Recordemos:

$f: M \to M$ sistema dinámico

M: espacio ambiente

DINÁMICA SIMBÓLICA

Consideremos $\Sigma_2^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\}\}$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{array}{c} \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccccccc} 1^\circ & 2^\circ & 3^\circ & 4^\circ & 5^\circ & 6^\circ & \\ \end{array}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 1 \ \cdots)$$

$$(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ \cdots)$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ \cdots)$$

Consideremos:

$$\Sigma_2 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \ : \ x_n \in \{0,1\} \}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc} & & & & -3 & -2 & -1 & & 0 & 1 & 2 & 3 & & \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & = & (& \dots & 0 & 1 & 0 & 1 & . & 0 & 1 & 0 & 1 & \dots \;) \end{array}$$

$$(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\dots 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ . \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \dots)$$

$$(z_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\dots 0\,0\,1\,1\,0\,0 \, . \, 1\,1\,0\,0\,1\,1\,0\,0 \dots)$$

Definimos en Σ_2^+ la siguiente métrica :

$$d : \Sigma_2^+ \times \Sigma_2^+ \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_1(x_n, y_n)}{2^n}$$

donde d_1 es la métrica discreta en $\{0, 1\}$ $\left(d_1(x,y) = \begin{cases} 0 ; x = y \\ 1 ; x \neq y \end{cases} \right)$

<u>Ejercicio</u> : (Σ_2^+, d) es un espacio métrico.

Definamos en Σ_2 la siguiente métrica: :

$$d : \Sigma_2 \times \Sigma_2 \longrightarrow [0, +\infty]$$

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{d_1(x_n, y_n)}{2^{|n|}}$$

donde d_1 es la métrica discreta en $\{0,1\}$ $\left(d_1(x,y) = \begin{cases} 0; & x=y \\ 1; & x\neq y \end{cases} \right)$

Ejercicio: (Σ_2, d) es un espacio métrico.

Def: Un cilindro en Σ_2^+ (o Σ_2) de longitud $n-m+1$ es:

$$[\boxed{m} : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n] = \{ (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \Sigma_2^+ : x_m = a_m, \dots, x_n = a_n \}$$

$$[\boxed{m} : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n] = \{ (x_j)_{j \in \mathbb{Z}} \in \Sigma_2 : x_m = a_m, \dots, x_n = a_n \}$$

Por ejemplo,

$$[3 : 1,1,0] = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} : x_3 = 1, x_4 = 1, x_5 = 0 \}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1^{\circ} & 2^{\circ} & 3^{\circ} & 4^{\circ} & 5^{\circ} & & & & \\ \end{array}$$

$$(x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1\,1\,1\,1\,1\,1\,1 \dots) \notin [3 : 1,1,0]$$

$$(y_n)_{n \in \mathbb{N}} = (1\,1\,1\,1\,0\,0\,0 \dots) \in [3 : 1,1,0]$$

En Σ_2.

$$[-2:0,1,1] = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_{-2}=0;\ x_{-1}=1,\ x_0=1\}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = (\ 0101\,\overset{-2}{0}\,\overset{-1}{1}\,.\,\overset{0}{1}\,\overset{1}{1}11\ldots\ ) \in [-2:0,1,1]$$

$$\underbrace{(y_n)_{n\in\mathbb{Z}}}_{\in [-2:0,1]} = (\ \ldots\ 0101\,01\,.\,000\ldots\ ) \notin [-2;0,1,1]$$

Observo que Σ_2^+ (resp. Σ_2) es el producto cartesiano de $X=\{0,1\}$; "$\mathbb{N}$-veces" (resp. "$\mathbb{Z}$-veces")

- $\Sigma_2^+ = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots$

$= \{0,1\}^{\mathbb{N}}$

- $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$

Consideremos en $\{0,1\}$ la topología inducida por la métrica discreta d_1

Así, en $\Sigma_2^+ = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (en $\Sigma_2 = \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$)

tenemos una topología, esta topología es la topología producto.

<u>Ejercicio</u>: Mostrar que la topología producto en Σ_2^+ y la topología inducida por la métrica d en Σ_2^+ coinciden.

<u>Ejercicio</u>: Mostrar que los abiertos básicos en Σ_2^+ (resp. Σ_2) son los cilindros $[m; a_m, a_{m+1}, \dots, a_n]$, es decir, la colección de los cilindros es una base topológica.

Definimos: $\xi : \boxed{\Sigma_2^+} \longrightarrow \Sigma_2^+$ shift Bernoulli unilateral

$$\xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{donde} \quad y_n = x_{n+1}$$

$$\begin{array}{cccccc} & 1^{\circ} & 2^{\circ} & 3^{\circ} & 4^{\circ} & \\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (& x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \cdots) \end{array}$$

$$\xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = (x_2 \;\; x_3 \;\; x_4 \;\; x_5 \;\; \cdots)$$

Por ejemplo, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1010101010\cdots)$

$$\xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}} \right) = (01010101\cdots\cdots)$$

Af: $\xi : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ es C^0.

en efecto, como los abiertos básicos en Σ_2^+ son cilindros, entonces es suficiente mostrar que

$$\xi^{-1}([m : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n]) \text{ sea un cilindro en } \Sigma_2^+.$$

observe:

$$\xi^{-1}([m : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n]) = [m+1 : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n]$$

pues:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi^{-1}([m : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n])$$

$$\Rightarrow \underbrace{\xi((x_n)_{n\in\mathbb{N}})}_{(y_n)_{n\in\mathbb{N}}} \in [m : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n] \Rightarrow \underbrace{y_m}_{x_{m+1}} = a_m, \underbrace{y_{m+1}}_{x_{m+2}} = a_{m+1}, \dots, \underbrace{y_n}_{x_{n+1}} = a_n$$

Luego,

$$x_{m+1} = a_m \ , \ x_{m+2} = a_{m+1}, \ \ldots, \ x_{n+1} = a_n$$

Así,

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [m+1 : a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n]$$

Por otro lado, sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [m+1 : a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n]$

$$\Rightarrow \quad x_{m+1} = a_m \ , \ x_{m+2} = a_{m+1}, \ \ldots, \ x_{n+1} = a_n$$

Consideremos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} = \xi((x_n)_{n\in\mathbb{N}})$. Luego,

$$\Rightarrow \quad y_m = a_m, \ y_{m+1} = a_{m+1}, \ \ldots, \ y_n = a_n$$

$$\Rightarrow (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [m : a_m, \ldots, a_n] \Rightarrow (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \xi^{-1}([m : a_m, \ldots, a_n])$$

Af: $\xi : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ No es inyectiva

$$\xi(10000000\cdots) = (00000\cdots)$$
$$\xi(00000000\cdots) = (0000\cdots)$$

Af: $\xi : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ es sobreyectiva

Sea $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \Sigma_2^+$. Consideremos

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0\, z_1\, z_2 \cdots\cdots)$$

$$\Rightarrow \xi((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (z_n)_{n\in\mathbb{N}} \quad /$$

Shift de Bernoulli Bilateral

$$\xi : \Sigma_2 \longrightarrow \Sigma_2$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \quad ; \quad y_n = x_{n+1}$$

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\cdots\ x_{-3}\ x_{-2}\ x_{-1}.x_0\ x_1\ x_2\ x_3\ \cdots \right)$$

$$\xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = \left(\cdots\ x_{-1}\ x_0 . x_1\ x_2\ x_3\ \cdots \right)$$

<u>Af</u>: ξ es un homeomorfismo

(Ejercicio)

Prop: El conjunto de los puntos periódicos de $\xi : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+$ (resp. $\xi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$) es denso en Σ_2^+ (resp. en Σ_2).

Dm: Ejercicio $\rightsquigarrow$ $\overline{\mathrm{Per}(\xi)} = \Sigma_2^+$. (resp. $\overline{\mathrm{Per}(\xi)} = \Sigma_2$)

Basta verificar que cualquier cilindro $[m : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n]$ interseca a $\mathrm{Per}(\xi)$. Consideremos:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} = \left(\begin{array}{cccccccccc} \dots & (m-1)^\circ & m^\circ & (m+1)^\circ & \dots & n^\circ & (n+1)^\circ & (n+2)^\circ & & \\ a_m & a_{m+1} & & a_n & a_m & a_{m+1} & & a_n & a_m & a_{m+1} \quad a_n \end{array} \right)$$

$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in [m : a_m, a_{m+1}, \dots, a_n]$

$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Per}(\xi)$

Para $k = n-m+1 \Rightarrow \xi^k((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$