¿Qué es un SISTEMA DINÁMICO?

SISTEMA DINÁMICO DISCRETO

- M : espacio ambiente (espacio métrico, espacio topológico, variedad diferenciable, espacio de medida)
- $f : M \to M$ sistema dinámico

(C^0, diferenciable, aplicación que preserva medida)

flujo ⇝

SISTEMA DINÁMICO CONTINUO

flujo ⇝ $\varphi : \mathbb{R} \times M \to M$

$$(t,x) \mapsto \varphi(t,x)$$

i) $\varphi(0,\cdot) = Id : M \to M$

ii) $\varphi(t+s,x) = \varphi(t, \varphi(s,x))$

estado inicial

$$\dots, f^{-2}(x), f^{-1}(x), x, f(x), \underbrace{f(f(x))}_{f^2(x)}, \dots, f^n(x)$$

¿ $f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{}$?

- $Fix(f) = \{x \in M : f(x) = x\}$

conjunto de ptos fijos de f

- $Per(f) = \{x \in M : \exists\, k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) = x\}$

→ conjunto de ptos periódicos de f

Si p es pto periódico de f, entonces el periodo de p es el mínimo $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(p)=p$.

<u>OBS</u> $\quad Fix(f) \subseteq Per(f)$

<u>Def</u>: La órbita positiva de x por f se denota por $O_f^+(x)$ y se define por

$$O_f^+(x) = \{x, f(x), f^2(x), \dots\} = \{f^n(x) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

Si f es invertible, entonces podemos def[inir] la órbita negativa de x por f.

$$O_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

La órbita de x por f es:

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

Si f es invertible, entonces podemos definir la órbita negativa de x por f.

$$O_f^-(x) = \{f^{-n}(x) : n \in \mathbb{N}\cup\{0\}\}$$

La órbita de x por f es:

$$O_f(x) = \{f^n(x) : n \in \mathbb{Z}\}$$

<u>Def</u>: El alfa omega límite de x por f se denota por $\alpha_f(x)$ $\omega_f(x)$ y se define.

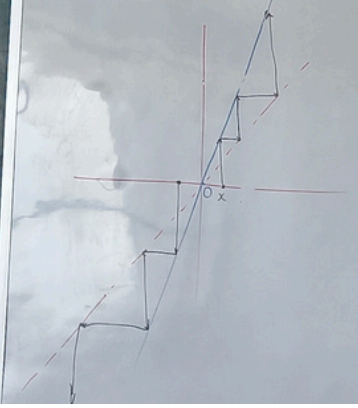
$$\omega_f(x) = \{y \in M : \exists\, n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y\}$$

$$\alpha_f(x) = \{y \in M : \exists\, n_k \to +\infty \text{ tal que } f^{-n_k}(x) \xrightarrow[k\to+\infty]{} y\}$$

Ejm. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = 2x$

$$f^n(x) = 2^n x \xrightarrow[n\to\infty]{} \begin{cases} +\infty, & x>0 \\ -\infty, & x<0 \end{cases}$$



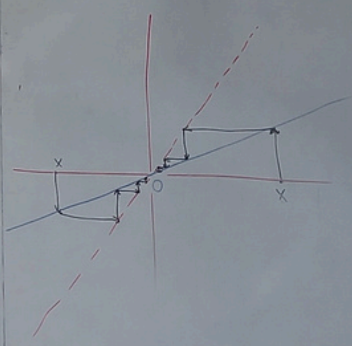
- $O_f(0) = \{0\}$
- $\omega_f(0) = \{0\}$
- $\alpha_f(0) = \{0\}$
- $x \neq 0$

$\omega_f(x) = \emptyset$

$\alpha_f(x) = \{0\}$

$f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \frac{1}{2} x$



Ejm (Ro

$\theta \in \mathbb{R}$

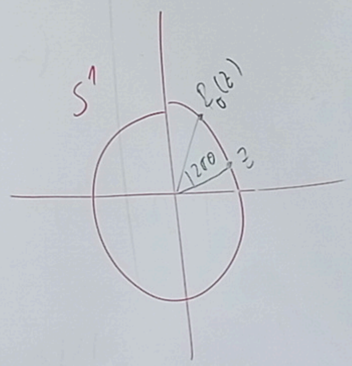
Ejm (Rotación en S^1)

$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \left(= \mathbb{R}/\mathbb{Z} \right)$

$R_\theta : S^1 \to S^1$

$z \mapsto R_\theta(z) = e^{2\pi\theta i} z$

$\theta \in \mathbb{R}$



Prop

Si $\theta \in \mathbb{Q}$ $\left(\theta = \frac{p}{q} \quad (p,q)=1\right)$,

entonces

$$R_\theta^q(z) = z \; ; \; \forall z \in S^1$$

Dm:

- $R_\theta^2(z) = R_\theta(R_\theta(z)) = e^{2\pi\theta i} R_\theta(z)$
$= e^{2\pi\theta i} e^{2\pi\theta i} z = e^{2(2\pi\theta) i} z$
- $R_\theta^3(z) = e^{3(2\pi\theta)i} z$

$$R_\theta^q(z) = e^{q(2\pi\theta)i} z$$

$q(2\pi\theta)$: $\theta = p/q$

$$= e^{2\pi p i} z$$

$p \in \mathbb{Z}$

$$= z$$

$p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{Z}^+$, $(p,q)=1$, $\theta = \frac{p}{q}$

Así,

- $\theta \in \mathbb{Q}$ $\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_{R_\theta}(z) = \{z;\ R_\theta(z),\ R_\theta^2(z),\ \dots,\ R_\theta^{q-1}(z)\}$

$$\alpha_{R_\theta}(z) = \mathcal{O}_{R_\theta}(z)$$

$$\omega_{R_\theta}(z) = \mathcal{O}_{R_\theta}(z)$$

- $\theta \notin \mathbb{Q}$

$$\alpha_{R_\theta}(z) = S^1$$

$$\omega_{R_\theta}(z) = S^1$$

MATIHUS

<u>Prop</u>: Si $\theta \notin \mathbb{Q}$, entonces

$$\overline{\mathcal{O}_{R_\theta}(z)} = S^1 ;\ \forall z \in S^1$$

Def :
A es
por f
Prop :

$\Longrightarrow$ $\mathcal{O}_{R_\theta}(z) = \{z;\ R_\theta(z),\ R_\theta^2(z),\ \dots,\ R_\theta^{q-1}(z)\}$

$\mathcal{O}_{R_\theta}(z)$

$\mathcal{O}_{R_\theta}(z)$

<u>Def</u>: Sea $A \subset M$, decimos que A es invariante (hacia adelante) por f siempre que

$$f(A) \subset A$$

<u>Prop</u>: Si M es localmente compacto y $f: M \to M$ es C^0, entonces $\omega_f(x)$ es cerrado e invariante por f $(\alpha_f(x))$

<u>Dm</u>:

- $\omega_f(x)$ es cerrado (Ejercicio)
- $\omega_f(x)$ es invariante por f.

Sea $z \in f(\omega_f(x))$.

$$z = f(y) ;\ y \in \omega_f(x)$$

$\Rightarrow \exists\, n_k \to +\infty$ tal que

$$f^{n_k}(x) \xrightarrow[k \to +\infty]{} y$$

f C^0 $\Longrightarrow$ $f^{n_k+1}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} f(y) \Rightarrow f(y) \in \omega_f(x)$

$$\Rightarrow f(\omega_f(x)) \subset \omega_f(x)$$ ∎

Considere

$$L^{+}(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \omega_{f}(x)}$$

$$L^{-}(f) = \overline{\bigcup_{x\in M} \alpha_{f}(x)}$$

$$L(f) = L^{+}(f) \cup L^{-}(f)$$

↳ conjunto límite de f

<u>Prop</u>: $L(f)$ es invariante por f, es decir,

$$f(L(f)) \subset L(f)$$

<u>Dm</u> (Ejercicio)

<u>OBS</u>:

$$Fix(f) \subset Per(f) \subset L(f)$$

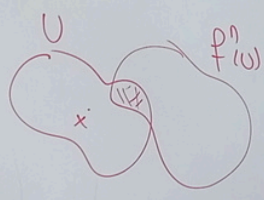
<u>Def</u>

es decir,

)

<u>Def</u>: Sea M un espacio topológico, localmente compacto y Hausdorff. Decimos que $x \in M$ es NO ERRANTE para f (continua), si dada cualquier vecindad U de x, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n}(U) \cap U \neq \phi$$



Caso contrario x es denominado punto errante de f.

Denotamos por $\Omega(f)$ al conjunto de todos los puntos NO ERRANTES de f.

<u>Prop</u>: i) $f(\Omega(f)) \subset \Omega(f)$

ii) $\Omega(f)$ es cerrado

iii) Si f es homeomorfismo, entonces $f(\Omega(f)) = \Omega(f)$

entonces

$$f(\Omega(f)) = \Omega(f)$$

OBS: $Fix(f) \subseteq Per(f) \subseteq L(f) \subseteq \Omega(f)$

Definición: Sean M y N espacios topológicos, $f: M \to M$, $g: N \to N$ continuas. Decimos que f es topológicamente conjugado a g, si existe $h: M \to N$ homeomorfismo tal que

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & M \arrow[d, "h"] \\ N \arrow[r, "g"'] & N \end{tikzcd} \qquad h \circ f = g \circ h$$

$x \mapsto h(x)$

Prop: Si f y g son topológicamente conjugados por h, entonces:

i) $h(Fix(f)) = Fix(g)$

ii) $h(Per(f)) = Per(g)$

iii) $h(\Omega(f)) = \Omega(g)$

iv) $h(\mathcal{O}_f(x)) = \mathcal{O}_g(h(x))$

v) $h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x))$

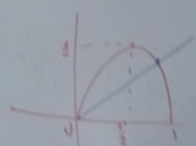
Ejm: $R_{\theta_1}: S^1 \to S^1$ $\quad \theta_1$

$R_{\theta_2}: S^1 \to S^1$ $\quad \theta_2$

No son top. conjugados

Ejm: $f: [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto f(x) = 4x(1-x)$



ologicamente
nces:
g)
h(x))

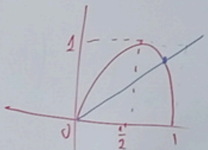
Ejm: $R_{\theta_1}: S^1 \to S^1$ $\quad \theta_1 \in \mathbb{Q}$

$R_{\theta_2}: S^1 \to S^1$ $\quad \theta_2 \notin \mathbb{Q}$

No son top. conjugados $\to$ No tiene ptos periódicos

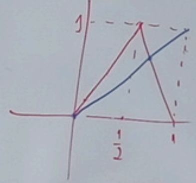
Ejm: $f: [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto f(x) = 4x(1-x)$



$g: [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto g(x) = 1 - |1-2x| = \begin{cases} 2x; & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x; & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$



$2 - 2x = x$

$\frac{2}{3} = x$

f y g son top. conjugados vía $h: [0,1] \to [0,1]$

$h(x) = \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)$

$$\begin{array}{ccc} [0,1] & \xrightarrow{f} & [0,1] \\ h \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h \\ [0,1] & \xrightarrow{g} & [0,1] \end{array}$$

- $h \circ f = g \circ h$
- h homeomorfismo.

Ejm:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2}x$ $\qquad x \mapsto g(x) = \frac{1}{3}x$

Lenin: Mostrar que f y g son top. conjugados y construir explícitamente el homeomorfismo.

b) $f: [0,1] \to [0,1]$

$x \mapsto f(x) = 4x(1-x)$

$g: [-2;2] \to [-2;2]$

$x \mapsto g(x) = x^2 - 2$

$\boxed{f(x) = x^2 + c}$

Prop:

conjug

i)

ii)

iii)

iv)

v)