Análisis Funcional
Unidad IV
Los Teoremas Básicos del Análisis Funcional

Renato Benazic

June 23, 2023

1 Espacios Métricos **2**
1.1 Definición y Ejemplos 2
1.2 Espacios de sucesiones 4
1.3 Bolas, esferas y conjuntos acotados 7
1.4 Distancia entre dos conjuntos 9
1.5 Topología de espacios métricos 10
1.6 Espacios Métricos conexos 15
1.7 Sucesiones en Espacios Métricos 18
1.8 Funciones continuas en Espacios Métricos. Isometrías 23
1.9 Completamiento de un Espacio Métrico 29

1 Espacios Normados **2**
1.1 Espacios Normados y Espacios de Banach 2
1.2 Propiedades de los espacios normados 5
1.3 Completamiento de un Espacio Normado 6
1.4 Espacios normados de dimensión finita 8
1.5 Operadores Lineales en espacios normados 12
1.6 Funcionales lineales. Espacios duales 19

1 Espacios con Producto Interno **2**
1.1 Espacios con Producto Interno y Espacios de Hilbert 2
1.2 Otras propiedades de los espacios con producto interno 5
1.3 Complementos ortogonales y sumas directas 7
1.4 Conjuntos y Sucesiones Ortonormales 11
1.5 Series relacionadas a Sucesiones y Conjuntos Ortonormales 13
1.6 Sucesiones y Conjuntos Ortonormales Totales 15
1.7 Representación de funcionales en espacios de Hilbert 16
1.8 El operador adjunto de Hilbert 18
1.9 Operadores autoadjuntos, unitarios y normales 21

1 Los Teoremas Básicos del Análisis Funcional **2**
1.1 El Lema de Zorn 2
1.2 El Teorema de Hahn-Banach 3
1.3 El Teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos y espacios normados . . 5
1.4 Adjunto de un operador acotado en espacios normados 8
1.5 El Teorema de la categoría de Baire 11
1.6 El Teorema de Banach-Steinhauss 12
1.7 Los Teoremas de la aplicación abierta y de la aplicación inversa 14
1.8 El Teorema del gráfico cerrado 17

Capítulo 1

Espacios Métricos

1.1 Definición y Ejemplos

Definición 1.1.1 Sea X un conjunto no vacío. Decimos que $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una *métrica sobre* X si y sólo si se cumplen las siguientes condiciones:

M1) $d(x, y) \geq 0$, $\forall\, x, y \in X$.

M2) $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.

M3) $d(x, y) = d(y, x)$, $\forall\, x, y \in X$. (Simetría)

M4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, x)$, $\forall\, x, y, z \in X$. (Desigualdad Triangular).

El par (X, d) es una *espacio métrico* si y sólo si X es un conjunto no vacío y $d : X \times X \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre X.

Observaciones:

1. Es necesario enfatizar que un espacio métrico es un par (X, d). Un mismo conjunto X puede ser dotado de dos métricas d, d' las cuales pueden dar origen a dos espacios métricos con propiedades muy distintas.

2. De M4) se desprende que

$$d(x_1, x_n) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, x_3) + \cdots + d(x_{n-1}, x_n), \quad \forall\, x_1, \ldots, x_n \in X$$

3. Sea (X, d) un espacio métrico e $Y \subseteq X$ un subconjunto no vacío. Si denotamos $\tilde{d} = d\big|_{Y \times Y}$ entonces es claro que $(Y, \tilde{d})$ es un espacio métrico. En este caso decimos que $(Y, \tilde{d})$ es un *subespacio métrico* de (X, d) y $\tilde{d}$ es llamada *métrica inducida*.

4. Una función $d : X \times X \to \mathbb{R}$ que satisface M1), M3), M4) y

M2') $d(x,x) = 0$.

(es decir, puede ser $d(x,y) = 0$ con $x \neq y$), es llamada *pseudométrica*.

Ejemplo 1.1.1 Dados $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

Es claro que $d : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre $\mathbb{R}^m$ y por tanto $(\mathbb{R}^m, d)$ es un espacio métrico. Esta métrica recibe el nombre de *métrica euclidiana sobre* $\mathbb{R}^m$.

Ejemplo 1.1.2 Dados $z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n$, definimos

$$d(z,w) = \sqrt{|z_1 - w_1|^2 + \cdots + |z_n - w_n|^2}$$

donde $| \ |$ denota a la norma de un número complejo. Es claro que $d : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^m \to \mathbb{R}$ es una métrica sobre $\mathbb{C}^m$ y por tanto $(\mathbb{C}^m, d)$ es un espacio métrico. Esta métrica también recibe el nombre de *métrica euclidiana sobre* $\mathbb{C}^m$.

Ejemplo 1.1.3 Sea X el conjunto de todas las sucesiones acotadas $s = (s_j)$ de números reales (o complejos). Es decir existe un $M = M(s) > 0$ tal que $|s_j| \leq M$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$. Dados $s = (s_j), t = (t_j) \in X$ es claro que $|s_j - t_j|$ es una sucesión acotada de números reales, luego existe $\sup\{|s_j - t_j|;\ j \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$.

Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$d(s,t) = \sup\{|s_j - t_j|;\ j \in \mathbb{N}\}.$$

No es difícil probar que d es una métrica sobre X y por tanto (X, d) es un espacio métrico, el cual se acostumbra a denotar $\ell^\infty(\mathbb{K})$ (donde $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$).

Ejemplo 1.1.4 Sea $K \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto compacto. Denotamos por $C(K)$ al conjunto de todas las funciones $f : K \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$) tal que f es continua sobre K. Dados $f, g \in C(K)$ es claro que el conjunto $\{|f(x) - g(x)|;\ x \in K\}$ es acotado, luego $\sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in K\} \in \mathbb{R}$.

Definimos $d : C(K) \times C(K) \to \mathbb{R}$ como

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in K\}.$$

No es difícil probar que d es una métrica sobre $C(K)$ y por tanto $(C(K), d)$ es un espacio métrico.

Ejemplo 1.1.5 Sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto no vacío. Denotamos por $B(X)$ al conjunto de todas las funciones acotadas $f : B \to \mathbb{R}$ (ó $\mathbb{C}$). Dados $f, g \in B(X)$ es claro que el conjunto $\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\}$ es acotado, luego $\sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\} \in \mathbb{R}$.

Definimos $d : B(X) \times B(X) \to \mathbb{R}$ como

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)|;\ x \in X\}.$$

No es difícil probar que d es una métrica sobre $B(X)$ y por tanto $(B(X), d)$ es un espacio métrico (llamado *espacio de las funciones acotadas*). Observe que cuando $X = \mathbb{N}$ entonces $B(\mathbb{N}) = \ell^\infty(\mathbb{R})$.

Ejemplo 1.1.6 Sea X un conjunto no vacío. Definimos $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

No es difícil probar que d es una métrica sobre X (llamada *métrica discreta*) y por tanto (X, d) es un espacio métrico (llamado *espacio métrico discreto*).

1.2 Espacios de sucesiones

Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de todas las sucesiones $s = (s_j)$ de números reales o complejos. Dado $s = (s_j), t = (t_j) \in \mathcal{S}$, afirmo que $\sum_{j,1} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|}$ es una serie convergente. En efecto como

$$\frac{1}{2^j} \frac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|} \leq \frac{1}{2^j}$$

y $\sum_{j,1} \frac{1}{2^j}$ es una serie convergente, la afirmación se sigue del criterio de comparación.

Sea $d : \mathcal{S} \times \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|}$$

Es claro que se cumplen las propiedades M1), M2) y M3) de la Definición 1.1.1. Para probar la desigualdad triangular, consideramos la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{x}{1+x}$. Es claro que f es diferenciable en $\mathbb{R}$, además $f'(x) = \frac{1}{(1+x)^2} > 0$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Se sigue que f es monótona creciente, luego dados $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple $f(|a+b|) \leq f(|a| + |b|)$, es decir

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} = \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$$

Dados $s = (s_j), t = (t_j), r = (r_j) \in \mathcal{S}$, se sigue que

$$\frac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|} \leq \frac{|s_j - r_j|}{1 + |s_j - r_j|} + \frac{|r_j - t_j|}{1 + |r_j - t_j|}$$

se sigue que $d(s,t) \leq d(s,r) + d(r,t)$.

De esta manera $(\mathcal{S}, d)$ es un espacio métrico.

Otros espacios de sucesiones importantes son los llamados *espacios* ℓ^p (con $p \geq 1$) los cuales pasamos a estudiar.

Dado $p \geq 1$, denotemos por $\ell^p(\mathbb{K})$ o simplemente ℓ^p al conjunto de todas las sucesiones $s = (s_j)$ de números reales o complejos tales que $\sum_{j,1} |s_j|^p$ es una serie convergente.

Para definir una métrica sobre ℓ^p, necesitamos probar unas desigualdades previas.

Lema 1.2.1 Si $a, b > 0$ y $0 < t < 1$ se cumple

$$a^t b^{1-t} \leq at + b(1-t)$$

Demostración. Supongamos que $0 < a \leq b$, observe que

$$a^t b^{1-t} \leq at + b(1-t) \Leftrightarrow a^{t-1} b^{1-t} \leq t + \frac{b}{a}(1-t) \Leftrightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^{1-t} \leq t + \frac{b}{a}(1-t)$$

con $\frac{b}{a} \geq 1$. Lo anterior nos lleva a considerar la función $\phi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$\phi(x) = t + x(1-t) - x^{1-t}$$

donde $t \in]0, 1[$ fijo.

Como $\phi'(x) = 1 - t - (1-t)x^{-t} = (1-t)(1 - x^{-t})$ y $x \geq 1$ tenemos que $\phi'(x) \geq 0$ luego ϕ es creciente, por tanto si $1 \leq x$ entonces $0 = \phi(1) \leq \phi(x) = t + x(1-t) - x^{1-t}$ y por tanto

$$x^{1-t} \leq t + x(1-t), \quad \forall\, x \geq 1$$

Tomando $x = \frac{b}{a} \geq 1$, el lema se sigue, bajo la hipótesis que $0 < a \leq b$ y $0 < t < 1$.

En el caso que $0 < b \leq a$, como $1 - t \in]0, 1[$, usando la parte anterior (para $1 - t$ en vez de t) tenemos

$$b^{1-t} a^{1-(1-t)} \leq b(1-t) + a(1-(1-t))$$

es decir

$$a^t b^{1-t} \leq at + b(1-t)$$

y el Lema está probado $\square$

Definición 1.2.1 Sea $1 < p < +\infty$. Decimos que $q \in \mathbb{R}$ es el *conjugado de* p si y sólo si

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Observación: Si q es conjugado de p entonces $q = \frac{p}{p-1}$. Se sigue que $1 < q < \infty$. Los números p y q son llamados *conjugados*.

Lema 1.2.2 Si p y q son conjugados entonces

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \quad \forall\, a, b > 0$$

Demostración. Como $1 < p < +\infty$ se tiene que $0 < \frac{1}{p} < 1$. Aplicando el Lema 1.2.1 para $t = \frac{1}{p}$, $a = a^p$ y $b = b^q$ se tiene

$$(a^p)^{\frac{1}{p}} (b^q)^{1-\frac{1}{p}} \leq a^p \frac{1}{p} + b^q \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

De aquí la desigualdad se sigue. $\square$

Teorema 1.2.1 (Desigualdad de Hölder para sucesiones) Si p, q conjugados, $s = (s_j) \in \ell^p$ y $t = (t_j) \in \ell^q$, entonces $(s_j t_j) \in \ell^1$ y

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_j t_j| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^q\right]^{\frac{1}{q}}$$

Demostración. Sean $\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^p$ y $\beta = \sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^q$. Si $\alpha = 0$ ó $\beta = 0$, la desigualdad es trivial. Trabajemos con el caso en que $\alpha \neq 0$ y $\beta \neq 0$. Por el Lema 1.2.1 para $a = \dfrac{|s_j|}{\alpha^{1/p}}$ y $b = \dfrac{|t_j|}{\beta^{1/q}}$, se cumple

$$\frac{|s_j|}{\alpha^{1/p}} \cdot \frac{|t_j|}{\beta^{1/q}} \leq \frac{1}{p} \frac{|s_j|^p}{\alpha} + \frac{1}{q} \frac{|t_j|^q}{\beta}$$

luego

$$\frac{1}{\alpha^{1/p}\beta^{1/q}} \sum_{j=1}^{\infty} |s_j t_j| \leq \frac{1}{p\alpha} \sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^p + \frac{1}{q\beta} \sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^q = \frac{1}{p\alpha}\alpha + \frac{1}{q\beta}\beta = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Esto prueba el Teorema. □

Un caso particular de este resultado, ocurre cuando $p = q = 2$.

Corolario. (Desigualdad de Cauchy-Schwartz para sucesiones) Si $s = (s_j), t = (t_j) \in \ell^2$ entonces

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_j t_j| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^2\right]^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

Teorema 1.2.2 (Desigualdad de Minkowski) Sean $s = (s_j), t = (t_j) \in \ell^p$, con $1 \leq p < +\infty$. Entonces $s + t = (s_j + t_j) \in \ell^p$ y se cumple

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |s_j + t_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} |t_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Demostración. Para $p = 1$, el teorema se deduce de la desigualdad $|s_j + t_j| \leq |s_j| + |t_j|$. Consideremos el caso $1 < p < +\infty$. Para $k \in \mathbb{N}$ fijo, se tiene

$$|s_j + t_j|^p = |s_j + t_j| \cdot |s_j + t_j|^{p-1} \leq |s_j| \cdots |s_j + t_j|^{p-1} + |t_j||s_j + t_j|^{p-1}, \quad \forall\, 1 \leq j \leq k$$

luego

$$\sum_{j=1}^{k} |s_j + t_j|^p \quad \leq \quad \sum_{j=1}^{k} |s_j| \cdots |s_j + t_j|^{p-1} + \sum_{j=1}^{k} |t_j||s_j + t_j|^{p-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \left(\sum_{j=1}^{k}|s_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{k}|s_j+t_j|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}+\left(\sum_{j=1}^{k}|t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{j=1}^{k}|s_j+t_j|^{q(p-1)}\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left[\left(\sum_{j=1}^{k}|s_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{k}|t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\sum_{j=1}^{k}|s_j+t_j|^p\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

luego

$$
\left(\sum_{j=1}^{k}|s_j+t_j|^p\right)^{1-\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{j=1}^{k}|s_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{k}|t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|s_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \forall\, k\in\mathbb{N}
$$

De aquí, el Teorema se deduce. □

A continuación dotaremos a ℓ^p de una métrica. Sea $s=(s_j), t=(t_j)\in\ell^p$ $(1\leq p<+\infty)$. De la desigualdad de Minkowski $s-t=(s_j-t_j)\in\ell^p$ y por tanto $\sum_{j=1}^{\infty}|s_j-t_j|^p\in\mathbb{R}$. Definimos $d_p:\ell^p\times\ell^p\to\mathbb{R}$ como

$$
d_p(s,t)=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|s_j-t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}
$$

Se ve que d_p satisface las condiciones M1), M2) y M3) de la definición de métrica. Para probar la desigualdad triangular, sea $s=(s_j), t=(t_j), r=(r_j)\in\ell^p$. Como $|s_j-t_j|\leq|s_j-r_j|+|r_j-t_j|$, se tiene que $|s_j-t_j|^p\leq(|s_j-r_j|+|r_j-t_j|)^p$, luego

$$
\begin{aligned}
d_p(s,t) &= \left(\sum_{j=1}^{\infty}|s_j-t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{j=1}^{\infty}(|s_j-r_j|+|r_j-t_j|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\sum_{j=1}^{\infty}|s_j-r_j|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{j=1}^{\infty}|r_j-t_j|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d_p(s,r)+d_p(r,t)
\end{aligned}
$$

Se sigue que (ℓ^p,d_p) es un espacio métrico.

1.3 Bolas, esferas y conjuntos acotados

Definición 1.3.1 Sea (X,d) un espacio métrico, $x_0\in X$ y $r>0$.

1. La *Bola Abierta de centro* x_0 *y radio* r, es el conjunto definido por:

$$
B_r(x_0)=\{x\in X;\ d(x,x_0)<r\}
$$

2. La *Bola Cerrada de centro* x_0 *y radio* r, es el conjunto definido por:

$$B_r[x_0] = \{x \in X;\ d(x, x_0) \leq\ r\}$$

3. La *Esfera de centro* x_0 *y radio* r, es el conjunto definido por:

$$S_r[x_0] = \{x \in X; d(x, x_0) = r\}$$

Observación: $B_r[a] = B_r(a) \uplus S_r[a]$, en donde el símbolo $\uplus$ denota unión disjunta.

Ejemplo 1.3.1 Si (X, d) es el espacio métrico discreto y $x_0 \in X$ entonces se cumple:

1. $B_r(x_0) = B_r[x_0] = X$, si $r > 1$.
2. $B_r(x_0) = B_r[x_0] = \{x_0\}$, si $r < 1$.
3. $B_1(x_0) = \{x_0\}$ y $B_1[x_0] = X$.
4. $S_r[x_0] = \emptyset$, si $r \neq 1$ y $S_1[x_0] = X - \{x_0\}$.

Ejemplo 1.3.2 En el espacio de funciones acotadas $B([a, b])$ con la métrica del supremo, se tiene que

$$g \in B_r(f) \iff |g(x) - f(x)| < r, \quad \forall\ x \in [a, b]$$

Lo cual puede ser interpretado como una franja de amplitud $2r$ alrededor del gráfico de f.

Definición 1.3.2 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$ no vacío.

1. Decimos que A es *acotado* si y sólo si existe $C > 0$ tal que $d(x, y) \leq c$, $\forall\ x, y \in A$.
2. Sea A un conjunto acotado, el *diámetro de* A se define como

$$\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(x, y);\ x, y \in A\}$$

Observaciones:

1. No está definido el diámetro del conjunto vacío.
2. Si $\emptyset \neq A \subseteq B$ son conjuntos acotados entonces $\operatorname{diam}(A) \leq diam(B)$.
3. Se cumple $\operatorname{diam} B_r(x_0) \leq 2r$, $\operatorname{diam} B_r[x_0] \leq 2r$ y $\operatorname{diam} S_r[x_0] \leq 2r$.
4. Puede ocurrir que $\operatorname{diam} B_r[x_0] < 2r$. En efecto, considere $\mathbb{Z}$ con la métrica euclidiana inducida de $\mathbb{R}$ y sea $r > 0$ no entero, entonces $B_r[n_0] = [n_0 - r, n_0 + r] \cap \mathbb{Z}$ tiene diámetro menor que $2r$.

1.4 Distancia entre dos conjuntos

Definición 1.4.1 Sea (X, d) un espacio métrico, sean $A, B \subseteq X$ subconjuntos no vacíos y $x \in X$.

1. La *distancia entre los conjuntos A y B*, denotada por $\operatorname{dist}(A, B)$ es definida como:
$$\operatorname{dist}(A, B) = \inf\{d(a, b);\ a \in A, b \in B\}$$
2. La *distancia entre el punto x y el conjunto B*, denotada por $\operatorname{dist}(x; B)$ es definida como:
$$\operatorname{dist}(x, B) = \operatorname{dist}(\{x\}, B) = \inf\{d(x, b);\ b \in B\}$$

Observación: La parte 2) de la definición anterior, es un caso particular de la parte 1).

Proposición 1.4.1 Sea (X, d) un espacio métrico, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\operatorname{dist}(A, B) = \operatorname{dist}(B, A)$, para todo par de conjuntos no vacíos $A, B \subseteq X$.
2. Si $A \cap B \neq \emptyset$, entonces $\operatorname{dist}(A, B) = 0$.
3. Si $A_1 \subseteq A_2$ y $B_1 \subseteq B_2$, entonces $\operatorname{dist}(A_2, B_2) \leq \operatorname{dist}(A_1, B_1)$.

Prueba. Es una simple consecuencia de la definición de distancia entre conjuntos. Probaremos 3), las otras dos son dejadas como ejercicio para el lector: Si $a \in A_1 \subseteq A_2$ y $b \in B_1 \subseteq B_2$ entonces $d(a, b) \geq \operatorname{dist}(A_2, B_2)$, luego
$$\operatorname{dist}(A_1, B_1) = \inf\{d(a, b);\ a \in A_1, b \in B_1\} \geq d(A_2, B_2)$$
□

Corolario. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Si $x \in B$, entonces $\operatorname{dist}(x, B) = 0$.
2. Si $B_1 \subseteq B_2$, entonces $\operatorname{dist}(x, B_2) \leq \operatorname{dist}(x, B_1)$.

Proposición 1.4.2 Sea (X, d) un espacio métrico, para cualquier $B \subseteq X$ no vacío y $\forall\, x, y \in X$ se cumple
$$|\operatorname{dist}(x, B) - \operatorname{dist}(y, B)| \leq d(x, y)$$

Prueba. $\operatorname{dist}(x, B) \leq d(x, b) \leq d(x, y) + d(y, b)$, luego $\operatorname{dist}(x; B) - d(x, y) \leq d(y, b)$, para todo $b \in B$, por lo tanto $\operatorname{dist}(x, B) - d(x, y) \leq \operatorname{dist}(y, B)$, es decir
$$\operatorname{dist}(x, B) - \operatorname{dist}(y, B) \leq d(x, y) \tag{1.1}$$
Análogamente $\operatorname{dist}(y, B) \leq d(y, b) \leq d(y, x) + d(x, b)$, luego $\operatorname{dist}(y, B) - d(x, y) \leq d(x, b)$, para todo $b \in B$, por lo tanto $\operatorname{dist}(y, B) - d(x, y) \leq \operatorname{dist}(x, B)$, es decir
$$-d(x, y) \leq \operatorname{dist}(x, B) - \operatorname{dist}(y, B) \tag{1.2}$$
De (1.1) y (1.2), se deduce la proposición. □

1.5 Topología de espacios métricos

Definición 1.5.1 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$.

1. Decimos que $a \in X$ es un *punto interior* de A si y sólo si existe $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A$.
2. El conjunto de todos los puntos interiores de A es llamado *interior* de A y será denotado por $\text{int}\,(A)$.
3. Decimos que $Y \subseteq X$ es un *entorno* o *vecindad* de a si y sólo si $a \in \text{int}\,(Y)$.
4. Decimos que A es un conjunto *abierto* si y sólo si $A = \text{int}\,(A)$.

Observaciones:

1. Para cualquier $A \subseteq X$ por definición se cumple $\text{int}\,(A) \subseteq A$. En consecuencia, para probar que un conjunto es abierto, es suficiente probar que $A \subseteq \text{int}\,(A)$.
2. En todo espacio métrico, las bolas abiertas son conjuntos abiertos.

Proposición 1.5.1 Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq B \Rightarrow \text{int}\,(A) \subseteq \text{int}\,(B)$.
2. $\text{int}\big(\text{int}\,(A)\big) = \text{int}\,(A)$.

Prueba. 1) Sea $a \in \text{int}\,(A)$, por definición existe un $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A$. Como por hipótesis $A \subseteq B$, concluimos que $B_r(a) \subseteq B$, es decir $a \in \text{int}\,(B)$ luego $\text{int}\,(A) \subseteq \text{int}\,(B)$.

2) Sabemos que $\text{int}\,(A) \subseteq \text{int}\big(\text{int}\,(A)\big)$. Sea $a \in \text{int}\,(A)$, por definición existe un $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq A$. Por la parte 1) tenemos que existe un $r > 0$ tal que $B_r(a) = \text{int}\big(B_r(a)\big) \subseteq \text{int}\,(A)$, luego $a \in \text{int}\big(\text{int}\,(A)\big)$. Es decir $\text{int}\,(\text{int}\,(A)) \subseteq \text{int}\,(A)$. $\square$

Proposición 1.5.2 Sea (X, d) un espacio métrico. Se cumple

1. X y $\emptyset$ son abiertos.
2. Si A_1 y A_2 son conjuntos abiertos, entonces $A_1 \bigcap A_2$ es un conjunto abierto.
3. Si $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección arbitraria de conjuntos abiertos, entonces $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es un conjunto abierto.

Demostración. 1) Supongamos que $a \in \text{int}\,(\emptyset)$ (Hipótesis Auxiliar), por definición, debe existir un $r > 0$ tal que $B_r(a) \subseteq \emptyset$ lo cual es una contradicción, luego $\text{int}\,(\emptyset) = \emptyset$ y, por lo tanto, $\emptyset$ es abierto. Es evidente que X es abierto.

2) Si $x \in A_1 \bigcap A_2$ entonces $x \in A_1$ y $x \in A_2$, luego existen $\epsilon_1 > 0$ y $\epsilon_2 > 0$ tales que $B_{\epsilon_1}(x) \subseteq A_1$ y $B_{\epsilon_2}(x) \subset A_2$. Tomando $\epsilon = \min\{\epsilon_1, \epsilon_2\}$, se tiene que $B_\epsilon(x) \subseteq A_1 \bigcap A_2$, es decir $x \in \text{int}\big(A_1 \bigcap A_2\big)$, luego $A_1 \bigcap A_2$ es abierto.

3) Si $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ entonces existe un $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x \in A_{\lambda_0}$ y desde que A_{λ_0} es abierto, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subseteq A_{\lambda_0} \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$, es decir $x \in \operatorname{int}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)$ y, por lo tanto, $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ es abierto. $\square$

Corolario. *Si $A_1, A_2, \ldots, A_m \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos abiertos, entonces $\bigcap_{i=1}^{m} A_i$ es un conjunto abierto.*

Observaciones:

1. Si denotamos por $\mathcal{U}(X)$ a la familia de los conjuntos abiertos del espacio métrico X, el teorema anterior nos dice que esta familia contiene a $\emptyset$, X y es cerrada con respecto a intersecciones finitas y a uniones arbitrarias.
2. Podemos definir la función $\operatorname{int} : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{U}(X)$ (en donde $\mathcal{P}(X)$ es el conjunto potencia de X) la cual es idempotente.

Definición 1.5.2 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, la *frontera* o *borde* de A, denotada por ∂A, es el conjunto

$$\partial A = \{a \in X;\ B_\epsilon(a) \cap A \neq \emptyset \text{ y } B_\epsilon(a) \cap (X - A) \neq \emptyset, \text{ para todo } \epsilon > 0\}$$

Teorema 1.5.3 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. A es abierto si y sólo si $A \cap \partial A = \emptyset$.

Prueba. $(\Rightarrow)$ Si $a \in A$, por hipótesis, existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \subseteq A$, luego $B_\epsilon(a) \cap (X - A) = \emptyset$, es decir $a \notin \partial A$. Se sigue que $A \cap \partial A = \emptyset$.

$(\Leftarrow)$ Si $a \in A$ entonces $a \in X - \partial A$, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \cap A = \emptyset$ ó $B_\epsilon(a) \cap (X - A) = \emptyset$. Observe que la primera alternativa no se cumple, concluimos que existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(a) \cap (X - A) = \emptyset$, es decir $B_\epsilon(a) \subseteq A$, luego $a \in \operatorname{int}(A)$. $\square$

Definición 1.5.3 Sea (X, d) un espacio métrico y $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$. Decimos que un subconjunto $A \subseteq Y$ es *abierto relativo a* Y o simplemente *abierto en* Y si y sólo si existe $U \subseteq X$ abierto tal que $A = U \cap Y$.

Observación: Cuando $Y = X$, en vez de decir "A es abierto en X" decimos simplemente "A es abierto".

Proposición 1.5.4 Sea (X, d) un espacio métrico y $Y \subseteq X$, $Y \neq \emptyset$ y $A \subseteq Y$. Son equivalentes:

1. A es abierto en Y.
2. $\forall\ a \in A$, $\exists\ \delta = \delta(a) > 0$ tal que $B_\delta(a) \cap Y \subseteq A$.

Prueba. $(1 \Rightarrow 2)$ Por hipótesis, existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $A = U \cap Y$. Si $a \in A$, entonces $a \in U$ y $a \in X$. Como $a \in U$ y U es abierto, existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq U$, luego $B_\delta(a) \cap Y \subseteq U \cap Y = A$.

$(2 \Rightarrow 1)$ Considero $U = \bigcup_{a\in A} B_\delta(a)$. Claramente U es un conjunto abierto, además, por hipótesis, $B_\delta(a) \cap Y \subseteq A$, para todo $a \in A$, por tanto:

$$A \subseteq U \cap Y = \left(\bigcup_{a\in A} B_\delta(a)\right) \cap Y = \bigcup_{a\in A} (B_\delta(a) \cap Y) \subseteq A$$

luego, hemos probado que existe $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto tal que $A = U \cap Y$. $\square$

Observación: Un conjunto A que es abierto relativo con respecto a un conjunto X puede no ser abierto en $\mathbb{R}^n$. Por ejemplo, $A =]\frac{1}{2}, 1]$ es abierto en $X = [0, 1]$, pero A no es abierto en $\mathbb{R}$.

Definición 1.5.4 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$.

1. Decimos que $a \in X$ es un *punto adherente* de A si y sólo si $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$, $\forall\ r > 0$.
2. El conjunto de todos los puntos adherentes de A es llamado *clausura* o *cerradura* de A y será denotado por $\overline{A}$.
3. Decimos que A es un conjunto *cerrado* si y sólo si $A = \overline{A}$.

Proposición 1.5.5 Sea (X, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq X$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A \subseteq \overline{A}$.
2. $A \subseteq B \Rightarrow \overline{A} \subseteq \overline{B}$.

Prueba. 1) Dados $a \in A$ y $r > 0$, se tiene que $a \in B_r(a) \cap A$ y por tanto $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$. Esto prueba que $\subseteq \overline{A}$.

2) Si $a \in \overline{A}$ entonces $B_r(a) \cap A \neq \emptyset$, $\forall\ r > 0$ y como $A \subseteq B$ entonces $B_r(a) \cap B \neq \emptyset$, $\forall\ r > 0$, luego $a \in \overline{B}$, es decir $\overline{A} \subseteq \overline{B}$. $\square$

Observación: Desde que $A \subseteq \overline{A}$, para cualquier $A \subseteq X$; para probar que un conjunto es cerrado, es suficiente probar que $\overline{A} \subseteq A$.

Es importante resaltar que si un conjunto no es cerrado entonces no necesariamente debe ser abierto, existen conjuntos que no son ni cerrados ni abiertos, por ejemplo el intervalo $[0, 1[$. La relación correcta entre conjuntos abiertos y cerrados, es dada por el siguiente:

Teorema 1.5.6 Sea X un espacio métrico. $A \subseteq X$ es cerrado si y sólo si $X - A$ es abierto.

Prueba. ¡Ejercicio!

Teorema 1.5.7 Sea (X, d) un espacio métrico, se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\emptyset$ y X son conjuntos cerrados.
2. Si F_1 y F_2 son conjuntos cerrados, entonces $F_1 \cup F_2$ es un conjunto cerrado.
3. Si $\{F_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ es una colección arbitraria de conjuntos cerrados, entonces $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ es un conjunto cerrado.

Prueba. Es consecuencia de la Proposición 1.5.2 y del Teorema 1.5.7. Probemos, por ejemplo, la propiedad 2: F_1 y F_2 son conjuntos cerrados, entonces $X - F_1$ y $X - F_2$ son conjuntos abiertos, luego $(X - F_1) \cap (X - F_2) = X - (F_1 \cup F_2)$, es un conjunto abierto y, por lo tanto, $F_1 \cup F_2$ es cerrado. $\square$

Observaciones:

1. Si denotamos por $\mathcal{F}(X)$ a la familia de los conjuntos cerrados de X, el teorema anterior nos dice que esta familia contiene a $\emptyset$, X y es cerrada con respecto a intersecciones arbitrarias y a uniones finitas.

2. Podemos definir la función $cl : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{F}(X)$ como $cl(X) = \overline{X}$ la cual es idempotente.

El siguiente resultado nos proporciona una manera equivalente de definir frontera de un conjunto, usando el concepto de clausura:

Teorema 1.5.8 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, se cumple: $\partial A = \overline{A} \cap \overline{X - A}$, $\forall\ X \subseteq \mathbb{R}^n$.

Prueba. $a \in \partial A$ si y sólo si $B_\epsilon(a) \cap X \neq \emptyset$ y $B_\epsilon(a) \cap (X - A) \neq \emptyset$, para todo $\epsilon > 0$, si y sólo si $a \in \overline{A}$ y $a \in \overline{X - A}$, si y sólo si $a \in \overline{A} \cap \overline{X - A}$.

Corolario. ∂A es cerrado, $\forall\ A \subseteq X$.

Definición 1.5.5 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Decimos que A *es denso en* X si y sólo si $\overline{A} = X$.

Existen varias maneras equivalentes de definir conjunto denso en un espacio métrico.

Proposición 1.5.9 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. A es denso.

2. Si F cerrado y $A \subseteq F$ entonces $F = X$.

3. $A \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$, $\forall\ x_0 \in X$, $\forall\ r > 0$.

4. $\operatorname{int}(X - A) = \emptyset$

Demostración. (1. $\Rightarrow$ 2.) Sea F cerrado y $A \subseteq F$ entonces $X = \overline{A} \subseteq \overline{F} = F$, luego $X = F$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Por el absurdo, supongamos que existen $x_0 \in X$ y $r > 0$ tales que $A \cap B_r(x_0) = \emptyset$ (Hip. Aux.) luego $A \subseteq X - B_r(x_0)$ y como $X - B_r(x_0)$ es cerrado, por hipótesis se tiene que $X - B_r(x_0) = X$, esto implica que $B_r(x_0) = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Sea $x_0 \in X$, por hipótesis: $A \cap B_r(x_0) \neq \emptyset$, $\forall\ r > 0$, luego $x_0 \in \overline{A}$. Hemos probado que $X \subseteq \overline{A}$.

(1. $\Leftrightarrow$ 4.) A es denso si y sólo si $X = \overline{A}$ si y sólo si $X - \overline{A} = \emptyset$ si y sólo si $\operatorname{int}(X - A) = \emptyset$ $\square$

Un concepto muy relacionado con el de punto adherente es el de punto de acumulación.

Definición 1.5.6 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$.

1. Decimos que $a \in X$ es un *punto de acumulación* o *punto límite* de A si y sólo si $B_\epsilon(a) \cap \big(A - \{a\}\big)$, $\forall\ \epsilon > 0$.
2. El conjunto de todos los puntos de acumulación de A es llamado *conjunto derivado* de X y será denotado por A'.
3. Si $a \in A$ no es un punto de acumulación de A entonces decimos que a es un *punto aislado* de A.
4. Decimos que A es un *conjunto discreto* si y sólo si todos sus puntos son aislados.

La relación que existe entre el concepto de punto adherente y el de punto de acumulación, es dada por la siguiente:

Proposición 1.5.10 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, se cumple: $a \in A'$ si y sólo si $a \in \overline{A - \{a\}}$.

Prueba. $a \in A'$ si y sólo si $B_\epsilon(a) \cap \big(A - \{a\}\big)$, $\forall\ \epsilon > 0$ si y sólo si $a \in \overline{A - \{a\}}$. $\square$

Teorema 1.5.11 Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$, se cumple: $a \in A'$ si y solo si $B_r(a) \cap A$ es infinito, $\forall\ r > 0$.

Prueba. $(\Rightarrow)$ Si $a \in A'$ entonces $a \in \overline{A - \{a\}}$, luego $B_\epsilon(a) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$, $\forall\ \epsilon > 0$. Como $r > 0$, existe $a_1 \in B_r(a) \cap A$ con $a_1 \neq a$.

Denotemos $r_1 = d(a_1, a) < r$, luego $B_{r_1}(a) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$ y por tanto, existe $a_2 \in B_{r_1}(a) \cap A$ con $a_2 \neq a$. Como $d(a_2, a) < r_1 = d(a_1, a)$ se debe tener que $a_2 \neq a_1$.

Denotemos $r_2 = d(a_2, a)$, luego $B_{r_2}(a) \cap (A - \{a\}) \neq \emptyset$ y por tanto, existe $a_3 \in B_{r_2}(a) \cap A$ con $a_3 \neq a$. Como $d(a_3, a) < r_2 = d(a_2, a) < d(a_1, a)$ se debe tener que $a_3 \neq a_1$ y $a_3 \neq a_2$. Prosiguiendo por inducción, se demuestra que $B_r(a) \cap A$ tiene infinitos elementos.

$(\Leftarrow)$ ¡ Trivial ! $\square$

Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico y $A \subseteq X$. Si $A' \neq \emptyset$ entonces A es infinito.

Definición 1.5.7 Un espacio métrico (X, d) es *separable* si y sólo si existe $A \subseteq X$ denso y numerable.

Ejemplo 1.5.1 $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con la métrica euclidiana son espacios métricos separables.

Teorema 1.5.12 Si $1 \leq p < +\infty$ entonces ℓ^p es separable.

Demostración. Consideremos el conjunto

$$A = \{q = (q_j) \subseteq \mathbb{Q};\ \text{ existe un } j_0 \in \mathbb{N} \text{ con } q_j = 0, \forall\ j > j_0\}$$

Claramente $A \subseteq \ell^p$ y no es difícil probar que A es numerable. Afirmo que A es denso en ℓ^p. En efecto, sea $s = (s_j) \in \ell^p$ y $\epsilon > 0$, entonces existe un $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\displaystyle\sum_{j=j_0+1}^{\infty} |s_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2}$.

Por la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$, para cada $1 \leq j \leq j_0$, existe $q_j \in \mathbb{Q}$ tal que $|s_j - q_j| < \dfrac{\epsilon}{\sqrt[p]{2j_0}}$.

Defino $q = (q_1, q_2, \ldots, q_{j_0}, \ldots) \in A$. Se cumple

$$d(s,q)^p = \sum_{j=1}^{\infty} |s_j - q_j|^p = \sum_{j=1}^{j_0} |s_j - q_j|^p + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |s_j - q_j|^p < \sum_{j=1}^{j_0} \frac{\epsilon^p}{2j_0} + \sum_{j=j_0+1}^{\infty} |s_j|^p < \frac{\epsilon^p}{2} + \frac{\epsilon^p}{2} = \epsilon^p$$

Así $q \in B_\epsilon(s) \cap A$ y por tanto $B_\epsilon(s) \cap A \neq \emptyset$, $\forall\ s \in \ell^p$ y $\forall\ \epsilon > 0$. □

Teorema 1.5.13 ℓ^∞ no es separable.

Demostración. Considero

$$A = \{s = (s_j) \subseteq \mathbb{R};\ s_j \in \{0, 1\}, \forall\ j \in \mathbb{N}\}$$

Es claro que $A \subseteq \ell^\infty$ y no es numerable. Además, si $s = (s_j), s' = (s'_j) \in A$ entonces se cumple: $s \neq s'$ si y sólo si $d(s,s') = \sup\limits_{j\in\mathbb{N}}\{|s_j - s'_j|\} = 1$.

Supongamos que ℓ^∞ es separable (Hip. Aux.) entonces existe $D \subseteq \ell^\infty$ conjunto denso numerable. luego para $s \in A$, $B_{\frac{1}{3}}(s) \cap D \neq \emptyset$, sea $t_s \in B_{\frac{1}{3}}(s) \cap D$. De esta manera, hemos definido la función $\phi : A \to D$ tal que $\phi(s) = t_s$.

Afirmo que ϕ es inyectiva. En efecto si $\phi(s) = \phi(s')$ entonces $t_s = t_{s'}$, luego

$$d(s,s') \leq d(s,t_s) + d(t_s,t_{s'}) + d(t_{s'},s') < \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} < 1$$

luego $s = s'$, lo cual prueba la afirmación. Pero la afirmación implica que A es numerable, lo cual es una contradicción. □

1.6 Espacios Métricos conexos

Definición 1.6.1 Sea (X,d) un espacio métrico, decimos que los subconjuntos $A, B \subseteq X$ forman una *escisión* de X si y sólo si satisfacen las siguientes condiciones:

1. $X = A \cup B$.
2. $A \cap B = \emptyset$.
3. A y B son abiertos.

Observación: Sea (X,d) un espacio métrico, tomemos $A = X$ y $B = \emptyset$, claramente A y B forman una escisión de X, llamada *escisión trivial*, luego todo espacio métrico admite una escisión trivial. Aquellos espacios métricos que sólo admiten escisiones triviales, son de suma importancia en topología.

Definición 1.6.2 Sea (X,d) un espacio métrico

1. Decimos que X es *conexo* si y solo si X sólo admite escisiones triviales.
2. Un espacio métrico que no es conexo, es llamado *disconexo*.
3. Sea $Y \subseteq X$. Decimos que Y es conexo si y sólo si $\big(Y, d\big|_Y\big)$ es conexo.

Teorema 1.6.1 Sea (X, d) un espacio métrico, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es conexo.
2. Los únicos abiertos y cerrados de X son X y $\emptyset$
3. Si $A \subseteq X$ tiene frontera vacía entonces $A = X$ ó $A = \emptyset$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Supongamos que existe $A \subseteq X$, con $\emptyset \neq A \neq X$ tal que A es abierto y cerrado (Hip. Aux.) Se sigue que A y $X - A$ es una escisión no trivial de X, lo cual es una contradicción.

$(2 \Rightarrow 1)$ Sea A, B escisión de X, se tiene que A es abierto, además $B = X - A$ es abierto, luego A es cerrado, por hipótesis $A = \emptyset$ (y por tanto $B = X$) ó $A = X$ (y por tanto $B = \emptyset$). En cualquier caso A y B es la escisión trivial. Esto prueba que X es conexo.

$(2 \Rightarrow 3)$ Sea $A \subseteq X$ tal que $\partial A = \emptyset$. Se sigue que $A \cap \partial A = \emptyset$ y por tanto A es abierto, por otro lado $\partial A = \emptyset \subseteq A$, luego A es cerrado. Por hipótesis $A = X$ ó $A = \emptyset$.

$(3 \Rightarrow 2)$ Si $A = X$, no hay nada que probar. Sea $A \subset X$ abierto y cerrado, entonces $A \cap \partial A = \emptyset$ (lo cual es equivalente a $\partial A \subseteq X - A$) y $\partial A \subseteq A$. Se sigue que $A = \emptyset$. □

Lema 1.6.1 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $A \subseteq B \subseteq X$. Si $C \subseteq B$ es abierto en B entonces $C \cap A$ es abierto en A.

Prueba. Como $C \subseteq B$ es abierto en B, entonces existe $U \subseteq X$ abierto tal que $C = U \cap B$, luego $C \cap A = \big(U \cap B\big) \cap A = U \cap A$. Se sigue que $C \cap A$ es abierto en A. □

Teorema 1.6.2 Sea (X, d) un espacio métrico y sea $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una colección arbitraria de subconjuntos conexos de X tales que $\bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \neq \emptyset$. Entonces $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ es un conjunto conexo.

Prueba. Denotemos $C = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$ y tomemos A y B escisión de C, luego $C = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y A, B son abiertos en C.

Sea $a \in \bigcap\limits_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda$, entonces $a \in C = A \cup B$. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que $a \in A$.

Para $\lambda \in \Lambda$ (fijo, arbitrario), tenemos:

- $C_\lambda = C_\lambda \cap C = C_\lambda \cap (A \cup B) = (C_\lambda \cap A) \cup (C_\lambda \cap B)$.
- $(C_\lambda \cap A) \cap (C_\lambda \cap B) = C_\lambda \cap (A \cap B) = C_\lambda \cap \emptyset = \emptyset$.

- $C_\lambda \subseteq C$ y desde que A y B son abiertos en X, por el lema anterior, $C_\lambda \cap A$ y $C_\lambda \cap B$ son abiertos en C_λ.

Se sigue que $C_\lambda \cap A$ y $C_\lambda \cap B$ forman una escisión de C_λ y como C_λ es conexo y $a \in C_\lambda \cap A$, se tiene que $C_\lambda \cap B = \emptyset$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Luego:

$$B = B \cap C = B \cap \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda \right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (B \cap C_\lambda) = \emptyset.$$

De esta manera, A y B forman una escisión trivial de C y, por lo tanto C es conexo. $\square$

Teorema 1.6.3 Sea (X, d) un espacio métrico y sean $M \subseteq N \subseteq \overline{M}$ en X. Si M es conexo entonces N es conexo.

Prueba. Sean A y B una escisión de N, luego $N = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$ y A, B son abiertos en N. Se cumple

- $M = M \cap N = M \cap \big(A \cup B\big) = \big(M \cap A\big) \cup \big(M \cap B\big)$.
- $\big(M \cap A\big) \cap \big(M \cap B\big) \subseteq A \cap B = \emptyset$.
- Por el Lema 1.6.1, $M \cap A$ y $M \cap B$ son abiertos en M.

Luego $M \cap A$ y $M \cap B$ forman una escisión de M y desde que M es conexo, se sigue que

$$M \cap A = \emptyset \text{ ó } M \cap B = \emptyset. \tag{1.3}$$

Vamos a probar que si $M \cap A = \emptyset$, entonces $A = \emptyset$. En efecto, supongamos que $A \neq \emptyset$ (Hip. Aux.), sea $y \in A \subseteq N \subseteq \overline{M}$, se tiene:

$$B_\epsilon(y) \cap M \neq \emptyset, \, \forall \, \epsilon > 0. \tag{1.4}$$

Por otro lado

$$\exists \, \delta > 0 \text{ tal que } B_\delta(y) \cap N \subseteq A. \tag{1.5}$$

De (1.4) y (1.5), existe un $z \in B_\delta(y) \cap M \subseteq B_\delta(y) \cap N \subseteq A$, luego $z \in M \cap A$, lo cual es una contradicción, esto prueba la afirmación. Análogamente, si $M \cap B = \emptyset$, entonces $B = \emptyset$. De esta manera (1.3) implica que $A = \emptyset$ ó $B = \emptyset$, por lo tanto A y B forman una escisión trivial de N, luego N es conexo. $\square$

Corolario. Sea (X, d) un espacio métrico. Si $A \subseteq X$ es conexo, entonces $\overline{A}$ es conexo.

Definición 1.6.3 Sea (X, d) un espacio métrico y $x \in X$. La *componente conexa* de x en X, denotada por C_x es el mayor subconjunto conexo de X que contiene a x, es decir

$$C_x \text{ es la componente conexa de } x \in X \text{ si y sólo si } \left| \begin{array}{l} a) \ C_x \text{ es conexo} \\[1em] b) \ C \subseteq X \text{ es conexo y } x \in C \text{ entonces } C \subseteq C_x \end{array} \right.$$

Observación: $x \in C_x$, para todo $x \in X$.

Proposición 1.6.4 Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x, y \in X$, entonces $C_x \cap C_y = \emptyset$ ó $C_x = C_y$.

Prueba. Si $C_x \cap C_y = \emptyset$, entonces no hay nada que probar, supongamos que $z \in C_x \cap C_y$. Desde que C_x es conexo y $z \in C_x$ entonces $C_x \subseteq C_z$. Por otro lado como C_z es conexo y $x \in C_x \subseteq C_z$ entonces $C_z \subseteq C_x$. Concluimos que $C_x = C_z$. Análogamente se prueba que $C_y = C_z$, por lo tanto $C_x = C_y$. $\square$

Observación: En el espacio métrico (X, d) definimos la siguiente relación:

$$x \equiv y \Longleftrightarrow C_x = C_y.$$

Es fácil probar que "$\equiv$" es una relación de equivalencia y $X/\equiv\, = \{C_x : x \in X\}$. De esta manera, hemos probado que todo subconjunto de $\mathbb{R}^n$ es descompuesto en sus componentes conexas.

Proposición 1.6.5 Sea (X, d) un espacio métrico. Si $x \in X$, entonces su componente conexa C_x es cerrado en X.

Prueba. Observe que $C_x \subseteq \overline{C}_x \cap X \subseteq \overline{C}_x$. Como C_x es conexo, por el Teorema 1.6.3, tenemos que $\overline{C}_x \cap X \subseteq X$ es conexo y como $x \in \overline{C}_x \cap X$, se tiene que $\overline{C}_x \cap X \subseteq C_x$. Concluimos que $C_x = \overline{C}_x \cap X$ y, por lo tanto, C_x es cerrado en X. $\square$

1.7 Sucesiones en Espacios Métricos

Definición 1.7.1 Sea (X, d) un espacio métrico.

1. Una *sucesión* en X es una función $x : \mathbb{N} \to X$ tal que a cada $n \in \mathbb{N}$ le asocia un elemento $x(n) = x_n \in X$ llamado el n-ésimo término de la sucesión.

   Denotaremos por $(x_n) \subseteq X$ a las sucesiones en X.

2. Una sucesión $(x_n) \subseteq X$ es *convergente* en (X, d) si y sólo si existe un $x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$.

   En tal caso, el elemento $x \in X$ es llamdo el *límite* de la sucesión (x_n) y escribiremos $x_n \to x$.

3. Una sucesión $(x_n) \subseteq X$ es llamada *divergente* en (X, d) si y sólo si (x_n) no es convergente.

Teorema 1.7.1 Sea (X, d) un espacio métrico, se cumple:

1. Si $(x_n) \subseteq X$ es convergente entonces (x_n) es acotada.
2. Si $(x_n) \subseteq X$ es convergente entonces su límite es único.
3. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ entonces $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$.

Demostración. ¡Ejercicio!. □

Los conceptos topológicos dados en las dos secciones anteriores, pueden ser caracterizados por sucesiones.

Teorema 1.7.2 Sea (X, d) un espacio métrico y $\emptyset \neq A \subseteq X$. Se cumple:

1. $x \in \overline{A}$ si y sólo si existe $(x_n) \subseteq A$ tal que $x_n \to x$.
2. A es cerrado si y sólo si $\forall \ (x_n) \subseteq A$ con $x_n \to x$ implica $x \in A$.

Demostración. ¡Ejercicio!. □

Definición 1.7.2 Sean (X, d) un espacio métrico, $(x_n) \subseteq X$ y $k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función estrictamente creciente. La composición $x \circ k : \mathbb{N} \to X$ que a cada número natural n le asocia $(x \circ k)(m) = x_{k_m}$ es llamada *subsucesión* de (x_n).

Notación: De ahora en adelante, $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ significará "(x_{k_n}) es una subsucesión de (x_n)".

Definición 1.7.3 Sea (X, d) un espacio métrico. Decimos que $(x_n) \subseteq X$ *es una sucesión de Cauchy* si y sólo si $\forall \ \epsilon > 0$ existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ entonces $d(x_n, x_m) < \epsilon$.

En todo espacio métrico (X, d) una sucesión convergente es de Cauchy pero el recíproco no siempre es cierto.

Ejemplo 1.7.1 En el conjunto

$$C([0,1]) = \{f : [0,1] \to \mathbb{R};\ f \text{ es continua en } [0,1]\}$$

consideramos la función $d : C([0,1]) \times C([0,1]) \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$

No es difícil verificar que $(C([0,1]), d)$ es un espacio métrico. Afirmo que no es completo. En efecto, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ como

$$f_n(t) = \begin{cases} -2nt + 2, & 0 \leq t \leq \dfrac{1}{n} \\ 0, & \dfrac{1}{n} < t \leq 1 \end{cases}$$

Es claro que $(f_n) \subseteq C([0,1])$. Para probar que esta sucesión es de Cauchy, para $m > n$ tenemos

$$\begin{aligned} d(f_m, f_n) &= \int_0^1 |f_m(t) - f_n(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{m}} |(-2mt + 2) - (-2nt + 2)|dt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} |-2nt + 2|dt + \int_{\frac{1}{n}}^1 0dt \\ &= 2\int_0^{\frac{1}{m}} (m - n)tdt + \int_{\frac{1}{m}}^{\frac{1}{n}} (2 - 2nt)dt = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Como $\left(\dfrac{1}{n}\right) \subseteq \mathbb{R}$ es Cauchy, se sigue inmediatamente que $(f_n) \subseteq C([a,b])$ es Cauchy.

Afirmo que $f_n \to f$ donde $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ se define como

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leq 1 \end{cases}$$

En efecto:

$$d(f_n, f) = \int_0^1 |f_n(t) - f(t)|dt = \int_0^{\frac{1}{n}} (2 - 2nt)dt = \frac{1}{n}$$

luego $\lim\limits_{n\to\infty} d(f_n, f) = 0$ lo cual prueba la afirmación.

Pero como $f \notin C([0,1])$ concluimos que (f_n) no es convergente.

Aquellos espacios métricos en los que toda sucesión de Cauchy es convergente, reciben un nombre especial.

Definición 1.7.4 Un espacio métrico (X,d) es llamado *completo* si y sólo si toda sucesión de Cauchy es convergente.

Teorema 1.7.3 Sea (X,d) un espacio métrico completo y $\emptyset \neq M \subseteq X$, se cumple:

$$(M,d) \text{ es completo si y sólo si } M \text{ es cerrado.}$$

Demostración. $(\Rightarrow)$ Sea $x \in \overline{M}$ entonces existe $(x_n) \subseteq X$ tal que $x_n \to x$, luego (x_n) es convergente y por tanto Cauchy. Como M es completo se tiene que $x \in M$ y por tanto $\overline{M} \subseteq M$.

$(\Leftarrow)$ Sea $(x_n) \subseteq M \subseteq X$ sucesión de Cauchy. Como X es completo, existe $x \in X$ tal que $x_n \to x$, luego $x \in \overline{M} = M$. Por tanto M es completo. $\square$

Damos a continuación, algunos ejemplos de espacios métricos completos.

Ejemplo 1.7.2 $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{C}^n$ con la métrica euclidiana, son espacios métricos completos.

Ejemplo 1.7.3 (ℓ^∞, d) es un espacio métrico completo. En efecto, recordemos que $s = (s_j) \in \ell^\infty \Leftrightarrow$ existe $M > 0$ tal que $|s_j| \leq M$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$ y $d : \ell^\infty \times \ell^\infty \to \mathbb{R}$ se define como

$$d(s,t) = \sup\{|s_j - t_j|;\ j \in \mathbb{N}\}.$$

Sea $(s_n) \subseteq \ell^\infty$ sucesión de Cauchy, donde $s_n = (s_{nj})$. Luego dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ entonces $d(s_n, s_m) < \epsilon$.

Para $j \in \mathbb{N}$ y $n, m \geq n_0$ tenemos

$$|s_{nj} - s_{mj}| \leq \sup\{|s_{nj} - s_{mj}|;\ j \in \mathbb{N}\} = d(s_n, s_m) < \epsilon$$

De esta manera $(s_{nj}) \subseteq \mathbb{C}$ es una sucesión de Cauchy, por tanto existe $s_j \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_{nj} = s_j$. Defino la sucesión $s = (s_j)$. Se cumplen las siguientes propiedades

1) $s \in \ell^\infty$: Como $(s_n) \subseteq \ell^\infty$ es una sucesión de Cauchy, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ entonces

$$|s_{nj} - s_{mj}| \leq d(s_n, s_m) < 1$$

luego

$$|s_{n_0 j} - s_j| = \lim_{m\to\infty} |s_{n_0 j} - s_{mj}| \leq 1$$

Además, como $s_{n_0} \in \ell^\infty$ se tiene que $|s_{N n_0 j}| < C$, $\forall\ j \in \mathbb{N}$, luego

$$|s_j| \leq |s_{n_0 j} - s_j| + |s_{n_0 j}| < C + 1 \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$: Sea $\epsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ entonces

$$|s_{nj} - s_{mj}| \leq d(s_n, s_m) < \frac{\epsilon}{2}$$

luego

$$|s_{nj} - s_j| = \lim_{m\to\infty} |s_{nj} - s_{mj}| \leq \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

esto implica que

$$d(s_n, s) = \sup\{|s_{nj} - s_j|;\ j \in \mathbb{N}\} \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon, \quad \forall\ n \geq n_0$$

Hemos demostrado que (ℓ^∞, d) es completo.

Ejemplo 1.7.4 Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de todas las sucesiones convergentes. Claramente $\mathcal{C} \subseteq \ell^\infty$. Dotamos a $\mathcal{C}$ de la métrica inducida de ℓ^∞. Afirmo que $(\mathcal{C}, d)$ es un espacio métrico completo. En efecto, en virtud del Teorema 1.7.3 es suficiente mostrar que $\mathcal{C}$ es cerrado. Para ello, tomemos $s = (s_j) \in \mathcal{C}$, luego existe $(s_n) \subseteq \mathcal{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$. Denotando $s_n = (s_{nj})$, para $\epsilon > 0$ dado, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq n_0$ entonces $d(s_n, s) < \frac{\epsilon}{3}$.

Por otro lado, como (s_{n_0}) es Cauchy, existe $K \in \mathbb{N}$ tal que si $j, k \geq K$ entonces $|s_{n_0 j} - s_{n_0 k}| < \frac{\epsilon}{3}$. Luego

$$|s_j - s_k| \leq |s_j - s_{n_0 j}| + |s_{n_0 j} - s_{n_0 k}| + |s_{n_0 k} - s_k| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

siempre que $j, k \geq K$. Esto prueba que $s = (s_j)$ es Cauchy y por tanto $s \in \mathcal{C}$.

Ejemplo 1.7.5 (ℓ^p, d) es un espacio métrico completo. En efecto, recordemos que $s = (s_j) \in \ell^p \Leftrightarrow \sum\limits_{j,1} |s_j|^p$ es convergente y $d : \ell^p \times \ell^p \to \mathbb{R}$ se define como

$$d(s,t) = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |s_j - t_j|^p\right]^{\frac{1}{p}}$$

Sea $(s_n) \subseteq \ell^p$ sucesión de Cauchy, donde $s_n = (s_{nj})$. Luego dado $\epsilon > 0$, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ entonces $d(s_n, s_m) < \epsilon$, luego para $j \in \mathbb{N}$ (fijo) tenemos

$$|s_{nj} - s_{mj}| \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |s_j - t_j|^p\right]^{\frac{1}{p}} = d(s_m, s_n) < \epsilon$$

siempre que $m, n \geq n_0$. De esta manera $(s_{nj}) \subseteq \mathbb{C}$ es una sucesión de Cauchy, por tanto existe $s_j \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} s_{nj} = s_j$. Defino la sucesión $s = (s_j)$. Se cumplen las siguientes propiedades

1) $s \in \ell^p$: Dado $\epsilon > 0$, como $(s_n) \subseteq \ell^p$ es una sucesión de Cauchy, se tiene que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ entonces $d(s_n, s_m) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Para $n, m \geq n_0$ y $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\sum_{j=1}^{k} |s_{nj} - s_{mj}|^p \leq \sum_{j=1}^{\infty} |s_{nj} - s_{mj}|^p = d(s_n, s_m)^p < \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

luego

$$\sum_{j=1}^{k} |s_{nj} - s_j|^p = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{k} |s_{nj} - s_{mj}|^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

siempre que $n \geq n_0$. De esta manera $\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{k} |s_{nj} - s_j|^p\right) \subseteq \mathbb{R}$ es creciente y acotada superiormente, luego convergente, más aún

$$\sum_{j=1}^{\infty} |s_{nj} - s_j|^p \leq \left(\frac{\epsilon}{2}\right)^p$$

Así, $s_n - s \in \ell^p$ y esto implica que $s \in \ell^p$.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} d(s_n, s) = 0$: Se deduce del hecho que $d(s_n, s) \leq \dfrac{\epsilon}{2} < \epsilon$, $\forall\, n \geq n_0$.

Ejemplo 1.7.6 $(C(K), d)$ es un espacio métrico completo, donde $K \subseteq \mathbb{R}^m$ es compacto. En efecto, recordemos que $d : C(K) \times C(K) \to \mathbb{R}$ se define como

$$d(f, g) = \max\{|f(x) - g(x)|;\, x \in K\}$$

Sea $(f_n) \subseteq C(K)$ una sucesión de Cauchy, luego para $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq n_0$ implica que $d(f_n, f_m) < \epsilon$, es decir

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \epsilon \quad \forall\, x \in K$$

Esta es la noción de convergencia uniforme de funciones que se estudia en el análisis real, luego existe $f \in C(K)$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall\, x \in K$$

Luego $d(f_n, f) < \epsilon$.

Ejemplo 1.7.7 Sea $\mathcal{P}([a,b])$ el conjunto de todas las funciones polinomiales definidas en $[a,b]$ y con valores en $\mathbb{K}$. Es claro que $\mathcal{P}([a,b]) \subseteq C([a,b])$. Dotamos a $\mathcal{P}([a,b])$ de la métrica inducida por $C(K)$. Afirmo que $(\mathcal{P}([a,b]), d)$. En efecto, sea

$$p_n(t) = 1 + t + \frac{1}{2}t^2 + \cdots + \frac{1}{n}t^n, \quad t \in [a,b]$$

Claramente $(p_n) \subseteq \mathcal{P}([a,b])$. Del análisis real, sabemos que $p_n \to \exp$ unif. en $[a,b]$, es decir

$$\lim_{n\to\infty} d(p_n, \exp) = 0,$$

pero $\exp \notin \mathcal{P}([a,b])$.

1.8 Funciones continuas en Espacios Métricos. Isometrías

Definición 1.8.1 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Una función $T : X \to Y$ es llamada *continua en* $x_0 \in X$ si y sólo si para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, x_0) < \delta$ entonces $d_Y(T(x), T(x_0)) < \epsilon$.

T es llamada *continua en* X si y sólo si es continua en todo punto de X.

Observaciones:

1. Usando el concepto de bola, la continuidad de T en x_0 se expresa como:
$$\forall\, \epsilon > 0,\, \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } T(B_\delta(x_0)) \subseteq B_\epsilon(T(x_0)).$$
2. T es discontinua en a si y sólo si $\exists\, \epsilon_0 > 0$ tal que $\forall\, \delta > 0$, $\exists\, x_\delta \in X$ tal que $d_X(x_\delta, x_0) < \delta$ y $d_Y(T(x_\delta), T(x_0)) \geq \epsilon_0$.
3. Si x_0 es punto aislado de X entonces T es continua x_0.
4. Si X es un espacio métrico discreto entonces toda función $T : X \to Y$ es continua.
5. Si $T : X \to Y$ es continua en X entonces la restricción $T\big|_M : M \to Y$ es continua en M, para todo subconjunto $M \subseteq X$.

Teorema 1.8.1 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $T : X \to Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es continua en $x_0 \in X$.
2. Para toda sucesión $(x_n) \subseteq X$ con $x_n \to x$ en X se tiene que $T(x_n) \to T(x)$ en Y.

Demostración. ¡Ejercicio!. $\square$

Teorema 1.8.2 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $T : X \to Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es continua en X.
2. Si V es un conjunto abierto en Y, entonces $T^{-1}(V)$ es un conjunto abierto en X.

Prueba. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea V un conjunto abierto en Y, si $a \in T^{-1}(V)$ entonces $T(a) \in V$, luego existe un $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(T(a)) \subseteq V$. Por otro lado, desde que T es continua en a, existe un $\delta > 0$ tal que si $d_X(x, a) < \delta$, entonces $d_Y(T(x), T(a)) < \epsilon$, luego:

$$x \in B_\delta(a) \Longrightarrow T(x) \in B_\epsilon(T(a)) \subseteq V \Longrightarrow x \in T^{-1}(V).$$

Hemos probado que $\forall\, a \in T^{-1}(V)$, $\exists\, \delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq T^{-1}(V)$, es decir, $T^{-1}(V)$ es abierto en X.

$(2 \Rightarrow 1)$ Tomemos $a \in X$ (fijo, arbitrario). Dado $\epsilon > 0$, sabemos que $B_\epsilon(T(a))$ es abierto en Y luego, por hipótesis, $T^{-1}(B_\epsilon(T(a)))$ es abierto en X. Como $a \in T^{-1}(B_\epsilon(T(a)))$, existe un $\delta > 0$ tal que $B_\delta(a) \subseteq T^{-1}(B_\epsilon(T(a)))$, luego:

$$d_X(x, a) < \delta \Longrightarrow x \in B_\delta(a) \Longrightarrow x \in T^{-1}\left[B_\epsilon(T(a))\right] \Longrightarrow T(x) \in B_\epsilon(T(a)) \Longrightarrow d_Y(T(x), T(a)) < \epsilon$$

luego T es continua en a, $\forall\, a \in X$. □

Teorema 1.8.3 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $T : X \to Y$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. T es continua en X.
2. Si F es un conjunto cerrado en Y, entonces $T^{-1}(F)$ es un conjunto cerrado en X.

Demostración. ¡Ejercicio!. □

Teorema 1.8.4 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Si X es conexo y $T : X \to Y$ es continua, entonces $T(X)$ es un conjunto conexo.

Demostración. ¡Ejercicio!. □

Definición 1.8.2 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y sea $T : X \to Y$ una función.

1. T es llamada *Lipschitz en* X si y sólo si existe $C > 0$ tal que $d_Y(T(x), T(y)) \leq C d_X(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.
2. T es llamada *localmente Lipschitz en* X si y solo si para todo $x_0 \in X$ existe una bola abierta $B = B_r(x_0)$ tal que la restricción $T\Big|_B$ es Lipschitz en B.

Existe una relación entre los conceptos de función continua y función Lipschitz:

Proposición 1.8.5 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y sea $T : X \to Y$ una función. Si T es Lipschitz en X, entonces T es continua en X.

Demostración. Por hipótesis, existe $C > 0$ tal que $d_Y(T(x), T(y)) \leq C d_X(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$. Sea $x_0 \in X$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta = \dfrac{\epsilon}{C} > 0$ tal que si$d_X(x, x_0) < \delta$, entonces $d_Y(T(x), T(x_0)) \leq C d_X(x, x_0) < C\delta = \epsilon$. Por lo tanto T es continua en x_0, $\forall\, x_0 \in X$. $\square$

Observaciones:

1. Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos, si denotamos

$$C(X; Y) = \{T : X \to Y;\, T \text{ es continua en } X\}$$

$$\mathrm{Lip}\,(X; Y) = \{T : X \to Y;\, T \text{ es Lipschitz en } X\},$$

   la Proposición anterior nos dice que $\mathrm{Lip}\,(X; Y) \subseteq C(X; Y)$. Un ejercicio interesante para el lector es probar que el contenido es estricto, es decir, existen funciones continuas que no son Lipschitz.

2. Sea $T \in \mathrm{Lip}\,(X; Y)$, de la definición de función Lipschitz se deduce fácilmente que el conjunto

$$\left\{ \frac{d_Y(T(x), T(y))}{d_X(x, y)};\, x, y \in X,\, x \neq y \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

   es acotado superiormente. El supremo de éste conjunto es llamado *constante de Lipschitz de T* y se denota por $Lip(f)$, es decir:

$$Lip(T) = \left\{ \frac{d_Y(T(x), T(y))}{d_X(x, y)};\, x, y \in X,\, x \neq y \right\}.$$

   Se sigue que $d_Y(T(x), T(y)) \leq Lip(T) d_X(x, y)$, $\forall\, x, y \in X$.

3. Decimos que $T \in \mathrm{Lip}\,(X; Y)$ es una *contracción* si y sólo si $Lip(T) < 1$.

Definición 1.8.3 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Decimos que $T : X \to Y$ es un *homeomorfismo* entre X e Y si y sólo si, se cumplen las tres condiciones siguientes:

1. T es biyectiva.
2. T es continua en X.
3. $T^{-1} : Y \to X$ es continua en Y.

En caso afirmativo decimos que X e Y son espacios métricos *homeomorfos*.

Observaciones:

1. Una biyección puede ser continua sin que su inversa lo sea. En efecto, consideremos la función

$$\begin{array}{rccl} f: & [0,2\pi[& \longrightarrow & S^1 \\ & t & \longmapsto & f(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t) \end{array}$$

   es claro que f es biyectiva y continua en $[0,2\pi[$. Supongamos que $f^{-1}: S^1 \to [0,2\pi[$ sea continua en S^1 (Hipótesis Auxiliar) en particular f sería continua en $(1,0)$. Consideremos las sucesiones $(t_k) \subseteq [0,2\pi[$ y $(z_k) \subseteq S^1$ dadas por $t_k = \pi - 1/k$ y $z_k = f(t_k)$. Se cumple:

$$\lim_{k\to\infty} z_k = \lim_{k\to\infty} f(t_k) = \lim_{k\to\infty} (\cos(2\pi - 1/k), \operatorname{sen}(2\pi - 1/k)) = (1,0),$$

   por la continuidad de f^{-1} tenemos que $\lim\limits_{k\to\infty} f^{-1}(z_k) = f^{-1}(1,0)$, es decir $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = 0$ luego $2\pi = \lim\limits_{k\to\infty} (2\pi - 1/k) = 0$, lo cual es una contradicción.

2. A diferencia de lo que ocurre en los espacios euclidianos, en un espacio métrico arbitrario, puede ocurrir que dos bolas no sean homeomorfas.

Teorema 1.8.6 Sean X, Y, Z tres espacios métricos y sean $T: X \to Y$, $S: Y \to Z$ homeomorfismos. Entonces $S \circ T: X \to Z$ es un homeomorfismo.

Demostración. ¡Ejercicio!. $\square$

Teorema 1.8.7 Sean X, Y dos espacios métricos y $T: X \to Y$ un homeomorfismo entre X e Y. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $U \subseteq X$ es abierto en X si y sólo si $T(U)$ es abierto en Y.
2. $F \subseteq X$ es cerrado en X si y sólo si $T(F)$ es cerrado en Y.
3. $C \subseteq X$ es conexo si y sólo si $T(C)$ es conexo.

Demostración. Vamos a demostrar una de ellas, las demás tienen demostraciones análogas.

1. $(\Rightarrow)$ Si $U \subseteq X$ es abierto en X entonces $(T^{-1})^{-1}(U) = T(U)$ es abierto en Y.
   $(\Leftarrow)$ Si $T(U)$ es abierto en Y entonces $U = T^{-1}(T(U)) = U$ es abierto en X. $\square$

Observe que el Teorema anterior nos dice que los homeomorfismos preservan las propiedades de que un conjunto sea abierto, cerrado o conexo. En cuanto al número de componentes conexas de un conjunto, los homeomorfismos también la preservan, más específicamente, tenemos los siguientes resultados:

Teorema 1.8.8 Sean X, Y dos espacios métricos y sea $T: X \to Y$ un homeomorfismo entre X e Y. Si C_x es la componente conexa de x en X entonces $T(C_x)$ es la componente conexa de $y = T(x)$ en Y.

Demostración: Si $x \in C_x$ entonces $y = T(x) \in T(C_x)$ y $T(C_x)$ es un conjunto conexo, luego

$$T(C_x) \subseteq C_y \tag{1.6}$$

Por otro lado, si $y \in C_y$ y C_y es conexo entonces $x = T^{-1}(y) \in T^{-1}(C_y)$ y $T^{-1}(C_y)$ es un conjunto conexo, luego $T^{-1}(C_y) \subseteq C_x$, por lo tanto $T\left(T^{-1}(C_y)\right) \subseteq T(C_x)$, es decir

$$C_y \subseteq T[C_x] \tag{1.7}$$

De (1.6) y (1.7), tenemos $T(C_x) = C_y$. □

Corolario. Si X e Y son espacios métricos homeomorfos entonces X e Y tienen la misma cantidad de componentes conexas.

Ejemplo: Sean $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, y = x^2\}$ e $Y = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\, x^2 = y^2\}$. Con la métrica usual de $\mathbb{R}^2$, ¿son X e Y homeomorfos?

Solución: Geométricamente, X es una parábola con vértice el origen de coordenadas y eje el eje Y, mientras que Y es la unión de dos rectas que se cruzan en el origen. Suponiendo que X e Y son homeomorfos, debe existir $T : X \to Y$ homeomorfismo el cual, sin pérdida de generalidad, podemos suponer que lleve el origen en el origen. De ésta manera, $T : X - \{(0, 0)\} \to Y - \{(0, 0)\}$ también es un homeomorfismo. Observe que $X - \{(0, 0)\}$ tiene 2 componentes conexas mientras que $Y - \{(0, 0)\}$ tiene 4 componentes conexas, lo que contradice el Corolario anterior. Concluimos que X e Y no son homeomorfos.

Definición 1.8.4 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos.

1. Una función $T : X \to Y$ es llamada *isometría* si y sólo T es sobreyectiva y
$$d_Y(T(x_1), T(x_2)) = d_X(x_1, x_2), \quad \forall\, x_1, x_2 \in X.$$
2. Los espacios métricos (X, d_X) e (Y, d_Y) son *isométricos* si y sólo si existe una isometría $T : X \to Y$.

Observaciones:

1. Toda isometría es inyectiva.
2. Toda isometría $T : X \to Y$ es continua en X.
3. La compuesta de dos isometrías es una isometría.
4. La inversa de una isometría es una isometría.
5. Toda isometría es un homeomorfismo pero existen homeomorfismos que no son isometrías.
6. La relación de isometría entre espacios métricos es una relación de equivalencia.
7. Las isometrías que no son sobreyectivas, son llamadas *inmersiones isométricas*

El siguiente teorema nos dice que para que dos espacios espacios métricos sean isométricos, es suficiente que exista una isometría entre subconjuntos densos.

Teorema 1.8.9 Sean (X,d) e $(\widetilde{X},\widetilde{d})$ dos espacios métricos y M, $\widetilde{M}$ subconjuntos densos de X y $\widetilde{X}$ respectivamente.

Si (M,d) es isométrico a $(\widetilde{M},\widetilde{d})$ entonces (X,d) es isométrico a $(\widetilde{X},\widetilde{d})$.

Demostración. Por hipótesis, existe $T : M \to \widetilde{M}$ isometría sobreyectiva.

Sea $x \in X$, por la densidad de M en X, existe $(x_n) \subseteq M$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. Como $(T(x_n)) \subseteq \widetilde{M}$, $\widetilde{d}(T(x_n),T(x_m)) = d(x_m,x_n)$, $\forall\ m,n \in \mathbb{N}$ y $(x_n) \subseteq M$ es Cauchy, también lo es $(T(x_n))$, luego existe $\widetilde{x} \in \overline{\widetilde{M}} = \widetilde{X}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{d}(T(x_n),\widetilde{x}) = 0$.

Observe que a cada $x \in X$ le hemos asociado un $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$. Nos gustaría definir $\widetilde{T}(x) = \widetilde{x}$, pero para ello debemos probar que $\widetilde{x}$ no depende de la sucesión elegida que tienda al x original.

Sea $(x'_n) \subseteq M$ otra sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x'_n,x) = 0$, entonces $(T(x'_n)) \subseteq \widetilde{M}$ es convergente y por tanto existe $\widetilde{x}' \in \widetilde{X}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{d}(T(x'_n),\widetilde{x}') = 0$. Afirmo que $\widetilde{x} = \widetilde{x}'$. En efecto, como

$$0 \le \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}') \le \widetilde{d}(\widetilde{x},T(x_n)) + \widetilde{d}(T(x_n),T(x'_n)) + \widetilde{d}(T(x'_n),x'), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

se tiene que

$$0 \le \widetilde{d}(\widetilde{x},\widetilde{x}') \le \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{x},T(x_n)) + \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(T(x_n),T(x'_n)) + \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(T(x'_n),x') = 0$$

Esto prueba la afirmación.

Definimos $\widetilde{T} : X \to \widetilde{X}$ como $\widetilde{T}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$, donde $(x_n) \subseteq X$ es cualquier sucesión tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. Vamos a probar que $\widetilde{T}$ es una isometría. Sean $x,y \in X$, $(x_n),(y_n) \subseteq X$ tales que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} d(y_n,y) = 0$. Como

$$0 \le |\widetilde{d}(\widetilde{T}(x),\widetilde{T}(y)) - d(x_n,y_n)| = |\widetilde{d}(\widetilde{T}(x),\widetilde{T}(y)) - \widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{y}_n)| \le \widetilde{d}(\widetilde{T}(x),T(x_n)) + \widetilde{d}(\widetilde{T}(y),T(y_n)), \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &\le |\widetilde{d}(\widetilde{T}(x),\widetilde{T}(y)) - d(x,y)| \le \lim_{n\to\infty} |\widetilde{d}(\widetilde{T}(x),\widetilde{T}(y)) - d(x_n,y_n)| \\ &\le \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{T}(x),T(x_n)) + \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{T}(y),T(y_n)) = 0 \end{aligned}$$

Por tanto $\widetilde{d}(\widetilde{T}(x),\widetilde{T}(y)) = d(x,y)$, $\forall\ x,y \in X$, es decir $\widetilde{T}$ es una isometría.

Para probar la sobreyectividad, sea $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$, como $\widetilde{M}$ es denso en $\widetilde{X}$, existe $(\widetilde{x}_n) \subseteq \widetilde{M}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{x}_n,\widetilde{x}) = 0$. Como $T : M \to \widetilde{M}$ es biyectiva, existe $x_n \in M$ tal que $T(x_n) = \widetilde{x}_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.. Puesto que T es isometría y $(\widetilde{x}_n) \subseteq \widetilde{M}$ es convergente, se concluye que $(x_n) \subseteq M$ es convergente, luego existe un $x \in X$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n,x) = 0$. Por definición

$$0 = \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{T}(x),T(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\widetilde{T}(x),\widetilde{x}_n)$$

Se sigue de la unicidad del límite que $T(x) = \widetilde{x}$. $\square$

1.9 Completamiento de un Espacio Métrico

En la presente sección, vamos a demostrar que dado cualquier espacio métrico (X, d), existe un espacio métrico completo $(\widehat{X}, \widehat{d})$ el cual contiene un subconjunto denso que es isométrico a (X, d). Además $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es único salvo isomorfismos.

1) *Construcción de* $(\widehat{X}, \widehat{d})$: Sea

$$S = \{(x_j) \subseteq X;\ (x_j) \text{ es una sucesión de Cauchy}\}$$

En S definimos la siguiente relación

$$(x_j) \sim (x'_j) \Longleftrightarrow \lim_{j\to\infty} d(x_j, x'_j) = 0$$

No es difícil probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

Usamos las notaciones

$$\widehat{(x_j)} = \{(x'_j) \in S;\ (x'_j) \sim (x_j)\} \qquad \text{y} \qquad \widehat{X} = \left\{\widehat{(x_j)};\ (x_j) \in S\right\}$$

Definimos $\widehat{d} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)}) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j)$$

Probaremos que $\widehat{d}$ está bien definido.

En primer lugar, probaremos que el límite existe. Si $(x_j), (y_j) \in S$ entonces $|d(x_j, y_j) - d(x_k, y_k)| \leq d(x_j, x_k) + d(y_j, y_k)$, $\forall\ j, k \in \mathbb{N}$. Sea $\epsilon > 0$, como $(x_j), (y_j)$ son de Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $j, k \geq k_0$ entonces $d(x_j, x_k) < \dfrac{\epsilon}{2}$ y $d(y_j, y_k) < \dfrac{\epsilon}{2}$. Luego

$$|d(x_j, y_j) - d(x_k, y_k)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

siempre que $j, k \geq k_0$. De esta manera, hemos probado que $(d(x_j, y_j)) \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy y por tanto convergente, es decir existe $L \in \mathbb{R}$ tal que $\lim\limits_{j\to\infty} d(x_j, y_j) = L$.

A continuación, probaremos que L no depende de los elementos de clase. Si $(x'_j) \in \widehat{(x_j)}$, $(y'_j) \in \widehat{(y_j)}$ entonces $\lim\limits_{j\to\infty} d(x_j, x'_j) = 0$ y $\lim\limits_{j\to\infty} d(y_j, y'_j) = 0$. Como

$$0 \leq |d(x_j, y_j) - d(x'_j, y'_j)| \leq d(x_j, x'_j) + d(y_j, y'_j), \quad \forall\ j \in \mathbb{N}$$

tomando límite tenemos

$$0 \leq \lim_{j\to\infty} |d(x_j, y_j) - d(x'_j, y'_j)| \leq \lim_{j\to\infty} d(x_j, x'_j) + \lim_{j\to\infty} d(y_j, y'_j) = 0$$

es decir

$$\lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j) = \lim_{j\to\infty} d(x'_j, y'_j)$$

De esta manera $\widehat{d}$ está bien definida. Por último, verifiquemos que $\widehat{d}$ es una métrica sobre $\widehat{X}$

d2) $\widehat{d}(\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)}) = 0$ si y sólo si $\lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j) = 0$ si y sólo si $(x_j) \sim (y_j)$ si y sólo si $\widehat{(x_j)} = \widehat{(y_j)}$.

d4) Dados $\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)}, \widehat{(z_j)} \in \widehat{X}$ tenemos

$$\widehat{d}(\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)}) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j) \leq \lim_{j\to\infty} d(x_j, z_j) + \lim_{j\to\infty} d(z_j, y_j) = \widehat{d}(\widehat{(x_j)}, \widehat{(z_j)}) + \widehat{d}(\widehat{(z_j)}, \widehat{(y_j)})$$

2) *Construcción de la isometría:* Sea $T : X \to \widehat{X}$ definida por $T(x) = \widehat{(x)}$, donde (x) es la sucesión constante. Sea $\widehat{M} = T(X)$. Afirmo que T es una isometría. En efecto, dados $x, y \in X$, tenemos

$$\widehat{d}(T(x), T(y)) = \widehat{d}(\widehat{(x)}, \widehat{(y)}) = \lim_{j\to\infty} d(x, y) = d(x, y)$$

De esta manera (X, d) es isométrico a $(\widehat{M}, \widehat{d})$.

A continuación, probaremos que $\widehat{M}$ es denso en $\widehat{X}$. Sea $\widehat{(x_j)} \in \widehat{X}$ y $\epsilon > 0$. Como (x_j) es Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $k \geq k_0$ entonces $d(x_j, x_{k_0}) < \frac{\epsilon}{2}$. Considero $\widehat{(x_{k_0})}$ (la clase a la cual pertenece la sucesión constante (x_{k_0})). Se cumple

$$\widehat{d}(\widehat{(x_{k_0})}, \widehat{(x_j)}) = \lim_{j\to\infty} d(x_{k_0}, x_j) \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

De esta manera $\widehat{(x_{k_0})} \in B_\epsilon(\widehat{(x_j)}) \cap \widehat{M}$. Hemos probado que para todo $\epsilon > 0$

$$B_\epsilon(\widehat{(x_j)}) \cap \widehat{M} \neq \emptyset$$

Por tanto $\widehat{M}$ es denso en $\widehat{X}$.

3) $(\widehat{X}, \widehat{d})$ *es un espacio métrico completo:* Sea $(\widehat{(x_{jn})})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \widehat{X}$ una sucesión de Cauchy. Fijado $n \in \mathbb{N}$, como $\widehat{M}$ es denso en $\widehat{X}$, existe $x_n \in X$ tal que $\widehat{d}(\widehat{(x_{jn})}), T(x_n)) < \frac{1}{n}$.

Afirmo que $(x_n) \subseteq X$ es de Cauchy. En efecto:

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &= \widehat{d}(T(x_n), T(x_m)) \leq \widehat{d}(T(x_n), \widehat{(x_{jn})}) + \widehat{d}(\widehat{(x_{jn})}, \widehat{(x_{jm})}) + \widehat{d}(\widehat{(x_{jm})}), T(x_m)) \\ &< \frac{1}{n} + \widehat{d}(\widehat{(x_{jn})}, \widehat{(x_{jm})}) + \frac{1}{m} \end{aligned}$$

Como $(\widehat{(x_{jn})})_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy, la afirmación se sigue.

De esta manera, tenemos que $(x_j) \in S$ y por tanto $\widehat{(x_j)} \in \widehat{X}$. Vamos a probar que $\widehat{(x_j)}$ es el límite de la sucesión $(\widehat{(x_{jn})})_{n\in\mathbb{N}}$. En primer lugar, observe que

$$\widehat{d}(\widehat{(x_{jn})}, \widehat{(x_j)}) \leq \widehat{d}(\widehat{(x_{jn})}, T(x_n)) + \widehat{d}(T(x_n), \widehat{(x_j)}) < \frac{1}{n} + \lim_{j\to\infty} d(x_n, x_j)$$

Como $(x_j) \subseteq X$ es Cauchy, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, j \geq k_0$ entonces $d(x_n, x_j) < \frac{\epsilon}{2}$, luego

$$\lim_{j\to\infty} d(x_n, x_j) \leq \frac{\epsilon}{2}$$

siempre que $n \geq k_0$. Tomando k_0 suficientemente grande, tenemos también $\dfrac{1}{n} < \dfrac{\epsilon}{2}$ siempre que $n \geq k_0$, luego

$$\widehat{d}(\widehat{(x_{jn})}, \widehat{(x_j)}) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Es decir,

$$\lim_{n\to\infty} d(\widehat{(x_{jn})}, \widehat{(x_j)}) = 0$$

De esta manera, hemos probado que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es un espacio métrico completo.

4) *Unicidad salvo isometrías:* Sea $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ un espacio métrico completo que contiene un subconjunto denso $\widetilde{M}$ tal que $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es isométrico a (X, d). Como por la construcción realizada $(\widehat{M}, \widehat{d})$ es isométrico a (X, d) entonces $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es isométrico a $(\widehat{M}, \widehat{d})$ y por el Teorema 1.8.9 $(\widetilde{X}, \widetilde{d})$ es isométrico a $(\widehat{X}, \widehat{d})$.

Capítulo 1

Espacios Normados

1.1 Espacios Normados y Espacios de Banach

Definición 1.1.1 Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Una *norma* sobre X es una función $\| \ \|$ que satisface las siguientes condiciones:

N1) $\|x\| \geq 0$, $\forall\ x \in X$.

N2) $\|x\| = 0$ si y sólo si $x = y$.

N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$.

N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall\ x, y \in X$. (Desigualdad Triangular).

El par $(X, \| \ \|)$ es una *espacio normado* si y sólo si X es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ es una norma sobre X.

El siguiente Teorema nos dice toda norma induce una métrica.

Teorema 1.1.1 Sea $(X, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado. Defínase $d : X \times X \to \mathbb{R}$ como $d(x, y) = \|x - y\|$ Entonces d es una métrica sobre X.

Demostración. ¡Ejercicio! □

La métrica d del teorema anterior es llamada *métrica inducida por la norma*.

Definición 1.1.2 Un espacio normado $(X, \| \ \|)$ es llamado *espacio de Banach* si y sólo si (X, d) es un espacio métrico completo, en donde d es la métrica inducida por la norma $\| \ \|$.

Ejemplo 1.1.1 En el $\mathbb{K}$-espacio vectorial $\mathbb{K}^n$ definimos $\| \ \| : \mathbb{K}^n \to \mathbb{R}$ como $\|x\| = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right]^{1/2}$ (donde $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}$). Es fácil ver que $\| \ \|$ es una norma sobre $\mathbb{K}^n$. Como la métrica inducida por esta norma es

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left[\sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^2\right]^{1/2}$$

concluimos que $(\mathbb{K}^n, \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.1.2 Sea $1 \leq p < +\infty$, recordemos que $\ell^p = \{x = (x_j) \subseteq \mathbb{K}; \sum_{j,1} |x_j|^p$ es convergente $\}$. Daremos a ℓ^p una estructura de espacio vectorial.

Sea $x = (x_j), y = (y_j) \in \ell^p$, entonces $\sum_{j,1} |x_j|^p < +\infty$ y $\sum_{j,1} |y_j|^p < +\infty$. Por Minkowski sabemos que $x + y = (x_j + y_j) \in \ell^p$, más aún

$$\left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j + y_j|^p\right]^{1/p} \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^p\right]^{1/p}$$

Definimos las operaciones

$$+ : \ell^p \times \ell^p \to \ell^p \qquad \cdot : \mathbb{K} \times \ell^p \to \ell^p$$

como

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \qquad c(x_n) = (cx_n)$$

Con estas operaciones ℓ^p es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

Definimos ahora $\| \ \| : \ell^p \to \mathbb{R}$ como

$$\|x\| = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right]^{1/p}$$

No es difícil probar que $\| \ \|$ es una norma sobre ℓ^p. Como la métrica inducida por esta norma es

$$d(x,y) = \|x - y\| = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |x_j - y_j|^p\right]^{1/p}$$

concluimos que $(\ell^p, \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.1.3 Recordemos que $\ell^\infty = \{x = (x_j) \subseteq \mathbb{K}; (x_j)$ es acotada $\}$. Con la suma de sucesiones y el producto de un escalar por una sucesión, ℓ^∞ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. En ℓ^∞ definimos $\| \ \| : \ell^\infty \to \mathbb{R}$ como

$$\|x\| = \sup\{|x_j|;\ j \in \mathbb{N}\}$$

No es difícil probar que $\| \ \|$ es una norma sobre ℓ^∞. Como la métrica inducida por esta norma es

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sup\{|x_j - y_j|;\ j \in \mathbb{N}\}$$

concluimos que $(\ell^\infty, \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.1.4 Sea $K \subseteq \mathbb{R}^n$ compacto. Recordemos que

$$C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}^n;\ f \text{ es continua }\}.$$

Del análisis real ℓ^∞ sabemos que $C(K)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. En $C(K)$ definimos $\| \ \| : C(K) \to \mathbb{R}$ como

$$\|f\| = \max\{|f(x)|;\ x \in K\}$$

No es difícil probar que $\| \ \|$ es una norma sobre $C(K)$. Como la métrica inducida por esta norma es

$$d(s, t) = \|f - g\| = \max\{|f(t) - g(t)|;\ x \in K\}$$

concluimos que $(C(K), \| \ \|)$ es un espacio de Banach.

Ejemplo 1.1.5 En $C([0, 1])$ definimos $\| \ \| : C([0, 1]) \to \mathbb{R}$ como

$$\|f\| = \int_0^1 |f(t)|dt$$

No es difícil probar que $\| \ \|$ es una norma sobre $C([0, 1])$. Como la métrica inducida por esta norma es

$$d(f, g) = \int_0^1 |f(t) - g(t)|dt$$

concluimos que $(C([0, 1]), \| \ \|)$ es un espacio de normado que no es Banach.

No toda métrica en un espacio vectorial es inducida por alguna norma. Una condición suficiente para ello nos la proporciona el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2 Sea $(X, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio de normado. Entonces la métrica inducida por $\| \ \|$ satisface las dos condiciones siguientes:

1. $d(x + z, y + z) = d(x, y)\ \forall\ x, y, z \in X$.
2. $d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| d(x, y),\ \forall\ x, y \in X$ y $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$

Demostración. ¡Ejercicio!. $\square$

Ejemplo 1.1.6 Sea S el conjunto de todas las sucesiones en $\mathbb{K}$. Supongamos que la métrica $d : \mathcal{S}\times\mathcal{S} \to \mathbb{R}$ definida por

$$d(s,t) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j - t_j|}{1 + |s_j - t_j|}$$

es inducida por alguna norma (Hip. Aux.) Entonces por la proposición anterior se debe tener que $d(2s, 2t) = 2d(s,t)$, pero

$$d(2s,2t) = d((2s_j),(2t_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|2s_j - 2t_j|}{1 + |2s_j - 2t_j|} = 2\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} \cdot \frac{|s_j - t_j|}{1 + 2|s_j - t_j|} \neq 2d(s,t)$$

lo cual es una contradicción.

1.2 Propiedades de los espacios normados

Un subespacio normado Y de un espacio normado $(X, \| \;\|)$ es un subespacio vectorial de X con la norma $\| \;\|$ restringida a Y.

Teorema 1.2.1 Sea $(X, \| \;\|)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Banach e Y un subespacio de X. $(Y, \| \;\|)$ es un espacio de Banach si y sólo si Y es cerrado.

Demostración. Si denotamos por d a la métrica inducida por la norma, por hipótesis tenemos que (X, d) es completo. Por el Teorema **??** se cumple: Y es cerrado si y solo si (Y, d) es completo si y solo si $(Y, \| \;\|)$ es Banach. $\square$

Definición 1.2.1 Sea $(X, \| \;\|)$ un espacio normado y sea $(x_n) \subseteq X$.

1. (x_n) es *convergente* en X si y solo si existe $x \in X$ tal que $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$.
2. Decimos que (x_n) es *sucesión de Cauchy* si y solo si dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ implica que $\|x_n - x_m\| < \epsilon$.

De manera similar al cálculo, se pueden definir series en espacios normados. En efecto, sea $(X, \| \;\|)$ un espacio normado y sea $(x_j) \subseteq X$, definimos la *sucesión de sumas parciales* (s_n) asociada a (x_j) como

$$s_1 = x_1, \quad s_2 = x_1 + x_2, \ldots, \quad s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j, \ldots$$

De esta manera hemos construído $(s_n) \subseteq X$. Si (s_n) es convergente, digamos a $s \in X$, entonces decimos que la serie $\sum_{j,1} x_j$ es *convergente* y llamamos a s la *suma de la serie* y la denotamos por $s = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$.

Si la serie $\sum\limits_{j,1} \|x_j\| \subseteq \mathbb{R}$ es convergente, entonces decimos que la serie $\sum\limits_{j,1} x_j$ es *absolutamente convergente*.

El concepto de convergencia de una serie puede ser usado para definir una “base” en el espacio normado X.

Definición 1.2.2 Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado. Decimos que la sucesión $(e_j) \subseteq X$ es una *base de Schauder* para X si y solo si para todo $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_j) \subseteq \mathbb{K}$ $(\alpha_j = \alpha_j(x))$ tal que $x = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \alpha_j e_j$.

Ejemplo 1.2.1 En el espacio de Banach $(\ell^p, \| \ \|)$, consideremos la sucesión $(e_n) \subseteq \ell^p$ definida por $e_1 = (1, 0, 0, \ldots)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots)$, $\ldots$, en general $e_n = (\delta_{jn})$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Afirmo que $(e_n) \subseteq \ell^p$ es una base de Schauder para ℓ^p. En efecto, dada cualquier $x = (x_j) \in \ell^p$, consideramos

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j = (x_1, x_2, \ldots, x_n, 0, \ldots)$$

Observe que

$$\|s_n - x\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |s_{jn} - x_j|^p = \sum_{j=1}^{n} |s_{jn} - x_j|^p + \sum_{j=n+1}^{\infty} |s_{jn} - x_j|^p = \sum_{j=n+1}^{\infty} |x_j|^p$$

Se sigue que $\lim\limits_{n \to \infty} \|s_n - x\| = 0$, lo cual prueba la afirmación.

Observaciones:

1. El concepto de base de Schauder es una generalización directa del concepto de base en espacios finito dimensionales.
2. No es difícil probar que si un espacio normado admite una base de Schauder, entonces es separable.
3. El recíproco de la observación anterior esfalso, existen espacios normados separables que no admiten base de Schauder.

1.3 Completamiento de un Espacio Normado

Sea $(X, \| \ \|)$ un espacio normado, en la presente sección vamos a demostrar que existe un espacio de Banach el cual contiene un subespacio denso que es isomorfo e isométrico a X. Más aún, este espacio de Banach es único, salvo isometrías.

Sea “d” la métrica inducida por la norma, para el espacio métrico (X, d), sabemos que existe un espacio métrico completo $(\widehat{X}, \widehat{d})$ el cual contiene un subconjunto denso que es isométrico a (X, d). Además $(\widehat{X}, \widehat{d})$ es único salvo isomorfismos.

Recordemos que $(\widehat{X}, \widehat{d})$ se construye de la manera siguiente: En el conjunto

$$S = \{(x_j) \subseteq X;\ (x_j) \text{ es una sucesión de Cauchy}\}$$

se define la relación de equivalencia

$$(x_j) \sim (x'_j) \Longleftrightarrow \lim_{j\to\infty} d(x_j, x'_j) = 0$$

Usamos las notaciones

$$\widehat{(x_j)} = \{(x'_j) \in S;\ (x'_j) \sim (x_j)\} \qquad \text{y} \qquad \widehat{X} = \left\{\widehat{(x_j)};\ (x_j) \in S\right\}$$

Definimos $\widehat{d} : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\widehat{d}(\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)}) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, y_j) = \lim_{j\to\infty} \|x_j - y_j\|$$

Se define también $T : X \to \widehat{X}$ como $T(x) = \widehat{(x)}$ y se prueba que T es una isometría entre $\widehat{M} = T(X)$.

Vamos a dotar a $\widehat{X}$ de una estructura de espacio normado, cuya norma induce la métrica $\widehat{d}$.

1) $\widehat{X}$ *es un* $\mathbb{K}$*-espacio vectorial*: En efecto, en primer lugar no es difícil demostrar que si $(x_j), (y_j) \in S$ entonces $(x_j + y_j) \in S$ (¡Ejercicio!).

Sean $\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)} \in \widehat{X}$ entonces $\widehat{(x_j + y_j)} \in \widehat{X}$, de esta manera podemos definir la suma

$$\widehat{(x_j)} + \widehat{(y_j)} = \widehat{(x_j + y_j)}$$

Es de rutina probar que esta definición no depende de los representantes de la clase.

Análogamente, si $c \in \mathbb{K}$ y $\widehat{(x_j)} \in \widehat{X}$ entonces $\widehat{(cx_j)} \in \widehat{X}$ (¡Ejercicio!) y por tanto, podemos definir

$$c\widehat{(x_j)} = \widehat{(cx_j)}$$

Esta definición no depende del representante de la clase (¡Ejercicio!).

No es difícil mostrar que, con estas operaciones, $\widehat{X}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial (¡Ejercicio!).

2) $\widehat{X}$ *es un espacio normado*: Definimos $\|\ \|_1 : \widehat{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\|\widehat{(x_j)}\|_1 = \widehat{d}\left(\widehat{(x_j)}, \widehat{(0)}\right) = \lim_{j\to\infty} d(x_j, 0) = \lim_{j\to\infty} \|x_j\|$$

No es difícil mostra que $\|\ \|_1$ es una norma sobre $\widehat{X}$ (¡Ejercicio!)

3) $\widehat{X}$ *es un espacio de Banach*: La métrica d_1 inducida por la norma $\|\ \|_1$ es:

$$d_1\left(\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)}\right) = \|\widehat{(x_j)} - \widehat{(y_j)}\|_1 = \|\widehat{(x_j - y_j)}\|_1 = \lim_{j\to\infty} \|x_j - y_j\| = \widehat{d}(\widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)})$$

Se sigue que $\widehat{X}$ es un espacio de Banach.

4) $T : X \to \widehat{M} = T(X)$ *es isomorfismo*: En efecto, como T es isometría, se sigue que T es una biyección ente X y $\widehat{M}$. Además

$$T(\alpha x + \beta y) = (\widehat{\alpha x + \beta y}) = \alpha\widehat{(x)} + \beta\widehat{(y)} = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

Se sigue que T es un isomorfismo.

5) *El espacio de Banach* $\left(\widehat{X}, \|\ \|_1\right)$ *es único salvo isomorfimo*: Queda como ejercicio para el lector.

1.4 Espacios normados de dimensión finita

Lema 1.4.1 Sea $(X, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado y $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ un subconjunto linealmente independiente en X. Entonces existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \geq C \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|, \ \forall\ \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$$

Demostración. Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tal que y $s = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$. Observe que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \geq C \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \iff \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j \right\| \geq Cs \iff \left\| \sum_{j=1}^{n} \frac{\alpha_j}{s} x_j \right\| \geq C \iff \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\| \geq C$$

donde $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{K}$ con $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$. Luego es suficiente probar el resultado en estas condiciones.

Procediendo por contradicción, supóngase que $\forall\ C > 0$ existen $\beta_1 = \beta_1(C), \ldots, \beta_n = \beta_n(C) \in \mathbb{K}$ con $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 1$ tales que $\left\| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \right\| < C$ (Hip. Aux.).

Para $m \in \mathbb{N}$ existen $\beta_{1,m}, \ldots, \beta_{n,m} \in \mathbb{K}$ con $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\beta_{j,m}| = 1$ tales que $\left\| \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,m} x_j \right\| < \dfrac{1}{m}$. Denotando $y_m = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \beta_{j,m} x_j$, se tiene que $(y_m) \subseteq X$ y $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \|y_m\| = 0$.

Por otro lado, puesto que $|\beta_{j,m}| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\beta_{j,m}| = 1$, $\forall\ m \in \mathbb{N}$, se sigue que la sucesión $(\beta_{1,m}, \ldots, \beta_{n,m}) \subseteq \mathbb{K}^n$ es acotada y por Weierstrass, existe una subsucesión $(\beta_{1,k_m}, \ldots, \beta_{n,k_m}) \subseteq (\beta_{1,m}, \ldots, \beta_{n,m})$ convergente. Sea $(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{K}^n$ tal que $\displaystyle\lim_{m\to\infty} (\beta_{1,k_m}, \ldots, \beta_{n,k_m}) = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, es decir $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \beta_{1,k_m} = \beta_1$, $\ldots$, $\displaystyle\lim_{m\to\infty} \beta_{n,k_m} = \beta_n$

Como $\sum_{j=1}^{n} |\beta_{j,k_m}| = 1$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$, se sigue que $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = \lim_{m\to\infty} \sum_{j=1}^{n} |\beta_{j,k_m}| = 1$.

Por otro lado, sea $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j x_j \in X$, como $y_{k_m} = \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,k_m} x_j$, se tiene

$$0 \leq \|y_{k_m} - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \beta_{j,k_m} x_j - \sum_{j=1}^{n} \beta_j y_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\beta_{j,k_m} - \beta_j| \, \|x_j\|, \qquad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Se sigue que $y_{k_m} \to y$ en X y por tanto $\lim_{m\to\infty} \|y_{k_m}\| = \|y\|$, pero como $(y_{k_m}) \subseteq (y_m)$, se tiene que $\lim_{m\to\infty} \|y_{k_m}\| = 0$ y por tanto $y = 0$. Por la independencia lineal, se debe tener $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$ y por tanto $\sum_{j=1}^{n} |\beta_j| = 0$ lo que contradice el resultado anterior. □

Como aplicación del teorema anterior, tenemos el siguiente resultado fundamental.

Teorema 1.4.1 Sea $(X, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado. Si $Y \subseteq X$ es un subespacio de dimensión finita entonces $(Y, \|\ \|)$ es Banach.

Demostración. Como Y es de dimensión finita, existen $e_1, \ldots, e_n \in X$ tales que $Y = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Sea $(y_m) \subseteq Y$ sucesión de Cauchy, luego existen $(\alpha_{1,m}), \ldots, (\alpha_{n,m}) \subseteq \mathbb{K}$ tales que $y_m = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,m} e_j$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. Como $\{e_1, \ldots, e_n\}$ es un conjunto L.I., por el Lema 1.4.1 se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\| \geq C \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

Afirmación: $(\alpha_{1,m}), \ldots, (\alpha_{n,m}) \subseteq \mathbb{K}$ *son sucesiones de Cauchy.* En efecto, dado $\epsilon > 0$, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $m, m' \geq m_0$ entonces $\|y_m - y_{m'}\| < C\epsilon$. Pero

$$\|y_m - y_{m'}\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,m} e_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,m'} e_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{j,m} - \alpha_{j,m'}) e_j \right\| \geq C \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{j,m} - \alpha_{j,m'}|$$

luego, si $m, m' \geq m_0$ entonces $|\alpha_{j,m} - \alpha_{j,m'}| < \epsilon$. Esto prueba la afirmación.

De esta manera, existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $\lim_{m\to\infty} \alpha_{j,m} = \alpha_j$ $(1 \leq j \leq m)$.

Defino $y = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \in Y$, se cumple

$$0 \leq \|y_m - y\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_{j,m} e_j - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} (\alpha_{j,m} - \alpha_j) e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_{j,m} - \alpha_j| \, \|e_j\|, \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

Se sigue que $y_m \to y$ y por tanto $(Y, \| \ \|)$ es Banach. $\square$

Corolario Todo subespacio finito dimensional de un espacio normado, es cerrado.

Definición 1.4.1 Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial, dos normas $\| \ \|$, $\| \ \|_0$ sobre X son *equivalentes* si y sólo si existen $C_1, C_2 > 0$ tales que

$$C_1\|x\| \leq \|x\|_0 \leq C_2\|x\|, \quad \forall\ x \in X$$

Teorema 1.4.2 Si X es un $\mathbb{K}$-espacio de dimensión finita entonces dos normas cualesquiera sobre X son equivalentes.

Demostración. Sean $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ dos normas sobre X. Como X es de dimensión finita, existen $e_1, \ldots, e_n \in X$ tales que $X = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_n\}$. Sea $x \in X$, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$. Se cumple

$$\|x\|_1 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\|_1 \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|\, \|e_j\|_1 \leq K \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

donde $K = \max\{\|e_1\|, \ldots, \|e_n\|\}$. Por otro lado, del Lema 1.4.1 se tiene que existe $C > 0$ tal que

$$\|x\|_2 = \left\| \sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j \right\|_2 \geq C \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

Se sigue que $\|x\|_2 \geq \dfrac{C}{K}\|x\|_1$, $\forall\ x \in X$.

Intercambiando las normas, se demuestra la otra desigualdad. $\square$

Para establecer otras propiedades de los espacios normados finito dimensionales, necesitamos el concepto de compacidad de un espacio métrico.

Definición 1.4.2 Un espacio métrico (X, d) es *compacto* si y sólo si para toda sucesión $(x_n) \subseteq X$, existe una subsucesión $(x_{k_n}) \subseteq (x_n)$ tal que (x_{k_n}) es convergente.

Sea $M \subseteq X$. Decimos que M es compacto si y sólo si (M, d) es compacto.

Lema 1.4.2 Sea (X, d) un espacio métrico y $M \subseteq X$. Si M es compacto entonces M es cerrado y acotado.

Demostración. Sea $x \in \overline{M}$ entonces existe $(x_n) \subseteq M$ tal que $x_n \to x$.

Como M es compacto, existe $(x_{j_n}) \subseteq (x_n)$ tal que (x_{j_n}) es convergente, luego existe $x' \in M$ tal que $x_{j_n} \to x'$. Pero como $x_n \to x$ entonces $x_{j_n} \to x$. Por unicidad del límite $x = x' \in M$. Esto prueba que M es cerrado.

Supongamos que M no es acotado (Hip. Aux.) Dado $n \in \mathbb{N}$, existen $x_n, y_n \in M$ tales que $d(x_n, y_n) \geq n$. Como $(x_n), (y_n) \subseteq M$ y M es compacto, existen $(x_{j_n}) \subseteq (x_n)$ y $(y_{j_n}) \subseteq (y_n)$ convergentes, luego existen $x, y \in M$ tales que $x_{j_n} \to x$ y $y_{j_n} \to y$. Luego

$$d(x,y) = \lim_{n\to\infty} d(x_{j_n}, y_{j_n}) \geq \lim_{n\to\infty} j_n = \infty$$

lo cual es una contradicción. De esta manera M es acotado. □

Observación: El recíproco del teorema anterior es falso. En efecto, considere el espacio métrico (ℓ^2, d) y sea $M = (e_n) \subseteq \ell^2$ donde $e_n = (\delta_{jn})$. Como $d(e_n, e_m) = \sqrt{2}$, se sigue que M es acotado. Además $M' = \emptyset$, luego M es cerrado, pero M no es compacto puesto que (e_n) no admite ninguna subsucesión convergente.

Para que el recíproco sea cierto, se necesita que el espacio sea normado y de dimensión finta.

Teorema 1.4.3 Sea $(X, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado de dimensión finita. $M \subseteq X$ es compacto si y sólo si M es cerrado y acotado.

Demostración. Sea M cerrado y acotado. Además, como X es de dimensión finita, existen $e_1, \ldots, e_m \in X$ tales que $X = \mathcal{L}\{e_1, \ldots, e_m\}$.

Sea $(x_n) \subseteq M$, entonces existe $\alpha_{jn} \in \mathbb{K}$ tales que $x_n = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jn} e_j$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Como M es acotado, existe $K > 0$ tal que $\|x\| \leq K$, $\forall\ x \in M$. Por el Lema 1.4.1 existe $C > 0$ tal que

$$K \geq \|x_n\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jn} e_j \right\| \geq C \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{jn}|$$

Se sigue que $(\alpha_{jn}) \subseteq \mathbb{K}$ es acotada, luego $(\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn}) \in \mathbb{K}^m$ es acotada, por Weierstras, existe $(\alpha_{1k_n}, \ldots, \alpha_{mk_n}) \subseteq (\alpha_{1n}, \ldots, \alpha_{mn})$ convergente, es decir, existe un vector $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{K}^m$ tal que $\lim_{n\to\infty} (\alpha_{1k_n}, \ldots, \alpha_{mk_n}) = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Sea $x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \in X$, se cumple:

$$0 \leq \|x_{k_n} - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} \alpha_{jk_n} e_j - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{m} |\alpha_{jk_n} - \alpha_j| \, \|e_j\|, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Se sigue que $x_{k_n} \to x$ en X. De esta manera $x \in \overline{M} = M$. □

Lema 1.4.3 (Riesz) Sea $(X, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado e Y, Z dos subespacios de X tales que Y es un subespacio cerrado propio de Z. Entonces para todo $\theta \in]0,1[$ existe $z = z_\theta \in Z$ tal que $\|z\| = 1$ y $\|z - y\| > \theta$, $\forall\ y \in Y$.

Demostración. Sea $v \in Z - Y$ y denotemos $d = \operatorname{dist}(v, Y)$. Como Y es cerrado, $d > 0$. Dado $\theta \in]0,1[$, se tiene que $\frac{d}{\theta} > d$, luego existe $y_0 \in Y$ tal que $\|v - y_0\| < \frac{d}{\theta}$. Denoto $z = \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} \in Z$. Claramente

$\|z\| = 1$, además, para $y \in Y$, se tiene

$$\|z - y\| = \left\| \frac{v - y_0}{\|v - y_0\|} - y \right\| = \frac{1}{\|v - y_0\|} \big\|v - (y_0 + \|v - y_0\|y)\big\| \geq \frac{d}{\|v - y_0\|} > \theta$$

lo cual prueba el resultado. □

Teorema 1.4.4 Sea $(X, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado. Si la bola unitaria cerrada $B_1[0]$ es compacta entonces X es de dimensión finita.

Demostración. Suponga que X tiene dimensión infinita (Hip. Aux.) Sea $x_1 \in X$ tal que $\|x_1\| = 1$, denotemos $Y = \mathcal{L}\{x_1\}$, se sigue que Y es un subespacio cerrado de X. Por el Lema de Riesz, existe $x_2 \in X$ tal que $\|x_2\| = 1$ y $\|x_2 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$.

Sea $Y_2 = \mathcal{L}\{x_1, x_2\}$, se sigue que Y_2 es un subespacio cerrado de X. Por el Lema de Riesz, existe $x_3 \in X$ tal que $\|x_3\| = 1$ y $\|x_3 - x_1\| > \dfrac{1}{2}$ y $\|x_3 - x_2\| > \dfrac{1}{2}$.

Como X es de dimensión infinita, podemos continuar el proceso anterior y obtener $(x_n) \subseteq X$ con $\|x_n\| = 1$ y $\|x_n - x_m\| > \dfrac{1}{2}$, $\forall\ n \neq m$. Como $(x_n) \subseteq B_1[0]$, por hipótesis, existe $(x_{j_n}) \subseteq (x_n)$ convergente, luego es Cauchy y por tanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq n_0$ implica que $\|x_{j_n} - x_{j_m}\| < \dfrac{1}{2}$, lo cual es una contradicción. □

Observación: Una condición necesaria y suficiente para que un espacio normado sea de dimensión finita es que la bola unitaria cerrada sea compacta.

Teorema 1.4.5 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos y $T : X \to Y$ continua. Si $M \subseteq X$ es compacto entonces $T(M) \subseteq Y$ es compacto.

Demostración. Sea $(y_n) \subseteq T(M)$, luego existe $(x_n) \subseteq M$ tal que $T(x_n) = y_n$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Como M es compacto, existe $(x_{j_n}) \subseteq (x_n)$ convergente en M, es decir, existe $x \in M$ tal que $x_{j_n} \to x$. Como T es continua, se tiene $y_{j_n} = T(x_{j_n}) \to T(x) \in T(M)$. Se sigue que $T(M)$ es compacto. □

Corolario. (Weierstrass) Sea (X, d) un espacio métrico y $M \subseteq X$ compacto. Si $T : M \to \mathbb{R}$ es continua entonces T alcanza su máximo y su mínimo en puntos de M.

Demostración. Como M es compacto y T es continua, se tiene que $T(M) \subseteq \mathbb{R}$ es compacto, luego existen $x_0, y_0 \in M$ tales que $T(x_0) \leq T(x) \leq T(y_0)$, $\forall\ x \in M$. □

1.5 Operadores Lineales en espacios normados

Definición 1.5.1 Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados y $T : X \to Y$

1. Decimos que T es un *operador lineal* si y sólo si

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y), \quad \forall\ x, y \in X,\ \forall\ \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

.

2. Sea T un operador lineal . Decimos que T es *acotado* si y sólo si existe $C > 0$ tal que

$$\|T(x)\|_Y \leq C \cdot \|x\|_X, \quad \forall\, x \in X.$$

Ejemplo 1.5.1 Sea $(X, \|\ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado. Definimos $I_X : X \to X$ como $I_X(x) = x$, $\forall\, x \in X$. Como $\|I_X(x)\| = \|x\|$, $\forall\, x \in X$, se sigue que I_X es lineal y acotado. I_X recibe el nombre de *operador identidad de* X.

Ejemplo 1.5.2 Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados. Definimos $\Theta : X \to Y$ como $\Theta(x) = 0$, $\forall\, x \in X$. Como $\|\Theta(x)\|_Y = \|0\|_Y = 0 \leq \|x\|_X$, $\forall\, x \in X$, se sigue que θ es lineal y acotado. Θ recibe el nombre de *operador cero*.

Ejemplo 1.5.3 Sea $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times m}$. Sea $T : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ definido por $T(x) = Ax$, es decir

$$T(x_1, \ldots, x_m) = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{m} a_{nj}x_j \right)$$

Claramente T es lineal, además

$$\|T(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \right)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{m} |x_j|^2 \right) = \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} |a_{ij}|^2 \right) \|x\|^2$$

Se sigue que T es acotado.

Ejemplo 1.5.4 Sea $\mathcal{P}([0,1])$ el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de las funciones polinomiales, definidas en el intervalo $[0,1]$ y con coeficientes en $\mathbb{C}$.

Si $P(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n \in \mathcal{P}([0,1])$, sabemos que $P'(t) = a_1 + 2a_2t + \cdots + na_nt^{n-1}$ también está en $\mathcal{P}([0,1])$, luego podemos definir el *operador de diferenciación* $D : \mathcal{P}([0,1]) \to \mathcal{P}([0,1])$ como $D(P) = P'$. Claramente D es un operador lineal.

Por otro lado, podemos considerar $\mathcal{P}([0,1])$ como un subespacio vectorial de $C([0,1])$ y, por tanto, podemos dotarlo de la norma del máximo.

Supongamos que D es acotado (Hip. Aux.) entonces se debe existir un $C > 0$ tal que $\|D(P)\| \leq C\|P\|$, $\forall\, P \in \mathcal{P}([0,1])$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > C$ y considero $P_N(t) = t^N$, se cumple

$$\|D(P_N)\| = \max\{|P_N'(t)|; t \in [0,1]\} = \max\left\{|Nt^{N-1}|; t \in [0,1]\right\} = N$$

$$\|P_N\| = \max\{|P_N(t)|; t \in [0,1]\} = \max\left\{|t^N|; t \in [0,1]\right\} = 1$$

luego

$$N = \|D(P_N)\| \leq C\|P_N\| = C < N$$

lo cual es una contradicción. Concluímos que el operador de diferenciación es no acotado.

Ejemplo 1.5.5 Sea $k : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Definimos el operador $T : C([0,1]) \to C([0,1])$ como

$$T(f)(x) = \int_0^1 k(t,x)f(t)dt, \quad \forall\ f \in C([0,1])$$

Se sigue que T es lineal. En cuanto a su acotación, dado $f \in C([0,1])$, tenemos:

$$|T(f)(x)| = \left|\int_0^1 k(t,x)f(t)dt\right| \leq \int_0^1 |k(t,x)| \cdot |f(t)|dt \leq C\|f\|, \quad \forall\ x \in [0,1]$$

en donde $C = \max\{|k(t,x)|, t, x \in [0,1]\}$. Se sigue que

$$\|T(f)\| \leq C\|f\|$$

y, por tanto, T es acotado.

Observaciones:

1. Sean X, Y dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Denotaremos por $\mathcal{L}(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales $T : X \to Y$. Con las operaciones usuales de suma de operadores y producto de un escalar por un operador se tiene que $\mathcal{L}(X,Y)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

2. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, denotaremos $\mathrm{Im}\,(T) = \{T(x);\ x \in X\}$ y $\mathrm{Nu}\,(T) = \{x \in X;\ T(x) = 0\}$

3. Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados. Denotaremos por $\mathcal{B}(X,Y)$ al conjunto de todos los operadores lineales acotados $T : X \to Y$. Con las operaciones usuales de suma de operadores y producto de un escalar por un operador se tiene que $\mathcal{B}(X,Y)$ es un subespacio, en general propio, de $\mathcal{L}(X,Y)$.

Teorema 1.5.1 Sean X, Y dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\mathrm{Im}\,(T)$ es un subespacio vectorial de Y.

2. Si $\dim X = n$ entonces $\dim \mathrm{Im}\,(T) \leq n$.

3. $\mathrm{Nu}\,(T)$ es un subespacio vectorial de X.

Demostración. 2) Suponga que $\dim \mathrm{Im}\,(T) > n$ (Hip. Aux.) entonces existen $y_1, \ldots, y_{n+1} \in \mathrm{Im}\,(T)$ linealmente independientes. Luego, existen $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X$ tales que $T(x_j) = y_j$, $\forall\ j = 1, \ldots, n+1$.

Sean $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ tales que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j = 0$, luego

$$0 = T(0) = T\left(\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j T(x_j) = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j y_j$$

Por la independencia lineal de los y_j, tenemos que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n+1} = 0$. Luego $x_1, \ldots, x_{n+1}$ son L.I., lo cual es una contradicción. $\square$

Corolario. Sean X, Y dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Si $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ son L.D. entonces $\{T(x_1), \ldots, T(x_n)\} \subseteq Y$ son L.D.

Demostración. ¡Ejercicio!

Teorema 1.5.2 Sean X, Y dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $T^{-1} : \mathrm{Im}\,(T) \to X$ existe si y sólo si $T(x) = 0$ implica que $x = 0$.
2. Si existe T^{-1} entonces es lineal.
3. Si X es de dimensión finita y existe T^{-1} entonces $\dim \mathrm{Im}\,(T) = \dim X$.

Demostración.

1. ($\Rightarrow$) Si $T(x) = 0$ entonces $x = T^{-1}(T(x)) = T^{-1}(0)$. Pero $T(0) = 0$ implica que $0 = T^{-1}(T(0)) = T^{-1}(0)$, luego $x = T^{-1}(0) = 0$.

   ($\Leftarrow$) Si $T(x) = T(y)$ entonces $T(x-y) = 0$, por hipótesis $x - y = 0$, es decir $x = y$. Por tanto T es inyectiva.

2. Sean $y_1, y_2 \in \mathrm{Im}\,(T)$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, entonces existen $x_2, x_2 \in X$ tales que $T(x_1) = y_1$, $T(x_2) = y_2$. Además
$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 = \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) = T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)$$
   Luego
$$T^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \alpha_1 T^{-1}(y_1) + \alpha_2 T^{-1}(y_2)$$

3. Por el Teorema 1.6.1 - 3. tenemos que $\dim \mathrm{Im}\,(T) \leq \dim X$. Aplicando el mismo resultado a $T^{-1} : \mathrm{Im}\,(T) \to X$ se tiene que $\dim X \leq \dim \mathrm{Im}\,(T)$. $\square$

Proposición 1.5.3 Sean X,Y, Z $\mathbb{K}$-espacios vectoriales y sean $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$ operadores biyectivos. Entonces existe $(ST)^{-1} : Z \to X$ y $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$.

Demostración. ¡Ejercicio!

Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados, ya sabemos que $\mathcal{B}(X,Y)$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Vamos a dotarlo de una norma. Sea $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ entonces $\exists\, C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall\ x \in X$.

Si $x \neq 0$ entonces $\dfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq C$, luego el conjunto
$$\left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X - \{0\} \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

es acotado superiormente, luego existe su supremo, el cual será denotado por $\|T\|$, es decir

$$\|T\| = \sup\left\{\frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} : x \in X - \{0\}\right\}$$

Observaciones:

1. $\dfrac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \leq \|T\|, \forall\ x \in X - \{0\}$. Se sigue que
$$\|T(x)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X, \quad \forall\ x \in X.$$
2. $\|T\| = \sup\{\|T(x)\|_Y : x \in X,\ \|x\|_X = 1\}$.

Teorema 1.5.4 Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\|T\| \geq 0, \forall\ T \in \mathcal{L}(X,Y)$.
2. $\|T\| = 0 \Longrightarrow T = 0$.
3. $\|rT\| = |r|\,\|T\|, \forall\ T \in \mathcal{L}(X,Y), \forall\ r \in \mathbb{K}$.
4. $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|, \forall\ T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Demostración. Probaremos solamente (4) las demás quedarán como ejercicio para el lector. Sean $T, S \in \mathcal{L}(X,Y)$ y $x \in X$, $\|x\|_X = 1$

$$\|(T+S)(x)\|_Y \leq \|T(x)\|_Y + \|S(x)\|_Y \leq \|T\| + \|S\| \qquad \square$$

Observación: $(\mathcal{B}(X,Y), \|\ \|)$ es un $\mathbb{K}$-espacio normado.

Teorema 1.5.5 Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados donde X es de dimensión finita. Entonces $\mathcal{B}(X,Y) = \mathcal{L}(X,Y)$.

Demostración. Sea $T \in \mathcal{L}(X,Y)$, como $\dim X = n$, entonces $X = \mathcal{L}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Sea $x \in X$, entonces existen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tales que $x = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j$, luego

$$\|T(x)\|_Y = \left\|T\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right)\right\|_Y = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(x_j)\right\|_Y \leq \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| \cdot \|T(x_j)\|_Y \leq C_0 \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

en donde $C_0 = \max\{\|T(x_j)\|_Y ; 1 \leq j \leq n\}$.

Por otro lado,

$$\|x\|_X = \left\|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j\right\|_X \geq C \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|$$

De las dos desigualdades anteriores, se sigue que $\|T(x)\|_Y \leq \left(\dfrac{C}{C_0}\right)\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$. De esta manera T es acotado. $\square$

Teorema 1.5.6 Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados y $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Son equivalentes

1. T es continua en 0.

2. T es continua.

3. $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Demostración. $(1 \Rightarrow 2)$ Sea $x_0 \in X$. Dado $\epsilon > 0$, por hipótesis, existe $\delta > 0$ tal que si $\|x\|_X < \delta$ entonces $\|T(x)\|_Y < \epsilon$.

Luego $\|x - x_0\|_X < \delta \Rightarrow \|T(x) - T(x_0)\|_Y = \|T(x - x_0)\|_Y < \epsilon$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Como T es continua, en particular T es continua en 0, luego existe $\delta > 0$ tal que $\|x\|_X < \delta \Rightarrow \|T(x)\|_Y < 1$.

Sea $x \in X - \{0\}$, entonces $\left\|\dfrac{\delta}{2}\dfrac{x}{\|x\|_X}\right\|_X = \dfrac{\delta}{2} < \delta$, luego $1 > \left\|T\left(\dfrac{\delta}{2}\dfrac{x}{\|x\|_X}\right)\right\|_Y = \dfrac{\delta}{2\|x\|_X}\|T(x)\|_Y$, es decir $\|T(x)\|_Y \leq \dfrac{\delta}{2}\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$.

$(3 \Rightarrow 1)$ Por hipótesis, existe $C > 0$ tal que $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$. Sea $\epsilon > 0$, tomemos $\delta = \dfrac{\epsilon}{C}$ y se cumple que si $\|ds\|x\|_X < \delta$ entonces $\|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X < \epsilon$. $\square$

Corolario. Sean $(X, \|\ \|_X)$, $(Y, \|\ \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Entonces

1. Si $(x_n) \subseteq X$ es tal que $x_n \to x$ en X con $x \in X$ entonces $T(x_n) \to T(x)$ en Y.

2. $N(T)$ es cerrado.

Demostración. 1. Como $T \in \mathcal{B}(X, Y)$, el teorema anterior implica que T es continuo y, por tanto, el resultado se sigue.

2. Si $x \in \overline{\mathrm{Nu}\,(T)}$ entonces existe $(x_n) \subseteq \mathrm{Nu}\,(T)$ tal que $x_n \to x$. Por la parte 1. $T(x_n) \to T(x)$ y por tanto $T(x) = 0$, es decir $x \in \mathrm{Nu}\,(T)$. $\square$

Teorema 1.5.7 Sea $(X, \|\ \|_X)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado, $(Y, \|\ \|_Y)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Banach, D subespacio vectorial de X y $T \in \mathcal{B}(D, Y)$. Entonces T admite una extensión $\overline{T} : \overline{D} \to X$, donde $\overline{T} \in \mathcal{B}(\overline{D}, Y)$ y $\|\overline{T}\| = \|T\|$.

Demostración. Si $T = 0$, entonces no hay nada que probar. Vamos a trabajar con el caso $T \neq 0$.

Sea $x \in \overline{D}$, luego existe $(x_n) \subseteq D$ tal que $x_n \to x$.

Afirmación 1: $(T(x_n)) \subseteq Y$ es convergente. En efecto, como Y es Banach, es suficiente probar que $(T(x_n)) \subseteq Y$ es Cauchy. Sea $\epsilon > 0$, como $(x_n) \subseteq X$ es Cauchy, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \geq N$ entonces

$\|x_n - x_m\|_X < \dfrac{\epsilon}{\|T\|}$. Como T es acotado, para $n, m \geq N$ tenemos:

$$\|Tx_n - Tx_m\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|_X < \epsilon$$

Esto prueba la Afirmación 1.

Luego existe $y = y_x \in Y$ tal que $x_n \to y$. Estaríamos tentados en definir $\overline{T}(x) = y$, sin embargo, debemos demostrar que este valor y no depende de la sucesión (x_n)

Sea $(x'_n) \subseteq D$ tal que $x'_n \to x$

Afirmación 2: $T(x'_n) \to y$. En efecto

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|T(x'_n)y\|_Y \leq \|T(x'_n) - T(x_n)\|_Y + \|T(x_n) - y\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x'_n - x_n\|_X + \|T(x_n) - y\|_Y \\ &\leq \|T\| \cdot \|x'_n - x\|_X + \|T\| \cdot \|x_n - x\|_X + \|T(x_n) - y\|_Y, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Tomando límite, la Afirmación se deduce.

De esta manera, podemos definir $\overline{T} : \overline{D} \to Y$ como $\overline{T}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x_n)$, donde $(x_n) \subseteq D$ es tal que $x_n \to x$.

$\overline{T}$ *es lineal:* ¡Ejercicio!

$\overline{T}$ *es acotada:* Sea $x \in \overline{D}$, luego existe $(x_n) \subseteq D$ tal que $x_n \to x$, y por tanto $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n\|_X = \|x\|_X$.

Por otro lado $\|T(x_n)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x_n\|_X$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, luego

$$\|\overline{T}(x)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T(x_n)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x\|_X$$

Esto prueba que $\overline{T}$ es acotado y que $\|\overline{T}\| \leq \|T\|$.

$\overline{T}$ *extiende a* T*:* Sea $x \in D$, consideramos la sucesión constante (x)

Por último, sea $x \in D$, con $\|x\|_X = 1$, entonces $\|T(x)\|_Y = \|\overline{T}(x)\|_Y \leq \|\overline{T}\|$, luego $\overline{T}(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T(x) = T(x)$, se sigue que $\|T\| \leq \|\overline{T}\|$. $\square$

Teorema 1.5.8 Sea $(X, \|\ \|_X)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado e $(Y, \|\ \|_Y)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X, Y)$ es un $\mathbb{K}$-espacio de Banach.

Demostración. Sea $(T_n) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ sucesión de Cauchy.

Dado $x \in X$, considero $(T_n(x)) \subseteq Y$.

Afirmación 1: $(T(x_n)) \subseteq Y$ es de Cauchy. En efecto, si $x = 0$ entoncees no hay nada que probar. Trabajemos con $x \neq 0$, para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \leq N$ entonces $\|T_n - T_m\| < \dfrac{\epsilon}{\|x\|_X}$. Observe que

$$\|T_n(x) - T_m(x)\|_Y = \|(T_n - T_m)(x)\|_Y \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\|_X < \epsilon$$

Esto prueba la Afirmación 1.

Como Y es Banach, $(T(x_n)) \subseteq Y$ es convergente, luego existe $y = y_x \in Y$ tal que $T(x_n) \to y$. Definimos $T : X \to Y$ como $T(x) = \lim\limits_{n\to\infty} T_n(x)$, $\forall\, x \in X$.

T es lineal: Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x, y \in X$

$$\begin{aligned} T(\alpha x + \beta y) &= \lim_{n\to\infty} T_n(\alpha x + \beta y) = \lim_{n\to\infty} [\alpha T_n(x) + \beta T_n(y)] = \alpha \lim_{n\to\infty} T_n(x) + \beta \lim_{n\to\infty} T_n(y) \\ &= \alpha T(x) + \beta T(y) \end{aligned}$$

T es acotada: Sea $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m \leq N$ entonces $\|T_n - T_m\| < \dfrac{\epsilon}{2}$. En particular, para $m \geq N$ tenemos

$$\|T_N(x) - T_m(x)\|_Y \leq \|T_N - T_m\| \cdot \|x\|_X < \frac{\epsilon}{2}\|x\|_X$$

luego

$$\|T_N(x) - T(x)\|_Y = \lim_{n\to\infty} \|T_N(x) - T_m(x)\|_Y \leq \frac{\epsilon}{2}\|x\|_X$$

Se sigue que $\|(T_N - T)(x)\|_Y < \epsilon\|x\|_X$, $\forall\, x \in X$, luego $T_N - T \in \mathcal{B}(X, Y)$ y de aquí $T \in \mathcal{B}(X, Y)$.

Afirmación 2: $T_n \to T$. En efecto, Procediendo como en la etapa anterior, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $\|T_n(x) - T(x)\|_Y \leq \dfrac{\epsilon}{2}\|x\|_X$, $\forall\, n \geq N$

Tomando $\|x\|_X \leq 1$ tenemos que $\|T_n - T\| < \epsilon$, $\forall\, n \geq N$. Esto prueba la Afirmación 2 y también el teorema. □

1.6 Funcionales lineales. Espacios duales

Sea $(X, \|\ \|_X)$ un $\mathbb{K}$-espacio normado, los elementos de $\mathcal{L}(X, \mathbb{K})$ son llamados *funcionales lineales* y los de $\mathcal{B}(X, \mathbb{K})$ son llamados *funcionales lineales acotados*. Se acostumbra denotar $X^* = \mathcal{L}(X, \mathbb{K})$. X^* el cual es llamado *dual algebraico* de X. Este espacio es estudiado en el álgebra lineal.

Del Teorema 1.5.8 se tiene que $(\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|\ \|)$ es un espacio de Banach, en donde

$$\|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|_X} : x \in X - \{0\}\right\} = \sup\{|f(x)| : x \in X,\ \|x\|_X = 1\}$$

Denotaremos $X' = (\mathcal{B}(X, \mathbb{K}), \|\ \|)$. X' es llamado el *dual topológico* de X.

Ejemplo 1.6.1 Sea $X = C([a, b])$ con la norma de del máximo $\|\ \|$ y consideremos $T : C([a, b]) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Afirmo que $T \in X'$. En efecto, es claro que $T \in X^*$, además

$$|T(f)| = \left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx \leq (b - a) \cdot \|f\|, \qquad \forall\ f \in X$$

Esto prueba que T es acotado.

Por otro lado, si $f(x) = 1$, $\forall\, x \in [0, 1]$; entonces $|T(f)| = b - a$. Se sigue que $\|T\| = b - a$.

Ejemplo 1.6.2 Sea $X = C([a,b])$ con la norma de del máximo $\| \ \|$. Para $t_0 \in [a,b]$ fijado arbitrariamente, consideremos $T_{t_0} : C([a,b]) \to \mathbb{R}$ definida por

$$T_{t_0}(f) = f(t_0)$$

Se prueba que $T_{t_0} \in X'$ y $\|T_{t_0}\| = 1$.

Ejemplo 1.6.3 Fijemos $a = (a_j) \in \ell^2$, consideremos $T : \ell^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(s) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j$$

donde $s = (s_j)$. Por Cauchy-Schwartz, T está bien definido. La linealidad de T es inmediata. Para probar la acotación, sea $s = (s_j) \in \ell^2$, se tiene

$$|T(s)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j s_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |a_j| \cdot |s_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |s_j|^2 \right)^{1/2} = \|a\| \cdot \|s\|$$

Por tanto $|T(s)| \leq \|a\| \cdot \|s\|$. Esto prueba que $T \in (\ell^2)'$. Más aún, como $a \in \ell^2$, se tiene

$$|T(a)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j^2 \right| = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 = \|a\|^2$$

Por tanto $\|T\| = \|a\|$.

Definición 1.6.1 Un *isomorfismo* entre los $\mathbb{K}$-espacios normados $(X, \| \ \|_X)$, $(Y, \| \ \|_Y)$ es una aplicación $T : X \to Y$ que satisface las tres condiciones siguientes:

1. T es lineal.
2. T es sobreyectiva.
3. $\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$, $\forall \ x \in X$.

En tal caso, decimos que $(X, \| \ \|_X)$ es *isomorfo* a $(Y, \| \ \|_Y)$ y escribimos $(X, \| \ \|_X) \approx (Y, \| \ \|_Y)$.

Observación: Desde que un isomorfismo entre espacios normados, respeta la estructura de espacio vectorial y respeta la norma, entonces dos espacios isomorfos son indistinguibles desde el punto de vista de la teoría de los espacios normados.

Teorema 1.6.1 El dual de $\mathbb{R}^n$ es isomorfo a $\mathbb{R}^n$.

Demostración. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica de $\mathbb{R}^n$. Definimos $T : (\mathbb{R}^n)' \to \mathbb{R}^n$ como

$$T(f) = (f(e_1), \ldots, f(e_n)), \quad \forall\, f \in (\mathbb{R}^n)'$$

Afirmo que T es un isomorfismo entre $(\mathbb{R}^n)'$ y $\mathbb{R}^n$. En efecto, la linealidad es inmediata. Sea $f \in N(T)$ entonces $(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = T(f) = (0, \ldots, 0)$ y por tanto $f(e_1) = \cdots = f(e_n) = 0$. Esto prueba la inyectividad de T y como $(\mathbb{R}^n)'$ y $\mathbb{R}^n$ tienen dimensión n, la sobreyectividad se sigue.

Finalmente, sea $x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j)\right| \le \sum_{j=1}^{n} |x_j| \cdot |f(e_j)| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2} \|x\|$$

Se sigue que

$$\|f\| \le \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2}$$

Por otro lado, sea $x_0 = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f(e_j) e_j \in \mathbb{R}^n$, se sigue que

$$\frac{|f(x_0)|}{\|x_0\|} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2}{\left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2}} = \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2}$$

Esto prueba que $\|f\| = \left(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2}$ y

$$\|T(f)\| = \|(f(e_1), \ldots, f(e_n))\| = \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^2\right)^{1/2} = \|f\| \qquad \square$$

Teorema 1.6.2 El dual de ℓ^1 es isomorfo ℓ^∞.

Demostración. Sea $f \in (\ell^1)'$ y considero (e_j) base de Schauder de ℓ^1. Entonces $(f(e_j)) \subseteq \mathbb{K}$. Afirmo que $(f(e_j)) \in \ell^\infty$. En efecto, $|f(e_j)| \le \|f\| \cdot \|e_j\|_1 = \|f\|$, $\forall\, j \in \mathbb{N}$, se sigue que

$$\|(f(e_j))\|_\infty = \sup\{|f(e_j)|;\, j \in \mathbb{N}\} \le \|f\|$$

Esto prueba la afirmación. Además, para $x = (x_j) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in \ell^1$, tenemos

$$|f(x)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \cdot |f(e_j)| \leq \|(f(e_j))\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|(f(e_j))\|_\infty \|x\|_1, \quad \forall\, x \in \ell^1$$

Luego $\|f\| \leq \|(f(e_j))\|_\infty$ y por tanto $\|f\| = \|(f(e_j))\|_\infty$.

Considero la función $T : (\ell^1)' \to \ell^\infty$ definida por

$$T(f) = (f(e_j)), \quad \forall\, f \in (\ell^1)'$$

Claramente T es lineal. Para demostrar la sobreyectividad, dado $y = (y_j) \in \ell^\infty$, considero la función $f : \ell^1 \to \mathbb{K}$ definida por

$$f((x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$$

Observe que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| = \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \cdot |y_j| \leq \|y\|_\infty \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| = \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1$$

de esta manera $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \in \mathbb{K}$ y por tanto f está bien definida. Claramente f es lineal y además

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \|y\|_\infty \cdot \|x\|_1, \quad \forall\, x = (x_j) \in \ell^1$$

luego f es acotada y por tanto $f \in (\ell^1)'$. Por otro lado

$$T(f) = (f(e_j)) = (y_j) = y$$

(Puesto que $f(e_j) = f((\delta_{jk})) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{jk} y_k = y_j$). Esto prueba que T es sobre.

Para probar que T preserva normas:

$$\|T(f)\|_\infty = \|(f(e_j))\|_\infty = \|f\|, \qquad \forall\, f \in (\ell^1)' \qquad \square$$

Teorema 1.6.3 El dual de ℓ^p es isomorfo ℓ^q, donde $1 < p < \infty$ y $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Demostración. Sea $f \in (\ell^p)'$ $(1 < p < \infty)$ y consideremos (e_j) base de Schauder de ℓ^p.

Afirmación 1: $(f(e_j)) \in \ell^q$, donde $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. En efecto, en primer lugar, definimos $x_n = (x_{jn})$, en donde

$$x_{jn} = \begin{cases} \dfrac{|f(e_j)|^q}{f(e_j)}, & \text{si } 1 \leq n,\ f(e_j) \neq 0 \\ \\ 0 & j > n,\ f(e_j) = 0 \end{cases}$$

Observe que

$$\|x_n\|^p = \sum_{j=1}^{\infty} |x_{jn}|^p = \sum_{j=1}^{n} \frac{|f(e_j)|^{pq}}{|f(e_j)|^p} = \sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^{p(q-1)} = \sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q$$

y

$$|f(x_n)| = \left| f\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_{jn} e_j\right)\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_{jn} f(e_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q\right| = \sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q$$

De las dos igualdades anteriores:

$$\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q = |f(x_n)| \leq \|f\| \cdot \|x_n\| = \|f\| \left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q\right)^{1/p}$$

y por tanto

$$\left(\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q\right)^{1-1/p} \leq \|f\|$$

De esta manera, tenemos que $\sum_{j=1}^{n} |f(e_j)|^q \leq \|f\|^q$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Esto prueba que $(f(e_j)) \in \ell^q$ y más aún, $\|(f(e_j)\| \leq \|f\|$.

Por otro lado, dado $x = (x_j) \in \ell^p$, tenemos $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$. Por Hölder

$$|f(x)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \cdot |f(e_j)| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f(e_j)|^q\right)^{1/q}$$

luego

$$|f(x)| \leq \|(f(e_j))\| \cdot \|x\|, \quad \forall\, x \in \ell^p$$

Se sigue que

$$\|f\| \leq \|(f(e_j))\|$$

De esta manera, hemos probado que $\|f\| = \|(f(e_j))\|$, $\forall\, f \in (\ell^p)'$.

A continuación, definimos el operador $T : (\ell^p)' \to \ell^q$ como $T(f) = (f(e_j))$, se cumple:

Afirmación 2: T es lineal. En efecto, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y $f, g \in (\ell^p)'$ se tiene

$$T(\alpha f + \beta g) = ((\alpha f + \beta g)(e_j)) = (\alpha f(e_j) + \beta g(e_j)) = \alpha\,(f(e_j)) + \beta\,(g(e_j)) = \alpha T(f) + \beta T(g)$$

Afirmación 3: T es sobreyectiva. Sea $y = (y_j) \in \ell^q$, defino $f : \ell^p \to \mathbb{C}$ como $f((x_j)) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j$

¿f está bien definida? Sea $x = (x_j) \in \ell^p$, se sigue que

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_j y_j| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |y_j|^q \right)^{1/q} = \|y\| \cdot \|x\|$$

Esta desigualdad muestra que, efectivamente, $\sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j \in \mathbb{C}$ y por tanto f está bien definida.

Ahora probaremos que $f \in \ell^p$, sean $\alpha, \alpha' \in \mathbb{C}$ y $(x_j), (x'_j) \in \ell^p$, se cumple

$$\begin{aligned} f\left(\alpha(x_j) + \alpha'(x'_j)\right) &= f\left((\alpha x_j + \alpha' x'_j)\right) = \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha x_j + \alpha' x'_j) y_j = \alpha \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j + \alpha' \sum_{j=1}^{\infty} x'_j y_j \\ &= \alpha f((x_j)) + \alpha' f((x'_j)) \end{aligned}$$

lo cual prueba que f es lineal.

Para probar que f es acotada, sea $x = (x_j) \in \ell^p$, entonces $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j$, se sigue que

$$|f(x)| = \left| \sum_{j=1}^{\infty} x_j f(e_j) \right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_j| \cdot |f(e_j)| \leq \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{j=1}^{\infty} |f(e_j)|^q \right)^{1/q} = \|f((e_j))\| \cdot \|x\|$$

Luego $f \in (\ell^p)'$ y además $T(f) = (f(e_j)) = (y_j) = y$. La sobreyectividad de T está probada.

Afirmación 4: T preserva normas. En efecto, $\|T(f)\| = \|\left(f(e_j)\right)\| = \|f\|$, $\forall\ f \in (\ell^p)'$. $\square$

Capítulo 1

Espacios con Producto Interno

1.1 Espacios con Producto Interno y Espacios de Hilbert

Definición 1.1.1 Sea X un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. Un *producto interno* sobre X es una función $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ que satisface las siguientes condiciones:

PI1) $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$, $\forall\ x_1, x_2, y \in X$.

PI2) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha \langle x, y\rangle$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$ y $\forall\ x, y \in X$.

PI3) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$, $\forall\ x, y \in X$.

PI4) $\langle x, x\rangle \geq 0$, $\forall\ x \in X$.

PI5) $\langle x, x\rangle = 0$ si y sólo si $x = 0$.

El par $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ es un $\mathbb{K}$-*espacio con producto interno* si y sólo si X es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y $\langle\ ,\ \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ es un producto interno sobre X.

Probaremos que todo espacio con producto interno define un espacio normado.

Lema 1.1.1 (Desigualdad de Cauchy-Schwartz) Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno, se cumple:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \langle x, x\rangle^{1/2} \langle y, y\rangle^{1/2}, \quad \forall\ x, y \in X$$

Demostración. Sean $x, y \in X$. Si $x = 0$ o $y = 0$ entonces no hay nada que probar. Trabajemos con $x, y \neq 0$. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ tenemos:

$$0 \leq \langle \alpha x + y, \alpha x + y\rangle = \alpha\overline{\alpha} \langle x, x\rangle + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha} \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle$$

luego

$$0 \leq |\alpha|^2 \langle x, y\rangle + \alpha \langle x, y\rangle + \overline{\alpha}\overline{\langle x, y\rangle} + \langle y, y\rangle, \qquad \forall\ \alpha \in \mathbb{C}$$

Haciendo $\alpha = -\dfrac{\overline{\langle x, y\rangle}}{\langle x, x\rangle}$, tenemos

$$0 \leq \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle^2}\langle x, y\rangle - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} - \frac{|\langle x, y\rangle|^2}{\langle x, x\rangle} + \langle y, y\rangle$$

Se sigue que $|\langle x, y\rangle|^2 \leq \langle x, x\rangle \langle y, y\rangle$. □

Teorema 1.1.1 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno. La función $\|\ \| : X \to \mathbb{R}$ definida por $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ es una norma sobre X.

Demostración. Sólo probaremos la desigualdad triangular

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} + \|y\|^2 \\
&= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2
\end{aligned}$$

Por tanto $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|, \quad \forall\ x, y \in X$. □

Observación: La norma del Teorema 1.1.1 es llamada *norma inducida por el producto interno.*

Definición 1.1.2 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno. Decimos que $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-*espacio de Hilbert* si y sólo si $(X, \|\ \|)$ es un $\mathbb{K}$-espacio de Banach, en donde $\|\ \|$ es la norma inducida por el producto interno.

Ejemplo 1.1.1 En $\mathbb{R}^n$ definimos $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ como

$$\langle x, y\rangle = \sum_{j=1}^{n} x_j y_j, \quad \forall\ x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Se sigue que $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno.

La norma inducida por este producto interno es

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right]^{1/2}, \quad \forall\ x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

Como $(\mathbb{R}^n, \|\ \|)$ es Banach, se sigue que $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.1.2 En $\mathbb{C}^n$ definimos $\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ como

$$\langle z, w\rangle = \sum_{j=1}^{n} z_j \overline{w_j}, \quad \forall\ z = (z_1, \ldots, z_n), w = (w_1, \ldots, w_n) \in \mathbb{C}^n.$$

Se sigue que $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno.

La norma inducida por este producto interno es

$$\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right]^{1/2}, \quad \forall\ z = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n$$

Como $(\mathbb{C}^n, \|\ \|)$ es Banach, se sigue que $(\mathbb{C}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.1.3 En ℓ^2 definimos $\langle\ ,\ \rangle : \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$ como

$$\langle (z_j), (w_j)\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} z_j \overline{w_j}$$

Se sigue que $(\ell^2, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno.

La norma inducida por este producto interno es

$$\|z\| = \langle z, z\rangle^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^{\infty} |z_j|^2\right]^{1/2}, \quad \forall\ z = (z_j) \in \ell^2$$

Como $(\ell^2, \|\ \|)$ es Banach, se sigue que $(\ell^2, \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio de Hilbert.

Ejemplo 1.1.4 En $C([a, b])$ definimos $\langle\ ,\ \rangle : C([a, b]) \times C([a, b]) \to \mathbb{R}$ como

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$$

Se sigue que $(C([a, b]), \langle\ ,\ \rangle)$ es un espacio con producto interno.

La norma inducida por este producto interno es

$$\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2} = \left[\int_a^b |f(t)|^2 dt\right]^{1/2}, \quad \forall\ f \in C([a, b])$$

Se puede probar que $(C([a, b]), \|\ \|)$ no es Banach, luego $(\ell^2, \langle\ ,\ \rangle)$ no es un espacio de Hilbert.

El completamiento del espacio métrico generado por esta norma se denota por $L^2([a, b])$.

No toda norma proviene de un producto interno, para ello, necesitamos el siguiente resultado.

Lema 1.1.2 (Igualdad del paralelogramo) Si $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno entonces la norma inducida $\|\ \|$ satisface la siguiente igualdad:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2), \quad \forall\ x, y \in X$$

Demostración. Dados $x, y \in X$, tenemos:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

lo cual demuestra el resultado. $\square$

Ejemplo 1.1.5 La norma de ℓ^p (con $p \neq 2$) no proviene de un producto interno. En efecto, puesto que de lo contrario, existe $\langle\, ,\, \rangle$ producto interno en ℓ^p tal que $\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}$ (Hip. Aux.) luego esta norma debe satisfacer la identidad del paralelogramos, en particular, se debe tener

$$\|e_1 + e_2\|^2 + \|e_1 - e_2\|^2 = 2(\|e_1\|^2 + \|e_2\|^2)$$

Pero $\|e_1 + e_2\| = 2^{1/p}$, $\|e_1 - e_2\| = 2^{1/p}$, $\|e_1\| = 1$ y $\|e_2\| = 1$, reemplazando estos resultados en la igualdad anterior, tenemos $2^{2/p} + 2^{2/p} = 2(1+1)$, es decir $2 \cdot 2^{2/p} = 4$, lo cual implica que $p = 2$ y esto es una contradicción.

Ejemplo 1.1.6 La norma del máximo en $C([0,1])$ no proviene de un producto interno. En efecto, puesto que de lo contrario, existe $\langle\, ,\, \rangle$ producto interno en $C([0,1])$ tal que $\|f\| = \langle f, f\rangle^{1/2}$ (Hip. Aux.) luego esta norma debe satisfacer la identidad del paralelogramos. En particular, si tomamos $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definidas por $f(t) = t$ y $g(t) = t^2$, se debe tener

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Ahora bien, es claro que $\|f\| = \|g\| = 1$.

Por otro lado $(f+g)(t) = t + t^2$, luego $(f+g)'(t) = 1 + 2t > 0$, $\forall\, t \in [0,1]$ luego $f+g$ es creciente y por tanto su máximo es alcanzado en $t = 1$, así $\|f+g\| = 2$.

Análogamente $(f-g)(t) = t - t^2$, luego $(f-g)'(t) = 1 - 2t$ su punto crítico es $t = 1/2$ y como $(f-g)''(t) = -2 < 0$, se sigue que $t = 1/2$ es máximo, luego $\|f-g\| = 1/4$.

Reemplazando estos resultados en la identidad del paralelogramo, tenemos $4 + \dfrac{1}{16} = 2(1+1)$, lo cual es una contradicción.

1.2 Otras propiedades de los espacios con producto interno

Definición 1.2.1 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno. Decimos que $x, y \in X$ son *ortogonales*, lo cual denotamos $x \perp y$ si y solo si $\langle x, y\rangle = 0$

Lema 1.2.1 (Pitágoras) Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno. Si $x \perp y$ entonces

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

Demostración. Si $x \perp y$ entonces

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2$$

$\square$

Lema 1.2.2 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno y $(x_n), (y_n) \subseteq Y$. Si $x_n \to x$ y $y_n \to y$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle = \langle x, y\rangle$.

Demostración. Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x_n, y\rangle| + |\langle x_n, y\rangle - \langle x, y\rangle| = |\langle x_n, y_n - y\rangle| + |\langle x_n - x, y\rangle| \\ &\leq \|x_n\| \cdot \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

luego $0 \leq \lim\limits_{n\to\infty} |\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle| \leq 0$. □

A continuación, probaremos que todo espacio con producto interno puede ser completado a un espacio de Hilbert.

Definición 1.2.2 Sean $(X_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(X_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios con producto interno. Decimos que un operador $T : X_1 \to X_2$ es un *isomorfismo* si y solo si se cumple

1. $T \in \mathcal{L}(X_1, X_2)$.
2. T es biyectivo.
3. $\langle T(x_1), T(y_1)\rangle_2 = \langle x_1, y_1\rangle_1$, $\forall\ x_1, y_1 \in X_1$

En tal caso, decimos que $(X_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(X_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ son *isomorfos* y denotaremos $(X_1, \langle\ ,\ \rangle_1) \approx (X_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$

Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno, a continuación vamos a demostrar que existe un espacio de Hilbert el cual contiene un subespacio que es isomorfo a X. Más aún, este espacio de Banach es único, salvo isomorfismos.

Sea "$\|\ \|$" la norma inducida por el producto interno, para el espacio normado $(X, \|\ \|)$, sabemos que existe un espacio de Banach $(\widehat{X}, \|\ \|_1)$ el cual contiene un subconjunto denso que es isométrico e isomorfo a $(X, \|\ \|)$. Además $(\widehat{X}, \|\ \|_1)$ es único salvo isomorfismos.

Recordemos que $(\widehat{X}, \|\ \|_1)$ se construye de la manera siguiente: En el conjunto

$$S = \{(x_j) \subseteq X;\ (x_j) \text{ es una sucesión de Cauchy}\}$$

se define la relación de equivalencia

$$(x_j) \sim (x'_j) \iff \lim_{j\to\infty} \|x_j, x'_j\| = 0$$

Usamos las notaciones

$$\widehat{(x_j)} = \{(x'_j) \in S;\ (x'_j) \sim (x_j)\} \qquad \text{y} \qquad \widehat{X} = \left\{\widehat{(x_j)};\ (x_j) \in S\right\}$$

Con las operaciones de suma $\widehat{(x_j)} + \widehat{(y_j)} = \widehat{(x_j + y_j)}$ y producto por un escalar $c\widehat{(x_j)} = \widehat{(cx_j)}$, se tiene que $\widehat{X}$ es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial.

La norma en $\widehat{X}$ se define como $\| \ \|_1 : \widehat{X} \to \mathbb{R}$ como

$$\|\widehat{(x_j)}\|_1 = \lim_{j\to\infty} \|x_j\|$$

Se define también $T : X \to \widehat{X}$ como $T(x) = \widehat{(x)}$ y se prueba que T es un isomorfismo entre los espacios normados X y $\widehat{M} = T(X)$.

Vamos a dotar a $\widehat{X}$ de una estructura de producto interno, cuya norma inducida es $\widehat{\|} \ \|_1$.

Definimos $\langle \ , \ \rangle_1 : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$ como

$$\left\langle \widehat{(x_j)}, \widehat{(y_j)} \right\rangle_1 = \lim_{j\to\infty} \langle x_j, y_j \rangle .$$

Dejamos al lector demostrar que la definición anterior es buena, en el sentido que no depende de los representantes de la clase de equivalencia.

1) $\langle \ , \ \rangle_1 : \widehat{X} \times \widehat{X} \to \mathbb{K}$ *es un producto interno*: En efecto, solo probaremos PI5) las 4 primeras quedan como ejercicio para el lector.

$$\left\langle \widehat{(x_j)}, \widehat{(x_j)} \right\rangle_1 = 0 \Longleftrightarrow \lim_{j\to\infty} \langle x_j, x_j \rangle = 0 \Longleftrightarrow \lim_{j\to\infty} \|x_j\| = 0 \Longleftrightarrow \|\widehat{(x_j)}\|_1 = 0 \Longleftrightarrow \widehat{(x_j)} = \widehat{0}$$

2) $\langle \ , \ \rangle_1$ *induce la norma* $\| \ \|_1$: En efecto,

$$\left\langle \widehat{(x_j)}, \widehat{(x_j)} \right\rangle_1 = \lim_{j\to\infty} \langle x_j, x_j \rangle = \lim_{j\to\infty} \|x_j\|^2 = \|\widehat{(x_j)}\|_1^2, \qquad \forall \ \widehat{(x_j)} \in \widehat{X}$$

3) $T : X \to \widehat{M} = T(X)$ *es isomorfismo*: (¡Ejercicio!)

4) *El espacio de Hilbert* $\left(\widehat{X}, \langle \ , \ \rangle_1\right)$ *es único salvo isomorfimo*: Queda como ejercicio para el lector.

Teorema 1.2.1 Sea $(H, \langle \ , \ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y sea $Y \subseteq H$ un subespacio vectorial. Se cumplen

1. $(Y, \langle \ , \ \rangle)$ es Hilbert si y solo si Y es cerrado.
2. Si Y es de dimensión finita entonces $(Y, \langle \ , \ \rangle)$ es Hilbert.

Demostración. ¡Ejercicio!

1.3 Complementos ortogonales y sumas directas

Teorema 1.3.1 Sea $(X, \langle \ , \ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno y sea $\emptyset \neq M \subseteq X$ un subconjunto convexo el cual es completo con la métrica inducida por el producto interno. Entonces para todo $x \in X$ existe un único $y_x \in M$ tal que

$$\inf \{\|x - y\|; y \in M\} = \|x - y_x\|$$

Demostración. *Existencia:* Sea $\delta = \inf\{\|x-y\|; y \in M\}$. Para $n \in \mathbb{N}$, existe $y_n \in M$ tal que

$$\delta \leq \|x - y_n\| < \delta + \frac{1}{n} \tag{1.1}$$

De esta manera, hemos construido $(y_n) \subseteq M$

Afirmación 1: $(y_n) \subseteq M$ es de Cauchy. En efecto, para $n, m \in \mathbb{N}$ tenemos:

$$\begin{aligned} \|y_n - y_m\|^2 &= \|y_n - x + x - y_m\|^2 = \|(x-y_m) - (x-y_n)\|^2 \\ &= 2\left(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2\right) - \|(x-y_m)+(x-y_n)\|^2 \\ &= 2\left(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2\right) - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y_n+y_m)\right\|^2 \end{aligned} \tag{1.2}$$

Como M es convexo y $y_n, y_m \in M$, se tiene que $\frac{1}{2}(y_n+y_m) \in M$, luego $\left\|x - \frac{1}{2}(y_n+y_m)\right\| \geq \delta$ y por tanto, reemplazando en (1.2)

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left(\|x-y_m\|^2 + \|x-y_n\|^2\right) - 4\delta^2 \tag{1.3}$$

Por otro lado, de (1.1) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x-y_n\|^2 = \delta^2$. Luego dado $\epsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n \geq N$, se tiene que $\|x-y_n\|^2 - \delta^2 < \dfrac{\epsilon^2}{4}$.

Luego, de lo anterior y (1.3), para $n, m \geq N$, tenemos:

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\left[\left(\|x-y_m\|^2 - \delta^2\right) + \left(\|x-y_n\|^2 - \delta^2\right)\right] < \epsilon^2,$$

lo cual prueba la Afirmación 1.

Como M es completo, existe $y_x \in M$ tal que $y_n \to y_x$

Afirmación 2: $\|x - y_x\| = \delta$. En efecto:

$$\delta \leq \|x-y_x\| \leq \|x-y_n\| + \|y_n - y_x\|, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite y considerando (1.1) se llega a que $\|x - y_x\| = \delta$.

Unicidad: Suponga que existe $y' \in M$ tal que $\|y-y'\| = \|y-y_x\| = \delta$. Por la identidad del paralelogramo:

$$\begin{aligned} \|y-y'\|^2 &= \|y-x+x-y'\|^2 = \|(x-y')-(x-y)\|^2 \\ &= 2\left(\|x-y'\|^2 + \|x-y\|^2\right) - \|(x-y')+(x-y)\|^2 = 4\delta^2 - \|2x-(y+y')\| \\ &= 4\delta^2 - 4\left\|x - \frac{1}{2}(y+y')\right\|^2 \leq 4\delta^2 - 4\delta^2 = 0 \end{aligned}$$

Se sigue que $y = y'$. □

Definición 1.3.1 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno, sea $x \in X$ y sean $A, B \subseteq X$

1. $x \perp A$ si y solo si $x \perp a$, $\forall\ a \in A$.

2. $A \perp B$ si y solo si $a \perp b$, $\forall\ a \in A$, $\forall\ b \in B$.

3. $A^{\perp} = \{x \in X;\ x \perp A\}$.

Observación: No es difícil probar que $A^{\perp}$ es un subespacio vectrial de X, $\forall\ A \subseteq X$.

Lema 1.3.1 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno y sea $Y \subseteq X$ un subespacio completo de X. Dado $x \in X$, $x - y_x \in Y^{\perp}$, $y_x \in Y$ es tal que tal que $\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\|; y \in M\}$

Demostración. Sea $z = x - y_x$. Suponga que existe $y_1 \in Y$ tal que $\langle z, y_1\rangle \neq 0$. Obviamente $y_1 \neq 0$, como antes, sea $\delta = \|x - y_x\| = \|z\|$. Para $\alpha \in \mathbb{K}$, tenemos:

$$\|z + \alpha y_1\| = \|x - y_x + \alpha y_1\| = \|x - (y_x - \alpha y_1)\| \geq \delta \tag{1.4}$$

Por otro lado

$$\|z + \alpha y_1\|^2 = \|z\|^2 + \overline{\alpha}\,\langle z, y_1\rangle + \alpha\overline{\langle z, y_1\rangle} + |\alpha|^2\|y_1\|^2$$

En particular, tomando $\alpha = -\dfrac{\langle z, y_1\rangle}{\|y_1\|^2}$, tenemos:

$$\|z + \alpha y_1\|^2 = \delta^2 - \frac{|\langle z, y_1\rangle|}{\|y_1\|^2} < \delta^2$$

lo cual contradice (1.4). Luego $\langle z, y\rangle = 0$, $\forall\ y \in Y$. $\square$

Definición 1.3.2 Un $\mathbb{K}$-espacio vectorial X es *suma directa* de dos subespacios Y, Z, lo cual escribiremo $X = Y \oplus Z$, si y solo si, se cumplen

1. $X = Y + Z$

2. $Y \cap Z = (0)$

Teorema 1.3.2 Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y sea $Y \subseteq H$ un subespacio cerrado de H. Entonces

$$H = Y \oplus Y^{\perp}$$

Demostración. Como H es Hilbert e Y es subespacio cerrado, entonces Y es Hilbert. Dado $x \in H$, existe un único $y_x \in Y$ tal que $\|x - y_x\| = \inf\{\|x - y\|; y \in Y\}$ y $x - y_x \in Y^{\perp}$.

Luego $x = y_x + (x - y_x)$ y por tanto $x \in Y + Y^{\perp}$, es decir $H = Y + Y^{\perp}$

Finalmente, sea $x \in Y \cap Y^{\perp}$ entoces $\langle x, x\rangle = 0$, por tanto $Y \cap Y^{\perp} = (0)$. $\square$

Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y sea $Y \subseteq H$ un subespacio cerrado de H. Por el Teorema anterior podemos definir el operador $P : H \to Y$ como $P(x) = y_x$. Este operador es llamado*proyección ortogonal* o *proyección canónica* de H sobre Y.

Teorema 1.3.3 Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y sea $Y \subseteq H$ un subespacio cerrado de H. La proyección ortogonal $P : H \to Y$ satisface las siguientes propiedades:

1. $P \in \mathcal{B}(H; H) = \mathcal{B}(H)$
2. $P(H) = Y$
3. $\operatorname{Nu}(P) = Y^{\perp}$ y $\operatorname{Im}(P) = Y$
4. $P^2 = P$

Demostración.
1. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, $x_1, x_2 \in H$ entonces $x_1 = y_{x_1} + (x_1 - y_{x_1})$ y $x_2 = y_{x_2} + (x_2 - y_{x_2})$.
Por otro lado, como $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in H$ entonces

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = y_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} + (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - y_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}) \tag{1.5}$$

Pero

$$\begin{aligned} \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 &= \alpha_1 y_{x_1} + \alpha_1 (x_1 - y_{x_1}) + \alpha_2 y_{x_2} + \alpha_2 (x_2 - y_{x_2}) \\ &= (\alpha_1 y_{x_1} + \alpha_2 y_{x_2}) + (\alpha_1 (x_1 - y_{x_1}) + \alpha_2 (x_2 - y_{x_2})) \end{aligned} \tag{1.6}$$

donde $\alpha_1 y_{x_1} + \alpha_2 y_{x_2} \in Y$ y $\alpha_1 (x_1 - y_{x_1}) + \alpha_2 (x_2 - y_{x_2}) \in Y^{\perp}$ Por (1.5), (1.6) y como $H = Y \oplus Y^{\perp}$, entonces $y_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} = \alpha_1 y_{x_1} + \alpha_2 y_{x_2}$, luego

$$P(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = y_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2} = \alpha_1 y_{x_1} + \alpha_2 y_{x_2} = \alpha_1 P(x_1) + \alpha_2 P(x_2)$$

Esto prueba la linealidad, en cuanto a la acotación, sea $x \in H$, sabemos que $x = y_x + (x - y_x) \in Y + Y^{\perp}$. Por Pitágoras:

$$\|x\|^2 = \|y_x + (x - y_x)\|^2 = \|y_x\|^2 + \|x - y_x\|^2 \geq \|y_x\|^2 = \|P(x)\|^2$$

de donde $\|P(x)\| \leq \|x\|$, $\forall\ x \in H$.

2. Sea $y \in Y$, entonces $y = y + 0 \in Y + Y^{\perp}$, luego $P(y) = y$ y por tanto $y \in P(H)$, es decir $Y \subseteq P(H)$. El otro contenido se sigue de la definición del operador P.

3. Sea $y \in Y^{\perp}$, entonces $y = 0 + y \in Y + Y^{\perp}$, luego $P(y) = 0$ y por tanto $Y^{\perp} \subseteq \operatorname{Nu}(P)$. El otro contenido es análogo.

4. $P^2(x) = P(P(x)) = P(x)$. $\square$

Lema 1.3.2 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y sean $A, B \subseteq X$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $A^{\perp}$ es un subespacio vectorial cerrado de X.
2. Si $A \subseteq B$ entonces $B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$.
3. $A \subseteq A^{\perp\perp}$.

4. $A^{\perp\perp\perp} = A^{\perp}$.

Demostración. ¡Ejercicio! $\square$

Lema 1.3.3 Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert e Y un subespacio cerrado de H. Se cumple $Y = Y^{\perp\perp}$.

Demostración. Ya sabemos que $Y \subseteq Y^{\perp\perp}$.

Sea $x \in Y^{\perp\perp}$. Como Y es subespacio cerrado de H, tenemos que $H = Y \oplus Y^{\perp}$, luego x se escribe de manera única como $x = y + z$, donde $y \in Y$ y $z \in Y^{\perp}$. Pero

$$\|z\|^2 = \langle z, z\rangle = \langle z, x - y\rangle = \langle z, x\rangle - \langle z, y\rangle = 0$$

luego $z = 0$ y por tanto $x = y \in Y$. $\square$

Proposición 1.3.4 Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un espacio de Hilbert y $\emptyset \neq M \subseteq H$. Se cumple $\overline{\mathcal{L}(M)} = H$ si y solo si $M^{\perp} = (0)$.

Demostración. $(\Rightarrow)$ Si $\overline{\mathcal{L}(M)} = H$ entonces $\overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} = H^{\perp} = (0)$. De esta manera, es suficiente probar que $\overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} = M^{\perp}$.

Afirmación 1: $M^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(M)^{\perp}$. En efecto, sea $x \in M^{\perp}$ e $y \in \mathcal{L}(M)$, entonces $y = \sum \alpha_j y_j$, con $y_j \in M$, luego $\langle x, y\rangle = \sum \overline{\alpha_j}\, \langle x, y_j\rangle = 0$ y por tanto $x \in \mathcal{L}(M)^{\perp}$. La Afirmación 1 está probada.

Afirmación 2: $M^{\perp} \subseteq \overline{M}^{\perp}$. En efecto, sea $x \in M^{\perp}$ e $y \in \overline{M}$, luego existe $(y_n) \subseteq M$ tal que $y_n \to y$, luego $\langle x, y_n\rangle \to \langle x, y\rangle$ y por tanto $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall\ y \in \overline{M}$. Se sigue que $x \in \overline{M}^{\perp}$ y la Afirmación 2 está probada.

De las Afirmaciones 1 y 2: $M^{\perp} \subseteq \mathcal{L}(M)^{\perp} \subseteq \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp}$ y como $M \subseteq \overline{\mathcal{L}(M)}$ entonces $\overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} \subseteq M^{\perp}$ y esto prueba que $\overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} = M^{\perp}$.

$(\Leftarrow)$ $H = \overline{\mathcal{L}(M)} \oplus \overline{\mathcal{L}(M)}^{\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)} \oplus M^{\perp} = \overline{\mathcal{L}(M)} \oplus (0) = \overline{\mathcal{L}(M)}$. $\square$

1.4 Conjuntos y Sucesiones Ortonormales

Definición 1.4.1 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y sea $M \subseteq X$

1. Decimos que M es un *conjunto ortogonal* si y solo si $\langle x, y\rangle = 0$, $\forall\ x, y \in M$, $x \neq y$.
2. Decimos que M es un *conjunto ortonornal* si y solo si $\langle x, y\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } x \neq y \\ 1, & \text{si } x = y \end{cases}$

Lema 1.4.1 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y sea $M = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ un subconjunto ortogonal. Se cumple

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2$$

Demostración. $\left\| \sum_{j=1}^{n} x_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} x_j, \sum_{k=1}^{n} x_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \langle x_j, x_k \rangle = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2.$ □

Lema 1.4.2 Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno. Todo subconjunto ortonormal es linealmente independiente.

Demostración. Primeramente, consideremos el caso finito: Sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ un subconjunto ortogonal y supóngase que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j = 0$, para $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos:

$$0 = \left\langle \sum_{j=1}^{n} \alpha_j x_j, x_k \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle x_j, x_k \rangle = \alpha_k$$

Esto prueba que $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es L.I..

Para el caso generall, Sea M un subconjunto ortonormal infinito, sea $\{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq M$, por la parte anterior, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ es L.I. □

Ejemplo 1.4.1 En ℓ^2 consideramos $e_j = (\delta_{jk})$. Se sigue que (e_j) es un subconjunto ortonormal de ℓ^2

Ejemplo 1.4.2 Considere $C([0, 2\pi])$ con el producto interno. $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

Una sucesión ortogonal en $(C([0, 2\pi]), \langle\ ,\ \rangle)$ es $(u_n) = (\cos nt)$, puesto que un fácil cálculo muestra que

$$\langle u_n, u_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m \neq 0 \\ 2\pi, & \text{si } n = m = 0 \end{cases}$$

Otra sucesión ortogonal en $(C([0, 2\pi]), \langle\ ,\ \rangle)$ es $(v_n) = (\operatorname{sen} nt)$, puesto que un fácil cálculo muestra que

$$\langle v_n, v_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ \pi, & \text{si } n = m \end{cases}$$

De aquí, dos sucesiones ortonormales en $(C([0, 2\pi]), \langle\ ,\ \rangle)$ son (e_n) y $(\tilde{e}_n)$ dadas por

$$e_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \quad n \geq 1 \quad \text{y} \quad e_0(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

y

$$\tilde{e}_n(t) = \frac{u_n(t)}{\|u_n\|} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen} nt, \quad \forall\ n \geq 1$$

Teorema 1.4.1 (Desigualdad de Bessel) Sean $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $(e_k) \subseteq X$ una sucesión ortonormal. Entonces se cumple:

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2, \quad \forall\ x \in X$$

Demostración. Sea $x \in X$, para $n \in \mathbb{N}$, tenemos:

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad \left| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right|^2 = \left\langle x - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle e_j , x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \right\rangle \\
&= \quad \langle x, x \rangle - \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle x, e_k \rangle - \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \langle e_j, x \rangle + \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j \rangle \sum_{k=1}^{n} \overline{\langle x, e_k \rangle} \langle e_j, e_k \rangle \\
&= \quad \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 + \sum_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2
\end{aligned}$$

Luego $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. De aquí se sigue el resultado. □

1.5 Series relacionadas a Sucesiones y Conjuntos Ortonormales

Sea $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial con producto interno y $(e_k) \subseteq X$ una sucesión ortonormal, dado $x \in X$ los escalares $\langle x, e_k \rangle \in \mathbb{K}$ son llamados *coeficientes de Fourier asociados a x*. Históricamente, estos coeicientes surgieron a tratar de resolver EDP por el método de las variables separables. Vamos a estudiar algunas propiedades de estos coeficientes.

Teorema 1.5.1 Sean $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $(e_k) \subseteq H$ una sucesión ortonormal. Entonces se cumplen las siguientes propiedades:

1. $\displaystyle\sum_{j,1} \alpha_j e_j$ es convergente si y solo si $\displaystyle\sum_{j,1} |\alpha_j|^2$ es convergente.
2. Si $\displaystyle\sum_{j,1} \alpha_j e_j$ converge a s entonces $s = \displaystyle\sum_{j_1}^{\infty} \langle s, e_j \rangle e_j$.
3. $\displaystyle\sum_{j,1} \langle x, e_j \rangle e_j$ es convergente, $\forall\ x \in H$

Demostración. 1. Sea $s_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \alpha_j e_j$ y $\sigma_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} |\alpha_j|^2$. Para $n > m$, tenemos

$$\begin{aligned}
\|s_n - s_m\|^2 \quad &= \quad \left\| \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j e_j \right\|^2 = \left\langle \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j e_j , \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k e_k \right\rangle = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \sum_{k=m+1}^{n} \overline{\alpha_k} \langle e_j, e_k \rangle \\
&= \quad \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_j \overline{\alpha_j} = \sum_{j=m+1}^{n} |\alpha_j|^2 = \sigma_n - \sigma_m
\end{aligned}$$

Se sigue que $\|s_n - s_m\|^2 = |\sigma_n - \sigma_m|$, $\forall\ n, m \in \mathbb{N}$ y de aquí, el resultado se sigue.

2. Por hipótesis $s_n \to s$, luego, dado $k \in \mathbb{N}$, tenemos $s_{n+k} \to s$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \langle s_{n+k}, e_k \rangle = \langle s, e_k \rangle$.

Pero $\langle s_{n+k}, e_k \rangle = \sum\limits_{j=1}^{n+k} \alpha_j \langle e_j, e_k \rangle = \alpha_k$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Es decir $(\langle s_{n+k}, e_k \rangle) \subseteq \mathbb{C}$ es la sucesión constante $(\alpha_k) \subseteq \mathbb{C}$, luego $\alpha_k = \langle s, e_k \rangle$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$. Se sigue que $s = \sum\limits_{j_1}^{\infty} \langle s, e_j \rangle e_j$.

3. Dado $x \in H$, por Bessel: $\sum\limits_{j=1}^{n} |\langle x, e_j \rangle|^2 \leq \|x\|^2$, se sigue que $\sum\limits_{j,1} |\langle x, e_j \rangle|^2$ es convergente y por la parte 1. $\sum\limits_{j,1} \langle x, e_j \rangle e_j$ es convergente, $\forall\, x \in H$. □

¿Qué ocurre si el conjunto ortonormal es infinito no numerable?

Teorema 1.5.2 Sean $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno y $(e_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq X$ un conjunto ortonormal (I es no numerable). Entonces el conjunto

$$A = \{\alpha \in I;\ |\langle x, e_\alpha \rangle| > 0\}$$

es a lo más numerable, $\forall\, x \in X$

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, defino $A_n = \left\{\alpha \in I;\ |\langle x, e_\alpha \rangle| > \dfrac{1}{n}\right\}$. Se sigue que $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n$.

Afirmación: $card(A_n) < \infty$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. En efecto, caso contrario, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $card(A_n) = \infty$ (Hip. Aux.), luego existe $(\alpha_j) \subseteq I$ tal que $\left|\left\langle x, e_{\alpha_j} \right\rangle\right| > \dfrac{1}{N}$, $\forall\, j$. Como (e_{α_j}) es ortonormal, por Bessel: $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \left|\left\langle x, e_{\alpha_j} \right\rangle\right|^2 \leq \|x\|^2$, pero

$$\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^{\infty} \left|\left\langle x, e_{\alpha_j} \right\rangle\right|^2 > \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{N^2} = \infty$$

Esta contradicción prueba la afirmación.

De esta manera, se sigue que A es a lo más numerable. □

Debido al teorema anterior, sea $(e_\alpha)_{\alpha\in I} \subseteq X$ un conjunto ortonormal (I es no numerable), para $x \in X$, existen $(\alpha_j) \subseteq I$ tal que $\left\langle x, e_{\alpha_j} \right\rangle \neq 0$ y podemos considerar la sumatoria

$$\sum_{\alpha\in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha = \sum_{j,1} \left\langle x, e_{\alpha_j} \right\rangle e_{\alpha_j}$$

y para su convergencia podemos aplicar los criterios del Teorema 1.5.1. Se puede demostrar que la convergencia de esta serie no depende del orden de los e_{α_j}.

1.6 Sucesiones y Conjuntos Ortonormales Totales

Definición 1.6.1 Sean $(X, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio con producto interno y $\emptyset \neq M \subseteq X$. Decimos que M es *total en* X si y solo si $\overline{\langle M \rangle} = X$.

Observaciones:

1. Cuando $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ es un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert, por la Proposición 1.3.4 tenemos que M es total en H si y solo si $M^{\perp} = (0)$.
2. Se puede demostrar que todo espacio de Hilbert $H \neq (0)$ admite un conjunto ortonormal total. En efecto, si H es de dimensión finita, el resultado es evidente. Si H es infinito dimensional y separable, el resultado se sigue usando el proceso de Ortonormalización de Gram-Schmidt. Finalmente, en el caso que H sea infinito dimensional no separable, el resultado se sigue mediante un proceso no constructivo, usando el Lema de Zorn.
3. Se puede demostrar que en un espacio de Hilbert $H \neq (0)$, dos conjuntos ortonormales totales tienen la misma cardinalidad. Este cardinal es llamado *dimensión de Hilbert de* H. Es claro que si H es de dimensión finita, entonces la dimensión de Hilbert coincide con la dimensión algebraica.

Teorema 1.6.1 Sean $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $(e_\alpha)_{\alpha \in I} \subseteq X$ un conjunto ortonormal en H. Se cumple:

$$(e_\alpha) \text{ es total si y solo si } \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = \|x\|^2,\ \forall\, x \in H \ (\textbf{Igualdad de Parseval}).$$

Demostración. ($\Leftarrow$) Suponga que (e_α) no es total (Hip. Aux.), entonces $(e_\alpha)^{\perp} \neq (0)$, luego existe $x \in (e_\alpha)^{\perp}$, $x \neq 0$ y por tanto $\langle x, e_\alpha \rangle = 0$, $\forall\, \alpha \in I$. Pero por hipótesis

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2 = 0$$

concluímos que $x = 0$, lo cual es una contradicción.

($\Rightarrow$) Dado $x \in H$, denotemos $y = \sum_{\alpha \in I} \langle x, e_\alpha \rangle e_\alpha = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_j} \rangle e_{\alpha_j}$ (por el Teorema 1.5.1, esta serie es convergente). No es difícil probar (¡Ejercicio!) que $x - y \in \left(e_{\alpha_j}\right)^{\perp}$. Por otro lado, para $\beta \in I - (\alpha_j)$, tenemos

$$\langle x - y, e_\beta \rangle = \langle x, e_\beta \rangle - \langle y, e_\beta \rangle = 0 - \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_j} \rangle \langle e_{\alpha_j}, e_\beta \rangle = 0$$

Se tiene entonces que $x - y \in (e_\alpha)^{\perp} = (0)$, de donde $x = y$. Finalmente

$$\begin{aligned}
\|x\|^2 &= \langle x, x \rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_k} \rangle e_{\alpha_k}, \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_j} \rangle e_{\alpha_j} \right\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_k} \rangle \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\langle x, e_{\alpha_j} \rangle} \langle e_{\alpha_k}, e_{\alpha_j} \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \langle x, e_{\alpha_k} \rangle \overline{\langle x, e_{\alpha_k} \rangle} = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, e_{\alpha_k} \rangle|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\langle x, e_\alpha \rangle|^2
\end{aligned}$$

Lo que demuestra el teroema. $\square$

Anteriormente hemos observado que en espacios de dimensión finita, la dimensión de Hilbert y la dimensión algebraica coinciden. El teorema siguiente establece que un espacio de Hilbert, de dimensión finita, separable tiene dimensión de Hilbert numerable.

Teorema 1.6.2 Sean $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert. Se cumple:

1. Si H es separable entonces todo conjunto ortonormal en H es numerable.
2. Si H tiene un subconjunto ortonormal total numerable entonces H es separable.

Demostración. 1. Sea $(e_\alpha)_{\alpha\in I}$ un conjunto ortonormal en H. Como H es separable, existe $M = (x_j) \subseteq H$ tal que $\overline{M} = H$. Sean $\alpha, \beta \in I$, con $\alpha \neq \beta$, entonces, por Pitágoras

$$\|e_\alpha - e_\beta\|^2 = \|e_\alpha\|^2 + \|e_\beta\|^2 = 2$$

Denotemos $B_\alpha = B_{\sqrt{2}/2}(e_\alpha)$. Como M es denso, para cada $\alpha \in I$ existe $x_{j_\alpha} \in B_\alpha \cap M$.

Definimos $\phi : I \to M$ por $\phi(\alpha) = x_{j_\alpha}$, afirmo que ϕ es inyectiva. En efecto, si $\alpha \neq \beta$, entonces

$$\sqrt{2} = \|e_\alpha - e_\beta\| \leq \|e_\alpha - x_{j_\alpha}\| + \|x_{j_\alpha} - x_{j_\beta}\| + \|x_{j_\beta} - e_\beta\| < \sqrt{2} + \|x_{j_\alpha} - x_{j_\beta}\|$$

de donde se sigue que $\phi(\alpha) = x_{j_\alpha} \neq x_{j_\beta} = \phi(\beta)$ lo cual prueba la afirmación. Finalmente, como M es numerable, se sigue que I es numerable.

2. Sea $M = (e_j) \subseteq H$ un conjunto ortonormal total. Afirmo que (e_j) es base de Schauder para H. En efecto, sea $x \in H$ y considero $s_n = \sum_{j=1}^{n} \langle x, e_j\rangle\, e_j$. Como (e_j) es ortonormal total, se cumple Parseval y por tanto $\sum_{j,1} |\langle x, e_j\rangle|^2$ es convergente, por la parte 1 del Teorema 1.5.1, se tiene que (s_n) es convergente, digamos a s. Fijando $k \in \mathbb{N}$, tenemos $s_{n+k} \to s$, luego $x - s_{n+k} \to x - s$ y por tanto $\lim_{n\to\infty} \langle x - s_{n+k}, e_k\rangle = \langle x - s, e_k\rangle$, pero

$$\langle x - s_{n+k}, e_k\rangle = \langle x, e_k\rangle - \left\langle \sum_{j=1}^{n+k} \langle x, e_j\rangle\, e_j, e_k \right\rangle = \langle x, e_k\rangle - \sum_{j=1}^{n+k} \langle x, e_j\rangle \langle e_j, e_k\rangle = 0, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

De esta manera $\langle x - s, e_k\rangle = 0$, $\forall\, k \in \mathbb{N}$, es decir $x - s \in M^\perp = (0)$, de donde $s = x$ y por tanto $x = \sum_{j=1}^{\infty} \langle x, e_j\rangle\, e_j$. Esto prueba que (e_j) es una base de Schauder para H y por tanto H es separable. $\square$

1.7 Representación de funcionales en espacios de Hilbert

Si H es un espacio de Hilbert, denotaremos por H^* a los funcionales lineales y por H' a los funcionales lineales acotados.

Los funcionales en espacios de Hilbert están fuertemente relacionados con el producto interno.

Teorema 1.7.1 (Riesz) Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $f \in H'$. Entonces existe un único $x_f \in H$ que cumple las dos condiciones siguientes:

1. $f(x) = \langle x, x_f \rangle$, $\forall\ x \in H$
2. $\|f\| = \|x_f\|$

Demostración. 1. *Existencia:* Si $f = 0$, basta tomar $x_f = 0$. Consideremos el caso en que $f \neq 0$, se tiene que $\mathrm{Nu}\,(f) \neq H$, luego $\mathrm{Nu}\,(f)^{\perp} \neq (0)$. Tomemos $z \in \mathrm{Nu}\,(f)^{\perp}$, $z \neq 0$.

Dado $x \in H$, considero $w = f(z)x - f(x)z \in H$. Observe que $f(w) = 0$, luego $w \in \mathrm{Nu}\,(f)$ y por tanto

$$0 = \langle w, z \rangle = \langle f(z)x - f(x)z, z \rangle = f(z)\,\langle x, z \rangle - f(x)\,\langle z, z \rangle$$

De donde $f(x) = \dfrac{f(z)}{\|z\|^2}\,\langle x, z \rangle = \left\langle x, \dfrac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \right\rangle$. Basta tomar $x_f = \dfrac{\overline{f(z)}}{\|z\|^2} z \in H$ y se tiene que $f(x) = \langle x, x_f \rangle$, $\forall\ x \in H$.

Unicidad: Suponga que existe $x_0 \in H$ tal que $f(x) = \langle x, x_0 \rangle$, $\forall\ x \in H$. Se tiene

$$\|x_0 - x_f\|^2 = \langle x_0 - x_f, x_0 - x_f \rangle = \langle x_0 - x_f, x_0 \rangle - \langle x_0 - x_f, x_f \rangle = f(x_0 - x_f) - f(x_0 - x_f) = 0$$

or tanto $x_0 = x_f$.

2. $|f(x)| = |\,\langle x, x_f \rangle\,| \leq \|x\| \cdot \|x_f\|$, $\forall\ x \in H$. Luego $\|f\| \leq \|x_f\|$

Por otro lado

$$\|f\| \geq \frac{|f(x_f)|}{\|x_f\|} = \frac{|\,\langle x_f, x_f \rangle\,|}{\|x_f\|} = \|x_f\|$$

Se sigue que $\|f\| = \|x_f\|$. □

Definición 1.7.1 Sean X, Y dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales. Una *forma sesquilineal* h sobre $X \times Y$, es un mapeo $h : X \times Y \to \mathbb{K}$ que satisface las siguientes condiciones:

1. $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$, $\forall\ x_1, x_2 \in X$, $\forall\ y \in Y$.
2. $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in Y$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$.
3. $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ y_1, y_2 \in Y$.
4. $h(x, \alpha y) = \overline{\alpha} h(x, y)$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in Y$, $\forall\ \alpha \in \mathbb{K}$.

Si $(X, \|\ \|_X)$ e $(Y, \|\ \|_Y)$ son $\mathbb{K}$-espacios normados y h es una forma sesquilineal sobre $X \times Y$, decimos que h es*acotada* si y solo si existe $C > 0$ tal que $|h(x, y)| \leq C\|x\|_X\|y\|_Y$, $\forall\ x \in X$, $\forall\ y \in Y$. En tal caso, podemos definir

$$\|h\| = \sup\left\{ \frac{|h(x, y)|}{\|x\|_X\|y\|_Y};\ x \in X - \{0\}, y \in Y - \{0\} \right\} = \sup\left\{ |h(x, y)|;\ \|x\|_X = \|y\|_Y = 1 \right\}$$

Se cumple

$$|h(x, y)| = \|h\| \cdot \|x\|_X \cdot \|y\|_Y, \quad \forall\ x \in X, \forall\ y \in Y$$

Teorema 1.7.2 (Representación de Riesz) Sean $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert y sea h una forma sesquilineal sobre $H_1 \times H_2$ acotada. Entonces existe un único $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ que cumple las dos condiciones siguientes:

1. $h(x,y) = \langle Sx, y\rangle$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$
2. $\|h\| = \|S\|$

Demostración. 1. *Existencia:* Fijemos $x \in H_1$ y definimos $f_x : H_2 \to \mathbb{K}$ como $f_x(y) = \overline{h(x,y)}$, $\forall\ y \in H_2$ No es difícil probar que f_x es lineal, además:

$$|f_x(y)| = |\overline{h(x,y)}| = |h(x,y)| \leq \|h\| \cdot \|x\|_1 \cdot \|y\|_2, \quad \forall\ y \in H_2$$

Luego $f_x \in H_2'$, por Riesz, debe existir un único $y_x \in H_2$ tal que

$$f_x(y) = \langle y, y_x\rangle_2\,, \quad \forall\ y \in H_2, \qquad \text{y} \qquad \|f_x\| = \|y_x\|_2$$

Defino $S : H_1 \to H_2$ por $S(x) = y_x$. Se cumplen

$$\begin{aligned}
\langle S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2), y\rangle_2 &= \langle y_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}, y\rangle_2 = \overline{\langle y, y_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}\rangle_2} = \overline{f_{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2}(y)} = h(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) \\
&= \alpha_1 h(x_1, y) + \alpha_2 h(x_2, y) = \alpha_1 \overline{f_{x_1}(y)} + \alpha_2 \overline{f_{x_2}(y)} = \alpha_1 \overline{\langle y, y_{x_1}\rangle_2} + \alpha_2 \overline{\langle y, y_{x_2}\rangle_2} \\
&= \alpha_1 \langle y_{x_1}, y\rangle_2 + \alpha_2 \langle y_{x_2}, y\rangle_2 = \alpha_1 \langle S(x_1), y\rangle_2 + \alpha_2 \langle S(x_2), y\rangle_2
\end{aligned}$$

Por tanto $S(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 S(x_1) + \alpha_2 S(x_2)$, $\forall\ x_1, x_2 \in H_1$, $\forall\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$

Por otro lado

$$\|S(x)\|_2^2 = \langle S(x), S(x)\rangle_2 = |f_x(S(x))| = |h(x, S(x))| \leq \|h\| \cdot \|x\|_1 \cdot \|S(x)\|_2$$

de donde $\|S(x)\|_2 \leq \|h\| \cdot \|x\|_1$, $\forall\ x \in H_1$

De esta manera $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $\|S\| \leq \|h\|$ y

$$h(x,y) = \overline{f_x(y)} = \overline{\langle y, y_x\rangle_2} = \langle Sx, y\rangle_2\,, \quad \forall\ x \in H_1, \forall\ y \in H_2$$

Unicidad: Suponga que existe $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ tal que $\langle T(x), y\rangle_2 = h(x,y)$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$. Luego $\langle T(x), y\rangle_2 = \langle S(x), y\rangle_2$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$. Se sigue que $T(x) = S(x)$, $\forall\ x \in H_1$ y por tanto $T = S$.

2.) $|h(x,y)| = |\,\langle S(x), y\rangle_2\,| \leq \|S(x)\|_2 \cdot \|y\|_2 \leq \|S\| \cdot \|x\|_1 \cdot \|y\|_2$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$.

Se sigue que $\|h\| \leq \|S\|$. □

1.8 El operador adjunto de Hilbert

Definición 1.8.1 Sean $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert y sea $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. El *Adjunto de* T, es el operador $T^* : H_2 \to H_1$ definido por

$$\langle T(x), y\rangle_2 = \langle x, T^*(y)\rangle_1\,, \quad \forall\ x \in H_1, \forall\ y \in H_2$$

El siguiente resultado muestra que todo operador T entre espacios de Hilbert, admite su adjunto.

Teorema 1.8.1 Sean $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert. Dado $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, existe un único $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_1)$ que satisface:

1. $\langle T(x), y\rangle_2 = \langle x, T^*(y)\rangle_1$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$
2. $\|T\| = \|T^*\|$

Demostración. Defino $h : H_2 \times H_1 \to \mathbb{K}$ como $h(y,x) = \langle y, T(x)\rangle_2$.

Es claro que h es sesquilineal. Por otro lado

$$|h(y,x)| = |\langle y, T(x)\rangle_2| \leq \|y\|_2 \cdot \|T(x)\|_1 \leq \|T\| \cdot \|y\|_2 \cdot \|x\|_1, \quad \forall\ x \in H_1, \forall\ y \in H_2$$

De aquí, se sigue que h es acotado y $\|h\| \leq \|T\|$.

Más aún:

$$\|T(x)\|_2^2 = \langle T(x), T(x)\rangle_2\, 0 h(T(x), x) \leq |h(T(x), x)| \leq \|h\| \cdot \|T(x)\|_2 \cdot \|x\|_1$$

De donde $T(x)\|_2 \leq \|h\| \cdot \|x\|_1$, $\forall\ x \in H_1$ y por tanto $\|T\| \leq \|h\|$.

De esta manera h es una forma sesquilineal, acotada sobre $H_2 \times H_1$ y $\|h\| = \|T\|$. Por el Teorema de representación de Riesz: Existe un único $S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ tal que :

$$h(y,x) = \langle S(y), x\rangle_1, \quad \forall\ x \in H_1, \forall\ y \in H_2 \qquad \text{y} \qquad \|h\| = \|S\|$$

luego

$$\langle x, S(y)\rangle_1 = \overline{\langle S(y), x\rangle_1} = \overline{h(y,x)} = \overline{\langle y, T(x)\rangle_2} = \langle T(x), y\rangle_2, \quad \forall\ x \in H_1, \forall\ y \in H_2$$

Basta tomar $T^* = S$. □

Observación: Si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m) = \mathcal{B}(\mathbb{K}^n, \mathbb{K}^m)$ y A es la matriz asociada a T entonces A^t es la matriz asociada a $T^* \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n) = \mathcal{B}(\mathbb{K}^m, \mathbb{K}^n)$.

Para algunas demostrar propiedades del operador adjunto, necesitamos un lema previo.

Lema 1.8.1 Sean $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios vectoriales con producto interno y $Q \in \mathcal{B}(X_1, X_2)$, se cumplen:

1. $Q = 0$ si y solo si $\langle Q(x), y\rangle_2 = 0$, $\forall\ x \in X_1$, $\forall\ y \in X_2$.
2. Si $Q \in \mathcal{B}(X_1)$ y $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, se tiene que: $\langle Q(x), x\rangle_1 = 0$, $\forall\ x \in X_1$ entonces $Q = 0$

Demostración. 1. $(\Rightarrow)$ ¡Obvio!

$(\Leftarrow)$ $\|Q(x)\|_2^2 = \langle Q(x), Q(x)\rangle_2 = 0$, luego $Q(x) = 0$, $\forall\ x \in X_1$. Se sigue que $Q = 0$.

2. Sean $\alpha \in \mathbb{C}$, $x, y \in X_1$, se cumple:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle Q(x+\alpha y), x + \alpha y\rangle_1 = \langle Q(x), x\rangle_1 + \overline{\alpha}\langle Q(x), y\rangle_1 + \alpha\langle Q(y), x\rangle_1 + |\alpha|^2\langle Q(y), y\rangle_1 \\ &= \overline{\alpha}\langle Q(x), y\rangle_1 + \alpha\langle Q(y), x\rangle_1 \end{aligned}$$

Tomando $\alpha = 1$: $\langle Q(x), y\rangle_1 + \langle Q(y), x\rangle_1 = 0$
Tomando $\alpha = i$: $-i\,\langle Q(x), y\rangle_1 + i\,\langle Q(y), x\rangle_1 = 0$
Se sigue que $2\,\langle Q(x), y\rangle_1 = 0$, $\forall\ x, y \in H_1$, de donde se sigue el resultado. $\square$

Teorema 1.8.2 Sean $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$ y $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ dos $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert, sean $T, S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. $(S + T)^* = S^* + T^*$
2. $(\alpha T)^* = \overline{\alpha} T^*$
3. $(T^*)^* = T$
4. $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.
5. $T^*T = 0$ si y solo si $T = 0$.

Demostración. 1. Sean $T, S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, entonces $T + S \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, luego existe un único $(T+S)^* \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ tal que $\langle (T+S)(x), y\rangle_2 = \langle x, (T+S)^*(y)\rangle_1$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$.

Por otro lado

$$\begin{aligned} \langle (T+S)^*(y), x\rangle_1 &= \langle y, (T+S)(x)\rangle_2 = \langle y, T(x) + S(x)\rangle_2 = \langle y, T(x)\rangle_2 + \langle y, S(x)\rangle_2 \\ &= \langle T^*(y), x\rangle_1 + \langle S^*(y), x\rangle_1 = \langle (T^* + S^*)(y), x\rangle_1\,, \quad \forall\ x \in H_1 \end{aligned}$$

Concluímos que $(T+S)^*(y) = (T^* + S^*)(y)$, $\forall\ y \in H_2$.

2. Sean $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces $\alpha T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$, luego existe un único $(\alpha T)^* \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ tal que $\langle (\alpha T)(x), y\rangle_2 = \langle x, (\alpha T)^*(y)\rangle_1$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$.

Observe que

$$\langle (\alpha T)^*(y), x\rangle_1 = \langle y, (\alpha T)(x)\rangle_2 = \langle y, \alpha T(x)\rangle_2 = \overline{\alpha}\,\langle y, T(x)\rangle_2 = \overline{\alpha}\,\langle T^*(y), x\rangle_1 = \langle \overline{\alpha} T^*(y), x\rangle_1\,, \quad \forall\ x \in H_1$$

Concluímos que $(\alpha T)^*(y) = (\overline{\alpha} T^*)(y)$, $\forall\ y \in H_2$.

3. Como $T^* \in \mathcal{B}(H_2, H_2)$, existe un único $T^{**} = (T^*)^* \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ tal que $\langle T^*(y), x\rangle_1 = \langle y, (T^*)^*(x)\rangle_2$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_2$.

Pero

$$\langle T^{**}(y), x\rangle_2 = \langle x, T^*(y)\rangle_1 = \langle T(x), y\rangle_2\,, \quad \forall\ y \in H_2$$

Se sigue que $T^{**}(x) = T(x)$, $\forall\ x \in H_1$.

4. Claramente $\|T^*T\| \leq \|T^*\| \cdot \|T\| = \|T\|^2$. Por otro lado:

$$\|T(x)\|_2^2 = \langle T(x), T(x)\rangle_2 = \langle x, T^{**}(T(x))\rangle_2 \leq \|x\|_1 \cdot \|(T^*T)(x)\|_1 \leq \|T^*T\| \cdot \|x\|_1^2, \quad \forall\ x \in H_1$$

De donde $\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$.

5. $T^*T = 0$ si y solo si $\|T^*T\| = 0$ si y solo si $\|T\|^2 = 0$ si y solo si $T = 0$. $\square$

Teorema 1.8.3 Sean $(H_1, \langle\ ,\ \rangle_1)$, $(H_2, \langle\ ,\ \rangle_2)$ y $(H_3, \langle\ ,\ \rangle_2)$ tres $\mathbb{K}$-espacios de Hilbert, sean $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$. Entonces $(ST)^* \in \mathcal{B}(H_3, H_)$ y $(ST)^* = T^*S^*$.

Demostración. Como $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ y $S \in \mathcal{B}(H_2, H_3)$ entonces $ST \in \mathcal{B}(H_1, H_3)$, luego existe un único $(ST)^* \in \mathcal{B}(H_3, H_1)$ tal que $\langle (ST)(x), y\rangle_3 = \langle x, (ST)^*(y)\rangle_1$, $\forall\ x \in H_1$, $\forall\ y \in H_3$.

Pero

$$\langle (ST)^*(y), x\rangle_1 = \langle y, (ST)(x)\rangle_3 = \langle y, S(T(x))\rangle_3 = \langle S^*(y), T(x)\rangle_2 = \langle T^*(S^*(y)), x\rangle_1, \quad \forall\ x \in H_1$$

Se sigue que $(ST)^*(y) = (T^*S^*)(y)$, $\forall\ y \in H_3$. $\square$

1.9 Operadores autoadjuntos, unitarios y normales

Definición 1.9.1 Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$.

1. Decimos que T es *Autoadjunto* (o *Hermitiano* si y solo si $T^* = T$.
2. Decimos que T es *Unitario* si y solo si T es biyectivo y $T^{-1} = T^*$.
3. Decimos que T es *Normal* si y solo si $TT^* = T^*T$.

Lema 1.9.1 Sea $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ un $\mathbb{K}$-espacio de Hilbert y $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$. SI T es autoadjunto o T es unitario entonces T es normal

Demostración. Si T es autoadjunto entonces $T^* = T$, luego $TT^* = T^2 = T^*T$, luego T es normal.

Si T es unitario entonces T es inversible y $T^{-1} = T^*$, luego $TT^* = TT^{-1} = I = T^{-1}T = T^*T$, por tanto T es normal. $\square$

Observación: El recíproco del Lema anterior es falso. Existen operadores normales que no son ni autoadjuntos no unitarios. Por ejemplo $T = 2iI$, en efecto, como $T^* = -2iI$, tenemos

T es normal: $TT^* = 4I = T^*T$.

T no es autoadjunto $T^* = -2iI \neq 2iI = T$.

T no es unitario $T^{-1} = \dfrac{1}{2i}T \neq T$.

Capítulo 1

Los Teoremas Básicos del Análisis Funcional

1.1 El Lema de Zorn

Definición 1.1.1 Un *conjunto parcialmente ordenado* es un par $(M, \preceq)$ donde M es un conjunto no vacío y "$\preceq$" es una *relación de orden parcial*, es decir una relación binaria en M la cual satisface las siguientes condiciones:

i) $a \preceq a$, $\forall\, a \in M$ (reflexividad).

ii) Si $a \preceq b$ y $b \preceq a$ entonces $a = b$ (antisimetría).

iii) Si $a \preceq b$ y $b \preceq c$ entonces $a \preceq c$ (transitividad).

Ejemplo 1.1.1 Sea $M = \mathbb{Z}^+$, definimos la relación binaria "$\preceq$" de la siguiente manera

$$a, b \in \mathbb{Z}^+,\ a \preceq b \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}^+ \text{ tal que } b = ka \quad (\text{es decir } a\text{"divide a" } b).$$

No es difícil probar que $(\mathbb{Z}^+, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Ejemplo 1.1.2 En $M = \mathbb{R}^2$, definimos la relación binaria "$\preceq$" por:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2,\ (x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \Longleftrightarrow x_1 \leq x_2 \text{ y } y_1 \leq y_2.$$

Queda como ejercicio para el lector verificar que $(\mathbb{R}^2, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Definición 1.1.2 Sea $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y C un subconjunto no vacío de M. Decimos que C es un *conjunto totalmente ordenado* o una *cadena* si y sólo si para cualquier par $a, b \in C$ se tiene que $a \preceq b$ ó $b \preceq a$.

Ejemplo 1.1.3 Sea $(\mathbb{Z}^+, \preceq)$ el conjunto parcialmente ordenado del Ejemplo 1.1.1 y considérese los subconjuntos $C_1 = \{1, 2, 4, 6\}$, $C_2 = \{3, 9, 18\}$ y $C_3 = \{$ números pares $\}$. Se sigue que C_2 es una cadena mientras que C_1 y C_3 no lo son.

Ejemplo 1.1.4 Sea $(\mathbb{R}^+, \preceq)$ el conjunto parcialmente ordenado del Ejemplo 1.1.2 y considérese los subconjuntos $C_1 = \{(r, 2r) : r \in \mathbb{R}\}$, $C_2 = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, y $C_3 = \{(r, r) : r \in [-1, 1]\}$. Se sigue que C_1 y C_3 son cadenas pero C_2 no lo es.

Definición 1.1.3 Sea $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado y N un subconjunto no vacío de M. Una *cota superior* o *mayorante* para N es un elemento $u \in M$ tal que $x \preceq u$, $\forall\, x \in N$.

Ejemplo 1.1.5 Con referencia al Ejemplo 1.1.3, 12 es una cota superior de C_1 (observe que $12 \notin C_1$), 18 es una cota superior para C_2 (observe que $18 \in C_2$) y C_3 no tiene cota superior.

Ejemplo 1.1.6 Con respecto al Ejemplo 1.1.4, C_1 y C_2 no tienen cota superior y $(1, 1)$ es una cota superior para C_3.

Definición 1.1.4 Sea $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Decimos que $m \in M$ es un *elemento maximal* de M si y sólo si para todo $x \in M$ tal que $m \preceq x$ se tiene $x = m$.

Lema de Zorn Sea $(M, \preceq)$ un conjunto parcialmente ordenado tal que toda cadena de M admite una cota superior entonces M tiene al menos un elemento maximal.

1.2 El Teorema de Hahn-Banach

Definición 1.2.1 Sea X es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, un *funcional sub-lineal* es una aplicación $p : X \to \mathbb{R}$ que satisface las dos siguientes propiedades:

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall\ x, y \in X$.

ii) $p(\lambda x) = \lambda p(x)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{R}^+$, $\forall\ x \in X$.

Observación: En un espacio normado, la norma es un funcional sublineal.

Teorema 1.2.1 (Teorema de Hahn-Banach) Sea X es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional sublineal. Si W es un subespacio vectorial de X y $f : W \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal que satisface

$$f(x) \leq p(x), \quad \forall\ x \in W$$

entonces existe un funcional lineal $F : X \to \mathbb{R}$ tal que

i) $F(x) = f(x)$, $\forall\ x \in W$ (i. e. F extiende a f).

ii) $F(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$.

Demostración. Denotemos por M al conjunto de todas las funciones $g : \mathcal{D}(g) \subseteq X \to \mathbb{R}$ que satisfacen las siguientes propiedades:

i) $\mathcal{D}(g)$ es un subespacio vectorial de X.

ii) g es lineal.

iii) $W \subseteq \mathcal{D}(g)$.

iv) g extiende a f (i.e. $g(x) = f(x)$, $\forall\, x \in W$).

v) $g(x) \leq p(x)$, $\forall\, x \in \mathcal{D}(g)$.

Es claro que $f \in M$, luego $M \neq \emptyset$. En M definimos la relación $\preceq$ de la siguiente manera: Sean $g_1, g_2 \in M$

$$g_1 \preceq g_2 \Longleftrightarrow \mathcal{D}(g_1) \subseteq \mathcal{D}(g_2) \quad \text{y} \quad g_2(x) = g_1(x), \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(g_1)$$

No es difícil ver que $(M, \preceq)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

Sea $C = \{g_i\}_{i \in I}$ una cadena en M, defino el conjunto $\mathcal{D} = \bigcup\limits_{i \in I} \mathcal{D}(g_i)$ y la función $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ como $g(x) = g_i(x)$, siempre que $x \in \mathcal{D}(g_i)$. Como C es una cadena, se tiene que $\mathcal{D}$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y g es un funcional lineal bien definido. Además es fácil ver que, $g \in M$ y $g_i \preceq g$, $\forall\, i \in I$. Luego g es una cota superior para C. Por el Lema de Zorn, existe $F \in M$ elemento maximal. Resta probar que $\mathcal{D}(F) = V$. Procediendo por contradicción, supongamos que $\mathcal{D}(F) \subset V$ (Hip. Aux.) luego existe $x_0 \in V$ tal que $x_0 \notin \mathcal{D}(F)$. Definimos

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(F) + \mathcal{L}(\{x_0\})$$

es decir

$$y \in \mathcal{D}_0 \Longleftrightarrow \exists\, x \in \mathcal{D}(F) \text{ y } \exists\, \lambda \in \mathbb{R} \text{ tal que } y = x + \lambda x_0$$

Definimos también la función $F_0 : \mathcal{D}_0 \to \mathbb{R}$ como

$$F_0(x + \lambda x_0) = F(x) + \lambda c$$

donde $c \in \mathbb{R}$ es arbitrario a ser elegido dentro de poco. Es claro que F_0 es un funcional lineal que extiende a F. Vamos a demostrar que $F_0 \in M$ lo cual entraría en contradicción con la maximalidad de F. Para ello es suficiente probar que $F_0(y) \leq p(y)$, $\forall\, y \in \mathcal{D}_0$.

Primeramente, dados $a, b \in \mathcal{D}(F)$ se cumple:

$$F(a) - F(b) = F(a - b) \leq p(a - b) = p(a + x_0 - b - x_0) \leq p(a + x_0) + p(-b - x_0)$$

luego

$$-p(-b - x_0) - F(b) \leq p(a + x_0) - F(a), \quad \forall\, a, b \in \mathcal{D}(F)$$

por tanto

$$m_0 = \sup\{-p(-b - x_0) - F(b);\, b \in \mathcal{D}(F)\} \leq \inf\{p(a + x_0) - F(a);\, a \in \mathcal{D}(F)\} = m_1$$

De esta manera, escogemos $c \in \mathbb{R}$ tal que $m_0 \leq c \leq m_1$.

Dado $y = x + \lambda x_0 \in \mathcal{D}_0$ tenemos dos posibilidades:

Caso 1: $\lambda < 0$. Como $-p(-b - x_0) - F(b) \leq c$, $\forall\, b \in \mathcal{D}(F)$, para $b = \lambda^{-1} x$ tenemos

$$-p(-\lambda^{-1} x - x_0) - F(\lambda^{-1} x) \leq c$$

multiplicando por $-\lambda$ tenemos

$$\lambda p(-\lambda^{-1}x - x_0) + \lambda F(\lambda^{-1}x) \leq c(-\lambda)$$

luego

$$F_0(y) = F(x) + \lambda c \leq -\lambda p(-\lambda^{-1}x - x_0) = p(x + \lambda x_0) = p(y)$$

Caso 2: $\lambda > 0$. Como $c \leq p(a + x_0) - F(a)$, $\forall\ a \in \mathcal{D}(F)$, para $a = \lambda^{-1}x$ tenemos

$$c \leq p(\lambda^{-1}x + x_0) - F(\lambda^{-1}x)$$

y multiplicando por λ se llega a

$$\lambda c \leq \lambda p(\lambda^{-1}x + x_0) - \lambda F(\lambda^{-1}x)$$

luego

$$F_0(y) = F(x) + \lambda c \leq \lambda p(-\lambda^{-1}x + x_0) = p(x + \lambda x_0) = p(y)$$

En cualquier caso, hemos probado que $F_0(y) \leq p(y)$, $\forall\ y \in \mathcal{D}_0$ y por tanto $F_0 \in M$ con $F \preceq F_0$ lo cual es una contradicción. $\square$

1.3 El Teorema de Hahn-Banach para espacios vectoriales complejos y espacios normados

Originalmente, Banach en su libro "*Opérations linéaires*" enunció y demostró el teorema de extensión de operadores, para el caso de espacios vectoriales reales. Posteriormente, el teorema fue generalizado a espacios vectoriales complejos por Bohnenblust y Sobczyk en 1938.

Teorema 1.3.1 (Teorema de Hahn-Banach Generalizado) Sea X es un $\mathbb{K}$-espacio vectorial ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$) y $p : X \to \mathbb{R}$ un funcional que satisface las dos siguientes propiedades:

i) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall\ x, y \in X$.

ii) $p(\lambda x) = |\lambda| p(x)$, $\forall\ \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall\ x \in X$.

Si W es un subespacio vectorial de X y $f : W \to \mathbb{K}$ es un funcional lineal que satisface

$$|f(x)| \leq p(x), \quad \forall\ x \in W$$

entonces existe un funcional lineal $F : X \to \mathbb{K}$ tal que

i) $F(x) = f(x)$, $\forall\ x \in W$ (i. e. F extiende a f).

ii) $|F(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$.

Demostración. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces es claro que $p : X \to \mathbb{R}$ es sublineal y $f(x) \leq |f(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in W$. Por el Teorema de Hahn-Banach, existe un funcional lineal $F : X \to \mathbb{K}$ que extiende a f y satisface $F(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$. En particular $-F(x) = F(-x) \leq p(-x)$, es decir $p(x) \geq F(x) \geq -p(x)$, $\forall\ x \in X$, lo cual prueba el resultado.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, entonces podemos escribir $f = f_1 + if_2$, donde $f_1, f_2 : W \to \mathbb{R}$ son la parte real e imaginaria de f. Es claro que W puede ser considerado como $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Afirmación 1: $f_1, f_2 : W \to \mathbb{R}$ son $\mathbb{R}$-lineales. En efecto, sean $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in W$. Se cumple:

$$\begin{aligned} f_1(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) + if_2(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) &= f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \\ &= \lambda_1 \left(f_1(x_1) + if_2(x_1)\right) + \lambda_2 \left(f_1(x_2) + if_2(x_2)\right) \\ &= \lambda_1 f_1(x_1) + \lambda_2 f_1(x_2) + i \left(\lambda_1 f_2(x_1) + \lambda_2 f_2(x_2)\right) \end{aligned}$$

De donde se deduce la Afirmación 1.

Por otro lado, $f_1(x) \leq |f_1(x)| \leq |f(x)| \leq p(x)$, $\forall\ x \in W$, en donde p es sublineal. Por Hahn-Banach, existe $F_1 : X \to \mathbb{R}$ lineal, que extiende a f_1 y $F_1(x) \leq p(x)$, $\forall\ x \in X$.

Observe que

$$f_1(ix) + if_2(ix) = f(ix) = if(x) = i\left(f_1(x) + if_2(x)\right) = -f_2(x) + if_1(x), \quad \forall\ x \in W$$

De lo anterior, se concluye que $f_2(x) = -f_1(ix)$ y esto nos induce a definir el operador $F : X \to \mathbb{C}$ como

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix), \quad \forall\ x \in X$$

Afirmación 2: F extiende a f. En efecto, sea $x \in W$ entonces $ix \in W$, luego:

$$F(x) = F_1(x) - iF_1(ix) = f_1(x) - if_1(ix) = f_1(x) + if_2(x) = f(x), \quad \forall\ x \in X$$

lo que demuestra la Afirmación 2.

Afirmación 3: F es lineal. En efecto, sean $x, y \in X$:

$$\begin{aligned} F(x+y) &= F_1(x+y) - iF_1(ix+iy) = F_1(x) + F_1(y) - i\left(F_1(ix) + F_1(iy)\right) \\ &= \left(F_1(x) - iF_1(ix)\right) + \left(F_1(y) - iF_1(iy)\right) = F(x) + F(y) \end{aligned}$$

Por otro lado, sea $x \in X$ y $a + ib \in \mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} F((a+ib)x) &= F_1((a+ib)x) - iF_1(i(a+ib)x) = F_1(ax+ibx) - iF_1(-bx+iax) \\ &= aF_1(x) + bF_1(ix) + ibF_1(x) - iaF_1(ix) = (a+ib)F_1(x) + (b-ia)F_1(ix) \\ &= (a+ib)(F_1(x) - iF_1(ix)) = (a+ib)F(x) \end{aligned}$$

lo cual demuestra la Afirmación 3.

Finalmente, sea $x \in X$, entonces $F(x) = |F(x)|e^{i\theta}$, luego:

$$|F(x)| = e^{-i\theta}F(x) = \underbrace{F\left(e^{-i\theta}x\right)}_{\in \mathbb{R}} = F_1\left(e^{-i\theta}x\right) \leq p\left(e^{-i\theta}x\right) = \left|e^{-i\theta}\right| p(x) = p(x)$$

lo que demuestra el teorema. $\square$

Vamos a estudiar algunas consecuencias del Teorema de Hahn-Banach en espacios normados. Sea $(V, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$)y $f : V \to \mathbb{K}$ un funcional lineal. Decimos que f es *acotado* si y sólo si existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C\|x\|$, $\forall\, x \in V$.

Observación: Sea $(V, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y $f : V \to \mathbb{K}$ un funcional lineal. f es acotado si y sólo si f es continuo.

El *dual topológico* de V, denotado por V' se define como

$$V' = \{f : V \to \mathbb{K};\ f \text{ es lineal y acotado}\}$$

Es posible dar a V' una estructura de espacio normado. En efecto, dado $f \in V'$, definimos

$$\|f\|_{V'} = \sup\{|f(x)|;\ x \in V \text{ con } \|x\| = 1\}$$

En cursos introductorios de análisis funcional, se muestra que $(V', \| \ \|_{V'})$ es un espacio de Banach.

Teorema 1.3.2 Sea $(V, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado y W un subespacio vectorial de V. Si $f \in W'$ entonces existe $F \in V'$ que extiende a f y tal que $\|F\|_{V'} = \|f\|_{W'}$.

Demostración. Consideremos $p : V \to \mathbb{R}$ definido por

$$p(x) = \|f\|_{W'}\|x\|$$

Claramente p es un funcional que satisface las dos condiciones del Teorema de Hahn-Banach generalizado y además

$$|f(x)| \leq \|f\|_{W'}\|x\| = p(x), \quad \forall\, x \in W$$

Por Hahn-Banach generalizado, existe $F : V \to \mathbb{R}$ funcional lineal, que extiende a f, y tal que

$$|F(x)| \leq \|f\|_{W'}\|x\|, \quad \forall\, x \in V$$

Se sigue que $F \in V'$. Además, tomando $x \in V$ de norma 1 se tiene que $|F(x)| \leq \|f\|_{W'}$, luego $\|F\|_{V'} \leq \|f\|_{W'}$. Finalmente, desde que F extiende a f se tiene que $\|F\|_{V'} \geq \|f\|_{W'}$. Esto prueba el teorema. $\square$

Teorema 1.3.3 Sea $(V, \| \ \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado, dado $x_0 \in V$, existe $f_0 \in V'$ (dependiente de x_0) tal que $f_0(x_0) = \|x_0\|^2$ y $\|f_0\|_{V'} = \|x_0\|$.

Demostración. Definamos $f : \mathcal{L}(\{x_0\}) \to \mathbb{K}$ como $f(\lambda x_0) = \lambda\|x_0\|^2$. Claramente f es lineal, además observe que para $x = \lambda x_0 \in \mathcal{L}(\{x_0\}) = W$, se tiene

$$|f(x)| = |f(\lambda x_0)| = \left|\lambda\|x_0\|^2\right| = |\lambda|\|x_0\|^2 = \|x_0\| \cdot \|x\|, \quad \forall\, x \in W$$

Concluimos que $f \in W'$ y $\|f\|_{W'} = \|x_0\|$. Por el Teorema 1.3.2, existe $f_0 \in V'$, que extiende a f, tal que $\|f\|_{V'} = \|x_0\|$ y $f_0(x_0) = \|x_0\|^2$. $\square$

Teorema 1.3.4 Sea $(V, \| \, \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado, dado $x \in V$ se cumple

$$\|x\| = \sup\{|f(x)|;\ f \in V', \|f\|_{V'} = 1\} = \max\{|f(x)|;\ f \in V', \|f\|_{V'} = 1\}$$

Demostración. Dado $x \in V$, $x \neq 0$, se cumple

$$|f(x)| \leq \|f\|_{V'}\|x\| = \|x\|, \quad \forall\ f \in V' \text{ con } \|f\|_{V'} = 1$$

De esta manera

$$\sup\{|f(x)|;\ f \in V', \|f\|_{V'} = 1\} \leq \|x\|$$

Por otro lado, del Teorema 1.3.3, existe $f_0 \in V'$ tal que $f_0(x) = \|x\|^2$ y $\|f_0\|_{V'} = \|x\|$. Considero $f = \dfrac{1}{\|x\|} f_0 \in V'$, se cumple que $\|f\|_{V'} = 1$ y $f(x) = \|x\|$, así $\|x\| = \max\{|f(x)|;\ f \in V', \|f\|_{V'} = 1\}$. □

Corolario. Sea $(V, \| \, \|)$ un $\mathbb{K}$-espacio vectorial normado. Si $x \in V$ es tal que $f(x) = 0$, $\forall\ f \in V'$ entonces $x = 0$.

1.4 Adjunto de un operador acotado en espacios normados

Sean $(X, \| \, \|_X)$ y $(Y, \| \, \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados y consideremos $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. Nos proponemos asociar a T un operador $T^\times \in \mathcal{B}(Y', X')$ que conserve algunas de las propiedades del operador adjunto para espacios de Hilbert. Procedemos de la siguiente manera:

Para $g \in Y'$, definimos $f_g = g \circ T : X \to \mathbb{K}$. Es claro que f_g es lineal, por otro lado

$$|f_g(x)| = |g(T(x))| \leq \|g\|_{Y'}\|T(x)\|_Y \leq \|g\|_{Y'}\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \cdot \|x\|_X, \quad \forall\ x \in X$$

Luego $f_g \in X'$ y además $\|f_g\|_{X'} \leq \|g\|_{Y'}\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$, $\forall\ g \in Y'$.

De esta manera, a cada $g \in Y'$, le hemos asociado un $f_g \in X'$.

Definición 1.4.1 Sean $(X, \| \, \|_X)$ y $(Y, \| \, \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$. El *adjunto* de T, denotado por $T^\times$ es el operador $T^\times : Y' \to X'$ definido por $T^\times(g) = g \circ T$.

Proposición 1.4.1 Si $(X, \| \, \|_X)$ y $(Y, \| \, \|_Y)$ son $\mathbb{K}$-espacios normados y $T \in \mathcal{B}(X, Y)$ entonces $T^\times \in \mathcal{B}(Y', X')$ y $\|T^\times\|_{\mathcal{B}(Y',X')} = \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$.

Demostración. Sean $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ y $g_1, g_2 \in Y'$, se cumple

$$\begin{aligned}
\left[T^\times(\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)\right](x) &= (\alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2)(T(x)) \\
&= \alpha_1 g_1(T(x)) + \alpha_2 g_2(T(x)) = \left[\alpha_1 (g_1 \circ T) + \alpha_2 (g_2 \circ T)\right](x) \\
&= \left[\alpha_1 T^\times(g_1) + \alpha_2 T^\times(g_2)\right](x), \quad \forall\ x \in X
\end{aligned}$$

Luego $T^\times$ es lineal. Además sabemos que

$$\|T^\times(g)\|_{X'} = \|g \circ T\|_{X'} \leq \|g\|_{Y'}\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}, \quad \forall\ g \in Y'.$$

Se sigue que $T^\times \in \mathcal{B}(Y',X')$ y $\|T^\times\|_{\mathcal{B}(Y',X')} \leq \|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)}$.

Por último, sea $x_0 \in X$ entonces $T(x_0) \in Y$. Por el Teorema 1.3.3 (el cual es una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach generalizado) existe $g_0 \in Y'$ tal que $g_0(T(x_0)) = \|T(x_0)\|_Y^2$ y $\|g_0\|_{Y'} = \|T(x_0)\|_Y$, luego

$$\begin{aligned} \|T(x_0)\|_Y^2 &= g_0(T(x_0)) = T^\times(g_0)(x_0) \leq \left|T^\times(g_0)(x_0)\right| \leq \|T^\times(g_0)\|_{X'}\|x_0\|_X \\ &\leq \|T^\times\|_{\mathcal{B}(Y',X')}\|g_0\|_{Y'}\|x_0\|_X = \|T^\times\|_{\mathcal{B}(Y',X')}\|T(x_0)\|_Y\|x_0\|_X \end{aligned}$$

Se sigue que $\|T(x_0)\|_Y \leq \|T^\times\|_{\mathcal{B}(Y',X')}\|x_0\|_X$, $\forall\, x_0 \in X$, luego $\|T\|_{\mathcal{B}(X,Y)} \leq \|T^\times\|_{\mathcal{B}(Y',X')}$. □

Observación: Sea $T \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^m,\mathbb{K}^n)$, del álgebra lineal sabemos que si fijamos bases en $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ entonces T es representado por una matriz $A \in \mathbb{K}^{n\times m}$. De acuerdo a lo anterior, podemos definir el adjunto $T^\times \in \mathcal{L}((\mathbb{K}^n)',(\mathbb{K}^m)')) \approx \mathcal{L}(\mathbb{K}^n,\mathbb{K}^m)$. No es difícil probar que la matriz asociada a $T^\times$ es $A^t \in \mathbb{K}^{m\times n}$. En efecto, sean $\{u_1,\ldots u_m\}$ y $\{v_1,\ldots,v_n\}$ las bases de $\mathbb{K}^m$ y $\mathbb{K}^n$ respectivamente y sean $\{f_1,\ldots,f_m\}$ y $\{g_1,\ldots,g_n\}$ las respectivas bases duales. Suponga que $A = [a_{ij}] \in \mathbb{K}^{n\times m}$ y $B = [b_{kl}] \in \mathbb{K}^{m\times n}$ son las matrices que representan a T y $T^\times$, respectivamente, es decir

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}v_j, \quad 1 \leq i \leq m \quad \text{y} \quad T^\times(g_k) = \sum_{l=1}^{m} b_{lk}f_l, \quad 1 \leq k \leq n$$

Para establecer una relacion entre las matrices A y B, observe que

$$T^\times(g_j)(u_i) = g_j(T(u_i)) = g_j\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki}v_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}g_j(v_k) = a_{ji}$$

Por otro lado

$$\left(\sum_{l=1}^{m} b_{lj}f_l\right)(u_i) = \sum_{l=1}^{m} b_{lj}f_l(u_i) = b_{ij}$$

Se sigue que $b_{ij} = a_{ji}$ por tanto $B = A^t$.

Proposición 1.4.2 Si $(X,\|\ \|_X)$ e $(Y,\|\ \|_Y)$ son $\mathbb{K}$-espacios normados, $T_1,T_2 \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $\alpha_1,\alpha_2 \in \mathbb{K}$ entonces

$$(\alpha_1T_1 + \alpha_2T_2)^\times = \alpha_1T_1^\times + \alpha_2T_2^\times$$

Demostración. Evidente de la definición. □

Proposición 1.4.3 Si $(X,\|\ \|_X)$, $(Y,\|\ \|_Y)$ y $(Z,\|\ \|_Z)$ son $\mathbb{K}$-espacios normados, $T_1 \in \mathcal{B}(X,Y)$ y $T_2 \in \mathcal{B}(Y,Z)$ entonces

$$(T_2 \circ T_1)^\times = T_1^\times \circ T_2^\times$$

Demostración. Evidente de la definición. □

En lo sucesivo, denotaremos por I_X al operador identidad, es decir $I_X(x) = x$, $\forall\, x \in X$. Es claro que $I_E \in \mathcal{B}(X)$.

Proposición 1.4.4 Sean $(X, \| \|_X)$ y $(Y, \| \|_Y)$ dos $\mathbb{K}$-espacios normados. Se cumple:

1. $I_X^\times = I_{X'}$.
2. Si $T \in \mathcal{B}(X,Y)$ es inversible y $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$ entonces $T^\times \in \mathcal{B}(Y',X')$ es inversible, $(T^\times)^{-1} \in \mathcal{B}(X',Y')$ y $(T^\times)^{-1} = (T^{-1})^\times$.

Demostración. 1) Para $g \in X'$ tenemos

$$\left[I_X^\times(g)\right](x) = g(I_X(x)) = g(x), \quad \forall\, x \in X$$

luego $I_X^\times(g) = g = I_{X'}(g)$.

2) Por hipótesis existe $T^{-1} \in \mathcal{B}(Y,X)$ y por tanto $(T^{-1})^\times \in \mathcal{B}(X',Y')$. Por otro lado $I_Y = T \circ T^{-1} \in \mathcal{B}(Y)$. Por la Proposición 1.4.3 y la parte 1)

$$I_{Y'} = I_Y^\times = (T \circ T^{-1})^\times = (T^{-1})^\times \circ T^\times$$

Análogamente $I_{X'} = T^\times \circ (T^{-1})^\times$. De aquí, el resultado se sigue. $\square$

Para finalizar la sección estableceremos una relación entre el adjunto definido en esta sección y el poperador adjunto para espacios de Hilbert.

Sean $X = H_1$ e $Y = H_2$ espacios de Hilbert, con productos internos $\langle\, ,\, \rangle_1$ y $\langle\, ,\, \rangle_2$, respectivamente. Dado $T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$ entonces $T^\times : H_2 \to H_1$ viene dado por $T^\times(g) = g \circ T$.

Por el teorema de representación de Riesz:

Dado $f \in H_1'$ existe un único $x_f \in H_1$ tal que $f(x) = \langle x, x_f\rangle_1$, $\forall\, x \in H_1$.

Dado $g \in H_2'$ existe un único $y_g \in H_2$ tal que $g(y) = \langle y, y_g\rangle_1$, $\forall\, y \in H_2$.

Definimos los operadores $A_1 : H_1' \to H_1$ y $A_2 : H_2' \to H_2$ respectivamente como $A_1(f) = x_f$ y $A_2(g) = y_g$. Observe que, por definición, se cumplen

$$f(x) = \langle x, A_1(x)\rangle_1\,, \quad \forall\, x \in H_1 \quad \text{ y } \quad g(y) = \langle y, A_2(y)\rangle_2\,, \quad \forall\, y \in H_2.$$

Es claro que los operadores A_1 y A_2 son biyectivos, isométricos y conjugados lineales (¡Verificar!). Consideramos $A_1 T^\times A_2^{-1} : H_2 \to H_1$ el cual es un operador lineal y acotado (¡verificar!). Vamos a probar que esta composición es el adjunto de Hilbert de T. En efecto, sean $x \in H_1$, $y \in H_2$, luego existe un único $g \in H_2'$ tal que $A_2(g) = y$. Observe que

$$\langle T(x), y\rangle_2 = \langle T(x), A_2(g)\rangle_2 = g(T(x)) = T^\times(g)(x) = \left\langle x, A_1(T^\times(g))\right\rangle_1 = \left\langle x, (A_1 T^\times A_2^{-1})(y)\right\rangle_1$$

De esta manera $T^* = A_1 T^\times A_2^{-1}$, lo cual establece una relación entre los operadores en espacios de Hilbert.

Observe que T^* no es exactamente igual a $T^\times$, ni siquiera en espacios de dimensión finita, en efecto, si A es la matriz que representa a un operador T, entonces la matriz que representa a $T^\times$ es A^t, mientras que la matriz que representa a T^* es $\overline{A}^t$.

1.5 El Teorema de la categoría de Baire

El siguiente resultado juega un papel primordial en el presente capítulo.

Teorema 1.5.1 (Teorema de Baire) Sea (X,d) un espacio métrico completo, no vacío y $(F_n) \subseteq X$ una colección numerable de subconjuntos cerrados de X tales que

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n$$

Entonces, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$.

Demostración. Supongamos que $\operatorname{int}(F_n) = \emptyset$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ (Hip. Aux.) Definimos los abiertos

$$U_n = X - F_n, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Se cumple

$$\overline{U}_n = \overline{X - F_n} = X - \operatorname{int}(F_n) = X, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

luego U_n es denso en X, $\forall\, n \in \mathbb{N}$ y

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (X - F_n) = X - \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = \emptyset \tag{1.1}$$

Dado $x_0 \in X$ y $r_0 > 0$, por la densidad de U_1 en X se tiene que $B(x_0; r_0) \cap U_1 \neq \emptyset$, luego existe $x_1 \in B(x_0; r_0) \cap U_1$ y por tanto existe $r_1 > 0$, que lo podemos considerar $r_1 < \frac{r_0}{2}$, tal que $B[x_1; r_1] \subseteq B(x_0; r_0) \cap U_1$.

Como U_2 es denso en X, $B(x_1; r_1) \cap U_2 \neq \emptyset$, luego existe $x_2 \in B(x_1; r_1) \cap U_2$ y por tanto existe $r_2 > 0$, que lo podemos considerar $r_2 < \frac{r_1}{2}$, tal que $B[x_2; r_2] \subseteq B(x_1; r_1) \cap U_2$.

Procediendo inductivamente, podemos construir sucesiones $(r_n) \subseteq \mathbb{R}^+$ y $(x_n) \subseteq X$ tales que

$$B_{r_n}[x_n; r_n] \subseteq B(x_{n-1}; r_{n-1}) \cap U_n \quad \text{y} \quad r_n < \frac{r_{n-1}}{2} < \frac{r_{n-2}}{2^2} < \cdots < \frac{r_0}{2^n}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Afirmación 1: $(x_n) \subseteq X$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, sean $n, m \in \mathbb{N}$ con $n > m$ entonces

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n-1}) + d(x_{n-1}, x_{n-2}) + \cdots + d(x_{m+1}, x_m) < r_{n-1} + r_{n-2} + \cdots + r_m \\ &< \sum_{k=m+1}^{n} \frac{r_0}{2^{k-1}} < r_0(s_n - s_m) \end{aligned}$$

donde $s_n = \displaystyle\sum_{k=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$. Como $(s_n) \subseteq \mathbb{R}$ es de Cauchy, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > n_0$ entonces $|s_n - s_m| < \frac{\epsilon}{r_0}$, se sigue que $d(x_n, x_m) < \epsilon$ y esto prueba la Afirmación 1.

Como (X,d) es completo, existe $x \in X$ tal que $d(x_n, x) \to 0$

Afirmación 2: $x \in U_m$, $\forall\, m \in \mathbb{N}$. En efecto, fijemos $m \in \mathbb{N}$, para $n > m$, tenemos que $x_n \in B(x_m; r_m)$, luego $d(x_n, x_m) < r_m$. Por tanto

$$d(x, x_m) \leq d(x, x_n) + d(x_n, x_m) < d(x, x_n) + r_m$$

Haciendo $n \to +\infty$ se llega a $d(x, x_m) \leq r_m$, luego

$$x \in B[x_m; r_m] \subseteq B(x_{m-1}; r_{m-1}) \cap U_m \subseteq U_m$$

lo cual prueba la Afirmación 2.

Así $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} U_m$ lo cual contradice (1.1). Esta contradicción, demuestra el teorema. $\square$

Definición 1.5.1 Sea (X,d) un espacio métrico completo y $\emptyset \neq A \subseteq X$.

1. Decimos que A es *nunca denso* en X si y sólo si $\operatorname{int}(\overline{A}) = \emptyset$.
2. Decimos que A es de *primera categoría* en X si y sólo si existe $\{A_n\}$ colección numerable de subconjuntos nunca denssos en X tales que $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.
3. Decimos que A es de *segunda categoría* en X si y sólo si A no es de primera categoría en X.

En términos de la definición anterior podemos enunciar el Teorema de Baire como: *"Todo espacio métrico completo* (X,d) *es de segunda categoría en* X*"*. Por esta razón, el Teorema de Baire también es conocido como el *Teorema de la Categoría.*

1.6 El Teorema de Banach-Steinhauss

Recordemos que si $(E, \| \ \|_E)$ y $(F, \| \ \|_F)$ son dos $\mathbb{R}$-espacios vectoriales normados, definimos

$$\mathcal{B}(E,F) = \{T : E \to F;\ T \text{ es lineal y continua}\}$$

el cual, con las operaciones usuales de suma y producto por un escalar, es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial, más aún, si definimos

$$\|T\|_{\mathcal{B}(E,F)} = \sup\{\|Tx\|_F;\ x \in E, \|x\|_E = 1\}$$

se tiene que $\big(\mathcal{B}(E,F), \| \ \|_{\mathcal{B}(E,F)}\big)$ es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado, por último si $(F, \| \ \|_F)$ es de Banach, entonces $\big(\mathcal{B}(E,F), \| \ \|_{\mathcal{B}(E,F)}\big)$ también lo es.

Se acostumbra a denotar $E' = \mathcal{B}(E, \mathbb{R})$ (dual topológico de E) y $\mathcal{B}(E) = \mathcal{B}(E,E)$.

Estamos listos para demostrar el Teorema de Banach-Steinhauss, que también es conocido como el *Teorema de la Acotación Uniforme.*

Teorema 1.6.1 (Teorema de Banach-Steinhauss) Sea $(E, \| \ \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $(F, \| \ \|_F)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado. Si $\{T_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}(E,F)$ es una colección arbitraria de operadores lineales y continuos que cumple la propiedad:

$$\text{Dado } x \in E, \text{ existe } C_x > 0 \text{ tal que } \|T_i x\|_F \leq C_x, \quad \forall\, i \in I.$$

Entonces existe $C > 0$ tal que $\|T_i\|_{\mathcal{B}(E,F)} \leq C$, $\forall\, i \in I$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, defino el conjunto

$$E_n = \{x \in E;\ \|T_i x\|_F \leq n, \forall\, i \in I\}$$

Afirmación 1: E_n es cerrado. Sea $x \in \overline{E}_n$, luego existe $(x_k) \subseteq E_n$ tal que $x_k \to x$ en E, se sigue que $T_i x_k \to T_i x$ en F, $\forall\, i \in I$. Por tanto

$$\|T_i x\|_F \leq \|T_i x - T_i x_k\|_F + \|T_i x_k\|_F \leq \|T_i x - T_i x_k\|_F + n, \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Tomando límite cuando $k \to \infty$ tenemos que $\|T_i x\|_F \leq n$, $\forall\, i \in I$. Concluimos que $x \in E_n$ y esto prueba la Afirmación 1.

Afirmación 2: $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Sea $x \in X$, por hipótesis existe $C_x > 0$ tal que $\|T_i x\|_F \leq C_x$, $\forall\, i \in I$. Tomemos $N \in \mathbb{N}$ tal que $N > C_x$, luego $\|T_i x\|_F \leq N$, $\forall\, i \in I$, es decir $x \in E_N \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Esto prueba la Afirmación 2.

Como E es un espacio de Banach, por el Teorema de Baire existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(E_{n_0}) \neq \emptyset$. Sea $x_0 \in \operatorname{int}(E_{n_0})$, luego existe $r_0 > 0$ tal que $B_E(x_0; r_0) \subseteq E_{n_0}$.

Si $x \in E$ entonces $\dfrac{r_0}{2}\dfrac{x}{\|x\|_E} + x_0 \in B_E(x_0; r_0)$, luego para cada $i \in I$ tenemos

$$n_0 \geq \left\| T_i \left(\frac{r_0}{2} \frac{x}{\|x\|_E} + x_0 \right) \right\|_F \geq \frac{r_0}{2\|x\|_E} \|T_i x\|_F - \|T_i x_0\|_F$$

Así

$$\frac{r_0}{2\|x\|_E} \|T_i x\|_F \leq n_0 + \|T_i x_0\|_F \leq 2n_0$$

es decir

$$\|T_i x\|_F \leq \frac{4n_0}{r_0} \|x\|_E, \qquad \forall\, x \in E$$

Concluimos que $\|T_i\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq \dfrac{4n_0}{r_0}$, $\forall\, i \in I$. □

Corolario 1. Sea $(E, \| \ \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $(F, \| \ \|_F)$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial normado. Dada $(T_n) \subseteq \mathcal{B}(E,F)$ de operadores tal que $(T_n x) \subseteq F$ es convergente, $\forall\, x \in E$. Si definimos el operador $T : E \to F$ como

$$Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x, \qquad \forall\, x \in E$$

entonces $T \in \mathcal{B}(E,F)$.

Demostración. Para probar la linealidad, sean $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in E$; se cumple:

$$\begin{aligned} T(r_1x_1 + r_2x_2) &= \lim_{n\to\infty} (T_n(r_1x_1 + r_2x_2)) = \lim_{n\to\infty} (r_1T_n(x_1) + r_2T_n(x_2)) \\ &= r_1 \lim_{n\to\infty} T_nx_1 + r_2 \lim_{n\to\infty} T_nx_2 = r_1Tx_1 + r_2Tx_2. \end{aligned}$$

Para probar la continuidad, sea $x \in E$ entonces $(T_nx) \subseteq F$ es convergente y por tanto $(\|T_nx\|_F) \subseteq \mathbb{R}$ es convergente, luego existe una constante $C_x > 0$ tal que $\|T_nx\|_F \leq C_x$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$. Por el Teorema de Banach-Steinhauss, existe un $C > 0$ tal que $\|T_n\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, luego

$$\|Tx\|_F \leq \|Tx - T_nx\|_F + \|T_nx\|_F \leq \|Tx - T_nx\|_F + C\|x\|_E, \quad \forall\ n \in \mathbb{N}$$

Tomando límite cuando $n \to \infty$ tenemos $\|Tx\|_F \leq C\|x\|_E, \quad \forall\ x \in E.$ $\square$

Corolario 2. Sea $(E, \|\ \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $\emptyset \neq B \subseteq E$ tal que para cualquier $f \in E'$ el conjunto $f(B) = \{f(b);\ b \in B\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Entonces B es acotado.

Demostración. Del Corolario 3 del Teorema de Hahn-Banach, tenemos que

$$\|x\|_E = \max\left\{|f(x)|;\ f \in E', \|f\|_{E'} = 1\right\}.$$

Dado $b \in B$ definimos el operador $T_b : E' \to \mathbb{R}$ como $T_b(f) = f(b)$, $\forall\ f \in E'$.

Es claro que T_b es lineal, además $|T_b(f)| = |f(b)| \leq \|b\|_E\|f\|_{E'}$, $\forall\ f \in E'$, luego T_b es continua. Así $\{T_b\}_{b\in B} \subseteq \mathcal{L}(E';\mathbb{R}) = E''$. Además, como por hipótesis $f(B)$ es acotado $\forall\ f \in E'$, entonces existe $C_f > 0$ tal que $|T_b(f)| = |f(b)| \leq C_f$, $\forall\ b \in B$. Por Banach-Steinhauss, existe $C > 0$ tal que $\|T_b\|_{E''} \leq C$, $\forall\ b \in B$.

Si $f \in E'$, con $\|f\|_{E'} = 1$ entonces

$$|f(b)| = |T_b(f)| \leq \|T_b\|_{E''}\|f\|_{E'} \leq C$$

Así $\|b\|_E = \max\left\{|f(b)|;\ f \in E', \|f\|_{E'} = 1\right\} \leq C$, $\forall\ b \in B$. De esta manera B es acotado. $\square$

Corolario 3. Sea $(E, \|\ \|_E)$ un $\mathbb{R}$-espacio de Banach y $\emptyset \neq B' \subseteq E'$ tal que para cualquier $x \in E$ el conjunto $B'_x = \{f(x);\ f \in B'\}$ es acotado en $\mathbb{R}$. Entonces B' es acotado.

Demostración. Dado $f \in B'$, defino $T_f : E \to \mathbb{R}$ como $T_f(x) = f(x)$, $\forall\ f \in B'$. Como en el corolario anterior, se tiene que $\{T_f\}_{f\in B'} \subseteq \mathcal{L}(E;\mathbb{R}) = E'$. Además, por hipótesis, existe un $C_x > 0$ tal que $|f(x)| \leq C_x$, $\forall\ f \in B'$, luego $|T_f(x)| = |f(x)| \leq C_x$, $\forall\ f \in B'$. Por Banach-Steinhauss existe un $C > 0$ tal que $\|T_f\|_{E'} \leq C$, $\forall\ f \in B'$. Luego, dado $f \in B'$ tenemos

$$|f(x)| = |T_f(x)| \leq \|T_f\|_{E'}\|x\|_E \leq C\|x\|_E, \quad \forall\ x \in E$$

Así, $\|f\|_{E'} \leq C$, $\forall\ f \in B'$ y por tanto B' es acotado. $\square$

1.7 Los Teoremas de la aplicación abierta y de la aplicación inversa

Lema 1.7.1 Sean $(E, \|\ \|_E)$ y $(F, \|\ \|_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(E,F)$ es sobreyectiva entonces $0 \in \operatorname{int} T\left(B_E(0;1)\right)$, es decir existe un $C > 0$ tal que

$$B_F(0;C) \subseteq T\left(B_E(0;1)\right)$$

Demostración. Primeramente probemos que
Afirmación 1: existe un $C > 0$ tal que $B_F(0;4C) \subseteq \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$. En efecto, observe que $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} nB_E(0;1)$, definimos $F_n = n\overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$. Como T es sobreyectiva, tenemos

$$F = T(E) = T\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} nB_E(0;1)\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nT\left(B_E(0;1)\right) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} n\overline{T\left(B_E(0;1)\right)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nF_n$$

Así $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una colección de subconjuntos cerrados tales que $F = \bigcup_{n=1}^{\infty} nF_n$. Como $(F, \|\ \|_F)$ es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach, por el Teorema de Baire, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\operatorname{int}(F_{n_0}) \neq \emptyset$, de esta manera $\operatorname{int}\left(\overline{T\left(B_E(0;1)\right)}\right) \neq \emptyset$, luego existe $y_0 \in \operatorname{int}\left(\overline{T\left(B_E(0;1)\right)}\right)$ y por tanto existe $r_0 > 0$ tal que $B_F(y_0;r_0) \subseteq \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$. Observe que $-y_0 \in \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$.

Sean $\alpha > 0$ e $y \in B_F(0;\alpha r_0)$ entonces $\frac{1}{\alpha}y + y_0 \in B_F(y_0;r_0) \subseteq \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$, luego

$$\overline{T\left(B_E(0;1)\right)} \ni -ty_0 + (1-t)\left(\frac{1}{\alpha}y + y_0\right) = (1-2t)y_0 + \frac{1-t}{\alpha}y, \quad \forall\, t \in [0,1], \forall\, \alpha > 0$$

Haciendo $t = \alpha = \frac{1}{2}$, tenemos que $y \in \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$ y por tanto, hemos probado que

$$B_F(0;r_0/2) \subseteq \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$$

Haciendo $C = \frac{r_0}{8}$, se prueba la Afirmación 1.

Sea $y \in B_F(0;C)$ entonces $4y \in \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$, luego existe $z_1^* \in B_E(0;1)$ tal que $\|4y - T(z_1^*)\|_F < C$. Denotando $z_1 = \frac{z_1^*}{4}$, tenemos

$$\|z_1\|_E < \frac{1}{4} \quad \text{y} \quad \|y - Tz_1\|_F < \frac{C}{4}$$

Como $y - Tz_1 \in B_F(0;C/4)$ entonces $8(y - Tz_1) \in \overline{T\left(B_E(0;1)\right)}$, luego existe $z_2^* \in B_E(0;1)$ tal que $\|8(y - Tz_1) - Tz_2^*\|_F < C$. Denotando $z_2 = \frac{z_2^*}{8}$, tenemos

$$\|z_2\|_E < \frac{1}{8} \quad \text{y} \quad \|y - Tz_1 - Tz_2\|_F < \frac{C}{8}$$

Prosiguiendo inductivamente, construimos una sucesión $(z_n) \subseteq E$ tal que

$$\|z_n\|_E < \frac{1}{2^{n+1}} \quad \text{y} \quad \left\|y - \sum_{i=1}^{n} Tz_i\right\|_F < \frac{C}{2^{n+1}}, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Defino $x_n = \sum_{i=1}^{n} z_i$, claramente $(x_n) \subseteq E$ y $Tx_n \to y$ en F.

Afirmación 2: (x_n) es de Cauchy. En efecto, para $n > m$ tenemos

$$\|x_n - x_m\|_E = \left\| \sum_{i=m+1}^{n} z_i \right\|_E \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|z_i\|_E < \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} = s_n - s_m$$

donde $s_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$ la cual es convergente, por tanto dado $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que $n, m \geq N$ entonces $\|x_n - x_m\|_E < \epsilon$, lo cual prueba la Afirmación 2.

Como $(E, \| \ \|_E)$ es un $\mathbb{R}$-espacio de Banach, existe $x \in E$ tal que $x_n \to x$ en E y como

$$\|x_n\|_E \leq \sum_{i=m+1}^{n} \|z_i\|_E < \sum_{i=m+1}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1} \leq \frac{1}{2}, \ \forall \ n \in \mathbb{N}$$

entonces $\|x\|_E < 1$. Por tanto $x \in B_E(0;1)$ y como T es continua se tiene $Tx_n \to Tx$ en F y como $Tx_n \to y$ en F, luego $y = Tx$, por la unicidad de límite tenemos que $y = Tx \in B_E(0;1)$. Esto prueba el lema. □

Definición 1.7.1 Sean (X, d_X) e (Y, d_Y) dos espacios métricos. Decimos que $T : X \to Y$ es una *aplicación abierta* si y sólo si T lleva abiertos de X en abiertos de Y.

Teorema 1.7.1 (Teorema de la aplicación abierta) Sean $(E, \| \ \|_E)$ y $(F, \| \ \|_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(E,F)$ es sobreyectiva entonces T es abierta.

Demostración. Sea $U \subseteq E$ un abierto, debemos probar que $T(U) \subseteq F$ es abierto.

Sea $y_0 \in T(U)$, entonces existe $x_0 \in U$ tal que $y_0 = Tx_0$ y como U es abierto, existe $r_0 > 0$ tal que $B_E(x_0;r_0) \subseteq U$ y por tanto $T\left(B_E(x_0;r_0)\right) \subseteq T(U)$. Por el Lema 1.7.1 existe $C > 0$ tal que $B_F(0;C) \subseteq T\left(B_E(0;1)\right)$. Dado $y \in B_F(y_0;r_0C)$, se tiene que $\dfrac{1}{r_0}(y - y_0) \in B_F(0;C) \subseteq T\left(B_E(0;1)\right)$, luego existe $x \in B_E(0;1)$ tal que $Tx = \dfrac{1}{r_0}(y - y_0)$, luego

$$y = T(x_0 + r_0x) \in T\left(B_E(x_0;r_0)\right) \subseteq T(U)$$

De esta manera $B_F(y_0;r_0C) \subseteq T(U)$ y por tanto $T(U)$ es abierto en F. □

Corolario 1. (Teorema de la aplicación inversa) Sean $(E, \| \ \|_E)$ y $(F, \| \ \|_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach. Si $T \in \mathcal{B}(E,F)$ es biyectiva entonces $T^{-1} \in \mathcal{B}(F,E)$.

Demostración. Por hipótesis, existe $T^{-1} : F \to E$ y T^{-1} es lineal, sólo falta probar que es acotada. Por el Lema 1.7.1, existe $C > 0$ tal que $B_F(0;C) \subseteq T(B_E(0;1))$.

Sea $y \in F - \{0\}$, luego $\dfrac{C}{2\|y\|_F}y \in B_F(0;C)$, por tanto existe $x \in B_E(0;1)$ tal que $Tx = \dfrac{C}{2\|y\|_F}y$, aplicando T^{-1} se llega a $T^{-1}y = \dfrac{2\|y\|_F}{C}x$ y por tanto

$$\left\|T^{-1}y\right\|_E = \frac{2\|y\|_F}{C}\|x\|_E < \frac{2}{C}\|y\|_F$$

Concluimos que $\left\|T^{-1}y\right\|_E \leq \dfrac{2}{C}\|y\|_F$, $\forall\ y \in F$ y por tanto $T^{-1} \in \mathcal{B}(F, E)$. $\square$

Observación: Si en el corolario anterior retiramos la hipótesis de que los espacios sean de Banach, entonces el resultado es falso (Ver lista de ejercicios de la Práctica 4).

1.8 El Teorema del gráfico cerrado

Definición 1.8.1 Sean $(X, \|\ \|_X)$ e $(Y, \|\ \|_Y)$ dos espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$. Decimos que T es un *operador cerrado* si y solo si su gráfico $G(T) \subseteq X \times Y$ es cerrado en $X \times Y$.

En la definición anterior $G(T) = \{(x, T(x)) \in X \times Y : x \in D(T)\}$ es el *gráfico de* T y $X \times Y$ tiene la norma de la suma $\|(x, y)\| = \|x\|_X + \|y\|_Y$.

Teorema 1.8.1 Sean $(X, \|\ \|_X)$ e $(Y, \|\ \|_Y)$ dos espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ lineal. Son equivalentes:

1. T es cerrado.
2. $\forall\ (x_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$ entonces $x \in \mathcal{D}(T)$ y $T(x) = y$.

Demostración.($\Rightarrow$) Sea $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\|_X = 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \|T(x_n) - T(x)\|_Y = 0$, por tanto

$$\|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\| = \|(x_n - x, T(x_n) - y)\| = \|x_n - x\| + \|T(x_n) - y\|_Y \to 0$$

De esta manera, $((x_n, T(x_n)) \subseteq G(T)$ es tal que $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$, luego $(x, y) \in \overline{G(T)} = G(T)$, es decir $x \in \mathcal{D}(T)$ y $y = T(x)$.

($\Leftarrow$) Sea $(x, y) \in \overline{G(T)}$, luego existe $((x_n, T(x_n))) \subseteq G(T)$ tal que $(x_n, T(x_n)) \to (x, y)$, luego

$$0 \leq \|x_n - x\|_X \leq \|x_n - x\|_X + \|T(x_n) - y\|_Y = \|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\| \to 0$$

$$0 \leq \|T(x_n) - y\|_Y \leq \|x_n - x\|_X + \|T(x_n) - y\|_Y = \|(x_n, T(x_n)) - (x, y)\| \to 0$$

Se sigue que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$ luego, Por hipótesis, $x \in \mathcal{D}(T)$ y $T(x) = y$, luego $(x, y) \in G(T)$ y por tanto $\overline{G(T)} \subseteq G(T)$, es decir T es cerrado. $\square$

Sean $(X, \|\ \|_X)$ e $(Y, \|\ \|_Y)$ dos espacios normados y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq X \to Y$ lineal. En general acotación y cerradura son conceptos distintos, es decir, existen operadores cerrados que no son acotados e, inversamente, existen operadores acotados que no son cerrados.

Ejemplo 1.8.1 (Operador lineal cerrado y no acotado) Considere $C([0, 1])$ con la norma del máximo $\|x\| = \max|x(t)|;\ 0 \leq t \leq 1$.

Sea $C^1([0, 1]) \subseteq C([0, 1])$ y defino $T : C^1([0, 1]) \to C([0, 1])$ como $T(x) = x'$. Obviamente T es lineal.

T **es cerrado:** En efecto, sea $(x_n) \subseteq C^1([0, 1])$ tal que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$, se sigue que $x_n' \to x'$ y $x_n' \to y$, se sigue que $x \in C^1([0, 1])$ y $T(x) = x' = y$.

T **es no es acotado:** En efecto, basta considerar la sucesión $(P_n) \subseteq C^1([0,1])$ dada por $P_n(t) = t^n$. Como $\|T(P_n)\| = n$, $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$, se sigue que T no es acotado.

Ejemplo 1.8.2 (Operador lineal acotado que no es cerrado) Sea $(X, \|\ \|)$ un espacio normado e Y subespacio denso de X. Considero la identidad $I_Y : Y \to Y$. Obviamente $I_Y \in \mathcal{B}(Y)$, sin embargo I_Y no es cerrado. En efecto, caso contrario, tomemos $x \in X - Y$, existe $(y_n) \subseteq Y$ tal que $y_n \to x$ y por tanto $I_Y(y_n) \to y$. Luego, por el Teorema 1.8.1 $x \in Y$, lo cual es una contradicción.

El Teorema del gráfico cerrado nos da condiciones para que un operador lineal cerrado sea acotado.

Recordemos que si $(E, \|\ \|_E)$ y $(F, \|\ \|_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach entonces su producto cartesiano

$$E \times F = \{(x, y);\, x \in E,\, y \in F\}$$

con la norma

$$\|(x, y)\|_{E\times F} = \|x\|_E + \|y\|_F$$

es también un espacio de Banach.

Teorema 1.8.2 (Teorema del gráfico cerrado) Sean $(E, \|\ \|_E)$ y $(F, \|\ \|_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach y $T : \mathcal{D}(T) \subseteq E \to F$ un operador lineal. Si $D(T)$ es cerrado en E entonces $T \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(T), F)$.

Demostración. Como T es lineal, su gráfico $G(T)$ es un subespacio de $E \times F$ (ver Práctica 4) Por hipótesis $G(T)$ es cerrado, luego $(G(T), \|\ \|)$ es Banach. Como $\mathcal{D}(T)$ es cerrado en E entonces $(\mathcal{D}(T), \|\ \|_E)$ es Banach. Defino $p : G(T) \to \mathcal{D}(T)$ como

$$P(x, T(x)) = x$$

Claramente p es lineal, además:

$$\|P(x, T(x))\|_E = \|x\|_X \leq \|x\|_E + \|T(x)\|_F = \|(x, T(x)\|$$

Se sigue que $P \in \mathcal{B}(G(T), \mathcal{D}(T))$. Además P es biyectiva, puesto que $S : \mathcal{D}(T) \to G(T)$ dada por $S(x) = (x, T(x))$ es la inversa de P (¡verificar!), por el teorema de la aplicación inversa, se sigue que $P^{-1} \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(T), G(T))$, luego:

$$\|T(x)\|_F \leq \|x\|_E + \|T(y)\|_F = \|(x, T(x))\| = \|P^{-1}(x)\| \leq \|P^{-1}\| \cdot \|x\|_E, \quad \forall\, x \in \mathcal{D}(T)$$

Por tanto, $T \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(T), F)$ $\square$

A continuación, damos condiciones para que un operador lineal y acotado sea cerrado.

Teorema 1.8.3 Sean $(X, \|\ \|_X)$ e $(Y, \|\ \|_Y)$ dos espacios normados y $T \in \mathcal{B}(\mathcal{D}(T), Y)$, donde $\mathcal{D}(T) \subseteq X$.

1. Si $\mathcal{D}(T)$ es cerrado entonces T es cerrado.
2. Si T es cerrado e $(Y, \|\ \|_Y)$ es de Banach entonces $\mathcal{D}(T)$ es cerrado.

Demostración. 1.) Sea $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \to x$ y $T(x_n) \to y$. Como $x_n \to x$, entonces $x \in \overline{\mathcal{D}(T)} = \mathcal{D}(T)$ y la continuidad de T nos da que $T(x_n) \to T(x)$. Por unicidad del límite $y = T(x)$. Por el Teorema 1.8.1, concluímos que T es cerrado.

2.) Sea $x \in \overline{\mathcal{D}(T)}$, entonces existe $(x_n) \subseteq \mathcal{D}(T)$ tal que $x_n \to x$. Afirmo que $(T(x_n)) \subseteq Y$ es convergente. En efecto, para $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{Z}^+$ tal que si $n, m \geq N$ entonces $\|x_n - x_m\|_X < \dfrac{\epsilon}{\|T\|}$, luego

$$\|T(x_n) - T(x_m)\|_Y = \|T(x_n - x_m)\|_Y \leq \|T\| \cdot \|x_n - x_m\|_X < \epsilon$$

Se sigue que $(T(x_n)) \subseteq Y$ es de Cauchy y como Y es Banach, tenemos que $(T(x_n)) \subseteq Y$ es convergente, luego existe $y \in Y$ tal que $T(x_n) \to y$. Como T es cerrado, por el Teorema 1.8.1, concluímos que $x \in \mathcal{D}(T)$ y $T(x) = y$, es decir $\mathcal{D}(T)$ es cerrado. $\square$

Corolario Sean $(E, \|\ \|_E)$ y $(F, \|\ \|_F)$ dos $\mathbb{R}$-espacios de Banach y $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Se cumple T es cerrado si y solo si $T \in \mathcal{B}(E, F)$

Demostración.($\Rightarrow$) Consecuencia inmediata del Teorema del gráfico cerrado.

($\Leftarrow$) Consecuencia inmediata de la parte 1.) del Teorema 1.8.3. $\square$