Topológicamente TRANSITIVO

Def: Sea M espacio topológico y $f: M \to M$ una aplicación. Decimos que f es top. transitivo si $\exists\, z \in M$ tal que

$$\overline{\mathcal{O}_f(z)} = M.$$

$\mathcal{O}_f(z) = \{f^n(z) : n \in \mathbb{Z}\}$

f no invertible: $\mathcal{O}_f(z) = \{f^n(z) : n \geq 0\}$

Ejm: $R_\theta : S^1 \to S^1$; $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

↳ rotación irracional

↳ es top. transitivo

Sabemos,

$$\overline{\mathcal{O}_{R_\theta}(z)} = S^1$$

$q \in \mathbb{Z}^+$

$(p,q) = 1$

$\theta = \frac{p}{q}$

* La rotación racional $R_\theta : S^1 \to S^1$; $\theta \in \mathbb{Q}$

$z \mapsto R_\theta(z) = e^{2\pi\theta i} z$

No es top. transitivo, pues

$$\mathcal{O}_{R_\theta}(z) = \{z, R_\theta(z), R_\theta^2(z), \dots, R_\theta^{q-1}(z)\} \; ; \forall z \in S^1$$

Ejm: $R_\theta : S^1 \to S^1$; $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

↳ rotación irracional

↳ es top. transitivo

Sabemos,

$$\overline{\mathcal{O}_{R_\theta}(z)} = S^1$$

$q \in \mathbb{Z}^+$

$(p,q) = 1$

$\theta = \frac{p}{q}$

* La rotación racional $R_\theta : S^1 \to S^1$; $\theta \in \mathbb{Q}$

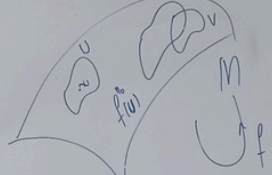
$z \mapsto R_\theta(z) = e^{2\pi\theta i} z$

No es top. transitivo, pues

$$\mathcal{O}_{R_\theta}(z) = \{z, R_\theta(z), R_\theta^2(z), \dots, R_\theta^{q-1}(z)\} \; ; \forall z \in S^1$$

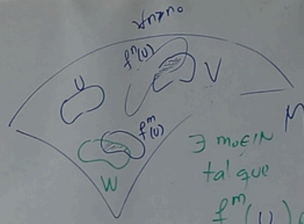
TEOREMA: Sea M espacio topológico con base numerable, Hausdorff y localmente compacto. La aplicación C^0 $f: M \to M$ es top. transitivo si y sólo si para cualquier par de abiertos $U, V \subset M$, $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$$



Topologicamente Mixing

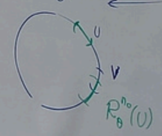
Def: Sea M espacio topológico y $f: M \to M$ una aplicación.
Decimos que f es top. mixing si para cualquier par de abiertos $U, V \subset M$ $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^n(U) \cap V \neq \emptyset$, $\forall n \geq n_0$



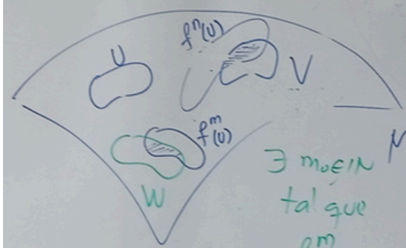
$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$ $\forall m \geq m_0$

OBS: top. mixing $\Longrightarrow$ top. transitivo.
$\not\Longleftarrow$

Ejm: $R_\theta: S^1 \to S^1$, $\theta \notin \mathbb{Q}$, top transitivo



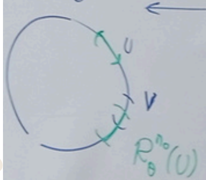
¡FORMALIZAR!



$\exists\, m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $f^m(U) \cap W \neq \emptyset$ $\forall m \geq m_0$

OBS: top. mixing $\Longrightarrow$ top. transitivo.
$\not\Longleftarrow$

Ejm:



¡FORMALIZAR!

Def: Sean X, Y espacios topológicos, $f: X \to X$, $g: Y \to Y$ aplicaciones. Decimos que g es un factor de f si existe $\phi: X \to Y$ aplicación continua y sobreyectiva tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \phi \downarrow & \circlearrowright & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array} \qquad \phi \circ f = g \circ \phi$$

En este caso, decimos que f y g son semiconjugados topológicamente

TEOREMA: Sean X, Y espacios topológicos con base numerable, Hausdorff y localmente compacto, $f: X \to X$ y $g: Y \to Y$ aplicaciones continuas. Si f y g son semiconjugados topologicamente, entonces se cumple:

C^0 sobreyectiva

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ Y & \xrightarrow{g} & Y \end{array}$$

$\phi \circ f = g \circ \phi$

Si f es top. transivito (resp. mixing), entonces g es top. transitivo (resp. mixing).

Dm: Sean $U, V \subset Y$ abiertos ar

Por la continuidad

$\phi^{-1}(U)$, $\phi^{-1}(V)$ son abi

Desde que f es to

existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal q

$f^{n_0}(\phi^{-1}(U)) \cap$

Por otro lado,

$\phi \circ f = g \circ \phi =$

Dm: Sean $U, V \subset Y$ abiertos arbitrarios.

Por la continuidad ϕ,

$\phi^{-1}(U)$, $\phi^{-1}(V)$ son abiertos en X.

Desde que f es top. transitivo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{n_0}(\phi^{-1}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$$

Por otro lado,

$$\phi \circ f = g \circ \phi \Rightarrow (f \circ \phi^{-1})(W) = \phi^{-1}(g(W)) \ (**)$$

$$f^n \circ \phi^{-1}(W) = \phi^{-1}(g^n(W)) \ (*)$$

$(*)$ $\phi^{-1}(g^{n_0}(U)) \cap \phi^{-1}(V) \neq \emptyset$

$\Rightarrow \phi^{-1}(g^{n_0}(U) \cap V) \neq \emptyset \Rightarrow g^{n_0}(U) \cap V \neq \emptyset$ $\blacksquare$

$(**)$ Sea $y \in (f \circ \phi^{-1})(W) \Rightarrow y \in f(\phi^{-1}(W))$

$\Rightarrow y = f(z)$; $\underbrace{z \in \phi^{-1}(W)}_{\phi(z) \in W}$

$\Rightarrow \phi(y) = \phi(f(z))$

$= g \circ \phi(z) \in g(W) \Rightarrow y \in \phi^{-1} g(W)$

TEOREMA: El shift de Bernoulli $\xi : \Sigma_2 \to \Sigma_2$ $\quad \left(\xi : \Sigma_2^+ \to \Sigma_2^+\right)$

es top. mixing (en particular, top. transitivo)

$$\Sigma_2^+ = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\} \}$$

$$\Sigma_2 = \{ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \{0,1\} \}$$

$$\xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}\right) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

tal que $y_n = x_{n+1}$

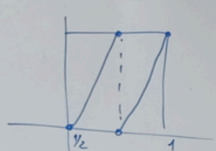
Ejm: $f : [0,1] \to [0,1]$

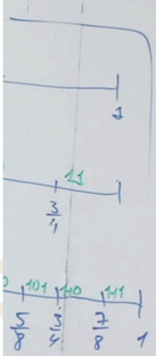
$$x \mapsto f(x) = \begin{cases} 2x ; & 0 \le x \le 1/2 \\ 2x-1 ; & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$$

es top. mixing.

En efecto,

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_2^+ & \xrightarrow{\xi} & \Sigma_2^+ \\ \phi \downarrow & & \downarrow \phi \\ [0,1] & \xrightarrow{f} & [0,1] \end{array}$$





$$(f\circ\phi)\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = f\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}\right)$$

$$= 2x = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}}$$

$x_1 = 0$: $$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x_n}{2^{n-1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n}$$

Definimos $\phi : \Sigma_2^+ \to [0,1]$

$$\phi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}, \quad x_n \in \{0,1\}$$

No es 1-1

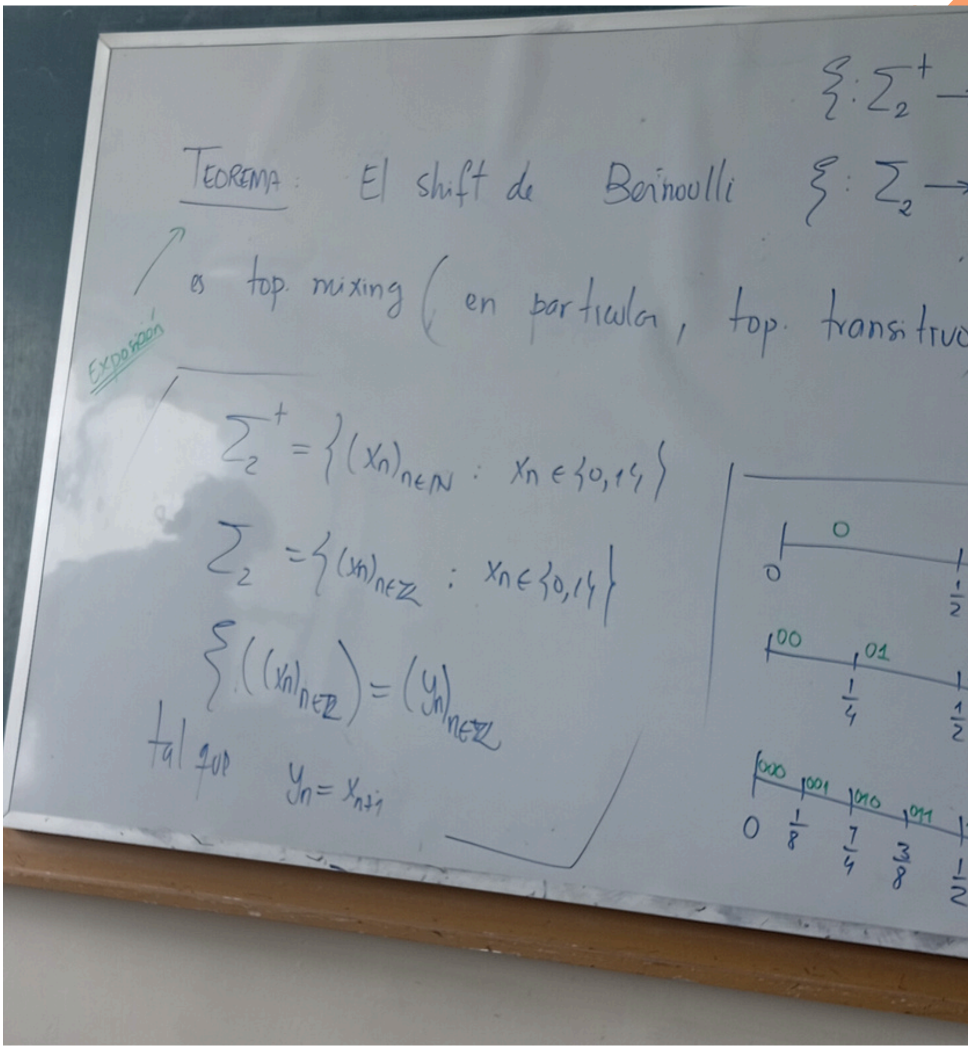
$$\phi(0111111\ldots) = \frac{0}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots = \frac{1}{2}$$

$$\phi(100000\ldots) = \frac{1}{2} + \frac{0}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \cdots = \frac{1}{2}$$

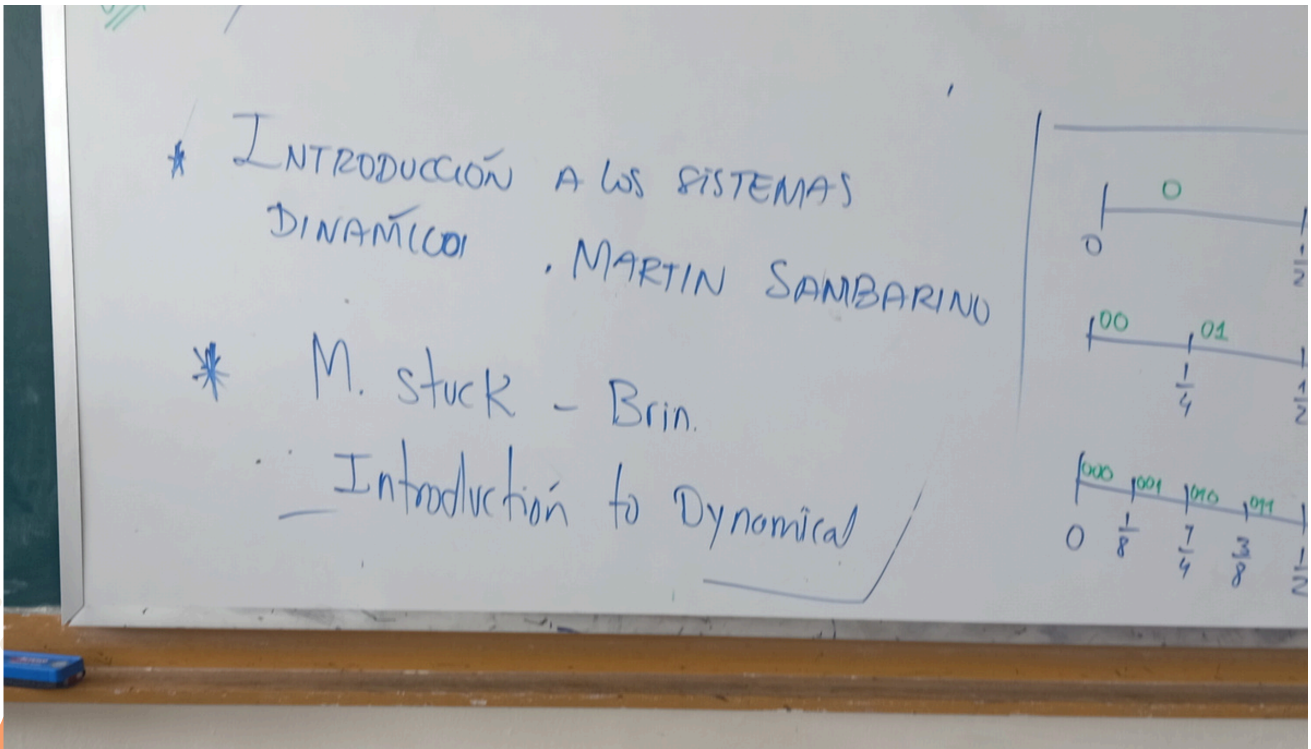
Ejercicio: ϕ es sobre y continua

$$\phi\circ\xi = f\circ\phi$$

$$\phi\circ\xi\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \phi\left((y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y_n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{2^n}$$



$\sigma : \Sigma_2^+ \to$
TEOREMA: El shift de Bernoulli $\sigma : \Sigma_2 \to$
es top. mixing (en particular, top. transitiv
Exposición
$\Sigma_2^+ = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} : x_n \in \{0,1\}\}$
$\Sigma_2 = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} : x_n \in \{0,1\}\}$
$\sigma((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}$
tal que $y_n = x_{n+1}$
0
0 $\frac{1}{2}$
00 01
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
000 001 010 011
0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$



* INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DINÁMICOS. MARTIN SAMBARINO
* M. Stuck - Brin.
Introduction to Dynamical
0
0 $\frac{1}{2}$
00 01
$\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$
000 001 010 011
0 $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{1}{2}$