Tarea

Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Facultad de Ciencias Matemáticas
Escuela Académico Profesional de Matemáticas
Matihus Alberth Molina Larios - 22140029

Ejercicio 1

Teorema: Sea $\theta \notin \mathbb{Q}$ se cumple que:

$$\overline{O^+_{R_\theta}(x)} = S^1 \quad \forall x \in S^1$$

es decir, la orbita de R_θ en x, es densa en S^1 para todo $x \in S^1$
PROOF:
Sabiendo que $\omega(x) = \overline{O^+_{R_\theta}(x)}$ es cerrado e invariante.
Primero veremos que R_θ no tiene puntos periódicos.
Suponiendo que los tiene, sea n el punto periódico,entonces
$R^n_\theta(x) = x \Longrightarrow x + n\theta \equiv x(\mod 1) \Longrightarrow n\theta \equiv 0(\mod 1) \Longrightarrow \theta \in \mathbb{Q} \quad (\Longleftrightarrow)$
Ahora supongamos que $\omega(x) \subsetneq S^1 \Longrightarrow S^1 - \omega(x) = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} I_j$,donde cada I_j es una componente conexa de $S^1 - \omega(x)$.
Como R_θ es un homeomorfimos, entonces $R_\theta(I_n) = I_{n'}$ con $n \neq n'$,pues si fuesen iguales entonces $R_\theta(I_n) = I_n$ y por el teorema del punto de Brower entonces existirá almenos un punto fijo,lo cual es una contradicción.

De hecho: $R^n_\theta(I_j) \cap R^m_\theta(I_j) = \emptyset \quad \forall n \neq m$,pues de lo contrario se tiene que $R^n_\theta(I_j) = R^m_\theta(I_)$ pues ambas son componentes conexas,luego sin perder generalidad , sea $m - n > 0$ se cumple: $R^{m-n}_\theta(I_j) = I_j$ que de nuevo ,por el Teorema del punto de Brower,entonces existe almenos un punto fijo.
Eso quiere decir que todos los intervalos son disjuntos entre sí,sin embargo:
Sea I_1 un componete conexa cualquiera ,entonces $I_2 = R_\theta(I_1)$ es otra ,$I_3 = R_\theta(I_2)$ es otra,etc.
Se tiene que $I_n = R^n_\theta(I_1)$ una componete disjunta a las otras.
Entonces $|S^1 - \omega(x)| = |\bigcup_{j\in\mathbb{N}}| = \sum_{i=1}^{\infty} |I_j| = \infty$,es decir $S^1 - \omega(x)$ es un conjunto no acotado, pero como este esta contenido en S^1(conjunto acotado),entonces también es acotado. $(\Longleftrightarrow)$
Conclusión: $S^1 = \omega(x), \forall x \in S^1$. $\square$

Ejercicio 2

Teorema: El shift de Bernoulli es topologicamente mixing.(en particular, top. transitivo)
Sea:

$$\Sigma_2^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\}\}$$
$$\Sigma_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \{0,1\}\}$$

PROOF:
Recordar, el shift de Bernoulli tiene la forma de :

$$\xi : \Sigma_2(\Sigma_2^+) \to \Sigma_2(\Sigma_2^+) \quad \text{tal que: } \xi((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

tal que $y_n = x_{n+1}$.
Además, una función $f : M \to M$,donde M es un espacio topologico,se le dice topologicamente mixing ,si y solo si, para cualquier $U, V \subset M$ abiertos en M, existe un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se cumpla:

$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n \geq n_0$$

Tomaremos para el espacio topológico Σ_2 Como los cilindros son abiertos básicos del espacio topologico Σ_2,entonces es suficiente probar el teorema con 2 cilindros del mismo volúmen. Sean:

$$U = \{a_{-k}, \ldots, a_k\}$$
$$V = \{b_{-k}, \ldots, b_k\}$$

sea $n_0 = 2k + 1$
Siendo:

$$x_m = \begin{pmatrix} \ldots & -k & \ldots & k & k+1 & k+1+j & \ldots & 3k+1+j & \\ \ldots & a_{-k} & \ldots & a_k & \ldots & b_{-k} & \ldots & \ldots & b_k \end{pmatrix} \in U$$

que cumple esta forma: $x_m = b_{m-i}$ tal que $n = 2k + j + 1 \quad /j \geq 0$
Entonces:

$$\xi^n(x_m) = \xi^{2k+j+1}(x_m) = \begin{pmatrix} \ldots & -k & \ldots & k \\ \ldots & b_{-k} & \ldots & b_{-k} \end{pmatrix} \in V$$

Entonces se tiene que:
$\xi^n(x_m) \in \xi^n(U), V$. Entonces $\xi^n(U) \cap V \neq \emptyset \quad \forall n = 2k + 1 + j = n_0 + j \geq n_0$
Finalmente el shift de Bernoulli es topologicamente mixing. $\square$
Pero, ¿Porqué estamos usando cilindros simétricos, si los cilindros(conjuntos abiertos de Σ_2) son arbitrarios?
Sea C la colección de ciclindros arbitrarios la base topólogica.Tomamos como B la colección de ciclindros simétricos;Luego,sea $(x_n) \in C_1 = [k : a_k, \ldots, a_m]$,entonces: (siendo p el que tiene el valor absoluto más grande)
Si $k = p$ se tiene que: $\exists B_1 = [p : a_p, \ldots, a_m, \ldots, a_{|p|}]$ tal que $x \in B_1 \subset C_1$

Si $m = p$ se tiene que: $\exists B_1 = [-|m| : a_{-|m|}, \ldots, a_k, \ldots, a_m]$ tal que $x \in B_1 \subset C_1$ Entonces podemos ver que la topología generada por la base B es la misma que la generada por la base C,entonces hablar de cilindros es lo mismo que hablar de cilindros simétricos.

Para el caso del espacio topologico Σ_2^+ es analoga.