Familia Cuadrática

$$Q_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto Q_c(x) = x^2 + c \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$$

Def: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ C^1 y x_0 un punto fijo de f.

i) Decimos que x_0 es un punto fijo atractor para f si $|f'(x_0)| < 1$.

ii) " " x_0 " " " " repulsor " " si $|f'(x_0)| > 1$

iii) " " x_0 " " " fijo neutro para f si $|f'(x_0)| = 1$.

Ejm:

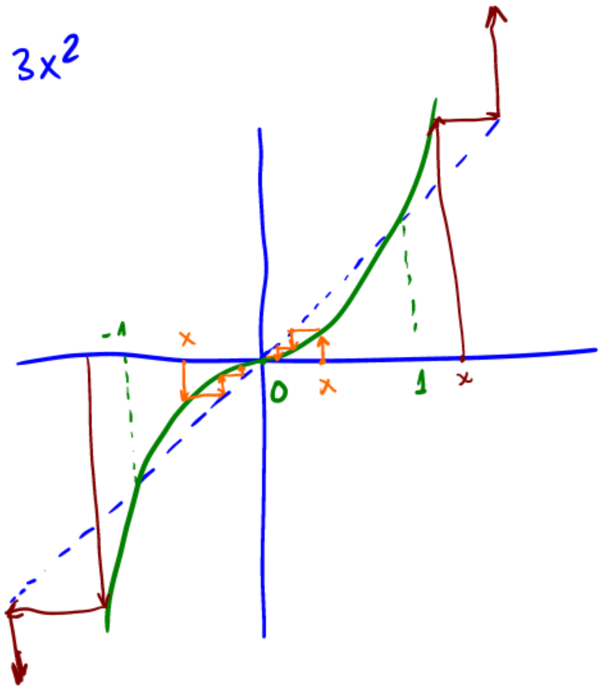
$f(x) = x^3$

$f(x) = x \iff x^3 = x \iff \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$

$x = 0 \to$ pto fijo atractor

$x = 1,\ x = -1 \to$ ptos fijos repulsor

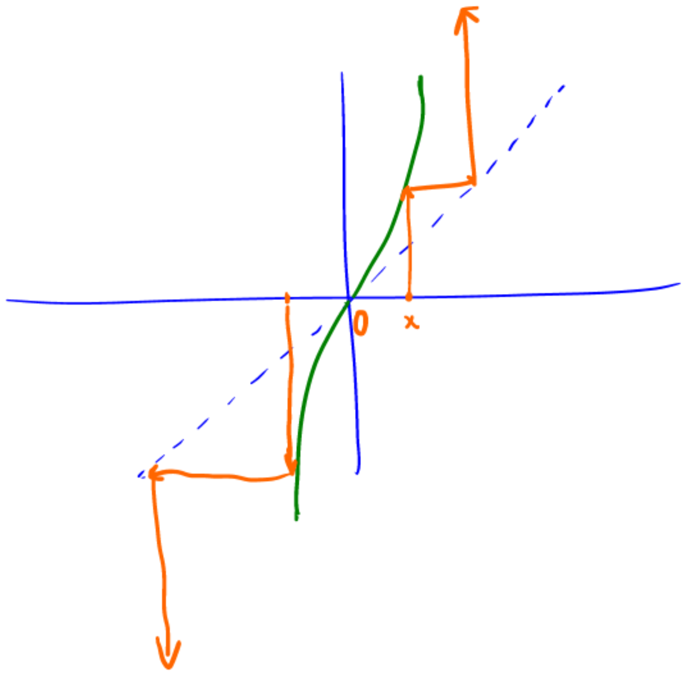
$f'(x) = 3x^2$



$f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad : x \simeq 0$

Ejm: $f(x) = x^3 + x \Leftrightarrow f(x) = x \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{punto fijo neutro}}$

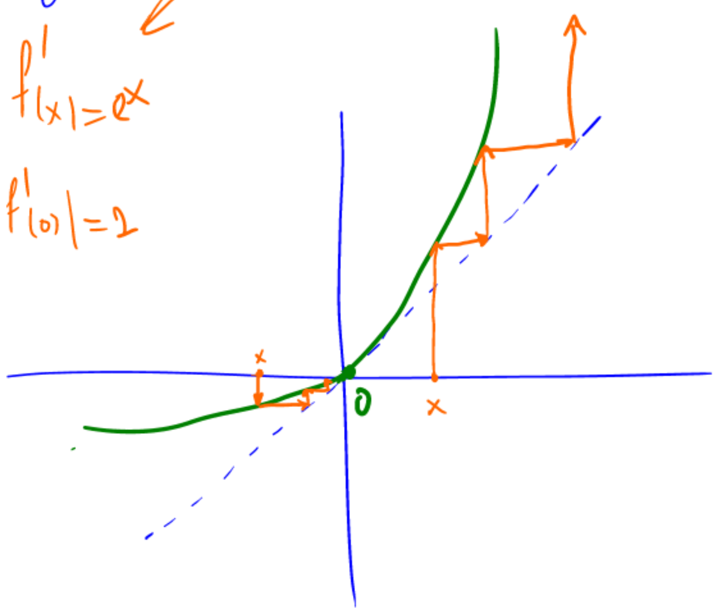
$f'(x) = 3x^2 + 1 \rightarrow |f'(0)| = 0$



Ejm: $f(x) = e^x - 1 \Leftarrow \underbrace{f(x) = x}_{e^x - 1 = x} \Leftrightarrow \underbrace{x = 0}_{\text{pto fijo neutro}}$

$f'(x) = e^x$

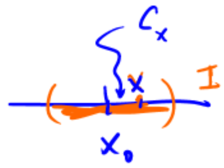
$|f'(0)| = 1$



TEOREMA DEL PUNTO FIJO ATRACTOR

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y x_0 un punto fijo atractor de f.
Entonces, existe un intervalo I abierto que contiene a x_0 tal que

$f^n(x) \in I$; $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall x \in I$.



Además, $\displaystyle f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$

Dm: Como $|f'(x_0)| < 1 \Rightarrow |f'(x_0)| < \lambda < 1$
y consecuentemente, $\exists \delta > 0$ tal que $|f'(x)| < \lambda$; $\forall x \in \underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta)}_{I}$

Luego, para $x \in I$

$$|f(x) - x_0| = |f(x) - f(x_0)| \overset{TVM}{=} |\underbrace{f'(c)}| \, |x - x_0| < \lambda |x - x_0|$$

De esa forma

$$|f^n(x) - x_0| < \lambda^n |x - x_0| \quad f^n(x) \in I$$

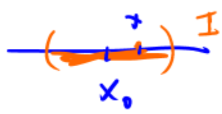
Tomando $n \to \infty \Rightarrow f^n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} x_0$. ∎

TEOREMA DEL PUNTO FIJO REPULSOR

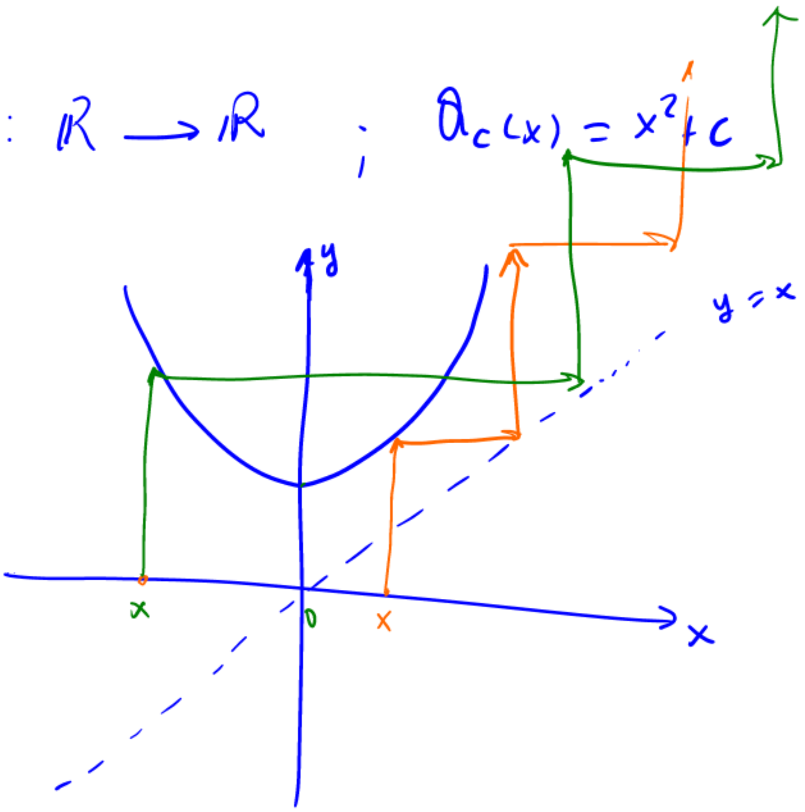
Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clase C^1 y x_0 un punto fijo repulsor de f.
Entonces, existe un intervalo I abierto que contiene a x_0 tal que

$\forall x \in I$, $\exists n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^n(x) \notin I.$$



$Q_c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $Q_c(x) = x^2 + c$



$\forall x \in \mathbb{R}$

$Q_c^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

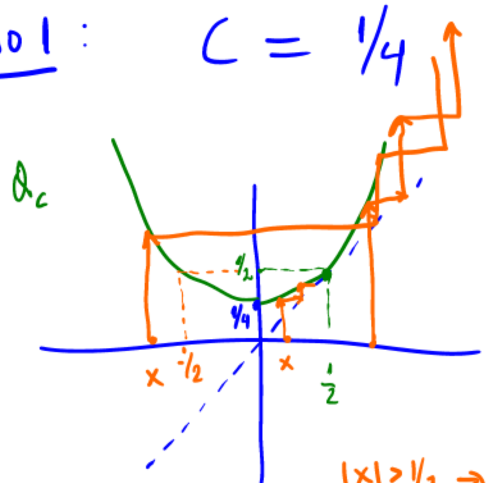
$c > 1/4$

$$Q_c(x) = x \iff x^2 + c = x \iff x^2 - x + c = 0$$

$$\iff P_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$

Q_c : No tiene puntos fijos $\iff 1 - 4c < 0 \iff c > 1/4$

Caso 1 : $c = 1/4$;



$Q_c(x) = x^2 + \frac{1}{4} \Rightarrow$ los puntos fijos son:

$\underbrace{P_+ = P_- = \frac{1}{2}}_{\text{punto fijo neutral}}$

$Q_c'(x) = 2x$

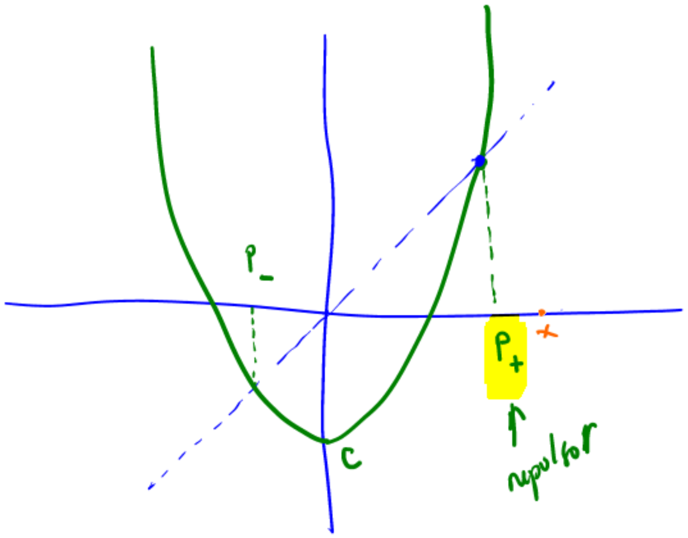
$|Q_c'(1/2)| = 1$

$|x| > 1/2 \Rightarrow f^n(x) \to \infty$

$|x| \leq 1/2 \Rightarrow f^n(x) \to 1/2$

Caso 2: $c < 1/4$

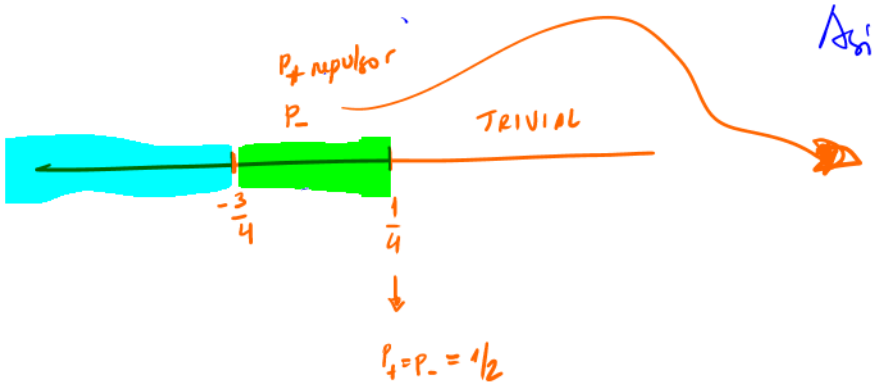
$$p_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$$



$$Q_c(x) = x^2 + c$$
$$Q_c'(x) = 2x$$

$$|Q_c'(p_+)| = \left|2\left(\frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}\right)\right| = |1+\sqrt{1-4c}| > 1$$

$$|Q_c'(p_-)| = |1-\sqrt{1-4c}| < 1 \iff -\frac{3}{4} < c < 1/4$$



Así,

$$\begin{cases} p_- \text{ es atractor} \iff -\frac{3}{4} < c < 1/4 \\ p_- \text{ es neutro} \iff c = -\frac{3}{4} \\ p_- \text{ es repulsor} \iff c < -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Calculando puntos periódicos de periodo 2: $\left(Q_c(x) = x^2 + c\right)$

$$Q_c^2(x) = x \iff (x^2+c)^2 + c = x$$
$$\iff x^4 + 2cx^2 - x + c^2 + c = 0$$

observe que $Q_c(p_\pm) = p_\pm \Rightarrow$ $Q_c^2(p_+) = p_+$, $Q_c^2(p_-) = p_-$

Así,

$$\frac{Q_c^2(x)}{(x-p_+)(x-p_-)} = x^2 + x + c - 1 = 0 \;; \quad p_\pm = \frac{1-\sqrt{1-4c}}{2}$$

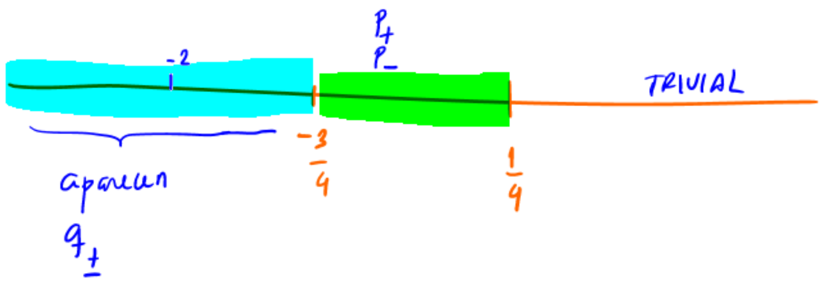
Así, encontramos:

$$q_\pm = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-4c-3}\right)$$

los otros 2 puntos periódicos de periodo 2.

Luego, $Q_c(x) = x^2+c$ tiene a $q_\pm$ como ptos periódicos de periodo a 2 siempre que

$-4c-3>0$ $\left(c<-3/4 \right)$



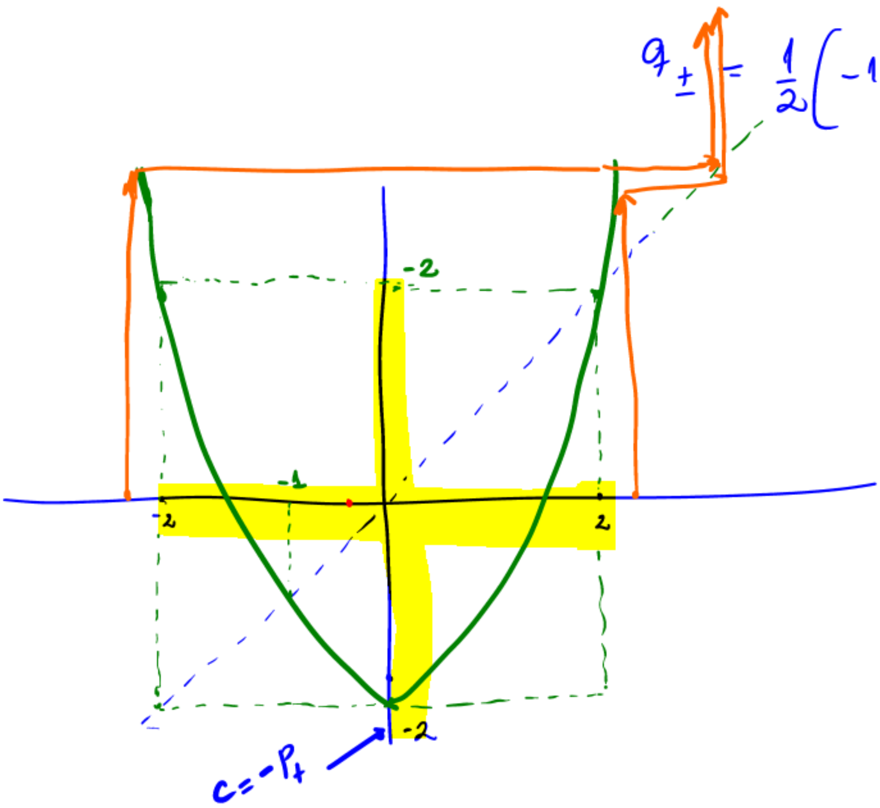
Caso $\underline{c=-2}$

$$Q_c(x) = x^2-2 \quad \Big\} \; c=-2$$

$$p_\pm = \frac{1\pm\sqrt{1-4c}}{2} = \frac{1\pm 3}{2} \to \begin{array}{l} p_+ = 2 \\ p_- = -1 \end{array}$$

$$q_\pm = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{-4c-3}\right) = \frac{1}{2}\left(-1\pm\sqrt{5}\right)$$

$\underbrace{}_{c=-2}$



Para $|x|>2$

$f^n(x) \to \infty$

¿ $f^n(x) \to$?

$|x|\leq 2$

¿ $f^n(x) \to$?

$C = -2$

$x \le 2$

$Q_c : [-2;2] \to [-2;2]$

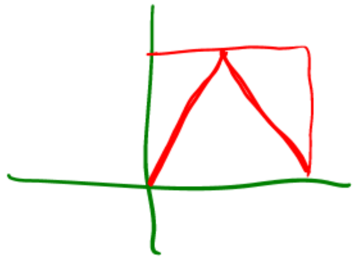
$x \mapsto Q_c(x) = x^2 - 2$

topológicamente conjugado

$f : [0,1] \to [0,1]$

$f(x) = 4x(1-x)$

$\Updownarrow$ top. conjugado

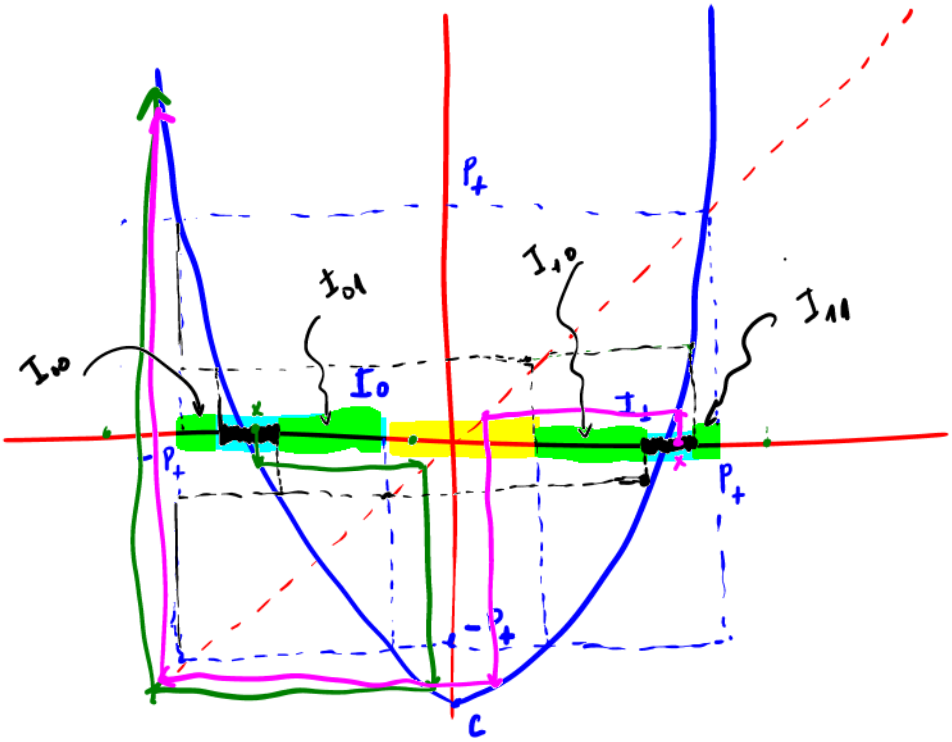


$g : [0,1] \to [0,1]$

$$g(x) = \begin{cases} 2x; & 0 \le x \le 1/2 \\ 2-2x; & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

$Q_c(x) = x^2 + c \qquad [-p_+, p_+]$

$c < -2$



$$p_+ = \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2}$$

$\Rightarrow -p_+ > c$

- Si $|x| > p_+$

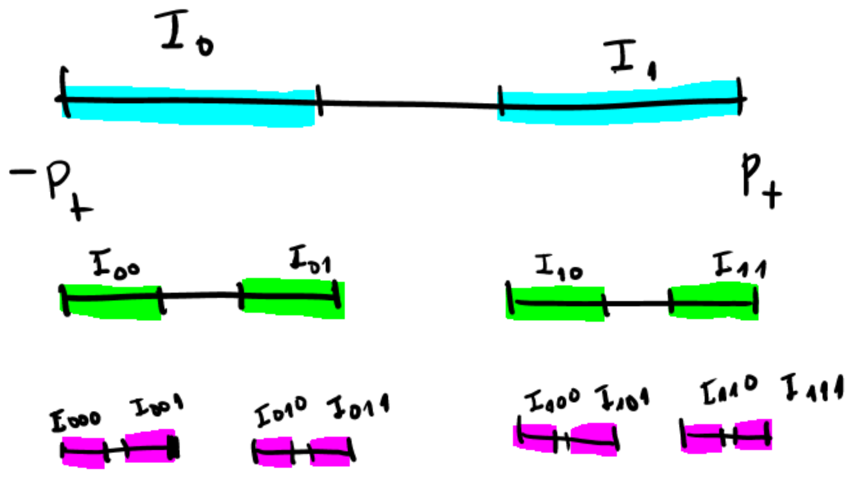
  $\to f^n(x) \to \infty$

- Si $x \in [-p_+, p_+] \setminus I_0 \cup I_1$

  $\Rightarrow f^n(x) \to \infty$

-

Si $x \in [-p_+, p_+] \setminus I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11} \Rightarrow f^n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$



$f(\Lambda) \subset \Lambda$

conjunto invariante

$$\Lambda = \{ x \in I = [-p_+, p_+] : f^n(x) \in I \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \}$$

Ejercicio: Mostrar que Λ es un conjunto de Cantor

Exposición:

$$Q_c : \Lambda \longrightarrow \Lambda \qquad \text{para } c < -2$$

$$x \longmapsto Q_c(x) = x^2 + c$$

es top. conjugado al shift de Bernoulli

$$\sigma : \Sigma_2^+ \longrightarrow \Sigma_2^+$$

En el libro Devaney está demostrada para $c < -\left(\frac{5+2\sqrt{5}}{4}\right)$, $c \simeq -2{,}36$