Lista de ejercicios

Profesor: Matihus A. Molina Larios

14 de enero de 2026

Índice

1. Lógica

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1 (Proposición)**.** Una **proposición** es una oración declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas.

Ejemplo Proposiciones

a) "$2 + 2 = 4$.$^{\text{es}}$ una proposición verdadera.

b) "La Tierra es plana.$^{\text{es}}$ una proposición falsa.

c) "¿Qué hora es?"no es una proposición.

Definición 1.2 (Conectores lógicos)**.**

- Negación $\neg p$
- Conjunción $p \wedge q$ ("y")
- Disyunción $p \vee q$ ("o" inclusiva)
- Disyunción exclusiva $p \vee q$ ("o . . . o . . . ")
- Condicional $p \to q$ ("si . . . entonces . . . ")
- Bicondicional $p \leftrightarrow q$ ("si y solo si")

Definición 1.3 (Proposiciones relacionadas a la condicional)**.**

- Recíproca: $q \to p$
- Inversa: $\neg p \to \neg q$
- Contrapositiva: $\neg q \to \neg p$

Definición 1.4 (XD)**.**

- **Tautología**: Proposición siempre verdadera.
- **Contradicción**: Proposición siempre falsa.
- **Equivalencia lógica** $P \equiv Q$: Misma tabla de verdad.

Definición 1.5 (Leyes de De Morgan)**.**

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q \quad \text{y} \quad \neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Definición 1.6 (Cuantificadores).

- Universal $\forall$ ("para todo")
- Existencial $\exists$ ("existe al menos uno")
- Existencial único $\exists!$ ("existe solo uno")

1.2. Ejemplos Interesantes

Ejercicio Aplicación del Teorema de Pitágoras

Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes 3 cm y 4 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.

Solución: Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5 \text{ cm}$$

Ejercicio Problema inverso

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y uno de sus catetos mide 5 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

Ejercicio Demostración

Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos semejantes al triángulo original.

1.3. Ejercicios Prácticos

2. Álgebra Lineal

2.1. Espacios Vectoriales

Definición 2.1 (Espacio Vectorial). Un **espacio vectorial** sobre un campo $\mathbb{K}$ es un conjunto V no vacío, dotado de dos operaciones:

i) Suma vectorial: $+ : V \times V \to V$

ii) Multiplicación por escalar: $\cdot : \mathbb{K} \times V \to V$

que satisfacen los ocho axiomas de espacio vectorial.

Lema 2.1 (Unicidad del vector nulo). *En un espacio vectorial V, el vector nero es único.*

Demostración

Supongamos que existen dos vectores nulos 0_1 y 0_2 en V. Entonces:

$$\begin{aligned} 0_1 &= 0_1 + 0_2 \quad \text{(porque } 0_2 \text{ es vector nulo)} \\ &= 0_2 + 0_1 \quad \text{(por conmutatividad)} \\ &= 0_2 \quad \text{(porque } 0_1 \text{ es vector nulo)} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $0_1 = 0_2$. ■

Proposición 2.1 (Propiedades de espacios vectoriales). *En un espacio vectorial V sobre $\mathbb{K}$, para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$:*

a) $0 \cdot v = 0$

b) $\alpha \cdot 0 = 0$

c) $(-1) \cdot v = -v$

2.2. Ejercicios de Álgebra Lineal

Ejercicio Comprobación de axiomas

Verifica si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$:

a) $\mathbb{R}^2$ con las operaciones usuales

b) El conjunto de matrices 2×2 con entradas reales

c) El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3

Ejercicio Dependencia lineal

Determina si los siguientes vectores de $\mathbb{R}^3$ son linealmente independientes:

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (4, 5, 6), \quad v_3 = (7, 8, 9)$$

3. Soluciones a Ejercicios Seleccionados

3.1. Solución Ejercicio 2

Dado que $c = 13$ cm y $a = 5$ cm, aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow b = 12 \text{ cm}$$

3.2. Solución Ejercicio 4

Para $\mathbb{R}^2$:

- La suma de vectores es conmutativa y asociativa
- Existe vector nulo: $(0, 0)$

- Todo vector tiene inverso aditivo
- La multiplicación por escalar distribuye

Por lo tanto, $\mathbb{R}^2$ sí es espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

¡Fin del material!