tau) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|2s_j - 2\tau_j|}{1+|2s_j-2\tau_j|} = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j-\tau_j|}{1+|2s_j-2\tau_j|} \neq 2d(s,\tau)$$

$\Rightarrow d$ no es heredada por una norma.

Denotaremos: La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$x_n \to x \iff \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

Definición: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. La sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se le dice de Cauchy si y sólo si:
$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} \,/\, n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$.

Definición: Sea $(X, \|\cdot\|)$ un $\mathbb{K}$-e.v. normado. Se le dice completo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Definición: Sea X un $\mathbb{K}$-e.v.. Se le dice espacio de Banach si es normado y completo

De esta definiciones podemos deducir esta proposición.

Proposición: Sea E un espacio de Banach y F un subespacio vectorial de E

F es un espacio de Banach con la norma inducida de E $\iff$ F es cerrado en E.

Ejm: $B(X) = \{ f : X \to \mathbb{K} \,/\, f$ es acotada $\}$

$\|f\|_\infty = \sup_{x\in X} |f(x)|$ $\Rightarrow (B(X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.

Ejm: $C[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{K} \ / \ f$ es continua$\}$ $\quad C[a,b] \subseteq B([a,b])$

$$\|f\|_\infty = \sup_{a \le x \le b} |f(x)| \Rightarrow (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \text{ es un espacio de Banach}$$

Ejm: $C'[a,b] = \{ f: [a,b] \to \mathbb{K} \ / \ f$ es diferenciable en $[a,b]$ y $f' \in C[a,b] \}$

¡$(C'[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ no es un espacio de Banach!

Pero: $\quad \|f\|_{C'} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$

$(C'[a,b], \|\cdot\|_{C'})$ sí es un espacio de Banach

Inductivamente se tiene que:

$$\|f\|_{C^k} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \dots + \|f^{(k)}\|_\infty \ ; \forall f \in C^k([a,b])$$

$\Rightarrow (C^k[a,b], \|\cdot\|_{C^k})$ es un e. de Banach.

ESPACIOS VECTORIALES NORMADOS

1.1.- Definiciones y primeros ejemplos:

Exemplo 1.1.2: $\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} |f(x)|$, donde $f \in B(X) \,/\, f: X \to \mathbb{K}$

es una norma:

N1) • Sea $f \in B(X) \Rightarrow 0 \leq |f(x)| : \forall x \in X \Rightarrow 0 \leq \|f\|_\infty : \forall f \in X$

• Es claro que si $f \equiv 0 \Rightarrow \|f\|_\infty = 0$. Luego: $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \sup_{x \in X} |f(x)| = 0$

$\Rightarrow 0 \leq |f(x)| \leq 0 : \forall x \in X \Rightarrow |f(x)| = 0 : \forall x \in X \Rightarrow f(x) = 0 : \forall x \in X \Rightarrow f \equiv 0$

N2) Sea $k \in \mathbb{K}$, $f \in B(X)$

$\Rightarrow \|kf\|_\infty = \sup_{x \in X} |kf(x)| = \sup_{x \in X} |k||f(x)| = |k| \sup_{x \in X} |f(x)| = |k| \, \|f\|_\infty$

N3) Sea $f, g \in B(X)$

$\Rightarrow \|f+g\|_\infty = \sup_{x \in X} |(f+g)(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)+g(x)| \leq \sup_{x \in X} |f(x)|+|g(x)| = \sup_{x \in X} |f(x)| + \sup_{x \in X} |g(x)|$

$= \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$

¡La demostración de que: $\|f\|_{C^1} = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ es una norma , es totalmente análoga !

EXERCICIOS:

Exercício 1.8.1 Complete os detalhes do Exemplo 1.1.2. Está demostrado al inicio.

Exercício 1.8.2 Mostre que o conjunto $\underbrace{\{f \in C[a,b] : f(x) > 0 \text{ para todo } x \in [a,b]\}}_{A}$ é aberto em $C[a,b]$.

El espacio $C[a,b]$ esta dotado por la norma $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|$

Luego, los abiertos se definen usando esa norma:

$$B_\varepsilon(f) = \{g \in C[a,b] \,/\, \|g-f\|_\infty < \varepsilon\}$$

Sea $f \in A \Rightarrow f(x) > 0 : \forall x \in [a,b]$. Luego como f es cont. y $[a,b]$ compacto

$\Rightarrow m := \min\limits_{x\in[a,b]} f(x) > 0$. Luego tomemos $\varepsilon = m/2$

$\Rightarrow$ Sea $g \in B_\varepsilon(f) \Rightarrow \|g-f\|_\infty < m/2 \Rightarrow |g(x)-f(x)| < m/2 : \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow |f(x)-g(x)| < m/2 \Rightarrow f(x) - g(x) < m/2 \Rightarrow f(x) - \frac{m}{2} < g(x) : \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow 0 < m - \frac{m}{2} < f(x) - \frac{m}{2} < g(x) : \forall x \in [a,b] \Rightarrow g \in A \Rightarrow B_\varepsilon(f) \subseteq A$

$\therefore A$ es abto en $C[a,b]$

Exercício 1.8.3 Duas normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ em um espaço vetorial E são ditas *equivalentes* se existirem constantes positivas c_1 e c_2 tais que

$$c_1\,\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\,\|x\|_1 \text{ para todo } x \in E.$$

Prove que se E é um espaço normado de dimensão finita, então quaisquer duas normas em E são equivalentes.

Como E es un espacio de dim. finita $\Rightarrow$ Sea $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$ una base normada (dim $E = n$)

$\Rightarrow x = a_1\beta_1 + \ldots + a_n\beta_n$ la única comb. lineal. ($a_j \in \mathbb{K}$: $\forall\, 1 \le j \le n$)

Luego sea $\|\cdot\|_1$ una norma de E. Por el Lema 1.1.5: $\exists\, C_1, C_2 > 0$ /

$$C_1\left(\sum |a_i|\right) \le \|x\|_1 \le C_2\left(\sum |a_i|\right)$$

Análogamente, para la norma $\|\cdot\|_2$. $\exists\, d_1, d_2 > 0$ /

$$d_1\left(\sum |a_i|\right) \le \|x\|_2 \le d_2\left(\sum |a_i|\right)$$

$$\Rightarrow \|x_1\| \le \underbrace{\frac{C_2}{d_1}}_{K_2} \|x\|_2 \quad \wedge \quad \underbrace{\frac{C_1}{d_2}}_{K_1} \|x\|_2 \le \|x_1\|$$

$$\Rightarrow K_1 \|x\|_2 \le \|x\|_1 \le K_2 \|x\|_2 \quad : \forall x \in E$$

Exercício 1.8.4 Prove que a correspondência $f \in C[0,1] \mapsto \int_0^1 |f(t)|\,dt \in \mathbb{R}$ é uma norma em $C[0,1]$ que não é equivalente à norma $\|\cdot\|_\infty$.

Definimos la norma: $\|\cdot\| : C[0,1] \to \mathbb{R}$

$f \mapsto \|f\| = \int_0^1 |f(t)|\,dt$

• N1) • Como $0 \leq |f(t)| : \forall t \in [0,1] \Rightarrow \int_0^1 0\,dt = 0 \leq \int_0^1 |f(t)|\,dt = \|f\|$

• Es claro que si: $f \equiv 0 \Rightarrow \|f\| = 0$.

• Si $\|f\| = 0 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \Rightarrow f(t) = 0 : \forall t \in \mathcal{N} / \mu(\mathcal{N}) = 0$ (μ med. de lebes.)

Sup: $\mathcal{N} \neq \emptyset \Rightarrow \exists x \in \mathcal{N} / f(x) \neq 0$. Por la continuidad de f en $[0,1]$

$\Rightarrow \exists V_x \subseteq [0,1]$ vecindad de x donde $f(y) \neq 0 : \forall y \in V_x$.

Luego como $0 < \mu(V_x) \leq \mu(\mathcal{N}) = 0 \Rightarrow 0 < 0$ ($\Rightarrow\Leftarrow$)

$\Rightarrow \mathcal{N} = \emptyset$. $\Rightarrow f \equiv 0$

• N2) Sea $a \in \mathbb{K} \wedge f \in C[0,1]$

$\Rightarrow \|af\| = \int_0^1 |af(t)|\,dt = \int_0^1 |a||f(t)|\,dt = |a| \int_0^1 |f(t)|\,dt = |a|\,\|f\|$

• N3) Sea $f, g \in C[0,1]$

$\Rightarrow \|f+g\| = \int_0^1 |(f+g)(t)|\,dt = \int_0^1 |f(t)+g(t)|\,dt \leq \int_0^1 [|f(t)|+|g(t)|]\,dt = \int_0^1 |f(t)|\,dt + \int_0^1 |g(t)|\,dt$

$= \|f\| + \|g\|$

Supongamos que $\|.\|$ es equiv. a $\|.\|_\infty$

i.e. $\exists C_1, C_2 > 0 /$ $C_1\|f\| \leq \|f\|_\infty \leq C_2\|f\|$ $: \forall f \in C[0,1]$

donde $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [0,1]\}$

Consideremos: $f_n \in C[0,1], n \in \mathbb{N}$ como: $f_n(t) = \begin{cases} 1-nt & : 0 \leq t \leq 1/n \\ 0 & : 1/n < t \leq 1 \end{cases}$

Para $n \in \mathbb{N}$: $\|f_n\| = \int_0^1 |f_n(t)|\,dt = \int_0^{1/n} 1-nt\,dt = t - n\frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/n} = \frac{1}{n} - n\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{n}$

y $\|f_n\|_\infty = 1 : \forall n \in \mathbb{N}$.

tomemos: n lo suficientemente grande tal que $n > C_2$

$\Rightarrow C_1 \cdot \frac{1}{n} \leq 1 \leq C_2 \frac{1}{n} \Rightarrow C_1 \leq n \leq C_2 \Rightarrow n \leq C_2 < n \Rightarrow n < n$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

Exercício 1.8.5 Dê exemplo de um espaço vetorial E e de uma métrica d em E que não está associada a uma norma pela igualdade (1.1).

(E, d)

Recordemos: d es una métrica s.s.s.

M1) $d(x,y) \geq 0 : \forall x,y \in E$ $\wedge$ $d(x,y) = 0 \iff x = y$ ✓

M2) $d(x,y) = d(y,x)$ $: \forall x,y \in E$ ✓

M3) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ $: \forall x,y,z \in E$

Sea d la métrica inducida por $\|.\|$

i.e: $d(x,y) = \|x-y\|$

Basta el ejemplo al inicio de las notas

Exercício 1.8.6 Mostre que se $0 < \alpha_1 < \alpha_2 \leq 1$, então $C^1[a,b] \subsetneq C^{\alpha_2}[a,b] \subsetneq C^{\alpha_1}[a,b] \subsetneq C[a,b]$.

Recordemos: Decimos que $f \in C^\alpha(\Omega)$ / $f : \Omega \to \mathbb{K}$ s.s.s. $(0 < \alpha < 1)$

1.- f es continua en Ω

2.- $[f]_\alpha := \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x-y|^\alpha} < \infty$

• $C^1[a,b] \subsetneq C^{\alpha_2}[a,b]$

$$|x-y| \leq |b-a|$$

$$\frac{|f(b)-f(a)|}{|b-a|} \leq f'(c)$$

$$\frac{1}{|b-a|} \leq \frac{1}{|x-y|}$$

$C^{\alpha_2}[a,b] \subsetneq C^{\alpha_1}[a,b]$

Sea $f \in C^{\alpha_2}[a,b] \Rightarrow f(x)$ cont. en $[a,b]$

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha_1}} = \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha_2}} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha_1-\alpha_2}} \leq [f]_{\alpha_2} \cdot \frac{1}{|x-y|^{\alpha_1-\alpha_2}}$$

y como: $x, y \in [a,b] \Rightarrow |x-y| \leq b-a \Rightarrow |x-y|^{\alpha_2-\alpha_1} \leq |b-a|^{\alpha_2-\alpha_1}$

$$\Rightarrow \frac{1}{|x-y|^{\alpha_1-\alpha_2}} \leq \frac{1}{|b-a|^{\alpha_1-\alpha_2}} \Rightarrow \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\alpha_1}} \leq [f]_{\alpha_2} \cdot \frac{1}{|b-a|^{\alpha_2-\alpha_1}}$$

$\therefore f \in C^{\alpha_1}[a,b]$

· El ejemplo para $C^{\alpha_2}[a,b] \subsetneq C^{\alpha_1}[a,b]$

Sea $f(x) = |x-a|^{\alpha_1}$

$$\cdot \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|^{\alpha_1}} = \frac{\left||y-a|^{\alpha_1} - |x-a|^{\alpha_1}\right|}{|y-x|^{\alpha_1}} .$$

Exercício 1.8.7 Mostre que é possível definir uma norma em qualquer espaço vetorial.

Sea E un $\mathbb{K}$-e.v. con $\mathcal{B}$ como una $\mathbb{K}$-base

Sea $x \in E \Rightarrow x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \{\lambda_\beta\} \cdot \beta$ / $\{\lambda_\beta\}$ es casi nula $\subseteq \mathbb{K}$

i.e.: $\exists F \subseteq \mathcal{B}$ finito / $\lambda_\beta = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B} - F$

Definimos:
$$\|.\| : E \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \|x\| = \sum_{\beta \in F} |\lambda_\beta|$$
donde F es finito

$\|.\|$ está bien definida, pues como $\mathcal{B}$ es una $\mathbb{K}$-base en particular es l.i. entonces la c.l. que representa a x es única.

AFIR: $\|.\|$ es una norma en E.

N1) $\cdot\ \|x\| = \sum_{\beta \in F} |\lambda_\beta| \geq 0 :$, pues $|\lambda_\beta| \geq 0 : \forall \beta \in \mathcal{B} \Rightarrow \|x\| \geq 0 : \forall x \in E$

$\cdot$ Si $x = 0_E \Rightarrow x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} |\lambda_\beta| \beta$ / $|\lambda_\beta| = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow \{\lambda_\beta\}$ es casi nula $\Rightarrow$ Tomaremos como $F = \{\beta_0\} \subseteq \mathcal{B}$ finito / $\lambda_\beta = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B} - F$

OJO: la familia casi nula no afirma que todos dentro de F no sean ceros, sino que afirma que los que están afuera sí son ceros!

$$\Rightarrow \|x\| = \sum_{\beta \in F} |\lambda_\beta| = |\lambda_{\beta_0}| = 0$$

Si $\|x\| = 0_E \Rightarrow 0 = \sum_{\beta \in F} |\lambda_\beta| \geq |\lambda_\beta| : \forall \beta \in F \Rightarrow |\lambda_\beta| = 0 : \forall \beta \in F$

$\Rightarrow \lambda_\beta = 0 : \forall \beta \in F$

$\Rightarrow \lambda_\beta = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B}$

$\Rightarrow x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \lambda_\beta \cdot \beta = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} 0 \cdot \beta = 0_E \Rightarrow x = 0_E$

N2) Sea $\alpha \in \mathbb{K} \wedge x \in E \Rightarrow x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \{\lambda_\beta\} \beta$

$\Rightarrow \alpha x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \{\alpha \lambda_\beta\} \cdot \beta$

$\Rightarrow \|\alpha x\| = \sum_{\beta \in F} |\alpha \lambda_\beta| = |\lambda| \sum_{\beta \in F} |\lambda_\beta| = |\lambda| \|x\|$

N3) Sea $x, y \in E \Rightarrow x = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \{\lambda_\beta\} \cdot \beta \wedge y = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \{\alpha_\beta\} \cdot \beta$

donde: $\exists F, G \subseteq \mathcal{B}$ finitos / $\lambda_\beta = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B} - F \wedge \alpha_\beta = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B} - G$

$\Rightarrow x + y = \sum_{\beta \in \mathcal{B}} \{\rho_\beta\} \cdot \beta$ donde $\exists F \cup G \subseteq \mathcal{B}$ finito / $\rho_\beta = 0 : \forall \beta \in \mathcal{B} - (F \cup G)$

donde: $\rho_\beta = \lambda_\beta + \alpha_\beta$

$\Rightarrow \|x + y\| = \sum_{\beta \in F \cup G} |\rho_\beta| = \sum_{\beta \in F \cup G} |\lambda_\beta + \alpha_\beta| \leq \sum_{\beta \in F \cup G} |\lambda_\beta| + \sum_{\beta \in F \cup G} |\alpha_\beta|$

$= \sum_{\beta \in F} |\lambda_\beta| + \sum_{\beta \in G} |\alpha_\beta| = \|x\| + \|y\|$

$\therefore \|\cdot\|$ es una norma en E

Exercício 1.8.8 Se A e B são subconjuntos de um espaço normado E, mostre que $a\overline{A} = \overline{aA}$ para todo escalar a e $\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}$.

$\bullet\ c\overline{A} = \overline{cA} \quad (c \in \mathbb{K})$

Sea $x \in c\overline{A} \Leftrightarrow \exists a \in \overline{A} / x = c.a \Leftrightarrow \exists (a_n) \subseteq A / a_n \to a \wedge x = c.a$

$\Leftrightarrow \exists (c.a_n) \subseteq cA / c.a_n \to c.a = x \Leftrightarrow x \in \overline{cA}$

$\bullet\ \overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}$

Sea $x \in \overline{A} + \overline{B} \Leftrightarrow \exists a \in \overline{A} \wedge \exists b \in \overline{B} / x = a+b \Leftrightarrow \exists (a_n) \subseteq A, \exists (b_n) \subseteq B / \begin{matrix} a_n \to a \\ b_n \to b \end{matrix}$

$x = a+b$

$\Rightarrow \exists (a_n + b_n) \subseteq A+B \quad / \quad a_n + b_n \to a+b = x$

$\Rightarrow x \in \overline{A+B}$

Exercício 1.8.9 Seja E um espaço normado. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito *limitado* se existir $M > 0$ tal que $\|x\| \leq M$ para todo $x \in A$. Se A for limitado em um espaço normado E, mostre que $\overline{A}$ também é limitado.

$\bullet$ Sea $x \in \overline{A} \Rightarrow \exists (x_n) \subseteq A / x_n \to x$. i.e: $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$

i.e: $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0$ donde: $\|x_n - x\| < \varepsilon$

Como $\|.\|$ cumple la prop. triang., entonces cumple:

Sea $\varepsilon_0 > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} / n \geq n_0$ implica: $\|x\| < \varepsilon_0 + \|x_n\|$

Y como $(x_n) \subseteq A \Rightarrow \|x\| < \varepsilon_0 + M = L$

$\Rightarrow \|x\| \leq L \ : \forall x \in \overline{A}$

Exercício 1.8.10 Se E é um espaço de Banach e G é subespaço de E, mostre que o fecho $\overline{G}$ de G também é subespaço de E.

Sea $x, y \in \overline{G} \wedge \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \exists_n (x_n), (y_n) \subseteq G / x_n \to x \wedge y_n \to y$

AFIRM: $x + \lambda y \in \overline{G}$

Tomemos la sucesión: $(x_n + \lambda y_n) \subseteq G$, pues G es subespacio de E

$$0 \le \|(x_n + \lambda y_n) - (x + \lambda y)\| = \|(x_n - x) + \lambda (y_n - y)\|$$

$$\le \|x_n - x\| + |\lambda| \, \|y_n - y\| \to 0 + 0$$

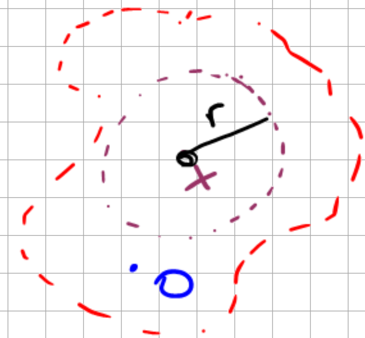
$\Rightarrow x_n + \lambda y_n \to x + \lambda y \quad \therefore x + \lambda y \in \overline{G}$

$\Rightarrow \overline{G}$ es un subespacio de E.

Exercício 1.8.11 Prove que subespaços próprios de espaços normados têm interior vazio.

Sup: $\exists F \subsetneq E$ donde $int(F) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \exists x \in int(F) \Rightarrow \exists r > 0 / B_r(x) \subseteq F$. Luego, sea $y \in E$



$\Rightarrow$ Si $y = 0 \vee y = x$. ¡Es trivial!

Para el caso: $y \neq 0 \wedge y \neq x$:

Sea: $z = x + \frac{r}{2\|y\|} y \Rightarrow \|z - x\| = \left\|\frac{r}{2\|y\|} y\right\| = \frac{r}{2} \frac{\|y\|}{\|y\|} = \frac{r}{2} < r$

$\Rightarrow z \in B_r(x)$, además: $(z - x) \frac{2\|y\|}{r} = y$, como: $z - x \in F \Rightarrow y \in F$

$\Rightarrow E \subseteq F \Rightarrow E = F$ $(\Rightarrow \Leftarrow)$

Exercício 1.8.12 (Espaço produto) Sejam $E_1, \ldots, E_n$ espaços normados.
(a) Prove que as expressões

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1 = \|x_1\| + \cdots + \|x_n\|,$$
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ e}$$
$$\|(x_1, \ldots, x_n)\|_\infty = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\},$$

definem normas equivalentes no produto cartesiano $E_1 \times \cdots \times E_n$.

¡El demostrar que es una norma es Trivial!

Sea $(x_1, \ldots, x_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$

Para el caso $n=1$. Es trivial. Por ind. mat.: Suponemos que es válido para n.

$\Rightarrow \|(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\|_1^2 = [(\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|) + \|x_{n+1}\|]^2 \leq (\|x_1\| + \cdots + \|x_n\|)^2 + \|x_{n+1}\|^2$

$\Rightarrow \exists\, C_1 > 0$ donde: $\|(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})\|_1^2 \leq C_1(\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2) + \|x_{n+1}\|^2$

$\Rightarrow \|(x_1, \ldots, x_{n+1})\|_1^2 \leq (1+C_1)(\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_{n+1}\|^2)$, $C_2 = \sqrt{1+C_1} > 0$

$\Rightarrow \|(x_1, \ldots, x_{n+1})\|_1 \leq C_2 \|(x_1, \ldots, x_{n+1})\|_2$

Luego: $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = (\|x_1\|^2 + \cdots + \|x_n\|^2)^{1/2} \leq \sqrt{n}\,(\max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\}) = \sqrt{n}\,\|(x_1, \ldots, x_n)\|_3$

Luego: $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_3 = \max\{\|x_1\|, \ldots, \|x_n\|\} \leq \|x_1\| + \cdots + \|x_n\| = 1.\|(x_1, \ldots, x_n)\|_1$

(b) Sejam $(x_j^1)_{j=1}^{\infty}, \dots, (x_j^n)_{j=1}^{\infty}$ sequências em $E_1, \dots, E_n$, respectivamente. Prove que $x_j^1 \longrightarrow x_1 \in E_1, \dots, x_j^n \longrightarrow x_n \in E_n$ se, e somente se, $\left((x_j^1, \dots, x_j^n)\right)_{j=1}^{\infty}$ converge para $(x_1, \dots, x_n)$ em $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido de alguma (e portanto todas) das normas acima.

($\Rightarrow$) Como $x_j^i \to x_i$: $\forall 1 \leq i \leq n$

$\Rightarrow \lim_{j\to\infty} \|x_j^i - x_i\| = 0$, i.e.: $\forall \varepsilon > 0 : \exists j_0 \in \mathbb{N} / j \geq j_i$ implica: $\|x_j^i - x_i\| < \varepsilon$: $\forall 1 \leq i \leq n$

Luego, sea: $n_0 = \max\{j_i \; \forall 1 \leq i \leq n\}$. Sea $\varepsilon > 0$: $\exists n_0 \in \mathbb{N} / j \geq n_0$ implica:

$\|(x_j^1, \dots, x_j^n) - (x_1, \dots, x_n)\|_3 = \|(x_j^1 - x_1, \dots, x_j^n - x_n)\|_3 = \max\{\|x_j^1 - x_1\|, \dots, \|x_j^n - x_n\|\} < \varepsilon$

($\Leftarrow$) Se demuestra de forma análoga, con $\|\cdot\|_3$

(c) Prove que $E_1 \times \cdots \times E_n$ munido de uma (e portanto todas) das normas acima é Banach se, e somente se, $E_1, \dots, E_n$ são Banach.

Es claro que los espacios son métricos.

($\Rightarrow$) Sea $(x_j^i) \subseteq E_i$ es suc. de cauchy $\Rightarrow (x_j^1, \dots, x_j^n) \subseteq E_1 \times \dots \times E_n$ es suc. de cauchy $\Rightarrow \exists (x_1, \dots, x_n) \in E_1 \times \dots \times E_n / (x_j^1, \dots, x_j^n) \to (x_1, \dots, x_n)$

y por (b): $x_j^i \to x_i \in E_i \Rightarrow E_i$ es completo: $\forall 1 \leq i \leq n \Rightarrow E_i$ es de Banach : $\forall 1 \leq i \leq n$

($\Leftarrow$) Totalmente análogo

Exercício 1.8.13 Seja E um espaço normado. No produto cartesiano considere qualquer uma das normas do Exercício 1.8.12.
(a) Prove que as operações algébricas de E:

$$(x, y) \in E \times E \mapsto x + y \in E \quad e \quad (x, a) \in E \times \mathbb{K} \mapsto ax \in E,$$

são funções contínuas.

Sea $(x,y) \in E \times E$ con la norma $\|.\|_1$ de $E \times E$ y $\|.\|$ la norma de E

Sea $\varepsilon > 0$. Tomemos: $(a,b) \in E \times E$ donde:

$\|(x-a, y-b)\|_1 = \|(x,y) - (a,b)\|_1 < \varepsilon/2 = \delta_\varepsilon \Rightarrow \|x-a\| < \varepsilon/2, \ \|y-b\| < \varepsilon/2$

Entonces: $\|(x+y)-(a+b)\| = \|(x-a)+(y-b)\| \leq \|x-a\| + \|y-b\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

Luego la suma es una función continua.

Sea $(x,a) \in E \times \mathbb{K}$ y a $\|.\|$ la norma de E
(y,b)

$\|(x,a) - (y,b)\|$

$\|(x-y, a-b)\|$

$|a-b| \leq |a|$

$|b| \leq a$

$\|x-y\|, |a-b| < \frac{\varepsilon}{2|a|+1} < \frac{\varepsilon}{2}$

$||a|-|b|| < \delta$

$|b| < |a| + \delta < \frac{\varepsilon}{2}$

$0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2} - |a| = \frac{\varepsilon - 2|a|}{2}$

$\|y\| < \|x\| + \delta$

(b) Prove que a norma $x \in E \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Sea $x \in E$.

Sea $\varepsilon > 0$: $\exists\, \delta = \varepsilon > 0$ / para $y \in E$ $\wedge$ $\|x - y\| < \delta$

cumple que: $\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\| < \delta = \varepsilon$ Por des. triangular

Exercício 1.8.14* (Espaço quociente) Sejam E um espaço normado e M um subespaço de E. Dados $x, y \in E$, dizemos que $x \sim y$ se $x - y \in M$. Para cada $x \in E$, definimos $[x] = \{y \in E : x \sim y\}$. Definimos também $E/M = \{[x] : x \in M\}$. Prove que

(a) $\sim$ é uma relação de equivalência.

• Reflexividad:

Como M es un subespacio de E $\Rightarrow$ $0 = x - x \in M \Rightarrow x \sim x$ $: \forall x \in E$

• Simetría:

Si $x \sim y \iff x - y \in M \Rightarrow (-1)(x-y) \in M \iff y - x \in M \iff y \sim x$

• Transitividad:

Si $x \sim y$, $y \sim z \iff x - y \in M$, $y - z \in M \Rightarrow (x-y)+(y-z) = x - z \in M \iff x \sim z$

$\therefore$ "$\sim$" es relación de equiv.

(b) As operações $[x] + [y] = [x + y]$ e $a[x] = [ax]$ estão bem definidas e tornam E/M um espaço vetorial.

Sea $x' \in [x]$, $y' \in [y] \Rightarrow [x'] = [x]$, $[y'] = [y] \Rightarrow [x] + [y] = [x'] + [y'] = [x' + y']$

Luego, sea $z \in [x' + y'] \Rightarrow z \sim x' + y'$. Pero como $x' \sim x$, $y' \sim y \iff$ $x' - x \in M$, $y' - y \in M$ $\iff x' + y' - (x+y) \in M$ $\iff x' + y' \sim x + y$

$\Rightarrow z \sim x + y \Rightarrow z \in [x+y]$. Anc. $[x'+y'] \supseteq [x+y]$

$\Rightarrow [x] + [y] = [x' + y'] + [x+y]$. Está bien definida.

De forma análoga $a[x] = [ax]$ está bien definida, pues si $x' \in [x] \Rightarrow [x'] = [x] \wedge [ax] = [ax']$

(c) Se M é fechado em E, então a expressão

$$\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, M) = \inf\{\|x - y\| : y \in M\}$$

define uma norma em E/M.

N1) Como $\|[x]\| = dist(x, M) \Rightarrow \|[x]\| \geq 0 : \forall x \in E/M$

• Si $[x] = 0$ i.e. $x \sim 0 \Leftrightarrow x \in M \Rightarrow dist(x, M) = \|[x]\| = 0$

• Si $\|[x]\| = 0 = dist(x, M) \Rightarrow \inf\{\|x - y\| : y \in M\} = 0$

Sea $n > 0 : \exists\, y_n \in M$ donde $\|x - y_n\| < \frac{1}{n}$

Con esto formemos una sucesión: $(y_n) \subseteq M$ donde $y_n \to x \Rightarrow x \in \overline{M} = M \Rightarrow [x] = 0$

N2) Sea $a \in \mathbb{K}$, $x \in E \Rightarrow \|a[x]\| = \|[ax]\| = \inf\{\|ax - y\| : y \in M\}$

Como $y \in M \Leftrightarrow ay \in M \Rightarrow \|a[x]\| = \inf\{\|ax - ay\| : y \in M\} = \inf\{|a|\,\|x - y\| : y \in M\}$

$= |a| \inf\{\|x - y\| : y \in M\} = |a|\,\|[x]\|$

N3) Sea $x, y \in E$

$\Rightarrow \|[x] + [y]\| = \|[x + y]\| = \inf\{\|(x + y) - z\| : z \in M\}$. Como $z \in M \Leftrightarrow 2z \in M$

$\Rightarrow \|[x] + [y]\| = \inf\{\|(x - z) + (y - z)\| : z \in M\} \leq \inf\{\|x - z\| + \|y - z\| : z \in M\}$

$= \inf\{\|x - z\| : z \in M\} + \inf\{\|y - z\| : z \in M\} = \|[x]\| + \|[y]\|$

(d) Se E é espaço de Banach, então E/M também é espaço de Banach.

Por (c), sabemos que $(E/M, \|\cdot\|)$ es un espacio normado.
Probaremos que E/M es completo.

Sea $([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E/M$ suc. de Cauchy i.e: $\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} / n,m \geq N$

$$\operatorname{dist}(x_n-x_m, M) = \inf\{\|(x_n-x_m)-z\| : z\in M\} = \|[x_n-x_m]\| = \|[x_n]-[x_m]\| < \varepsilon$$

Ahora, fijemos a y b. Sea cualquier $z\in M$

$$\Rightarrow \|a-b\| = \|(a-z)+(z-b)\| \leq \|x_n - z\| + \|x_m - z\|$$

Luego: Como $\|x_n - x_m\|$ es cota inferior

$$\Rightarrow \|a-b\| \leq \inf_{z\in M}\|a-z\| + \|b-z\| = \inf_{z\in M}\|a-z\| + \inf_{z\in M}\|b-z\| =$$

$$\operatorname{dist}(a, M) + \operatorname{dist}(b, M)$$

Reemplazamos $a = x_n - x_m$ y $b = 0$ pues $0\in M$

$$\Rightarrow \|x_n - x_m\| \leq \operatorname{dist}(x_n-x_m) + \cancel{\operatorname{dist}(0, M)} = \operatorname{dist}(x_n - x_m) < \varepsilon$$

$\Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ es una suc. de Cauchy $\Rightarrow \exists x\in E / x_n \to x$

AFIR: $[x_n] \to [x]$

$$0 \leq \|[x_n]-[x]\| = \|[x_n - x]\| = \inf\{\|(x_n - x) - z\| : z\in M\} \leq \|x_n - x\| \to 0$$

(pues $0\in M$)

$\Rightarrow [x_n] \to [x]$ $\therefore ([x_n])_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E/M$ es convergente

Exercício 1.8.15 Seja E um espaço vetorial. Um subconjunto $A \subseteq E$ é dito *convexo* se sempre que $x, y \in A$, o "segmento fechado"

$$\{ax + (1-a)y : 0 \leq a \leq 1\}$$

" $B_r[0]$

estiver inteiramente contido em A. Mostre que o conjunto $\{x \in E : \|x\| \leq r\}$, chamado de bola fechada centrada na origem de raio $r > 0$, é convexo.

Sea $x, y \in B_r[0] \Rightarrow \|\tau x + (1-\tau)y\| \leq \|\tau x\| + \|(1-\tau)y\| = |\tau| \|x\| + (1-\tau)\|y\| : \forall\, 0 \leq \tau \leq 1$

$\Rightarrow \|\tau x + (1-\tau)y\| \leq \tau r + (1-\tau) r = r$

$\Rightarrow \{\tau x + (1-\tau)y : 0 \leq \tau \leq 1\} \subseteq B_r[0]$

Exercício 1.8.16 Mostre que um subconjunto C de um espaço vetorial é convexo se, e somente, se $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in C$ sempre que $x_1, \ldots, x_n \in C$ e $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ satisfazem $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$.

($\Leftarrow$) Trivial

($\Rightarrow$) $B \subseteq \mathbb{N}$ / $B = \{n \in \mathbb{N} / \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \in C$ donde $x_1, \ldots, x_n \in C$, $a_1, \ldots, a_n \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1\}$

- $1 \in B$, pues: si $x_1 \in C \wedge a_i = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{1} a_1 x_1 = 1 \cdot x_1 = x_1 \in C$
- H.I :) $n \in B$

Sea $x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} \in C \wedge a_1, \ldots, a_n, a_{n+1} \geq 0$ / $\sum_{i=1}^{n+1} a_i = 1$. ($\sum_{i=1}^{n} a_i + a_{n+1} = 1$)

Tomamos: $\mu = 1 - a_{n+1}$. Si $\mu \neq 0$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mu} = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mu} \cdot x_i \in C \Rightarrow \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\mu} \cdot x_i + a_{n+1} \cdot x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n+1} a_i x_i \in C$

pues: $\mu + a_{n+1} = 1$

- Si $\mu = 0 \Rightarrow a_{n+1} = 1$

$\Rightarrow a_i = 0 : \forall i = 1, \ldots, n \Rightarrow$ Volvemos al caso unitario

$\Rightarrow n+1 \in B$

$\Rightarrow B = \mathbb{N}$

Exercício 1.8.17 Seja A um subconjunto de um espaço vetorial E. O conjunto conv(A), chamado de *envoltória convexa de* A, é definido como a interseção de todos os subconjuntos convexos de E que contém A. Mostre que

(a) A envoltória convexa de qualquer subconjunto de E é um conjunto convexo.

$A \subseteq E$. $\mathcal{C} = \{ B \subseteq E$ donde B es convexo $\wedge$ $A \subseteq B \}$

$$\text{conv}(A) = \bigcap_{B \in \mathcal{C}} B$$

Sean $x, y \in \text{conv}(A) \wedge 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow x, y \in B : \forall B \in \mathcal{C} \wedge 0 \leq t \leq 1$

$\Rightarrow tx + (1-t)y \in B : \forall B \in \mathcal{C} \wedge 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow tx + (1-t)y \in \text{conv}(A) : \forall 0 \leq t \leq 1$

(b) Para qualquer $A \subseteq E$,

$$\text{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_n \geq 0, \ x_i \in A, \ i = 1, \ldots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\} := \mathcal{A}$$

Por el ejc. ant. $\mathcal{A}$ es convexo, además $A \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \text{conv}(A) \subseteq \mathcal{A}$

Sea $x \in \mathcal{A} \Rightarrow x \in \sum \lambda_i x_i$ donde $x_i \in A$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 \ : \forall 1 \leq i \leq n$

Como $A \subseteq \text{conv}(A)$

$\Rightarrow x = \sum \lambda_i x_i$ donde $x_i \in \text{conv}(A)$, $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, $\forall 1 \leq i \leq n$

Y como conv(A) es convexo

$\Rightarrow x \in \text{conv}(A)$ $\Rightarrow \mathcal{A} \subseteq \text{conv}(A)$

Exercício 1.8.18 Sejam A e B subconjuntos convexos e compactos do espaço normado E. Prove que $\mathrm{conv}(A \cup B)$ é compacto.

$$\mathrm{conv}(A) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i : \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1, \text{ com } \lambda_n \geq 0, \; x_i \in A, \; i = 1, \ldots, n \text{ e } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathrm{conv}(A \cup B)$

$$\Rightarrow \left[x_k = \sum_{i_k=1}^{n_k} \lambda_{i_k} x_{i_k} : \sum_{i_k=1}^{n_k} \lambda_{i_k} = 1 \,/\, \text{con } \lambda_{i_k} \geq 0, \; x_{i_k} \in A \cup B, \; i_k = 1, \ldots, n_k, \; n_k \in \mathbb{N} \right] \forall k \in \mathbb{N}$$

Fijemos $k \in \mathbb{N}$:

Denotemos: $a_{i_k} = x_{i_k}$, si $x_{i_k} \in A$ $\wedge$ $b_{i_k} = x_{i_k}$, si $x_{i_k} \in B$

Sin perder generalidad, supondremos que los índices están ordenados: i.e:

$$x_k = \sum_{i_k=1}^{l_k} \lambda_{i_k} a_{i_k} + \sum_{i_k=l_k+1}^{n_k} \lambda_{i_k} b_{i_k}, \quad \text{donde: } \sum_{i_k=1}^{l_k} \lambda_{i_k} = 1 - \sum_{i_k=l_k+1}^{n_k} \lambda_{i_k} = \mu_k$$

$$\Rightarrow x_k = \underbrace{\left[1 - \sum_{i_k=l_k+1}^{n_k} \lambda_{i_k}\right]}_{s_k} \cdot \underbrace{\sum_{i_k=1}^{l_k} \frac{\lambda_{i_k}}{\mu_k} a_{i_k}}_{a_k \in A} + \underbrace{\left[1 - \sum_{i_k=1}^{l_k} \lambda_{i_k}\right]}_{r_k} \underbrace{b_{i_k}}_{b_k}$$

$$x_k = \left[1 - \sum_{i_k=1}^{l_k} \lambda_{i_k}\right] \underbrace{\sum_{i_k=l_k+1}^{n_k} \frac{\lambda_{i_k}}{v_k} \cdot b_{i_k}}_{b_k \in B} + \left[1 - \sum_{i=l_k+1}^{n_k} \lambda_{i_k}\right] a_{i_k} \quad \sum_{i_k=l_k+1}^{n_k} \lambda_{i_k} = 1 - \sum_{i_k=1}^{l_k} \lambda_{i_k} = v_k$$

Exercício 1.8.19 Prove que o fecho de um subconjunto convexo de um espaço normado é convexo.

Sea $(E, \|\cdot\|)$ $\mathbb{K}$-e.v. normado

Sea $A \subseteq E$ convexo.

Sea $x, y \in \bar{A} \Rightarrow \exists_n (x_n), (y_n) \subseteq A \ / \ x_n \to x \wedge y_n \to y$

Fijando $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \tau \cdot y_n + (1-\tau) x_n \in A : \forall 0 \leq \tau \leq 1$

Luego: Fijando $0 \leq \tau \leq 1 \Rightarrow (\tau \cdot y_n + (1-\tau) x_n) \subseteq A$

$\Rightarrow 0 \leq \| [\tau \cdot y_n + (1-\tau) x_n] - [\tau \cdot y + (1-\tau) x] \| = \| \tau \cdot (y_n - y) + (1-\tau)(x_n - x) \|$

$\leq \tau \|y_n - y\| + (1-\tau) \|x_n - x\| \to \tau \cdot 0 + (1-\tau) \cdot 0 = 0$

$\Rightarrow \| [\tau \cdot y_n + (1-\tau) x_n] - [\tau \cdot y + (1-\tau) x] \| \to 0$ i.e.

$\exists (\tau \cdot y_n + (1-\tau) x_n) \subseteq A \ / \ \tau \cdot y_n + (1-\tau) x_n \to \tau \cdot y + (1-\tau) x$

$\Rightarrow \tau y + (1-\tau) x \in \bar{A}$ Y como τ fue arbitrario

$\Rightarrow \{\tau y + (1-\tau) x\}_{0 \leq \tau \leq 1} \subseteq \bar{A}$ $\therefore$ $\bar{A}$ es convexo

Exercício 1.8.20 Seja $1 \leq p < \infty$.

(a) Prove que a expressão

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

é uma norma no espaço vetorial das funções contínuas $f\colon [a,b] \longrightarrow \mathbb{K}$.

(b) Mostre que o espaço normado do item (a) não é completo.

a) N.1) $\|f\|_p \geq 0 \;:\; \forall f \in C[a,b]$

pues: $|f(x)| \geq 0 : \forall x \in [a,b] \wedge f \in C[a,b]$

• Si $f \equiv 0 \Rightarrow |f(x)| = 0 : \forall x \in [a,b]$

$\Rightarrow \|f\|_p = 0$

• Si $\|f\|_p = 0 \Rightarrow \int^b |f(x)|^p dx = 0 \Rightarrow |f(x)|^p = 0$ c.t.p $\Rightarrow f(x) = 0$ c.t.p

i.e: $\exists N \subseteq [a,b] / \lambda(N) = 0 \wedge f(x) \neq 0 : \forall x \in N$

Sup: $N \neq \emptyset \Rightarrow \exists x_0 \in N / f(x_0) \neq 0$. Como f es continua.

$\Rightarrow$ Sea $|f(x_0)| > 0 : \exists \delta > 0 /$ Si $y \in I_\delta(x_0) \Rightarrow |f(x_0) - f(y)| < |f(x_0)|/2$

Sup: $I_\delta(x_0) \subseteq N$ $\Rightarrow \lambda(I_\delta(x_0)) = 2\delta \leq \lambda(N) = 0 \Rightarrow \delta = 0$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\Rightarrow \exists y_0 \in I_\delta(x_0) \wedge y_0 \notin N \Rightarrow f(y_0) = 0$

$\Rightarrow |f(x_0) - f(y_0)| = |f(x_0)| < |f(x_0)|/2$ $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\Rightarrow N = \emptyset \Rightarrow f(x) = 0 : \forall x \in [a,b] \Rightarrow f \equiv 0$

N.2) Sea $f \in C[a,b] \wedge k \in \mathbb{K}$

$\Rightarrow \|kf\|_p = \left[\int_a^b |kf(t)|^p dt\right]^{1/p} = \left[|k|^p \cdot \int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |k| \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} = |k|\,\|f\|_p$

N.3) Sea $f, g \in C[a,b] \Rightarrow f, g \in \mathcal{L}^p_{([a,b],\lambda)}$ $\Rightarrow \|f\|_p = \left[\int_a^b |f(t)|^p dt\right]^{1/p} = \left[\int_{[a,b]} f\, d\lambda\right]^{1/p}$

$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$ (Des. de Minkoski) análogo para g.

b) Demostraremos que $(C[a,b], \|\cdot\|)$ no es un espacio completo

Definimos la sucesión: $(f_n) \subseteq C[a,b]$ como:

$$f_n(t) = \begin{cases} (-2nt+2)^{1/p} & : a \leq t \leq a + \frac{b-a}{n} \\ 0 & : a + \frac{b-a}{n} < t \leq b \end{cases}$$

Tomemos $m > n$. Tenemos:

$$\Rightarrow \|f_m - f_n\|^p = \int_0^1 |(f_m - f_n)(t)|^p dt = \int_0^{1/m} [(-2mt+2) - (-2nt+2)] dt$$

$$+ \int_{1/m}^{1/n} |-2nt+2| dt + \int_{1/n}^1 0 \, dt = 2\int_0^{1/m} (m-n) t \, dt + \int_{1/m}^{1/n} (2-2nt) dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow \|f_m - f_n\| = \left[\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right]^{1/p} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$ y como $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ es de Cauchy

$\Rightarrow (f_m) \subseteq C[0,1]$ es de Cauchy.

AFIR: $f_n \to f$ donde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ como: $f(t) = \begin{cases} 1 & : t = 0 \\ 0 & : 0 < t \leq 1 \end{cases}$

En efecto:

$$\|f_n - f\|^p = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|^p dt = \int_0^{1/n} |f_n(t)|^p dt = \int_0^{1/n} (2 - 2nt) dt = \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \|f_n - f\| = \left[\frac{1}{n}\right]^p \to 0.$$

Entonces $f_n \to f$, pero $f \notin C[0,1]$

Luego $(C[a,b], \|\cdot\|)$ no es completo

Exercício 1.8.21 Mostre que $L_\infty(X,\Sigma,\mu) \subseteq L_1(X,\Sigma,\mu)$ se, e somente se, $\mu(X) < \infty$.

$(\Rightarrow)$ Por Hip: $[f] \in L_\infty(X,\Sigma,\mu) \Leftrightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p de X

$\Rightarrow \int_X |f|\, d\mu < \infty$

Sea $[1_X] \,/\, f \in [1_X] \Leftrightarrow f \equiv 1_X$ c.t.p de X

Luego como: $|f(x)| = |1_X(x)| \leq 1$ c.t.p. de X

$\Rightarrow \int_X |1_X|\, d\mu = \int_X 1_X\, d\mu = \mu(X) < \infty$

$(\Leftarrow)$ Sea $[f] \in L_\infty(X,\Sigma,\mu) \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p. de X

$\Rightarrow \int_X |f|\, d\mu \leq \int_X \|f\|_\infty\, d\mu = \|f\|_\infty \int_X d\mu = \|f\|_\infty \mu(X) < \infty$. c.t.p. de X

$\Rightarrow \int_X |f|\, d\mu < \infty$ c.t.p. de X $\Rightarrow [f] \in L_1(X,\Sigma,\mu)$

Exercício 1.8.22 Se (X,Σ,μ) é um espaço de medida finita e $1 \leq r \leq p$, então $L_p(X,\Sigma,\mu) \subseteq L_r(X,\Sigma,\mu)$ e $\|f\|_r \leq \|f\|_p \mu(X)^s$ onde $s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$.

Por Hip: $\mu(X) < \infty$. Sea $[f] \in L_p(X,\Sigma,\mu)$.

Se puede probar facilmente que:

- $[f^r] \in L_{p/r}(X,\Sigma,\mu)$ pues: $\left[\int_X (|f|^r)^{p/r} d\mu\right]^{r/p} = \left[\left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{p}\right]^{r} < \infty$

- $1_X \in L_{\frac{1}{rs}}(X,\Sigma,\mu)$ pues: $\left[\int_X 1_X^{\frac{1}{rs}} d\mu\right]^{rs} = \left(\int_X d\mu\right)^{rs} = (\mu(X))^{rs} < \infty$

Por des. de Hölder: $\|f^r\|_1 \leq \|f^r\|_{p/r} \cdot \|1\|_{1/rs}$

pues: $\frac{1}{p/r} + \frac{1}{1/rs} = \frac{r}{p} + rs = \frac{r}{p} + 1 - \frac{r}{p} = 1$

Luego: $\|f^r\|_1 = \int_X f^r d\mu \leq (\|f\|_p)^r \cdot \left(\int_X 1_X d\mu\right)^{rs}$

$\Rightarrow \|f\|_r = \left(\int_X |f|^r d\mu\right)^{1/r} \leq \|f\|_p \cdot \mu(X)^s < \infty$

Exercício 1.8.23 Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida finita e $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu)$. Mostre que $f \in L_p(X, \Sigma, \mu)$ para todo $p \geq 1$ e que $\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

$\cdot\, \mu(X) < \infty$. Como $f \in L_\infty(X, \Sigma, \mu) \Rightarrow |f(x)| \leq \|f\|_\infty$ c.t.p. de X $\left[\begin{matrix} N \in \Sigma \\ \mu(N) = 0 \end{matrix}\right]$

$\Rightarrow \|f\|_p^p = \int_X |f|^p d\mu = \int_N |f|^p d\mu + \int_{X-N} |f|^p d\mu = \int_{X-N} |f|^p d\mu \leq \int_{X-N} \|f\|_\infty^p d\mu$

$= \|f\|_\infty^p \int_{X-N} d\mu = \|f\|_\infty^p \mu(X-N) \leq \|f\|_\infty^p \mu(X) < \infty \Rightarrow f \in L_p(X, \Sigma, \mu) \quad \forall p \geq 1$

$\Rightarrow \|f\|_p \leq \|f\|_\infty [\mu(X)]^{1/p} \Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \lim_{p\to\infty} \|f\|_\infty [\mu(X)]^{1/p} = \|f\|_\infty \lim_{p\to\infty} \mu(X)^{1/p}$

$\Rightarrow \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \leq \|f\|_\infty$

Ahora, sea $\varepsilon > 0$: Definimos: $\Delta_\varepsilon = \{ x \in X : |f(x)| \geq \|f\|_\infty - \varepsilon \}$

OJO: Este conjunto no tiene medida nula, pues si lo tuviese.

- $\mu(\Delta_\varepsilon) = 0$

$$\Rightarrow \|f\|_\infty \leq S_f(\Delta_\varepsilon) = \sup \{ |f(x)| : x \notin \Delta_\varepsilon \}$$

$$= \sup \{ |f(x)| \,/\, |f(x)| < \|f\|_\infty - \varepsilon \} < \|f\|_\infty - \varepsilon$$

$$\Rightarrow \varepsilon < 0 \;(\Leftarrow\!\!\Rightarrow \Leftarrow)$$

$$\Rightarrow \int_X |f|^p d\mu = \int_{\Delta_\varepsilon} |f|^p d\mu + \int_{\Delta_\varepsilon^c} |f|^p d\mu \geq \int_{\Delta_\varepsilon} |f|^p d\mu \geq \int_{\Delta_\varepsilon} (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p d\mu$$

$$= (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \int_{\Delta_\varepsilon} d\mu = (\|f\|_\infty - \varepsilon)^p \mu(\Delta_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)\, \mu(\Delta_\varepsilon)^{1/p} \Rightarrow \lim_{p \to \infty} \|f\|_p \geq (\|f\|_\infty - \varepsilon)$$

$$\Rightarrow \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\lim_{p \to \infty} \|f\|_p \right] = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \|f\|_\infty - \varepsilon = \|f\|_\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$$

Exercício 1.8.24 (Desigualdade de Hölder generalizada) Sejam $n \in \mathbb{N}$, $p, q, s > 0$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{s}$. Prove que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |a_j b_j|^s \right)^{\frac{1}{s}} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} |b_j|^q \right)^{\frac{1}{q}}$$

para quaisquer escalares $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$.

Exercício 1.8.25 Mostre, sem passar pelo espaço $L_\infty(X,\Sigma,\mu)$, que ℓ_∞ é um espaço de Banach.

$\ell_\infty = \{(a_j)_{j\in\mathbb{N}} : a_j \in \mathbb{K} \ \forall j\in\mathbb{N} \wedge \sup_{j\in\mathbb{N}} |a_j| < \infty\}$

$\|(a_j)_{j\in\mathbb{N}}\| = \sup\{|a_j| : j\in\mathbb{N}\}$

$(\ell_\infty, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach

Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_j^n)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \ell_\infty$ sucesión de Cauchy. i.e:

$\forall \varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} / n,m \geq N \Rightarrow \|(a_n)-(a_m)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow |a_j^n - a_j^m| \leq \|(a_n - a_m)\| = \|(a_n)-(a_m)\| < \varepsilon$

$\Rightarrow$ Con el j fijo: $(a_j^n) \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy.

$\Rightarrow \exists a_j \in\mathbb{R} / \lim_{n\to\infty} a_j^n = a_j$ Sea $a = (a_j)_{j\in\mathbb{N}}$, fijando $j\in\mathbb{N}$:

Para $1>0 : \exists N\in\mathbb{N} / n\geq N \Rightarrow |a_j| < 1 + |a_j^n|$

$\Rightarrow |a_j| < 1 + |a_j^N| \leq 1 + \|a_N\| \Rightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j|\} < +\infty$

AFIR: $(a_n) \to (a_j)$

Sea $\varepsilon>0 : \exists N\in\mathbb{N} / n\geq N \Rightarrow |a_j^n - a_j| < \varepsilon/2 \ : \forall j\in\mathbb{N}$

$\Rightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}}\{|a_j^n - a_j|\} \leq \varepsilon/2$ $\Rightarrow (a_n)\to a$

$\Rightarrow \|(a_n - a)\| = \|(a_n)-(a)\| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$

$\therefore (\ell_\infty, \|\cdot\|)$ es de Banach

Exercício 1.8.26 Um elemento $(a_j)_{j=1}^{\infty} \in \ell_\infty$ é chamado de função simples se $\{a_j : j \in \mathbb{N}\}$ for finito. Mostre que o conjunto das funções simples forma um subconjunto denso de ℓ_∞.

$\{a_j \neq 0 : j \in \mathbb{N}\}$

P.P: $A = \{ (a_j)_{j \in \mathbb{N}} \ / \ (a_j)$ es de función simple$\}$ $\qquad \bar{A} = \ell_\infty$

Sea $\underset{a}{(a_j)_{j \in \mathbb{N}}} \in \ell_\infty \Rightarrow \sup_{j \in \mathbb{N}} |a_j| < +\infty$

Definimos: $(S_n) = (S_j^n) \subseteq A \ /$

$S_1 = (a_1, 0, 0, 0, \ldots)$

$S_2 = (a_1, a_2, 0, 0, \ldots)$

$S_3 = (a_1, a_2, a_3, 0, \ldots)$

inductivamente

$$(S_j^n) = \begin{cases} a_j & : \ j \leq n \\ 0 & : \ j > n \end{cases}$$

Sea $\varepsilon > 0$: $\exists j_0 \in \mathbb{N} \ / \ \|a\| - \varepsilon < |a_{j_0}|$ $\qquad \|a\| - |a_{j_0}| < \varepsilon$

$n \geq j_0$ $\qquad n \geq j_0$

$\|S_n - a\| = \sup_{j \in \mathbb{N}} \{ |S_j^n - a_j| \}$ $\qquad \|a\| - |S_{j_0}|$

$\Rightarrow |S_{j_0}^n - a_{j_0}| = 0$ $\qquad |S_j^n - a_j| < \varepsilon/2 \ : \forall j \in \mathbb{N}$

Exercício 1.8.27 Considere

$$c = \left\{ (a_j)_{j=1}^{\infty} : a_j \in \mathbb{K} \text{ para todo } j \in \mathbb{N} \text{ e } \lim_{j\to\infty} a_j \text{ existe em } \mathbb{K} \right\},$$

o conjunto de todas as sequências convergentes formadas por elementos de $\mathbb{K}$. Mostre que c é subespaço fechado de ℓ_∞.

Exercício 1.8.28* Seja K um subconjunto relativamente compacto, isto é $\overline{K}$ é compacto, de ℓ_1. Prove que K é limitado e que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{(a_n)_{n=1}^{\infty} \in K} \left(\sum_{n \geq n_\varepsilon} |a_n| \right) \leq \varepsilon.$$

Exercício 1.8.29 Determine $\overline{c_{00}}$ em c_0.

$\|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$

- $c_0 = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : a_n \in \mathbb{K} : \forall n \in \mathbb{N} \wedge a_n \to 0\}$
- $c_{00} = \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} / a_k = 0 : \forall k \geq k_0\}$

Como c_{00} no es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|$

$\Rightarrow c_{00}$ no es cerrado en c_0.

AFIR! $\overline{c_{00}} = c_0$

Sea $\underset{a}{(a_j)_{j\in\mathbb{N}}} \in c_0 \Rightarrow a_j \to 0$ i.e.: $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / j \geq N \Rightarrow |a_j| < \varepsilon/2$

Definimos: $(S_n) = (S_j^n) \subseteq c_{00}$ / inductivamente

$S_1 = (a_1, 0, 0, 0, \ldots)$
$S_2 = (a_1, a_2, 0, 0, \ldots)$
$S_3 = (a_1, a_2, a_3, 0, \ldots)$

$$(S_j^n) = \begin{cases} a_j & : j \leq n \\ 0 & : j > n \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sea $\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N$ se cumple: (fijando n)

Sea $j \in \mathbb{N} / j \leq n \Rightarrow |S_j^n - a_j| = |a_j - a_j| = 0 < \varepsilon/2$

Sea $j \in \mathbb{N} / j > N \Rightarrow |S_j^n - a_j| = |0 - a_j| = |a_j| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} |S_j^n - a_j| \leq \varepsilon/2 \Rightarrow \|S_n - a\| < \varepsilon$

$\Rightarrow S_n \to a \Rightarrow a \in \overline{c_{00}}$

$\Rightarrow \overline{c_{00}} \subseteq c_0 \subseteq \overline{c_{00}}$

$\therefore c_0 = \overline{c_{00}}$

Exercício 1.8.30 Determine $\overline{c_{00}}$ em ℓ_p.

$\overline{C_{00}} = C_{00}$

- $\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p\right)^{1/p}$

Sea $1 \le p \le \infty$.

$\Rightarrow a \in C_{00} \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N} / \; a_k = 0 : \forall k \ge k_0$

$\Rightarrow \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p^p = \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k|^p + \sum_{k=k_0}^{\infty} |a_k|^p = \sum_{k=1}^{k_0-1} |a_k|^p < \infty$

$\Rightarrow \|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_p < \infty \rightarrow a \in \ell_p$

$\therefore C_{00} \subseteq \ell_p$

- Sea $a = (a_j) \in \ell_p \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|^p < +\infty \Rightarrow \lim_{i\to\infty} |a_i|^p = 0$ i.e.:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} /$
$m \ge N \Rightarrow |a_i|^p < \varepsilon^p \Rightarrow |a_i| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{i\to\infty} |a_i| = 0$

Definimos: $(S_n) = (S_j^n) \subseteq C_{00}$, donde $(S_j^n) = \begin{cases} a_j & ; j \le n \\ 0 & ; j > n \end{cases}$

AFIRM: $S_n \to a$

Sea $\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} / \; m \ge N$ cumple (fijando m)

Si $j \le m \Rightarrow |(S_j^m) - (a_j)| = |(a_j) - (a_j)| = 0 < \varepsilon/2$

Si $j > m \Rightarrow |(S_j^m) - (a_j)| = |-(a_j)| = |a_j| < \varepsilon/2$

$\Rightarrow \sup_{j\in\mathbb{N}} |(S_j^m) - (a_j)| = \|(S_m) - (a)\| \le \varepsilon/2 < \varepsilon$

$\Rightarrow a \in \overline{C_{00}} \Rightarrow \ell_p = \overline{C_{00}}$

Exercício 1.8.31 Mostre que $\{e_1, e_2, \ldots\}$ não é base algébrica (ou de Hamel) de ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$.

Exercício 1.8.32 Prove se verdadeiro ou dê um contraexemplo se falso: Se K é um subconjunto fechado de um espaço normado, então o subespaço $[K]$ gerado por K também é fechado.

Exercício 1.8.33 Sejam E um espaço vetorial normado de dimensão finita e M um subespaço próprio de E. Mostre que existe $y_0 \in E$ com $\|y_0\| = 1$ e $\|y_0 - x\| \geq 1$ para todo $x \in M$.

Recordemos el Lema de Riez:

Sea M un subespacio cerrado propio de un espacio normado E y sea θ un número real tal que $0 < \theta < 1$. $\Rightarrow \exists y \in E - M$ tal que $\|y\| = 1 \wedge \|y - x\| \geq \theta : \forall x \in M$

Como E es de dimensión finita y M es un subespacio propio $\Rightarrow M$ es cerrado en E

Sea $n \in \mathbb{N}$ / $\theta_n = 1 - \frac{1}{n+1} \Rightarrow \exists y_n \in E - M$ tal que $\|y_n\| = 1 \wedge \|y_n - x\| \geq \theta_n \; \forall x \in M$

Como E es de dim finita $\wedge$ normado $\Rightarrow$ La bola centrada en 0 de radio 1 es compacta $(B_1(0))$

Y como $(y_n) \subseteq B \Rightarrow \exists (y_{n_k}) \subseteq (y_n)$ / $y_{n_k} \to y \wedge y_0 \in B$

Sea $\varepsilon > 0$: $1 \leq \|y_0\| < \varepsilon + \|y_{n_k}\| = \varepsilon + 1 \Rightarrow 1 \leq \|y_0\| \leq 1 \Rightarrow \|y_0\| = 1 \wedge y_0 \in E$

Sea $x \in M \Rightarrow \|y_n - x\| \geq \theta_n : \forall n \in \mathbb{N}$

En particular $\|y_{n_k} - x\| \geq \theta_{n_k} = 1 - \frac{1}{n_k + 1} : \forall k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow \lim_{k \to \infty} \|y_{n_k} - x\| = \|\lim_{k \to \infty} y_{n_k} - x\| \geq \lim_{k \to \infty} 1 - \frac{1}{n_k + 1} = 1$$

$\Rightarrow \|y_0 - x\| \geq 1$

$\Rightarrow$ Como x fue arbitrario en $M \Rightarrow \|y_0 - x\| \geq 1 : \forall x \in M$

Exercício 1.8.34 (Limitação do Lema de Riesz) Sejam $E = \{f \in C[0,1] : f(0) = 0\}$ e $F = \left\{f \in E : \int_0^1 f(t)dt = 0\right\}$.

(a) Prove que E é subespaço fechado de $C[0,1]$.

(b) Prove que F é subespaço fechado de E.

(c) Mostre que não existe $g \in E$ tal que $\|g\| = 1$ e $\|g - f\| \geq 1$ para toda $f \in F$.

Exercício 1.8.35* (O cubo de Hilbert) Chame de *cubo de Hilbert* o subconjunto de ℓ_2 formado pelas sequências $(a_j)_{j=1}^{\infty}$ tais que $|a_j| \leq \frac{1}{j}$ para todo $j \in \mathbb{N}$. Prove que o cubo de Hilbert é compacto em ℓ_2.

Exercício 1.8.36 Mostre que são equivalentes para um espaço de Banach E:
(a) E é separável.
(b) A bola unitária fechada $B_E = \{x \in E : \|x\| \le 1\}$ é separável.
(c) A esfera unitária $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ é separável.

(a) ⇒ (b): $\exists M \subseteq E$ enumerable / $\overline{\langle M \rangle} = E$

Luego como $B \cap \langle M \rangle \subseteq B \Rightarrow \overline{B \cap \langle M \rangle} \subseteq \overline{B} = B$ ← cerrado

$\Rightarrow \overline{B} \cap \overline{\langle M \rangle} \subseteq \overline{B \cap \langle M \rangle} \subseteq B \Rightarrow B \cap E \subseteq \overline{B \cap \langle M \rangle} \subseteq B$

$\Rightarrow B = \overline{B \cap \langle M \rangle}$

Y como: $B \cap \langle M \rangle \subseteq \langle M \rangle$

además $\langle M \rangle$ es enumerable

$\Rightarrow B \cap \langle M \rangle$ es enumerable

(b) ⇒ (c): $\exists M \subseteq B$ enumerable / $\overline{\langle M \rangle} = B$

Basta tomar: $S_E \cap \langle M \rangle$.

(c) ⇒ (a): $\exists M \subseteq S_E$ enumerable / $\overline{M} = S_E$

Definimos: $D = \{q \cdot m \,/\, q \in \mathbb{Q} \wedge m \in M\}$

Sea $x \in E \Rightarrow x = \|x\| \cdot \frac{x}{\|x\|}$

Como M es denso en S_E $\Rightarrow \exists (x_m) \subseteq M \,/\, x_m \to \frac{x}{\|x\|}$

Y como $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$ $\Rightarrow \exists (q_m) \subseteq \mathbb{Q} \,/\, q_m \to \|x\|$

$\Rightarrow \exists (q_m \cdot x_m) \subseteq D \,/\, q_m x_m \to \|x\| \cdot \frac{1}{\|x\|} x = x$

⇑

$x \in \overline{D} \Rightarrow E = \overline{D}$

Y como D es enumerable

⇓

E es separable

Exercício 1.8.37 Prove que $L_\infty[a,b]$ não é separável.

Considere el conjunto $\{\chi_A : A \subseteq [a,b] \text{ y es lebesgue-medible}\}$

Es claro que ese conjunto esta contenido en $L_\infty[a,b]$ $\qquad \chi_A = \begin{cases} 1 : x \in A \\ 0 : x \notin A \end{cases}$

Además esta contenido en $B_2[0]$

Si $L_\infty[a,b]$ es separable $\Rightarrow B_1(0)$ Tambien lo es.

Ahora, suponga que $B(\chi_A, 1/2) \cap B(\chi_B, 1/2) \neq \emptyset$ donde $A, B \subseteq [a,b]$ ℓ-m.

$\Rightarrow \exists f \in L_\infty[a,b] \,/\, \|f - \chi_A\|_\infty < 1/2 \wedge \|f - \chi_B\|_\infty < 1/2$

Exercício 1.8.38 Sejam E um espaço de Banach separável e F um subespaço fechado de E. Prove que E/F é separável.

Exercício 1.8.39* (Recíproca da desigualdade de Hölder) Sejam (X, Σ, μ) um espaço de medida σ-finita e $p, q \geq 1$ tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Chame de S o conjunto de todas as funções simples mensuráveis f que se anulam fora de um conjunto de medida finita, isto é, existe um conjunto $A \in \Sigma$ tal que $\mu(A) < \infty$ e $f(x) = 0$ para todo $x \in A^c$. Seja $g \colon X \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função mensurável tal que:

(i) $fg \in L_1(X, \Sigma, \mu)$ para toda $f \in S$,

(ii) $\sup\left\{\left|\int_X fg\right| : f \in S \ e \ \|f\|_p = 1\right\} < \infty$.

Prove que $g \in L_q(X, \Sigma, \mu)$ e $\|g\|_q = \sup\left\{\left|\int_X fg\right| : f \in S \ e \ \|f\|_p = 1\right\}$.

(2) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ unif. cont. sobre $\mathbb{R}$. i.e:

$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 /$ si $|x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

Como $\delta > 0 \Rightarrow \exists N \in \mathbb{N} / \frac{1}{N} < \delta$

$\Rightarrow \forall n \geq N$ se cumple: $\frac{1}{n} < \delta$

Tomemos: $y = x + \frac{1}{n} \Rightarrow f(y) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f_n(x)$

Recopilemos:

Sea $\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} / n \geq N \wedge x \in X$

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| = |f(y) - f(x)| < \varepsilon$ $\Rightarrow (f_n)$ conv. unif. a f

(4) $$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} \quad / \; x \in \mathbb{R}$$, probar: $f'(x) = 2x f(x)$

Fijando $x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $$f'(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(2i)\, x^{2i-1}}{i!} = 2x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i\, x^{2i-2}}{i!}$$

$$= 2x \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x^{2(i-1)}}{(i-1)!} = 2x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{k!} = 2x f(x)$$

Sea $i - 1 = k$

$- i = 1 \Rightarrow k = 0$

③ Hip: $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$. P.P.: $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}$

Teorema: $(X, \mathcal{A}, \mu)$ e.m. y $(f_n) \subseteq \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(X, \mu)$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu < +\infty \Rightarrow \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X f_n \, d\mu$ ⌋

Tomemos $X = [0,1]$, $\mathcal{A}$ = Borelianos, μ = med. de Lebesgue $= \lambda$

Definimos: $f_n = c_n x^n \Rightarrow \int_X |f_n| d\mu = \int_{[0,1]} |f_n| d\lambda = \int_0^1 |c_n| |x|^n dx = |c_n| \int_0^1 |x|^n dx$

$$= |c_n| \int_0^1 x^n dx$$

$$= \frac{|c_n|}{n+1}$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \int_X |f_n| d\mu$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|}{n+1} \leq \sum_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$$

$$\Rightarrow \int_X \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \right) d\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \int_X c_n x^n d\mu$$

$$\rightarrow \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1}$$