

Demostración de la conjugación topológica entre $Q_c(x) = x^2 + c$ y el *shift* de Bernoulli

Matihus Alberth Molina Larios, Lenin Yassel Trinidad Flores

10 Marzo, 2025

Se presenta una demostración **rigurosa** (pero razonablemente accesible) de que, para $c < -2$, la aplicación cuadrática

$$Q_c(x) = x^2 + c$$

(restringida a un cierto conjunto invariante Λ) es topológicamente conjugada al *shift* de Bernoulli en dos símbolos $\Sigma_2 = \{L, R\}^{\mathbb{N}}$. Esta demostración se basa en ideas clásicas que pueden encontrarse en libros como el de Devaney (*An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*), pero aquí se presenta de forma analítica y ordenada.

Intuición detrás de la Demostración

Este trabajo busca estudiar qué sucede tras múltiples iteraciones de un punto bajo un mapa dado (en este caso, la familia de mapas cuadráticos). Es evidente de la definición de punto fijo (un punto cuya imagen bajo el mapa es sí mismo), que uno tendrá distintos comportamientos a partir del parámetro que indexe al mapa (al bajar lo suficiente, se obtienen puntos fijos $Q_c(x) = x$, y al elevar se eliminan estos). De 5.3 Devaney (First Course in Chaotic Dynamical Systems), se define un punto fijo atractor y repulsor a partir de la magnitud de la derivada en el punto fijo dado (esto se intuye visualmente aproximando linealmente la función con su pendiente, y graficando a dónde se dirigen los puntos cercanos al punto fijo)

Recordemos las definiciones y usemos el gráfico de dicho libro:

Definición 0.1. Supongamos x_0 es un punto fijo para F , será atractor si $|F'(x_0)| < 1$, repulsor si $|F'(x_0)| > 1$ y neutral/indiferente si $|F'(x_0)| = 1$

La justificación es dada por el siguiente teorema presentado de forma inmediata:

Teorema 0.2 (Teorema del punto fijo repulsor). *Supongamos x_0 punto fijo repulsor para F , entonces existe un intervalo I conteniendo el x_0 en su interior y en el cual, si $x \in I$, con $x \neq x_0 \Rightarrow \exists n > 0 / F^n(x) \notin I$*

Esto es:

$$\forall x_0 (F(x_0) = x_0), \exists I_{x_0} (x_0 \in I_{x_0}) : \left(I_{x_0} - \{x_0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F^n)^{-1}(I_{x_0}^c) \right) \quad (1)$$

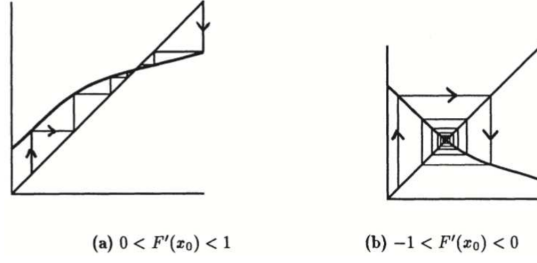


FIGURE 5.4
In each case, x_0 is an attracting fixed point.

Figure 1: Figura 5.4 del texto

Demostración:

$$\begin{aligned} |F'(x_0)| > 1 &\Rightarrow \exists \lambda > 0 : |F'(x_0)| > \lambda > 1 \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0 : |F'(x)| > \lambda (x \in I_{x_0} := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \end{aligned}$$

Afirmo que $I_{x_0} - \{x_0\} \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (F^n)^{-1}(I_{x_0}^c)$.

Sea $p \in I_{x_0} - \{x_0\}$, aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in B_{|p-x_0|}(x_0) \subseteq I_{x_0} : \frac{|F(p) - F(x_0)|}{|p - x_0|} &= F'(\alpha) > \lambda \text{ por } \alpha \in I_{x_0} \\ \Rightarrow |F(p) - x_0| &= |F(p) - F(x_0)| > \lambda |p - x_0| = r_1 \\ \Rightarrow F(p) &\notin \overline{B}_{r_1}(x_0) \end{aligned}$$

(El último resultado explica que, o F manda a p fuera del intervalo, o manda al intervalo menos un intervalo cerrado, esto es, manda a dos intervalos abiertos)

De forma inductiva:

Definamos: $\forall n \in \mathbb{N}, r_n := \lambda^n |p - x_0|$

Ahora bien, sabemos $(\forall n > 1)(|F^{n+1}(p) - x_0| > \lambda |F^n(p) - x_0| = \lambda r_n = r_{n+1})$

Con eso, y como $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : (n \geq n_0 \Rightarrow r_n < \delta)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |F^{n_0+1}(p) - x_0| &> r_{n_0} > \delta \\ \Rightarrow F^{n_0+1}(p) &\notin \overline{B}_{r_{n_0}}(x_0) \supseteq I_{x_0} \\ \Rightarrow F^{n_0+1}(p) &\in \overline{B}_{r_{n_0}}^c(x_0) \subseteq I_{x_0}^c \\ \Rightarrow p &\in (F^{n_0+1})^{-1}(I_{x_0}^c) \\ \Rightarrow \exists m = n_0 + 1 \in \mathbb{N} : p &\in (F^m)^{-1}(I_{x_0}^c) \\ \Rightarrow p &\in \bigcup_{n=1}^{\infty} (F^n)^{-1}(I_{x_0}^c) \end{aligned}$$

□

El cual difiere del teorema del punto fijo atractor:

Teorema 0.3 (Teorema del punto fijo atractor). *Supongamos x_0 punto fijo atractor para F , entonces existe un intervalo I conteniendo el x_0 en su interior y en el cual, si $x \in I \Rightarrow \forall n > 0, F^n(x) \in I$*

Esto es:

$$\forall x_0 (F(x_0) = x_0), \exists I_{x_0} (x_0 \in I_{x_0}) : \left(I_{x_0} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (F^n)^{-1}(I_{x_0}) \right) \quad (2)$$

Demostración:

$$\begin{aligned} |F'(x_0)| < 1 &\Rightarrow \exists \lambda > 0 : |F'(x_0)| < \lambda < 1 \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0 : |F'(x)| < \lambda (x \in I_{x_0} := [x_0 - \delta, x_0 + \delta]) \end{aligned}$$

Afirmo que $I_{x_0} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (F^n)^{-1}(I_{x_0})$.

Sea $p \in I_{x_0}$, aplicando el Teorema del Valor Medio:

$$\begin{aligned} \frac{|F(p) - F(x_0)|}{|p - x_0|} &< \lambda \\ \Rightarrow |F(p) - x_0| &= |F(p) - F(x_0)| < \lambda |p - x_0| =: r_1 < |p - x_0| < \delta \\ \Rightarrow F(p) &\in B_{r_1}(x_0) \subseteq I_{x_0} \end{aligned}$$

De forma inductiva

$$\begin{aligned} \text{Definamos: } \forall n \in \mathbb{N}, r_n &:= \lambda^n |p - x_0| \\ \text{Ahora bien, sabemos } (\forall n > 1) &(|F^{n+1}(p) - x_0| < \lambda |F^n(p) - x_0| = \lambda r_n = r_{n+1}) \\ \Rightarrow |F^n(p) - x_0| &< \lambda^n |p - x_0| < |p - x_0| < \delta \\ \Rightarrow F^{n+1} &\in B_{r_{n+1}}(x_0) \subseteq I_{x_0} \end{aligned}$$

Con esto se cumple la primera proposición, adicionalmente es fácil ver que debido a $\lim \lambda^n = 0$, entonces $\lim F^n(p) = x_0 \forall p \in I_{x_0}$

□

Ambos teoremas nos permiten estudiar a dónde irán a parar los puntos tras múltiples iterados, el objetivo de este trabajo es dar un repaso del comportamiento de estos puntos para diversos índices.

Ahora bien, el texto verifica la dinámica de la familia de funciones cuadrática $Q_c(x) = x^2 + c$ para todos los $c > -5/4$, (i.e. $c \in (-5/4, \infty)$) en el capítulo 6, en el capítulo 7 se verifica trivialmente que si $c = -2$ es topológicamente conjugado con el mapa "doble", y finalmente. en el capítulo 8 revisa el caso $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4} \approx -2.368...$, (i.e. $c \in (-\infty, -\frac{5+2\sqrt{5}}{4})$).

Nuestro objetivo es dar un enfoque sintético de los 3 casos y dar un esbozo de los casos $-2 > c > -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ y $-5/4 > c > -2$, esto es, $c \in (-\frac{5+2\sqrt{5}}{4}, -2) \cup (-2, -5/4)$

Empecemos comprendiendo de forma cualitativa los intervalos básicos presentados en el libro: Vemos que el texto toma los puntos fijos de Q_c resolviendo $x^2 + c = Q_c(x) = x$ con lo que tendremos ecuación cuadrática, esto es, hay 2 puntos fijos a lo sumo, los cuales son dados por $p_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$ (i.e. $p_+ = \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2}$ y $p_- = \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2}$)

1 Caso Trivialmente Simple: $c > 1/4$

Para obtener raíces reales (existen puntos fijos), debe evitarse $1 - 4c < 0$. Supongamos que no sea el caso, entonces Q_c no tiene puntos fijos. Entonces $Q_c(0) = 1/4 > 0 \Rightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, Q_c(x) > x)$

Si no, $\exists x \in \mathbb{R} : Q_c(x) \leq x \Rightarrow \exists \beta \in B_{|x|}(0) : Q_c(\beta) = x$ por $Q_c(0) > 0, Q_c(x) \leq x$, con lo que $(\Rightarrow \Leftarrow) \nexists x \in \mathbb{R} : Q_c(x) = x$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, Q_c^n(x) &> Q_c(Q_c^{n-1}x) > Q_c^{n-1}(x) > \dots > x \\ &\Rightarrow \{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sec. monótona creciente} \end{aligned}$$

Supongamos que $\{Q_c^n(x)\}$ acotado, entonces:

$$\begin{aligned} \exists \sup\{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x) =: L \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow Q_c^n(L) &= Q_c^n\left(\lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x)\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^{n+1}(x) = L \text{ (por continuidad de } Q_c^n) \end{aligned}$$

con lo que L es un punto fijo, lo que contradice nuestro argumento anterior.

Por tanto, $\{Q_c^n(x)\}$ no acotado, con lo que $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x) = \infty$ para x arbitrario en \mathbb{R} .

Todo lo anterior se resume en que para $c \in (\frac{1}{4}, \infty)$, todos los puntos se van al infinito

2 Caso $c = 1/4$

Existe un punto fijo $p_{\pm} = 1/2$

Verificamos que la derivada cumple $|Q'_c| = |2x| = 1 \Rightarrow 1/2$ punto fijo neutro de Q_c

Consideremos los puntos adentro y fuera de $(-1/2, 1/2)$,

Caso I:

$$\begin{aligned} \text{Sea } |x| > 1/2 &\Rightarrow Q_c(x) = x^2 + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \\ \Rightarrow Q_c^2(x) &= Q_c(Q_c(x)) = (Q_c(x))^2 + \frac{1}{4} > \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \dots \\ \Rightarrow Q_c^n(x) &> 1/2 \end{aligned}$$

Caso II:

$$\begin{aligned} \text{Sea } |x| < 1/2 &\Rightarrow Q_c(x) = x^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow Q_c^2(x) &= Q_c(Q_c(x)) = (Q_c(x))^2 + \frac{1}{4} < \frac{1}{2} \\ \Rightarrow \dots \\ \Rightarrow Q_c^n(x) &< 1/2 \end{aligned}$$

Por tanto $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$ y $(-1/2, 1/2)$ son Q_c^n -invariantes Por Simetría, basta tomar para valores positivos.

Sea $x \in [0, 1/2) \Rightarrow Q'_c(x) = 2x \in [0, 1)$

$$\Rightarrow \exists \delta \in (0, 1] : Q'_c(x) = 1 - \delta$$

$$\Rightarrow (Q_c(x) - x)' = -\delta < 0$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x \text{ decreciente}$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x > Q_c(p_{\pm} - \epsilon) - p_{\pm} + \epsilon, \text{ para } 0 < \epsilon < p_{\pm} - x$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x > Q_c(p_{\pm}) + \epsilon^2 - 2\epsilon p_{\pm} - p_{\pm} + \epsilon = p_{\pm} + \epsilon^2 - 2\epsilon p_{\pm} - p_{\pm} + \epsilon = \epsilon(\epsilon - 2p_{\pm} + 1) = \epsilon^2$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x > \epsilon^2$$

$$\Rightarrow Q_c(x) > x + \epsilon^2 > x$$

$$\Rightarrow \{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sec. creciente y acotada por } 1/2$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x) = \sup(\{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}) \leq 1/2$$

Ahora bien, dicho límite es punto fijo por argumento anterior sobre continuidad de Q_c^n

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x) = 1/2$$

Luego podemos repetir con argumento análogo para el otro intervalo, puede omitirse la siguiente verificación:

Sea $x \in (1/2, \infty) \Rightarrow Q'_c(x) = 2x \in (1, \infty) \subseteq (0, \infty)$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 : Q'_c(x) = 1 + \delta$$

$$\Rightarrow (Q_c(x) - x)' = \delta > 0$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x \text{ creciente}$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x > Q_c(p_{\pm} + \epsilon) - p_{\pm} - \epsilon, \text{ para } 0 < \epsilon < x - p_{\pm}$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x > Q_c(p_{\pm}) + \epsilon^2 + 2\epsilon p_{\pm} - p_{\pm} - \epsilon = p_{\pm} + \epsilon^2 + 2\epsilon p_{\pm} - p_{\pm} - \epsilon = \epsilon(\epsilon + 2p_{\pm} - 1) = \epsilon^2$$

$$\Rightarrow Q_c(x) - x > \epsilon^2$$

$$\Rightarrow Q_c(x) > x + \epsilon^2 > x$$

$$\Rightarrow \{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sec. creciente}$$

Si fuera acotada dicho límite es punto fijo mayor

Luego hay otro punto fijo ($\Rightarrow \Leftarrow$)

$$\Rightarrow \{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \text{ sec. creciente, no acotada}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x) = \infty$$

El resumen de todo nuestro estudio para el caso es lo siguiente: En $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, \infty)$, los puntos se van al infinito y en $(-1/2, 1/2)$ se van a $1/2$

3 Casos $c < 1/4$

Sabemos que para $c < 1/4 \Rightarrow \exists p_+, p_- : (p_+ \neq p_-), (Q_c^n(p_+) = p_+), (Q_c^n(p_-) = p_-)$
 $\frac{1 \pm \sqrt{1-4c}}{2}$

Ahora bien, tenemos:

$$\begin{aligned} p_+ &= \frac{1 + \sqrt{1-4c}}{2} \Rightarrow |Q'_c(p_+)| = |2p_+| = |1 + \sqrt{1-4c}| > 1 \\ p_- &= \frac{1 - \sqrt{1-4c}}{2} \Rightarrow |Q'_c(p_-)| = |2p_-| = |1 - \sqrt{1-4c}| \\ &(|1 - \sqrt{1-4c}| < 1) \vee (|1 - \sqrt{1-4c}| = 1) \vee (|1 - \sqrt{1-4c}| > 1) \\ &\Rightarrow (-1 < 1 - \sqrt{1-4c} < 1) \vee (1 - \sqrt{1-4c} \in \{-1, 1\}) \vee (\sqrt{1-4c} - 1 > 1 \vee 1 < 1 - \sqrt{1-4c}) \\ &\Rightarrow (2 > \sqrt{1-4c} > 0) \vee (-\sqrt{1-4c} \in \{-2, 0\}) \vee (\sqrt{1-4c} > 2 \vee 0 < -\sqrt{1-4c}) \\ &\Rightarrow (3 > -4c) \vee (\sqrt{1-4c} \in \{2, 0\}) \vee \left((1 - 4c > 4) \vee (F \equiv (0 > \sqrt{1-4c})) \right) \\ &\Rightarrow (-3/4 < c) \vee (c \in \{-3/4, 1/4\}) \vee (-3/4 > c) \end{aligned}$$

Esto es, p_+ es punto fijo repulsor siempre,

1. para $c \in (-\frac{3}{4}, \frac{1}{4})$, p_- es punto fijo atractor;
2. para $c \in \{-\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\}$, p_- es punto fijo neutro;
3. para $c \in (-\infty, -\frac{3}{4})$, p_- es punto fijo repulsor.

4 Caso $-3/4 \leq c < 1/4$

Para $|x| > p_+$, un argumento análogo al anterior basta para ver que va a infinito. En efecto

$$\begin{aligned} \text{Sea } x &\in (p_+, \infty) \Rightarrow Q'_c(x) = 2x \in (1 + \sqrt{1-4c}, \infty) \subseteq (0, \infty) \\ &\Rightarrow \exists \delta > 0 : Q'_c(x) = 1 + \delta \\ &\Rightarrow (Q_c(x) - x)' = \delta > 0 \\ &\Rightarrow Q_c(x) - x \text{ creciente} \\ &\Rightarrow Q_c(x) - x > Q_c(p_{\pm} + \epsilon) - p_{\pm} - \epsilon, \text{ para } 0 < \epsilon < x - p_{\pm} \end{aligned}$$

.

$$\begin{aligned} &\Rightarrow Q_c(x) - x > Q_c(p_{\pm}) + \epsilon^2 + 2\epsilon p_{\pm} - p_{\pm} - \epsilon \\ &= p_{\pm} + \epsilon^2 + 2\epsilon p_{\pm} - p_{\pm} - \epsilon \\ &= \epsilon(\epsilon + 2p_{\pm} - 1) \\ &= \epsilon(\epsilon + \sqrt{1-4c}) \\ &> \epsilon^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} Q_c^n(x) = \infty$$

Separemos dos casos, de acuerdo a su naturaleza geométrica

CASO I : $c \in (0, 1/4)$

Para $x \in (p_-, p_+) \subseteq (0, p_+)$ se cumple $(p_+ - x)(x - p_-) > 0 \Rightarrow x^2 + c - x < 0 \Rightarrow Q_c(x) < x$

Esto es, $\{Q_c^n(x)\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq (0, p_+)$ es una secuencia decreciente, acotada por 0. Por tanto, admite límite punto fijo el cual sólo puede ser p_- .

Para $x \in [0, p_-)$, tenemos por argumento análogo a caso $c = 1/4$ con p_- atractor, (basta usar derivada menor a 1 y argumento de deltas) que $Q_c^n(x)$ tiende a p_- .

CASO II : $c \in (-3/4, 0)$

Igual que antes, tenemos los casos triviales $\mathbb{R} - (-p_+, p_+)$

Para $x \in (-p, p_+) \supseteq (0, p_+)$.

Dado un $0 < \lambda < 1$. Sea $x \in Q_c^{-1}\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3-\lambda^2}{4}\right)$ Recordemos que el rango de Q_c es $[c, \infty) \Rightarrow c \leq x^2 + c < -\frac{3-\lambda^2}{4} \Rightarrow 0 \leq x^2 < -\frac{3-\lambda^2}{4} - c < \frac{\lambda^2}{4}$

Finalmente tendremos: $0 \leq x^2 < \frac{\lambda^2}{4} \Rightarrow 0 \leq |Q'_c(x)| < \lambda < 1$

Esto quiere decir que para teorema de punto fijo atractor, el intervalo $I_{x_0} := Q_c^{-1}\left(-\frac{3}{4}, -\frac{3-\lambda^2}{4}\right) \in \tau$ satisface. De donde tenemos que si algún punto está en ese intervalo, entonces se verá atraído por el p_- . Por arbitrariedad de λ , podemos considerar $Q_c^{-1}\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$. De ahí, sólo tenemos que verificar para el caso $Q_c^{-1}\left(-\frac{1}{2}, p_+\right)$

Por simetría, y por comportamiento decreciente de órbitas debido a caso anterior cerca de p_+ , tendremos que la órbita siempre va a tender a su punto fijo atractor. Para el caso de igualdad, basta argumentar de forma idéntica al último caso. En este caso, dada la perpendicularidad de la tangente, obtendremos la aparición de comportamiento caótico

5 Caso $-5/4 < c < -3/4$

El texto describe para $-5/4 < c < -3/4$ una bifurcación, en la que aparecen puntos de período 2. Veamos:

$$\begin{aligned} Q_c^2(x) = x &\Rightarrow (x^2 + c)^2 + c = x \\ &\Rightarrow x^4 + 2x^2c - x + c^2 + c = 0 \\ &\Rightarrow (x^2 - x + c)(x^2 + x + c + 1) = 0 \\ &\Rightarrow x = p_{\pm} \vee x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(c+1)}}{2} \end{aligned}$$

Definimos los puntos $q_{\pm} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3-4c}}{2}$ que representan a los puntos de período 2. Notamos por discriminante que existe para $c \leq -\frac{3}{4}$

Estos puntos atraerán a los demás suficientemente cercano si el segundo iterado Q_c^2 lo tiene como punto fijo atractor/repulsor. Para este caso:

$$\begin{aligned}
(Q_c^2)'(x) &= 4x^3 + 4xc = 4x(x^2 + c) \\
\Rightarrow (Q_c^2)'(q_{\pm}) &= -4(q_{\pm})(q_{\pm} + 1) \\
\Rightarrow (Q_c^2)'(q_{\pm}) &= -4\left(\frac{-1 \pm \sqrt{-3-4c}}{2}\right)\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3-4c}}{2}\right) = -(-3-4c-1) = 4+4c \\
\Rightarrow |(Q_c^2)'(q_{\pm})| &= 4(c+1)
\end{aligned}$$

De donde, para $c \in (-5/4, -3/4)$ tenemos q_{\pm} son atractores, y $c \in (-\infty, -5/4)$ son repulsores.

Es fácil ver que hay más puntos periódicos a partir de aumentar los valores de las raíces y resolviendo $Q_c^n(x) = x$.

Primero estudiamos los puntos fijos como atractor / repulsor, luego los puntos periódicos, que atraen a puntos a su ciclo, luego la conjugación topológica con shift bajo dinámica simbólica, en este caso, daremos la conjugación desde el mapa cuadrático y el mapa logístico, luego usaremos derivada Schwarziana para probar que un resultado intermedio es válido sin una restricción dada (usando teorema de hiperbolicidad)

6 Caso $c = -2$

El proceso anterior, (de la aparición de múltiples puntos periódicos) empieza a tener un salto significativo con la aparición del $c \leq -2$. El texto de Devaney afirma esto mediante una intuición visual, a partir de construcción de intervalos que son enviados bajo Q_c a otros intervalos, actuando como dobles. En vista del espíritu del trabajo, procederemos repasando brevemente la conjugación topológica.

Definición 6.1 (Mapa Carpa). El mapa carpa, es aquel $T : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ con regla de correspondencia:

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{para } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{para } x \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (3)$$

Introducimos desde ahora, otro mapa auxiliar, la familia logística. Para ello, primero verificamos que $x \in [0, 1], \lambda \in [0, 4] \implies \lambda x(1-x) \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}
x \in [0, 1], \lambda \in [0, 4] &\implies -\frac{1}{2} \leq x - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2} \\
&\implies 0 \leq (x - \frac{1}{2})^2 \leq \frac{1}{4} \\
&\implies -\frac{1}{4} \leq (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq 0 \\
&\implies -1 \leq -\frac{\lambda}{4} \leq \lambda \left((x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right) \leq 0 \\
&\implies 0 \leq \lambda \left(\frac{1}{4} - (x - \frac{1}{2})^2 \right) \leq 1 \\
&\implies \lambda x(1-x) \in [0, 1]
\end{aligned}$$

Definición 6.2 (Familia Logística). La familia logística, es la familia de funciones $L_\lambda : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ indexadas por $\lambda \in [0, 4]$ con la regla de correspondencia:

$$L_\lambda(x) = \lambda x(1 - x) \quad (4)$$

Notamos que si $\lambda \in [0, 4]$ entonces $L_\lambda : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$

Definición 6.3 (Conjugación). Dos mapas son conjugados si $\exists h : M_g \rightarrow M_f / h \circ f = g \circ h$ donde M_f, M_g son espacios ambiente de f y g respectivamente. Si h es homeomorfismo, la conjugación será topológica; si es difeomorfismo de clase C^m , ($m \leq r$; , $f, g \in C^r$) es conjugación suave y f, g son C^m -equivalentes; si es continuo y sobreyectivo, es semiconjugación y g es factor de f .

Es inmediato ver que la conjugación topológica manda puntos periódicos a puntos periódicos

$$\begin{aligned} f^n(x) = x &\Rightarrow h(x) = h \circ f^n(x) = (g \circ h) \circ f^{n-1}(x) \\ &= g \circ (h \circ f^{n-1})(x) = g \circ (g \circ h) \circ f^{n-2}(x) \\ &= \dots = g^n \circ h(x) \\ &\Rightarrow g^n(h(x)) = h(x) \end{aligned}$$

Definamos los conjuntos límite, para hablar de forma correcta del proceso de irse al infinito (a dónde irá a parar un punto tras múltiples iteraciones)

Definición 6.4 (Conjuntos límite).

$$\begin{aligned} \omega_f(x) &= \{y \in M_f : (\exists n_k \rightarrow +\infty : f^{n_k}(x) \rightarrow y)\} \\ \alpha_f(x) &= \{y \in M_f : (\exists n_k \rightarrow -\infty : f^{n_k}(x) \rightarrow y)\} \end{aligned}$$

Proposición 6.5.

$$\begin{aligned} h(\omega_f(x)) &= \omega_g(h(x)) \\ h(\alpha_f(x)) &= \alpha_g(h(x)) \end{aligned}$$

Demostración. Por doble inclusión: $y \in h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x))$

$$\begin{aligned} z \in h(\omega_f(x)) &\Rightarrow \exists y \in \omega_f(x) : z = h(y) \\ &\Rightarrow \exists n_k \rightarrow \infty : f^{n_k}(x) \rightarrow y \\ \text{h continua y arg. anterior} &\Rightarrow g^{n_k} \circ h(x) = h(f^{n_k}(x)) \rightarrow h(y) = z \\ &\Rightarrow n_k \rightarrow +\infty \text{ y } g^{n_k}(h(x)) \rightarrow z \\ &\Rightarrow z \in \omega_g(h(x)) \end{aligned}$$

Para la otra inclusión se usa inversa, si no existe, como en el caso de semi conjugación, se da sólo la primera inclusión.

□

Teorema 6.6 (Conjugación Q_c y L_λ). *El mapa logístico y $Q_c|_{[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}]}$ son topológicamente conjugados bajo $h(x) = -\lambda x + \frac{\lambda}{2}$ para $c = \frac{\lambda(2-\lambda)}{4}$.*

Demostración. La motivación detrás de nuestra elección de h reside en el hecho de un simple argumento geométrico de expansión de ejes (multiplicación), translación en ambos ejes (suma) y rotación en ambos ejes (cambio de signo). Esto es, un mapeo lineal

Verifiquemos que $h(x)$ conjugue al menos para un intervalo conveniente (coinciden las composiciones de las reglas de correspondencia).

$$\begin{aligned}
 h \circ L_\lambda(x) &= Q_c \circ h(x) \\
 \Rightarrow -\lambda L_\lambda(x) + \frac{\lambda}{2} &= Q_c(-\lambda x + \frac{\lambda}{2}) \\
 \Rightarrow -\lambda(\lambda x(1-x)) + \frac{\lambda}{2} &= (-\lambda x + \frac{\lambda}{2})^2 + c \\
 \Rightarrow -\lambda^2 x + \lambda^2 x^2 + \frac{\lambda}{2} &= \lambda^2 x^2 - \lambda^2 x + \frac{\lambda^2}{4} + c \\
 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} &= \frac{\lambda^2}{4} + c \\
 \Rightarrow \frac{\lambda(2-\lambda)}{4} &= c
 \end{aligned} \tag{5}$$

Esto es, para $c = \frac{\lambda(2-\lambda)}{4}$, tenemos que h es conjugación.

□

Además, tenemos que si $\lambda \in [0, 4] \Rightarrow \lambda(2-\lambda) = -(\lambda-1)^2 + 1 \in [-8, 1] \Rightarrow c \in [-2, \frac{1}{4}]$

Esto es, el mapa logístico nos permite estudiar el comportamiento del mapa cuadrático en el intervalo faltante $[-2, -5/4]$.

Teorema 6.7 (Conjugación carpa y L_4). *Los mapas carpa y L_4 son conjugados bajo $h = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$*

Demostración. Supongamos que son topológicamente conjugados, entonces debe satisfacer la identidad $h(2 - 2x) = 4h(x)(1 - h(x))$. Buscamos que mediante trigonometría el término del lado derecho se simplifique en algún producto común.

Para $x \in [0, 1/2]$

$$\begin{aligned} h(x) = \sin^2(f(x)) &\Rightarrow \sin^2(f(2x)) = 4\sin^2(f(x))\cos^2(f(x)) \\ &\Rightarrow \sin(f(2x)) = \pm \sin(2f(x)) \\ &\Rightarrow f(2x) \pm 2f(x) \in \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Para $x \in [1/2, 1]$

$$\begin{aligned} h(x) = \sin^2(f(x)) &\Rightarrow \sin^2(f(2 - 2x)) = 4\sin^2(f(x))\cos^2(f(x)) \\ &\Rightarrow \sin(f(2 - 2x)) = \pm \sin(2f(x)) \\ &\Rightarrow f(2 - 2x) \pm 2f(x) \in \pi\mathbb{Z} \end{aligned}$$

Suponiendo f lineal (Primera ecuación en el conjunto cociente), tenemos:

$$2cx \pm 2cx + \alpha \pm \alpha \in \pi\mathbb{Z}, 2c - 2cx \pm 2cx + \alpha \pm \alpha \in \pi\mathbb{Z}$$

Tomando caso positivo en \pm , tendremos $(\alpha + c) \in \frac{\pi}{2}\mathbb{Z}$.

La conjugación se cumplirá para $\alpha = 0, c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$.

Verifiquemos para r arbitrario: $c = \frac{\pi r}{2}, \alpha = \frac{\pi(1-r)}{2} \Rightarrow \sin^2(\frac{\pi(r(x-1)+1)}{2})$

Verifiquemos que cumple:

Queremos $h(2x) = 4h(x)(1 - h(x))$

$$\begin{aligned} \text{Esto es, queremos que } \sin^2(\pi rx + \frac{\pi(1-r)}{2}) &= \sin^2(\frac{\pi(r(2x-1)+1)}{2}) = h(2x) \\ &= 4h(x)(1 - h(x)) = 4\sin^2(\frac{\pi(r(x-1)+1)}{2})\cos^2(\frac{\pi(r(x-1)+1)}{2}) \\ &= \sin^2(\pi(r(x-1)+1)) = \sin^2(\pi rx + \pi(1-r)) \end{aligned}$$

$$\text{Esto es, buscamos: } \sin^2(\pi rx + \frac{\pi(1-r)}{2}) = \sin^2(\pi rx + \pi(1-r))$$

Lo cual sólo cumple para $\alpha \in \pi\mathbb{Z} \Rightarrow r \in 1 - 2\mathbb{Z} = 2\mathbb{Z} + 1$

Entonces la única conjugación de este tipo es $h(x) = \sin^2(\frac{\pi x}{2})$

□

Definición 6.8 (Espacio de Secuencias). Definimos el espacio de secuencias como:

$$\Omega_N^R := \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) | \omega_i \in \{0, 1, \dots, N-1\}\}$$

En particular, para $N = 2$:

$$\Omega_2^R := \{\omega = (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) | \omega_i \in \{0, 1\}\}$$

Comentario 1. En lo sucesivo, llamaremos a este espacio como Ω_N^R, Σ_N^+ indistintamente

Definición 6.9 (Topología). Una topología τ en un conjunto X es una colección de subconjuntos de X , llamados abiertos que verifica:

1. $X, \emptyset \in \tau$
2. $U, V \in \tau \Rightarrow U \cap V \in \tau$
3. $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$

Definición 6.10 (Base para topología). Una base para una topología τ de X es una subcolección en τ de subconjuntos de X que verifica:

$$U \in \tau \Rightarrow \exists \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} : \bigcup_{i \in I} U_i = U$$

Proposición 6.11. $\mathcal{B} \subseteq \tau$ es base para la topología $\tau \iff \forall G \in \tau, x \in G, \exists U_x \in \mathcal{B} : x \in U_x \subseteq G$

Demostración. (\Rightarrow) Si es base para topología,

$$\begin{aligned} \exists \{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{B} : \bigcup_{i \in I} U_i = G \Rightarrow x \in G = \bigcup_{i \in I} U_i \\ \Rightarrow \exists i_0 \in I : x \in U_{i_0} \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i = G \\ \Rightarrow \exists U_{i_0} \in \mathcal{B} : x \in U_{i_0} \subseteq G \end{aligned}$$

(\Leftarrow) Si cumple la proposición, $G \subseteq \bigcup_{x \in G} U_x \subseteq G \Rightarrow G = \bigcup_{x \in G} U_x$ entonces es base \square

Definición 6.12 (Métrica). Una métrica d en un conjunto X es una función $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ que verifica para $x, y, z \in X$ arbitrarios

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$
3. $d(x, y) = d(y, x)$

Un espacio métrico es un conjunto con una métrica

Proposición 6.13 (Métrica del espacio de sec.). Podemos dotar al espacio de secuencias

Ω_N^R de una métrica: $d_k(\omega, \omega') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\omega_i - \omega'_i|}{k^{i+1}}$ con $k > 1$

Cuando no dejemos claro el valor de k , es inmediato del espacio de sec. usado o, en su defecto, es 2

Demostración. 0. d es bien definido: $d(\omega, \omega') = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\omega_i - \omega'_i|}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{N}{2^{i+1}} \leq N$

1. $d(x, x) = 0$:

$$d(\omega, \omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\omega_i - \omega_i|}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{0}{2^{i+1}} = 0$$

2. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

$$d(x, z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - z_i|}{2^{i+1}} \leq \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{i+1}} + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y_i - z_i|}{2^{i+1}} = d(x, y) + d(y, z)$$

$$3. d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{i+1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|y_i - x_i|}{2^{i+1}} = d(y, x)$$

□

Definición 6.14 (Cilindros). Definimos un cilindro como $C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k}^{n_1, n_2, \dots, n_k} = \{\omega \in \Omega_N^R \mid \omega_{n_i} = \alpha_i \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}\}$

Corolario 6.15. La topología inducida por la métrica del espacio de sec. tiene como base al conjunto de cilindros

Demostración. Queremos verificar para la proposición anterior que dado un ω y un $B_r(\omega)$ conteniéndolo, existirá un cilindro que contenga al punto ω y que esté contenido en la bola. Por propiedades de espacios métricos, basta tomar una bola más pequeña centrada en ω y encontrar al cilindro ahí (fijando algunos elementos de ω , a fin de que este también esté en el cilindro)

Veamos como son las bolas abiertas del espacio métrico $B_r(\omega)$. Tomemos $r < N$ (Si no, arbitrariamente la bola es todo el espacio). Podemos suponer $r \geq \frac{N}{2^t} = N(\sum_{i=t+1}^{\infty} \frac{1}{2^{i+1}})$ para t fijo. Asimismo, tomamos el cilindro $C := C_{\omega_1, \dots, \omega_{t-1}}^{1, 2, \dots, t-1}$

$$\begin{aligned} x \in C &\Rightarrow d(x, \omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - \omega_i|}{2^i} \leq \sum_{i=1}^t \frac{|x_i - \omega_i|}{2^i} + \frac{N}{2^t} \\ &\Rightarrow d(x, \omega) \leq \frac{N}{2^t} < r \\ &\Rightarrow x \in B_r(\omega) \end{aligned}$$

Además, de forma análoga, se puede ver que la topología que generan los cilindros es equivalente a la métrica

$$\begin{aligned} x \in C &\Rightarrow \epsilon := \min\left\{\frac{1}{2^{n_j+1}} \mid n_j \text{ índice fijo}\right\} \\ &\Rightarrow \left(\forall y \in B_{\epsilon}(x), d(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{2^{i+1}} < \epsilon\right. \\ &\Rightarrow \frac{|x_{n_j} - y_{n_j}|}{2^{n_j}} < \epsilon \leq \frac{1}{2^{n_j+1}} \\ &\Rightarrow |x_{n_j} - y_{n_j}| < \frac{1}{2} \\ &\left.\Rightarrow y \in C\right) \Rightarrow B_{\epsilon}(x) \subseteq C \end{aligned}$$

Por tanto, ambas definen la misma topología (cada una es más fina que la otra).

Se puede probar que alguna topología es generada por los cilindros, pero por no aumentar innecesariamente la longitud del texto, es menéster dejarlo así.

□

Definición 6.16 (Operador Shift de Bernoulli). Definimos el operador shift de Bernoulli $\sigma : \Omega_N^R \rightarrow \Omega_N^R$ como $\sigma : (\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mapsto (\omega_2, \omega_3, \omega_4, \dots)$

Definición 6.17 (Rotaciones del Círculo). Definimos el círculo de forma de espacio cociente a partir de $S^1 := \{e^{2\pi i\alpha} | \alpha \in \mathbb{R}\}$ como $S^1 := \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

Con $\beta \in [\alpha] \in S^1 \iff \beta - \alpha \in \mathbb{Z}$

Escribimos $\beta \in [\alpha]$ como $\beta \equiv \alpha \pmod{1}$

Definición 6.18 (Mapa Doble Cubrimiento). Definimos el mapa doble cubrimiento $E_2 : S^1 \rightarrow S^1$ como $E_2(\beta) \equiv 2\beta \pmod{1}$

Podemos expresar el mapa doble cubrimiento como la parte fraccionaria de todos los elementos de la clase de equivalencia módulo 1 de la imagen

Teorema 6.19 (Conjugación E_2 , T y σ). *Los mapas E_2 , T y σ son todos conjugados bajo representación binaria*

Demostración. Usaremos la demostración del libro de Katok.

Sabemos que en S^1 , T , ambos sólo dependen de los valores de puntos en $[0, 1]$. Por representación decimal, escribimos los números en este intervalo representación binaria $x \in [0, 1] \Rightarrow x = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ para $a_i \in \{0, 1\}$

Definamos: $h_k((a_1, a_2, \dots)) := \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{k^i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{k^i} = \frac{1}{k-1} \in \mathbb{R}$, bien definido a partir de

$$h_k(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n, \text{ con } s_n = \sum_{i=1}^n \frac{a(i)}{k^i}$$

Verificamos que h continuo:

$$\text{Dado } \epsilon > 0, d_k(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{k^i} < \epsilon$$

$$\Rightarrow d(h_k(x), h_k(y)) = \left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{k^i} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i}{k^i} \right| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|x_i - y_i|}{k^i} < \epsilon$$

Es inmediatamente sobreyectivo, tomando representación decimal en $[0, 1]$

Quitando racionales binarios, h será inyectivo.

Definamos para este caso $h(\omega) := \begin{cases} h_2(\omega), & \omega \in C_0^1 \\ 1 - h_2(\omega), & \omega \in C_1^1 \end{cases}$

Afirmo: $\sigma \circ h = h \circ T$ y $\sigma \circ (h_2) = (h_2) \circ E_2$

$$T(h(\omega)) = \begin{cases} 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \text{ para } x \in [0, 1/2], \text{ y por rep. binaria con } a_1 = 0 \text{ o } a_1 = 1, a_{i>1} = 0 :) \\ 2 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} \text{ para } x \in [1/2, 1], \text{ y por rep. binaria con } a_1 = 1 : \end{cases}$$

Recordemos que por representación binaria

$$x \in [0, 1] \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2(\frac{1}{2}) = (\text{alternativamente } = 2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^i}) = 1, \text{ para } x = \frac{1}{2} \\ 2x = 2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_{i+1}}{2^i} \text{ para } x \in [0, 1/2) \\ 2 - 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 1 - 2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{2^i} = 1 - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{a_i}{2^{i-1}} \text{ para } x \in (1/2, 1] \end{cases}$$

Donde aplicando:

$$\begin{aligned} T(h(\omega)) &= \begin{cases} h((1, 1, 1, 1, 1, \dots)) \text{ para } \omega = (0, 1, 1, 1, \dots) \\ h((a_2, a_3, \dots)) \text{ para } \omega = (0, a_2, a_3, \dots) \\ h((a_2, a_3, \dots)) \text{ para } \omega = (1, a_2, a_3, \dots) \end{cases} \\ &= h(\sigma(\omega)) \end{aligned}$$

Notemos que para este caso es semiconjugación por no poder garantizar la inyectividad al no poder eliminar los racionales binarios.

Para E_2, σ , la conjugación será más sencilla y sí es topológica por usar módulo para ignorar los racionales binarios

$$\begin{aligned} E_2 \circ h(\omega) &= 2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i} (\text{ mod } 1) \\ &\equiv \omega_1 + 2 \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^i} (\text{ mod } 1) \equiv \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\omega_i}{2^{i-1}} (\text{ mod } 1) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\omega_{i+1}}{2^i} = h((\omega_2, \omega_3, \dots)) \\ &= h_2(\sigma(\omega_1, \omega_2, \dots)) = h_2(\sigma(\omega)) = \sigma \circ h^{-1}(x) \end{aligned}$$

Notar que en la 3era línea dejamos de considerar el módulo porque encontramos el número que representa a la clase y es menor a 1. (el elemento representa la parte fraccionaria) \square

Proposición 6.20. *La cantidad de puntos periódicos de E_2 de periodo n son $2^n - 1$.*

Proof. $z^{2^n} = E_2^n(z) = z \Rightarrow z^{2^n-1} = 1 \Rightarrow z$ raíz de la unidad. Como hay $2^n - 1$ raíces distintas de la unidad, se sigue el resultado \square

Corolario 6.21. *La cantidad de puntos periódicos de Q_{-2} de periodo n son $2^n - 1$.*

Comentario 2. Como caso particular, vemos que el comportamiento de $c \in (-2, -5/4)$ consiste en un aumento (aún no somos capaces de explicar si gradual o no) de puntos periódicos, hecho el cual era una hipótesis natural del desarrollo de las secciones anteriores. Además, hay una generalización, de conjugación topológica de los mapas expansivos en el círculo y los mapas n -ésimo cubrimiento

7 Caso $c < -2.368\dots$

Verificaremos, del mismo modo que en casos análogos que para $c < -2.368\dots$, la magnitud de la derivada nos permitirá conjugar con el espacio de secuencias

Para $c < -2$, definimos

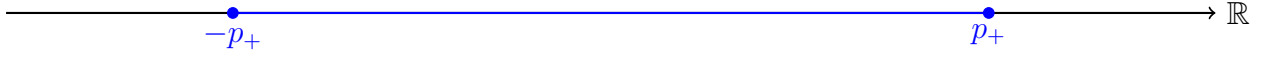
$$\Lambda = \{x \in I = [-p_+, p_+]/ \quad Q_c^n(x) \in I, \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q^{-n}(I)$$

Veamos en los casos:

1. $n=0$.

$$Q_c^0(x) = x \in I$$

Graficando en la recta \mathbb{R}



Además $-p_+, p_+ \in \Lambda$

2. $n=1$.

$$Q_c^1(x) = x^2 + c \in I$$

$$\text{i.e. } -p_+ \leq x^2 + c \leq p_+ \implies -p_+ - c \leq x^2 \leq p_+ - c.$$

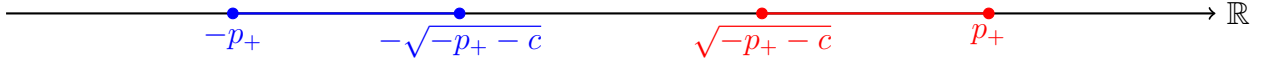
$$(-p_+ - c \leq x^2) \quad \wedge \quad (x^2 \leq p_+ - c)$$

Tenemos dos inecuaciones, tales que sus soluciones son:

$$(-\sqrt{p_+ - c} \leq x \leq \sqrt{p_+ - c}) \quad \wedge \quad (x \leq -\sqrt{-p_+ - c} \quad \vee \quad -\sqrt{-p_+ - c} \leq x)$$

Es fácil verificar que:

$$\sqrt{p_+ - c} = p_+ \text{ Graficando en la recta } \mathbb{R} -$$



Donde:

$$I_0 = [-p_+, -\sqrt{-p_+ - c}] = [a_0, b_0]$$

$$I_1 = [\sqrt{-p_+ - c}, p_+] = [a_1, b_1]$$

Además

$$Q_c^1(a_0) = Q_c^1(b_1) = p_+ \in \Lambda$$

$$Q_c^1(b_0) = Q_c^1(a_1) = -p_+ \in \Lambda$$

Y a_0 y b_1 son inversas aditivas, y b_0 y a_1 son inversas aditivas.

3. $n=2$.

$$Q_c^2(x) = (x^2 + c)^2 + c \in I$$

$$\text{i.e. } -p_+ \leq (x^2 + c)^2 + c \leq p_+ \implies -p_+ - c \leq (x^2 + c)^2 \leq p_+ - c$$

Teniendo 2 inecuaciones:

$$-p_+ - c \leq (x^2 + c)^2 \quad \wedge \quad (x^2 + c)^2 \leq p_+ - c$$

Cuyas soluciones son:

$$(x^2 - c \leq -\sqrt{-p_+ - c} \quad \vee \quad \sqrt{-p_+ - c} \leq x^2 - c) \quad \wedge \quad (-\sqrt{p_+ - c} \leq x^2 + c \leq \sqrt{p_+ - c})$$

Ahora teniendo 4 inecuaciones:

$$[(-\sqrt{-\sqrt{-p_+ - c} - c} \leq x \leq \sqrt{-\sqrt{-p_+ - c} - c} \quad \vee \quad (x \leq -\sqrt{\sqrt{-p_+ - c} - c} \quad \vee \quad \sqrt{\sqrt{-p_+ - c} - c} \leq x)] \quad \wedge$$

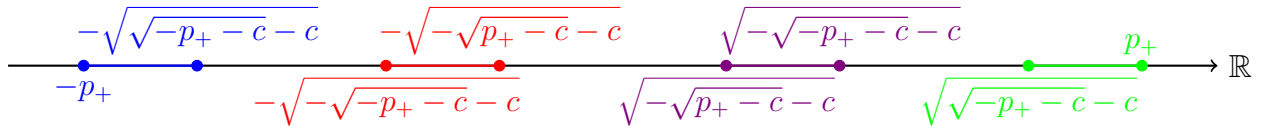
$$[(\sqrt{-\sqrt{p_+ - c} - c} \leq x \quad \vee \quad x \leq -\sqrt{-\sqrt{p_+ - c} - c}) \quad \wedge \quad (-\sqrt{\sqrt{p_+ - c} - c} \leq x \leq \sqrt{\sqrt{p_+ - c} - c})]$$

Es fácil verificar que:

$$\sqrt{\sqrt{p_+ - c} - c} = p_+$$

$$\sqrt{-\sqrt{p_+ - c} - c} = \sqrt{-p_+ - c}$$

Graficando en la recta \mathbb{R}



Donde:

$$I_{00} = [-p_+, -\sqrt{\sqrt{-p_+ - c} - c}] = [a_{00}, b_{00}]$$

$$I_{01} = [-\sqrt{-\sqrt{-p_+ - c} - c}, -\sqrt{-\sqrt{p_+ - c} - c}] = [a_{01}, b_{01}]$$

$$I_{10} = [\sqrt{-\sqrt{p_+ - c} - c}, \sqrt{-\sqrt{-p_+ - c} - c}] = [a_{10}, b_{10}]$$

$$I_{11} = [\sqrt{\sqrt{p_+ - c} - c}, p_+] = [a_{11}, b_{11}]$$

Además

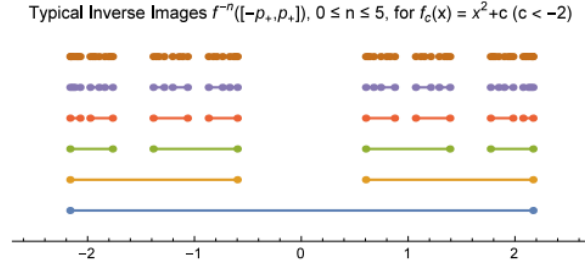
$$A = \begin{bmatrix} a_{00} & b_{00} \\ a_{01} & b_{01} \\ a_{10} & b_{10} \\ a_{11} & b_{11} \end{bmatrix}$$

Tal que aquellos con el mismo color son inversos aditivos y al evaluarlos en Q_c^1 dan los mismo.

Es claro ver que para $n=0$ hay un solo intervalo, para $n=1$ hay 2 intervalos ,y para $n=2$ hay 4 intervalos.

Es fácil observar que para $n=m$ habrá 2^m intervalos, pues como habrá visto en le desarrollo de las inecuaciones, pues cada vez que falta resolver una esta se divide en 2,es por ello que la cantidad de intervalos se duplican;Además es fácil observar que existe una simetria al tomar $y = 0$.

Se observa mejor en esta imagen:



Se habrá dado cuenta de los índices de los intervalos, por ejemplo:

I_{00} y I_{01} son los intervalos que resultan de dividir I_0 , al igual I_{10} y I_{11} con I_1 . Ahora, en forma de notación tendremos que para:

I_0 se divide en I_{00} y I_{01}

I_{00} se divide en I_{000} y I_{001} ...

Es decir, para algún I_{d_0, \dots, d_n} se divide en $I_{d_0, \dots, d_n, 0}$ y $I_{d_0, \dots, d_n, 1}$, en donde $d_i = 0, 1 \forall i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Pero, ¿Cómo es eso de que los intervalos se dividen ..

Recordemos que Q_c posee inversa, la cual denotaremos de esta forma: $f(x) = (Q_c)^{-1}(x) = \pm\sqrt{x-c}$, $x > c$

Para casos prácticos, denotaremos a los extremos de los intervalos de esta manera:

$x_{d_0 \dots d_m} / d_0, \dots, d_m = \{0, 1\}$, además en las desigualdades, tomaremos como soluciones a $f(x) = \sqrt{x-c}$ y a $-f(x) = -\sqrt{x-c}$. Y por último, para $f(x_{d_0 \dots d_m}) = x_{1d_0 \dots d_m}$ y para $-f(x_{d_0 \dots d_m}) = x_{0d_0^* \dots d_m^*}$, donde:

$$d_i^* = \begin{cases} 0 & , si \quad d_i = 1 \\ 1 & , si \quad d_i = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Sé que se algo engorroso ,pero de aquí verá la simetría en los extremos de los intervalos:

Tomemos como primeros puntos a $-p_+ = x_0$ y $p_+ = x_1$, entonces:

Sea $y \in Q_c^1 \implies -p_+ \leq Q_c(y) \leq p_+ \implies (x_0 \leq Q_c(y) \quad \wedge \quad Q_c(y) \leq x_1)$ (2 desigualdades)

Resolviendo:

$[f(x_0) \leq y \quad \vee \quad y \leq -f(x_0)] \quad \wedge \quad [-f(x_1) \leq y \leq f(x_1)]$ (4 desigualdades)

Reemplazando con nuestra notación:

$[x_{10} \leq y \quad \vee \quad y \leq x_{01}] \quad \wedge \quad [x_{00} \leq y \leq x_{11}]$

Veáse que de las 4 desigualdades, salen los 4 puntos extremos de los 2 intervalos: $I_0 = [x_{00}, x_{01}]$ y $I_1 = [x_{10}, x_{11}]$

Ahora sea $y \in Q_c^2(x)$, lo que haremos será reemplazar y por $Q_c(y)$, entonces:

$[x_{10} \leq Q_c(y) \quad \vee \quad Q_c(y) \leq x_{01}] \quad \wedge \quad [x_{00} \leq Q_c(y) \leq x_{11}] \implies$
 $[(f(x_{10}) \leq y \quad \vee \quad y \leq -f(x_{10})) \quad \vee \quad (-f(x_{01}) \leq y \leq f(x_{01}))] \quad \wedge$
 $[(f(x_{00}) \leq y \quad \vee \quad y \leq -f(x_{00})) \quad \wedge \quad (-f(x_{11}) \leq y \leq f(x_{11}))]$ (8 desigualdades)

Reemplazando con nuestra notación:

$[(x_{110} \leq y \quad \vee \quad y \leq x_{001}) \quad \vee \quad (x_{010} \leq y \leq x_{101})] \quad \wedge$
 $[(x_{100} \leq y \quad \vee \quad y \leq x_{011}) \quad \wedge \quad (x_{000} \leq y \leq x_{111})]$

Veáse que de las 4 desigualdades ,salen los 8 puntos extremos de los 4 intervalos: $I_{00} = [x_{000}, x_{001}]$ y $I_{01} = [x_{010}, x_{011}]$ y $I_{10} = [x_{100}, x_{101}]$ y $I_{11} = [x_{110}, x_{111}]$

Observe que las denotaciones de los intervalos es la misma que los extremos de los intervalos del caso anterior, además que los 2 primeros dígitos de los puntos extremos de los

intervalos son los mismo que los dígitos de los intervalos, como si estos tuvieran una identificación. Además notar que $x_{d_0...d_m}$ es inversa aditiva de $x_{d_0^*...d_m^*}$, pues ambos evaluados en Q_c dan los mismo, en el caso de que $d_0 = 1$, entonces $x_{d_0...d_m}$ y $x_{d_0^*...d_m^*}$ evaluados en Q_c resultan $x_{d_1...d_m}$; Para el caso en que $d_0 = 0$, entonces $x_{d_0...d_m}$ y $x_{d_0^*...d_m^*}$ evaluados en Q_c resultan $x_{d_1^*...d_m^*}$. Ahora se puede ver claramente la simetría en los intervalos. Siguiendo de manera recursiva (es decir para $y \in Q_c^3(x)$ y resolviendo las desigualdades, tendremos 8 intervalos con las propiedades mencionadas anteriormente. Es un hecho estándar (aunque no trivial) que Λ es un conjunto de tipo Cantor sobre la recta real. En particular:

1. Λ es compacto (cerrado y acotado).

Hemos observado que:

$$Q_c^0(I) = I$$

$$Q_c^{-1}(I) = I_0 \cup I_1$$

$$Q_c^{-2}(I) = I_{00} \cup I_{01} \cup I_{10} \cup I_{11} \text{ y recursivamente:}$$

$$Q_c^{-n}(I) = \bigcup_{i=1}^{2^n} I_{p(i)}, \text{ donde } p(i) \text{ es la } i\text{-ésima combinación de } n \text{ factores con } \{0, 1\}$$

Es claro que $Q_c^{-n} \subset I$, pues $Q_c^{-1}(I) \subset I$.

En efecto, supongamos que no es verdad, entonces: $\exists x_0 \in Q_c^{-1}(I)$ tal que $x_0 \notin I$, esto es:

$$-p_+ \leq Q_c(x) \leq x \quad \wedge \quad (x_0 < -p_+ \quad \vee \quad x_0 > p_+)$$

Para $x_0 < -p_+$ (el otro caso es análogo), se cumple que:

$$(x_0)^2 > (-p_+)^2 \implies (x_0)^2 + c > (-p_+)^2 + c \implies Q_c(x_0) > Q(-p_+) = p_+ \geq Q_c(x_0)$$

Contradicción!

Y como $\Lambda = \bigcap_{n=1}^{\infty} Q_c^{-n}(I)$ entonces Λ es acotada.

Y como $Q_c^{-n}(I)$ es la unión finita de intervalos cerrados, entonces es cerrado, luego Λ es la intersección infinita de intervalos cerrados, entonces es cerrado.

Luego Λ es compacto.

2. Λ es totalmente discontinuo (no contiene intervalos).

De hecho Λ está compuesta de solo puntos infinitos.

Habíamos hablado de que los intervalos se dividían en otros y que estos están contenidos en sus predecesores, pero no lo habíamos demostrado formalmente:

Hemos visto que

$$I_0, I_1 \subset I$$

$$I_{00}, I_{01} \subset I_0 \text{ y } I_{10}, I_{11} \subset I_1$$

Eso sería para el caso $n=1$ y 2. Ahora usaremos Hipótesis inductiva:

Supongamos que para $n=m$ es válido, es decir:

$$I_{d_0...d_m0} \text{ y } I_{d_0...d_m1} \subset I_{d_0...d_m}$$

Ahora demostraremos que es válido para $n = m + 1$

$$¿I_{d_0...d_md_{m+1}0} \text{ y } I_{d_0...d_md_{m+1}1} \subset I_{d_0...d_md_{m+1}}?$$

Esto es (Para el caso del primer conjunto, pues para el otro es análogo):

Si $x \in I_{d_0...d_md_{m+1}0}$, es decir: $x_{d_0...d_md_{m+1}00} \leq x \leq x_{d_0...d_md_{m+1}01}$, ¿entonces se cumple que?:

$$x_{d_0...d_md_{m+1}0} \leq x \leq x_{d_0...d_md_{m+1}1}$$

Para el caso donde $d_0 = 1$, se cumple: $x_{1...d_md_{m+1}0} \leq x_{1...d_md_{m+1}00}$?

Supongamos que NO. Luego:

$$x_{1...d_md_{m+1}0} > x_{1...d_md_{m+1}00} \implies f(x_{d_1...d_md_{m+1}0}) > f(x_{d_1...d_md_{m+1}00})$$

Y como $f = Q_c^{-1}$ es una función creciente se tiene que:

$$x_{d_1\dots d_m d_{m+1}0} > x_{d_1\dots d_m d_{m+1}00} (\implies \Longleftarrow) \text{ (Por la H.I.)}$$

Para demostrar que $\downarrow x_{d_0\dots d_m d_{m+1}01} \leq x_{d_0\dots d_m d_{m+1}1}$? es totalmente análogo

Para el caso donde $d_0 = 0$, se cumple: $\downarrow x_{0\dots d_m d_{m+1}0} \leq x_{0\dots d_m d_{m+1}00}$?

Supongamos que NO. Luego:

$$x_{0\dots d_m d_{m+1}0} > x_{0\dots d_m d_{m+1}00} \implies -f(x_{d_1^* \dots d_m^* d_{m+1}^* 1}) > -f(x_{d_1^* \dots d_m^* d_{m+1}^* 11})$$

$$f(x_{d_1^* \dots d_m^* d_{m+1}^* 1}) < f(x_{d_1^* \dots d_m^* d_{m+1}^* 11}) \implies x_{d_1^* \dots d_m^* d_{m+1}^* 1} < x_{d_1^* \dots d_m^* d_{m+1}^* 11} (\implies \Longleftarrow) \text{ (Por la H.I.)}$$

Lo demás es análogo.

Esto quiere decir que $Q_c^{-n}(I) \subset Q_c^{-(n+1)}(I)$, además por simetría sabemos que los intervalos en Q_c^{-n} tienen la misma longitud. Ahora, tengamos $I \supset I_{d_0} \supset I_{d_0 d_1} \supset \dots \supset I_{d_0 \dots d_m} \supset \dots$, mejor enunciado como $\{I_{d_0, \dots, d_m}\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ una familia de intervalos encajados, claramente diferentes del vacío.

Proposición 7.1. *No hay subintervalos cuyo iterado se quede siempre en Λ*

Demostración. Supongamos que existe un subintervalo $[a, b] \subseteq \Lambda \Rightarrow \forall x \in [a, b], \mathcal{O}_{Q_c}(x) \subseteq [-p_+, p_+]$

$$\begin{aligned} c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4} &\Rightarrow 0 < 5+2\sqrt{5} < -4c \\ &\Rightarrow 0 < 1+\sqrt{5} = \sqrt{6+2\sqrt{5}} < \sqrt{1-4c} =: t \\ &\Rightarrow t^2 - 2t - 4 = (t-1-\sqrt{5})(t-1+\sqrt{5}) > 0 \\ &\Rightarrow 1-t^2+2t+3 < 0 \\ &\Rightarrow 2\frac{1-t^2}{4} + t + \frac{3}{2} < 0 \\ &\Rightarrow 2c + \sqrt{1-4c} + \frac{3}{2} < 0 \\ &\Rightarrow 1+2c + \sqrt{1-4c} + \frac{1}{2} < 0 \\ &\Rightarrow c + \frac{1+\sqrt{1-4c}}{2} < \frac{1}{4} \\ &\Rightarrow -c - p_+ > \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{-c-p_+} > \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow |Q'_c(\sqrt{-c-p_+})| = 2|\sqrt{-c-p_+}| > 1 \end{aligned}$$

De esta forma, para el extremo izquierdo de I_1 , tenemos que la derivada actúa como punto repulsor. Análogamente para el otro extremo, pues lo único que importa es el valor absoluto.

Además: $Q_c''(x) = 2 > 0 \Rightarrow Q'_c$ creciente $\Rightarrow |Q'_c(x)| > 1 (\forall x \in I_0 \cup I_1)$

Sabemos que $\forall n \in \mathbb{N}, Q_c^n([a, b]) \subseteq I$

Sea un $n_0 \in \mathbb{N}$ arbitrario, fijo, entonces $Q_c^{n_0}([a, b]) \subseteq I$ Luego $[a, b] \subseteq (Q_c^{n_0})^{-1}(I)$. Como dicha preimagen son 2^{n_0} intervalos disjuntos, $\exists \omega_{n_0} \in \{0, 1\}^{n_0+1} : [a, b] \subseteq I_{\omega_{n_0}}$ (Si estuviera en 2 disjuntos, estos serían conexos por el intervalo, contradiciéndose). Como $[a, b]$ compacto y $|Q'_c|$ continua, $|Q'_c|([a, b])$ alcanza mínimo $\lambda_0 > 1$.

Del mismo modo, $[Q_c(a), Q_c(b)] \subseteq Q_c([a, b]) \subseteq (Q_c^{n_0-1})^{-1}(I) \Rightarrow \exists \omega_{n_0-1} \in \{0, 1\}^{n_0} :$
 $[Q_c(a), Q_c(b)] \subseteq I_{\omega_{n_0-1}}$

Y en general, hasta llegar a n_0 :

$$[Q_c^{n_0}(a), Q_c^{n_0}(b)] \subseteq (Q_c)^{n_0}([a, b]) \subseteq I \Rightarrow \exists \omega_0 \in \{0, 1\} : [Q_c^{n_0}(a), Q_c^{n_0}(b)] \subseteq I_{\omega_0}$$

En cada uno de esos casos: $|Q'_c|$ alcanza mínimo $\geq \min\{\lambda_j | j \in \{0, 1, \dots, n_0\}\} =: \lambda > 1$.
 que existe por n_0 finito y es estrictamente mayor por Q' estrictamente creciente.

Como en la demostración del Teorema del punto fijo repulsor, por el Teorema de Valor medio, podemos tomar, para el subintervalo $[a, b] \subseteq I_\omega$ verificando que en este, $|Q'_c(x)| > \lambda$, un punto que permita relacionar las longitudes de subintervalos con sus imágenes.

Procedamos de manera formal, por el Teorema de Valor Medio:

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in [a, b] : \frac{|Q_c(b) - Q_c(a)|}{|b - a|} &= |Q'_c(\alpha)| > \lambda \\ \Rightarrow |b - a| &< \frac{|Q_c(b) - Q_c(a)|}{\lambda} \end{aligned}$$

$$\text{Como } Q_c \text{ monótona en } [a, b] \Rightarrow \text{diam}([a, b]) < \frac{\text{diam}(Q_c([a, b]))}{\lambda}$$

De forma inductiva:

$$\begin{aligned} \exists \alpha \in [Q_c^{m-1}(a), Q_c^{m-1}(b)] : \frac{|Q_c^m(b) - Q_c^m(a)|}{|Q_c^{m-1}(b) - Q_c^{m-1}(a)|} &= |Q'_c(\alpha)| > \lambda \\ \Rightarrow |Q_c^{m-1}(b) - Q_c^{m-1}(a)| &< \frac{|Q_c^m(b) - Q_c^m(a)|}{\lambda} \\ \Rightarrow \lambda^{m-1} \text{diam}([a, b]) &< \text{diam}([Q_c^{m-1}(a), Q_c^{m-1}(b)]) < \frac{\text{diam}([Q_c^m(a), Q_c^m(b)])}{\lambda} \\ \Rightarrow \text{diam}([a, b]) &< \frac{\text{diam}([Q_c^m(a), Q_c^m(b)])}{\lambda^m} \forall m \in \{1, 2, \dots, n_0\} \\ \Rightarrow \text{diam}([a, b]) &< \frac{\text{diam}([Q_c^{n_0}(a), Q_c^{n_0}(b)])}{\lambda^{n_0}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } [Q_c^{n_0}(a), Q_c^{n_0}(b)] \subseteq I \Rightarrow \text{diam}([a, b]) &< \frac{\text{diam}([Q_c^{n_0}(a), Q_c^{n_0}(b)])}{\lambda^{n_0}} < \frac{\text{diam}(I)}{\lambda^{n_0}} \\ \Rightarrow \text{diam}([a, b]) &< \frac{\text{diam}(I)}{\lambda^{n_0}} \end{aligned}$$

Por arbitrariedad de n_0 , tenemos que $\text{vol}([a, b]) = 0$.

□

Comentario 3. La proposición anterior nos permite observar 2 cosas:

1. Como los intervalos que se quedan en Λ , tienen órbitas periódicas que lo atraen, entonces son intervalos que se mueven dentro Λ de forma casi oscilante, con las imágenes bajo iterados disjuntas, pronto los definiremos como intervalos errantes y lograremos generalizar este resultado

2. Lo único que debemos probar para que la conjugación topológica de mandar una secuencia de intervalos encajados a un punto sea válida para $c < -2$, es que el límite del diámetro sea 0. En efecto, si la intersección de intervalos encajados no es un punto, es un intervalo. Si probamos que ese diámetro tiende a 0, la existencia de dicho intervalo es una contradicción. Siguiendo con el mismo argumento, supongamos que haya una sólo secuencia que nos arruine el argumento, la intersección de dicha secuencia será un intervalo cerrado. Esto quiere decir que si probamos que los múltiples iterados bajo mapeo cuadrático de un intervalo se van al infinito (no pueden quedarse dentro oscilando, como errantes), entonces la conjugación topológica es válida para el caso más general posible

Corolario 7.2. Sea $\{I_{\omega(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ secuencia de intervalos que verifica:

1. $I_{\omega(n)} \in \{I_d | d \in \{0, 1\}^n\}$, donde los $I_d \subseteq (Q_c^n)^{-1}(I)$ intervalos disjuntos que forman a $(Q_c^n)^{-1}(I)$.

(i.e. $(Q_c^n)^{-1}(I) = \bigcup_{d \in \{0, 1\}^n} I_d$. Notar que la diferencia entre ambas uniones es que la primera toma a los intervalos como elementos, mientras que la segunda los toma como conjuntos).

2. Dado n arbitrario, sea $\omega^{(n)} = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \omega_3^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)})$, entonces

$$\omega^{(n+1)} \in \{(\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \omega_3^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)}, 0), (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \omega_3^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)}, 1)\}$$

En ese caso, dicha secuencia de intervalos cumple $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_{\omega(n)}) = 0$.

Además, como son intervalos encajados, convergen a un único punto, esto es:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\omega(n)} = \{x\}$$

Demostración. Basta considerar en la prueba anterior para el intervalo $[a, b] = I_{\omega(n_0)}$ el n_0 que determina su posición en la secuencia (en la demostración anterior asumimos que era arbitrario por la naturaleza de $[a, b]$). Luego, por prueba $\text{diam}(I_{\omega(n_0)}) = \text{diam}([a, b]) < \frac{\text{diam}(I)}{\lambda^{n_0}} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_{\omega(n)}) = 0$ \square

Definición 7.3. Definimos el mapa $S : \Omega_2^R \rightarrow \Lambda$ con regla de correspondencia:

$$S(\omega) = \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\omega^{(n)}} = \{x\}$$

donde $\omega^{(n)} = \omega|_{\{1, \dots, n\}}$ tomando $\omega : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}$ en su forma de función (las secuencias en esencia son funciones).

Definición 7.4 (Notación especial). Definiremos de manera informal las siguientes notaciones:

Dado $\omega^{(n)} \in X^n, k \in \{1, 2, \dots, N\}$, definimos: $(\omega^{(n)}, k) = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)}, k)$

Además, para $\omega \in \Omega_N^R, r \in \mathbb{R}$, definimos $r\omega : \mathbb{N} \rightarrow \{r, 2r, \dots, rN\}$ como $r\omega : n \mapsto r(\omega(n))$

Proposición 7.5. La función S es homeomorfismo

Demostración. 1. (S es sobreyectiva):

$$\text{Recordemos que } (Q_c^n)^{-1}(I) = \bigcup_{d \in \{0,1\}^n} I_d$$

$$\text{Sea } y \in \Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} (Q_c^n)^{-1}(I) \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, y \in (Q_c^n)^{-1}(I) = \bigcup_{d \in \{0,1\}^n} I_d$$

$$\Rightarrow \exists \omega^{(n)} \in \{0, 1\}^n : y \in I_{\omega^{(n)}}$$

$$\text{Sea } \omega : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\}^n, \text{ con } m \mapsto \omega_m^{(m)} \Rightarrow \omega|_{\{1\}} = \omega^{(1)}$$

$$\begin{aligned} \text{Como } \omega|_{\{1,2,\dots,n+1\}} &= (\omega^{(n)}, \omega_{n+1}^{(n+1)}) = (\omega_1^{(n)}, \omega_2^{(n)}, \dots, \omega_n^{(n)}, \omega_{n+1}^{(n+1)}) \\ &= (\omega_1^{(n+1)}, \omega_2^{(n+1)}, \dots, \omega_n^{(n+1)}, \omega_{n+1}^{(n+1)}) \\ &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \omega^{(n)} = \omega|_{\{1,\dots,n\}} \\ &\Rightarrow y \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\omega^{(n)}} = S(\omega) \end{aligned}$$

2. (S inyectiva):

$$\text{Sean } \alpha, \beta \in \Omega_2^R : S(\alpha) = S(\beta) \Rightarrow S(\alpha) \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\beta^{(n)}}$$

$$\text{Si } S(\alpha) \neq S(\beta) \Rightarrow \exists V_\beta \text{ intervalo cerrado : } S(\beta) \in V_\beta, S(\alpha) \notin V_\beta$$

$$\text{Como es intervalo cerrado } \exists B_r(S(\beta)) \subseteq V_\beta$$

$$\text{Como } \lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_{\beta^{(n)}}) = 0, \exists n_0 : \text{diam}(I_{\beta^{(n_0)}}) < 2r$$

$$\Rightarrow I_{\beta^{(n_0)}} \subseteq B_r(S(\beta)) \subseteq V_\beta$$

$$\Rightarrow S(\alpha) \in V_\beta^c \subseteq I_{\beta^{(n_0)}}^c$$

$$\Rightarrow S(\alpha) \notin I_{\beta^{(n_0)}} \Rightarrow \alpha^{(n_0)} \neq \beta^{(n_0)} \Rightarrow \alpha \neq \beta$$

3. (S homeomorfismo):

Por (a) y (b) tenemos que $\exists S^{-1}$ bien definido.

Recordemos que biyectiva continua en un compacto es homeomorfismo, esto es, basta probar que S^{-1} es continua

Dado un $\epsilon > 0$, como $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{diam}(I_{\omega^{(n)}}) = 0, \exists n_0 : \text{diam}(I_{\omega^{(n_0)}}) < \epsilon$

Tomemos $\omega, \omega' \in W = C_{x_1, x_2, \dots, x_n}^{1, 2, \dots, n} \Rightarrow \forall n \in \{1, 2, \dots, j\}, S(\omega') \in I_{\omega'^{(j)}}, S(\omega) = I_{\omega^{(j)}}, I_{\omega'^{(j)}} = I_{\omega^{(j)}} \Rightarrow S(\omega'), S(\omega) \in I_{\omega^{(n)}} \Rightarrow d(S(\omega'), S(\omega)) \leq \text{diam}(I_{\omega^{(n)}}) < \epsilon$

Hemos demostrado que:

$\forall \epsilon > 0, \exists W$ cilindro : $\omega \in W, (\omega' \in W \Rightarrow d(S(\omega), S(\omega')) < \epsilon)$
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \text{diam}(W_{(\epsilon, \omega)}) > 0 : (d(\omega, \omega') < \delta = \text{diam}(W) \Rightarrow \omega' \in W \Rightarrow d(S(\omega), S(\omega')) < \epsilon)$
 $\Rightarrow \forall \epsilon > 0, \exists \delta = \text{diam}(W_{(\epsilon, \omega)}) > 0 : (d(\omega, \omega') < \delta \Rightarrow d(S(\omega), S(\omega')) < \epsilon)$
 $\Rightarrow S^{-1}$ es continua en ω .

□

Proposición 7.6 (Λ es un conjunto de Cantor). $\Lambda = \bigcap_{n=0}^{\infty} (Q_c^n)^{-1}(I)$ es un conjunto de Cantor

Demostración. Esta es una demostración alternativa a la original, basta tomar el homeomorfismo S . Entonces definimos: $H : I \rightarrow [0, 1]$, con regla de correspondencia:

Dado $x \in \Lambda, \exists \omega \in \Omega_2^R : S(\omega) = x$.

Ahora bien, si $y \in I - \Lambda \Rightarrow (\exists d \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^n : y \in I_d) \vee (y \in I - (Q_c)^{-1}(I))$

$$\Rightarrow \left(\exists D \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{0, 1\}^n : (y \in I_D) \wedge (y \in I_d \Rightarrow I_D \subseteq I_d) \right) \bigvee \left((y \in I - (Q_c)^{-1}(I)) \right)$$

Esto es, hay intervalo que es maximal. En efecto, si no hubiera, hay una cadena de intervalos en los que está y , en este caso está en Λ , ($\Rightarrow \Leftarrow$)

Podemos entonces asociar a cada x su propia cadena D_x

Definimos la función $Z : I \rightarrow [0, 1]$ como:

$$Z(x) = \begin{cases} 2S^{-1}(x) & \text{para } x \in \Lambda \\ (2D_x, 1, 0, 0, \dots) & \text{para } x \in (Q_c)^{-1}(I) - \Lambda \\ (1, 0, 0, 0, 0, 0, \dots) & \text{para } x \in I - ((Q_c)^{-1}(I) \cap \Lambda) \end{cases} \quad (7)$$

Usando $H(x) = h_3(Z(x))$ del Teorema 0.22, (De la conjugación E_2, T, σ), tenemos que hay un homeomorfismo $H : \Lambda \mapsto K$ conjunto de Cantor

□

- Comentario 4.** 1. Se puede ver que Λ perfecto, compacto y totalmente no conexo, por heredar propiedades topológicas del conjunto de Cantor.
2. Hay una alternativa más sencilla simplemente componiendo S con el mapeo de representación ternaria (elegimos en los ternarios racionales, aquel que no tenga 1's), pero creemos que nuestra manera ilustra mejor el proceso mental de construir el conjunto de Cantor a partir de intervalos anidados, desechando los caminos que no nos gusten
3. El método descrito en el ítem anterior aparece en el paper de Strien, Smooth Dynamics on the Interval with an Emphasis on Quadratic maps, usando L, R, C para describir los 3 tipos de intervalos a los que se dirige

Teorema 7.7 (Conjugación topológica del mapa cuadrático para $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$). *El mapa shift σ es topológicamente conjugado al mapa Q_c para $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ bajo $S : \Omega_2^R \rightarrow \Lambda$.*

Demostración. Tomemos $S(\omega) = x$. Recordemos que si $y \in I_{\alpha(n)} \Rightarrow Q_c(y) \in I_{\alpha(n+1)}$.

$$\begin{aligned}
 x \in \bigcap_{n=1}^{\infty} I_{\alpha(n)} &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, x \in I_{\alpha(n)} \\
 &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, Q_c(x) \in I_{\alpha(n+1)} \\
 &\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} - \{1\}, Q_c(x) \in I_{\alpha(n)} \\
 &\Rightarrow Q_c(x) \in \bigcap_{n=2}^{\infty} I_{\alpha(n)} = \{S \circ \sigma(\omega)\} \\
 &\Rightarrow Q_c \circ S(\omega) = S \circ \sigma(\omega)
 \end{aligned}$$

□

Comentario 5. El sistema dinámico caótico por excelencia es el shift de Bernoulli, todo nuestro trabajo anterior muestra que el mapa cuadrático es caótico.

8 Caso $c < -2$

8.1 Desde el mapa logístico

Recordemos que habíamos hecho conjugación topológica entre mapa cuadrático y mapa logístico, aunque nos limitamos para el caso del mapa logístico $\lambda \in [0, 4]$ para hacer un mapa invariante.

Recordemos el Teorema 6.6, con ese Teorema obteníamos una equivalencia entre c y λ : $c = \frac{\lambda(2-\lambda)}{4}$.

Ahora bien, queremos hacer lo mismo que antes para la familia cuadrática, sólo que en este caso, usando la familia logística. Esto debe ser posible, así sea de manera forzada (aunque sea usando conjugación para ir y llevar intervalos).

Vemos que lo único que requeríamos del argumento era que la derivada fuera menor a 1. Haremos un caso análogo para llegar al resultado.

8.2 $c \rightarrow \lambda$

Empecemos notando que conocemos las raíces, a saber, el 0, 1 están dentro de $[0, 1]$

En segundo lugar, el mapa logístico cuenta con el hecho de que para $\lambda = 0$, el mapa es la función nula.

Además, para $c < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$ tenemos $\frac{\lambda(2-\lambda)}{4} < -\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$

Simplificando: $\lambda^2 - 2\lambda - (5 + 2\sqrt{5}) > 0$ esto es:

$$0 < (\lambda - 1 - \sqrt{6 + 2\sqrt{5}})(\lambda - 1 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}) = (\lambda - 2 - \sqrt{5})(\lambda + \sqrt{5})$$

El segundo caso no es importante porque nos interesa valores positivos.

8.3 Caso $\lambda > 2 + \sqrt{5}$

Veamos que si $\lambda > 2 + \sqrt{5}$, supongamos $x < 0 \Rightarrow (L(x) < x) \wedge (L'(x) = \lambda(1 - 2x) > \lambda > 4 > 1)$. Luego repitiendo argumento del mapa cuadrático, tendremos que cumple que órbita dedeciente, negativa y en un punto debajo del eje X. Esto es, la órbita tiende a $-\infty$

Lo mismo se argumenta para $x > 1$: $(L'(x) = \lambda(1 - 2x) < -\lambda < -4 < -1)$

Entonces para que la órbita sea acotada, estos puntos deben estar en $[0, 1]$ (Si no, se escapan). Es decir, podemos definir

$$\Lambda := \{x \in [0, 1] : \mathcal{O}_L(x) \text{ acotado}\}$$

Luego podemos afirmar que $\Lambda \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (L^n)^{-1}([0, 1])$

Como la otra inclusión es trivial por definición, se da la igualdad $\Lambda = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (L^n)^{-1}([0, 1])$

Podemos tomar los intervalos de igual forma que antes $\Delta_0 = [0, \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}]$, $\Delta_1 = [\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}}, 1]$ resolviendo $L(x) = 1$ (Las desigualdades como antes y buscamos resolver la segunda desigualdad encontrando las raíces del polinomio y en qué puntos esto no es posible).

Esto es $\lambda x - \lambda x^2 = 1 \Rightarrow x^2 - x - \frac{1}{\lambda} \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + \frac{4}{\lambda}}}{2}$

De igual forma que antes, vemos que en efecto estos intervalos son disjuntos, encajados. Además, la derivada en los primeros intervalos es $|L'(1)| = |\lambda(1 - 2x)| = 2\lambda|x - \frac{1}{2}| \geq 2\lambda\sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda} > \sqrt{(2 + \sqrt{5})^2 - 4(2 + \sqrt{5})} = 1$

De donde el argumento de que sea conjunto de Cantor, y por tanto codificable es idéntico. (No existe un intervalo en el conjunto de órbitas acotadas, si lo hubiera, la longitud de este estaría acotada por una secuencia que tiende a 0 entonces a partir de ahí, tomando para una secuencia de intervalos cuyos iterados no escapan del $[0, 1]$, dicha secuencia de intervalos encajados tiende a un punto, porque si no contradice la idea anterior).

Hasta aquí, parece que no hemos ganado nada, pero hay una diferencia importante, y es en la optimización de cálculos en uno u otro

El paper Smooth dynamics on the interval se encarga de estudiar estos objetos con mayor precisión y lleva a cabo nuestras ideas mediante la derivada Schwarziana

9 Dinámica Unidimensional

Empezaremos a tomar algunos conceptos y resultados de dinámica unidimensional más generales. Para ello, usaremos de referencia el texto mencionado al inicio: "An Introduction to Chaotic Dynamical Systems" de Devaney y al texto One Dimensional Dynamics de Wellington de Melo y de Van Strien.

Vamos a definir tipos especiales de operadores shift.

Definición 9.1 (Subshift de tipo finito). Definimos un espacio de secuencias asociado a una matriz $0 - 1$ (todas sus entradas son 0 y 1) de la siguiente manera:

$$\Omega_N^R := \{\omega \in \Omega_N : a_{\omega_n \omega_n} = 1, \forall n \in \mathbb{Z}\}$$

Llamamos los operadores:

$$\sigma_A := \sigma_{N|_{\Omega_A}}$$

como cadenas de Markov topológicas, o subshift de tipo finito (sólo admite cantidad finita de combinaciones consecutivas al restringirles que cumplan la condición impuesta por la matriz)

Definición 9.2. La derivada Schwarziana de un mapeo se define como:

$$Sf(x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

Es fácil ver que $SL_\lambda = \frac{-6}{(1-2x)^2} < 0, \forall x$

Una forma de aproximarnos al resultado que buscamos es tomando una conjugación alternada y luego verificar que por propiedades de esta nueva conjugación, puede conjugarse (del mismo modo que hicimos con el mapa logístico al mapa carpa al shift y luego por transitividad al cuadrático. El texto de Devaney nos brinda este teorema, pero requiere del cálculo de cada uno de los intervalos, que no estamos dispuestos a realizar por la naturaleza del trabajo:

Teorema 9.3. $L_{\lambda|_A}$ es topologicamente conjugado al subshift de tipo finito dado por σ_A en Ω_A

La otra forma, presentada por el texto de Melo es considerar el principio de Expansión de Koebe, el cuál nos indica que podemos relacionar intervalos como antes, sin necesidad de la derivada mayor a 1, sólo con la propiedad de la negatividad de la derivada Schwarziana

Definición 9.4 (Razón cruzada). Sean $J \subseteq T$ intervalos abiertos y acotados en $N \subseteq \mathbb{R}$ tal que $T - J$ consiste de intervalos L y R (Nuestro caso de particiones). Definiremos su razón cruzada como:

$$D(T, J) = \frac{|J||T|}{|L||R|}$$

donde $|A|$ es la longitud del intervalo A

Definición 9.5. Si $g : T \rightarrow N$ es continua y monótona y $J \subseteq T$ como arriba, definimos la distorsión de razón cruzada como:

$$B(g, T, J) = \frac{D(g(T), g(J))}{D(T, J)}$$

Proposición 9.6. La derivada Schwarziana negativa garantiza que la derivada no tenga mínimo local positivo ni máximo local negativo

Demostración.

$$\begin{aligned} Sg(x) &= \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 < 0 \\ \Rightarrow \frac{g'''(x)}{g'(x)} &< \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 = 0, (x \text{ punto crítico de } g') \\ \Rightarrow \frac{g'''(x)}{g'(x)} &< 0 \end{aligned}$$

Como es negativo, su producto debe ser negativo, esto es, tienen signos opuestos, lo que quiere decir que es la derivada es función cóncava hacia abajo con valor positivo o función cóncava hacia arriba con valor negativo \square

Proposición 9.7. Composición de funciones con derivada Schwarziana negativa tiene derivada Schwarziana negativa

Proof.

$$(f \circ g)''(x) = f''(g(x))(g'(x))^2 + f'(g(x))g''(x)$$

y como

$$(f \circ g)'''(x) = f'''(g(x))(g'(x))^3 + 3f''(g(x))g''(x)g'(x) + f'(g(x))g'''(x)$$

De donde:

$$S(f \circ g)(x) = Sf(g(x))(g'(x))^2 + Sg(x) \Rightarrow S(f \circ g)(x) < 0$$

\square

Definición 9.8. Una transformación de Mobius es una función $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ con regla de correspondencia:

$$\phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, (ad - bc \neq 0)$$

Proposición 9.9. La derivada Schwarziana de una función $g : T \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es nula si sólo si $g = \phi|_T$ para ϕ transformación de Morbius

Demostración. Podemos escribir:

$$\begin{aligned} -2|g'|^{\frac{1}{2}} \left(\sqrt{\frac{1}{|g'|}} \right)'' &= -2|g'|^{\frac{1}{2}} (|g'|^{-\frac{1}{2}})'' \\ &= -2|g'|^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{1}{2} |g'|^{-\frac{3}{2}} g'' \right)' \\ &= |g'|^{\frac{1}{2}} \left(-\frac{3}{2} |g'|^{-\frac{5}{2}} g'' + g''' |g'|^{-\frac{3}{2}} \right) \\ &= \frac{g'''(x)}{g'(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{g''(x)}{g'(x)} \right)^2 = Sg \end{aligned}$$

Si $Sg = 0 \Rightarrow \left(\sqrt{\frac{1}{|g'|}} \right)'' = 0$ (Se omite caso g constante)

$$\frac{1}{|g'|^{\frac{1}{2}}} = cx + d \Rightarrow \frac{1}{(cx + d)^2} = |g'| \Rightarrow g = \frac{-1}{(cx + d)} + \alpha = \frac{ax + b}{(cx + d)}$$

De igual forma, si lo contrario sucede, entonces la derivada segunda del inverso de la raíz cuadrada de la derivada es 0 o su derivada es 0, en cuyo caso es constante. \square

Proposición 9.10. Sea $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ mapa monótono.

$$\forall J^* \subseteq T^*, B(g, T^*, J^*) = 1 \iff g = \phi|_T$$

Para ϕ transformación de Morbius, J^*, T^* intervalos

Demostración. De geometría para variable compleja, sabemos que la razón cruzada se preserva vía transformaciones de Mobius

Sea $T = [x_0, x_1]$ y escojamos un punto $x_2 \in (x_0, x_1)$. Por Análisis Complejo, $\exists! \phi : \phi(x_i) = g(x_i)$

Sea J el intervalo acotado por x_2 y x , en ese caso:

$$B(g, T, J) = B(\phi, T, J) = 1 \Rightarrow D(g(T), g(J)) = D(\phi(T), \phi(J))$$

Por monoticidad, la longitud sólo depende de uno de los extremos, y como $\phi(T) = g(T) \Rightarrow \phi(x_2) = g(x_2) \Rightarrow \phi(x) = g(x)$ por arbitrariedad de x_2 \square

Proposición 9.11. Si $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ es un mapeo C^3 con derivada Schwarziana negativa, entonces:

$$B(g, T^*, J^*) > 1, \forall J^* \subseteq T^* \subseteq T$$

Donde J^*, T^* intervalos

Proof. Tomemos $T^* = [x_0, x_1]$, $J^* = [y_0, y_1]$ Ahora sea ϕ transformación de Mobius que cumpla que $\phi \circ g$ deje fijos a los extremos de T^* y al punto y_0 .

Afirmación: $\phi(g(y_1)) > y_1$

Veamos que es así:

Supongamos que no, esto es, $\phi(g(y_1)) \leq y_1$

Por Teorema de Valor Medio:

$$\begin{aligned} \exists z_0 \in [x_0, y_0] : D(\phi \circ g)(z_0) &= \frac{\phi(g(y_0)) - \phi(g(x_0))}{y_0 - x_0} = 1 \\ \exists z_1 \in [y_0, y_1] : D(\phi \circ g)(z_1) &= \frac{\phi(g(y_1)) - \phi(g(y_0))}{y_1 - y_0} \leq 1 \\ \exists z_2 \in [y_1, x_1] : D(\phi \circ g)(z_2) &= \frac{\phi(g(x_1)) - \phi(g(y_1))}{x_1 - y_1} \leq 1 \end{aligned}$$

Las desigualdades ocurren reemplazando los valores fijos y usando la desigualdad con la imagen de y_1

Como $S(\phi \circ g) = S(g) < 0 (\Rightarrow \Leftarrow)$ (mínimo local positivo)

Por tanto hemos probado que $\phi(g(y_1)) > y_1$

Finalmente tenemos:

$$B(\phi \circ g, T^*, J^*) = \frac{\frac{|\phi(g(T^*))|}{|T^*|}}{\frac{|\phi(g(L^*))|}{|L^*|}} \frac{\frac{|\phi(g(J^*))|}{|J^*|}}{\frac{|\phi(g(R^*))|}{|R^*|}} = \frac{\frac{|\phi(g(J^*))|}{|J^*|}}{\frac{|\phi(g(R^*))|}{|R^*|}} > 1$$

Como $B(\phi \circ g, T^*, J^*) = B(\phi, g(T^*), g(J^*))B(g, T^*, J^*)$

Tenemos: $B(\phi, g(T^*), g(J^*))B(g, T^*, J^*) > 1$. Como las transformaciones de Mobius preservan la razón cruzada, tenemos $B(g, T^*, J^*) > 1$

□

Teorema 9.12 (Principio del Mínimo). Sea $T = [a, b] \subseteq N$ y $g : T \rightarrow g(T) \subseteq N$ un C^1 -difeomorfismo. Sea $x \in (a, b)$.

$$\forall J^* \subseteq T^* \subseteq T, B(g, T^*, J^*) \geq C_0 > 0 \Rightarrow |Dg(x)| \geq C_0^2 \min\{|g'(x)|, |g'(b)|\}$$

Demostración. Tomemos un intervalo $T^* = [a^*, b^*]$ en T y consideremos

$$B_0(g, T^*) := \frac{|g(T^*)|^2}{|T^*|} \frac{1}{|g'(a^*)||g'(b^*)|}$$

Definamos:

$$B_1(g, T, x) := \frac{|g'(x)|}{\frac{|g(L)|}{|L|}} \frac{\frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(R)|}{|R|}}$$

Con L, R componentes de $T - \{x\}$

Es cuestión de aplicar igualdad y definición de derivada, para obtener:

$$B_0(g, T^*) = \lim_{J^* \rightarrow T^*} B(g, T^*, J^*)$$

$$B_1(g, T, x) = \lim_{J \rightarrow x} B(g, T, J)$$

Como están acotados inferiormente y decrecen por longitud de intervalos decreciendo, entonces tenemos:

$$B_0(g, L), B_0(g, R), B(g, T, x) \geq C_0 > 0$$

De donde, pasando a multiplicar tenemos:

$$\left(\frac{|g(L)|}{|L|} \right)^2 \leq C_0 |g'(a)| |g'(x)|$$

$$\left(\frac{|g(R)|}{|R|} \right)^2 \leq C_0 |g'(x)| |g'(b)|$$

Como el último es:

$$\frac{|g'(x)|}{\frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(R)|}{|R|}} \frac{|g(T)|}{|T|} \geq C_0 \Rightarrow |g'(x)| \frac{|g(T)|}{|T|} \geq C_0 \frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(R)|}{|R|}$$

Además como g difeomorfismo de clase C^1 , su derivada es continua, entonces:

$$\frac{|g(T)|}{|T|} \in \left[\min \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\}, \max \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\} \right]$$

En efecto, basta tomar:

$$\lambda_L = \frac{|g(L)|}{|L|}, \lambda_R = \frac{|g(R)|}{|R|}$$

para este caso, el valor que tenemos es combinación convexa por longitud igual a integral de la derivada:

$$\frac{|g(T)|}{|T|} = \frac{|L|}{|T|} \lambda_L + \frac{|R|}{|T|} \lambda_R$$

De donde finalmente tenemos:

$$|g'(x)|^2 \geq C_0^2 \left(\frac{\frac{|g(L)|}{|L|} \frac{|g(R)|}{|R|}}{\frac{|g(T)|}{|T|}} \right) \geq C_0^2 \min \left\{ \left(\frac{|g(L)|}{|L|} \right)^2, \left(\frac{|g(R)|}{|R|} \right)^2 \right\} \geq C_0^3 \min \{ |g'(a)| |g'(x)|, |g'(x)| |g'(b)| \}$$

Simplificando obtenemos el resultado

□

Comentario 6. El lector más interesado puede revisar la bibliografía para observar que todo este trabajo previo se recompensa con buenos resultados. Las técnicas trabajadas son útiles en nuestro propósito (Así lo afirma el texto de Katok en sus notas acerca de la conjugación topol. entre el mapa logístico y el shift).

10 Esbozo usando Dinámica Compleja

El texto de Devaney introduce de forma natural los siguientes conceptos y resultados acerca de ellos:

Definición 10.1 (Conjunto Hiperbólico). Un conjunto $\Gamma \subseteq \mathbb{R}$ se dice hiperbólico repulsor de f si Γ es cerrado, acotado e f -invariante y verifica:

$$\exists N > 0 : \forall n \geq N, \forall x \in \Gamma, |(f^n)'(x)| > 1$$

Definición 10.2 (Conjunto de Julia). Decimos de la cerradura del conjunto de órbitas repulsoras que es el conjunto de Julia

Proposición 10.3. *El conjunto de Julia es hiperbólico*

Proposición 10.4. *El conjunto de Julia es perfecto, compacto*

Proposición 10.5. Λ es el conjunto de Julia de la familia cuadrática compleja $Q_c(z) = z^2 + c$ para $|c| > 2$

Tenemos además una forma geométrica de Λ como Lemniscatas usando argumento análogo

Teorema 10.6. Si $Q_c^n(0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Lambda^c$. Entonces Λ es totalmente no conexo

La razón de que el 0 sea importante es el hecho de que es el punto de giro de la función (máximo/mínimo local, que si lo removemos nos resulta en dos intervalos en los cuales la función es monótona). Esta propiedad hace que la función se llame unimodal y goce de ciertas propiedades.

Corolario 10.7. Λ es un conjunto de Cantor

En efecto, pues cumple las 3 propiedades que definen al conjunto de Cantor

Proposición 10.8. $\Lambda \cap \mathbb{R}$ es un conjunto de Cantor

En efecto, basta ver la naturaleza geométrica de Λ en \mathbb{C} para notar que si hubiera un intervalo, entonces habría un rectángulo dentro del disco que le contiene, luego habría un disco, lo que haría que fuera totalmente desconexo

References

- [1] Katok, Anatole, A. B. Katok, and Boris Hasselblatt. Introduction to the modern theory of dynamical systems. No. 54. Cambridge university press, 1995.
- [2] Devaney, Robert L. A first course in chaotic dynamical systems: theory and experiment. CRC Press, 2018.
- [3] Devaney, Robert. An introduction to chaotic dynamical systems. CRC press, 2018.
- [4] De Melo, Welington, and Sebastian Van Strien. One-dimensional dynamics. Vol. 25. Springer Science & Business Media, 2012.
- [5] SAMBARINO, Martín. "Introducción a los Sistemas Dinámicos." Jun. 2013,
- [6] Evan Dummit, Dynamics, Chaos and Fractals (Part 4): Fractals, Course Notes, 2015.