

Material Didáctico de Matemáticas

Profesor: Tu Nombre

13 de enero de 2026

Índice

| | |
|---|----------|
| 1. Introducción a la Lógica Matemática | 2 |
| 1.1. Conceptos Básicos | 2 |
| 1.2. Teoremas Fundamentales | 2 |
| 1.3. Ejercicios Prácticos | 3 |
| 2. Álgebra Lineal | 3 |
| 2.1. Espacios Vectoriales | 3 |
| 2.2. Ejercicios de Álgebra Lineal | 5 |
| 3. Soluciones a Ejercicios Seleccionados | 5 |
| 3.1. Solución Ejercicio 2 | 5 |
| 3.2. Solución Ejercicio 4 | 5 |

1. Introducción a la Lógica Matemática

1.1. Conceptos Básicos

Definición 1.1. Una **proposición** es una oración declarativa que es verdadera o falsa, pero no ambas.

Ejemplo Proposiciones

- a) " $2 + 2 = 4$." es una proposición verdadera.
- b) "La Tierra es plana." es una proposición falsa.
- c) "¿Qué hora es?" no es una proposición.

1.2. Teoremas Fundamentales

Teorema 1.1 (Teorema de Pitágoras). *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos. Es decir, si a y b son las longitudes de los catetos y c es la longitud de la hipotenusa, entonces:*

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Demostración

Consideremos un triángulo rectángulo con catetos a y b , e hipotenusa c . Construyamos un cuadrado de lado $(a + b)$ y coloquemos cuatro triángulos idénticos dentro de él. El área del cuadrado grande es $(a + b)^2$. Esta área también puede calcularse como la suma del área del cuadrado pequeño (de lado c) más el área de los cuatro triángulos:

$$(a + b)^2 = c^2 + 4 \left(\frac{ab}{2} \right)$$

Desarrollando:

$$a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$$

Simplificando:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Lo que completa la demostración. ■

Corolario 1.1. *En un triángulo rectángulo isósceles, donde $a = b$, la hipotenusa es $c = a\sqrt{2}$.*

Demostración

Si $a = b$, entonces por el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$$

Por lo tanto, $c = a\sqrt{2}$. ■

1.3. Ejercicios Prácticos

Ejercicio Aplicación del Teorema de Pitágoras

Un triángulo rectángulo tiene catetos de longitudes 3 cm y 4 cm. Calcula la longitud de la hipotenusa.

Solución: Aplicando el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 \Rightarrow c = 5 \text{ cm}$$

Ejercicio Problema inverso

Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm y uno de sus catetos mide 5 cm, ¿cuánto mide el otro cateto?

Ejercicio Demostración

Demuestra que en cualquier triángulo rectángulo, la altura correspondiente a la hipotenusa divide al triángulo en dos triángulos semejantes al triángulo original.

2. Álgebra Lineal

2.1. Espacios Vectoriales

Definición 2.1 (Espacio Vectorial). Un **espacio vectorial** sobre un campo \mathbb{K} es un conjunto V no vacío, dotado de dos operaciones:

- i) Suma vectorial: $+: V \times V \rightarrow V$
- ii) Multiplicación por escalar: $\cdot: \mathbb{K} \times V \rightarrow V$

que satisfacen los ocho axiomas de espacio vectorial.

Lema 2.1 (Unicidad del vector nulo). *En un espacio vectorial V , el vector nulo es único.*

Demostración

Supongamos que existen dos vectores nulos 0_1 y 0_2 en V . Entonces:

$$\begin{aligned} 0_1 &= 0_1 + 0_2 \quad (\text{porque } 0_2 \text{ es vector nulo}) \\ &= 0_2 + 0_1 \quad (\text{por conmutatividad}) \\ &= 0_2 \quad (\text{porque } 0_1 \text{ es vector nulo}) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $0_1 = 0_2$. ■

Proposición 2.1 (Propiedades de espacios vectoriales). *En un espacio vectorial V sobre \mathbb{K} , para todo $\alpha \in \mathbb{K}$ y todo $v \in V$:*

a) $0 \cdot v = 0$

b) $\alpha \cdot 0 = 0$

c) $(-1) \cdot v = -v$

2.2. Ejercicios de Álgebra Lineal

Ejercicio Comprobación de axiomas

Verifica si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales sobre \mathbb{R} :

- a) \mathbb{R}^2 con las operaciones usuales
- b) El conjunto de matrices 2×2 con entradas reales
- c) El conjunto de polinomios de grado menor o igual a 3

Ejercicio Dependencia lineal

Determina si los siguientes vectores de \mathbb{R}^3 son linealmente independientes:

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (4, 5, 6), \quad v_3 = (7, 8, 9)$$

3. Soluciones a Ejercicios Seleccionados

3.1. Solución Ejercicio 2

Dado que $c = 13$ cm y $a = 5$ cm, aplicamos el Teorema de Pitágoras:

$$b^2 = c^2 - a^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow b = 12 \text{ cm}$$

3.2. Solución Ejercicio 4

Para \mathbb{R}^2 :

- La suma de vectores es conmutativa y asociativa
- Existe vector nulo: $(0, 0)$
- Todo vector tiene inverso aditivo
- La multiplicación por escalar distribuye

Por lo tanto, \mathbb{R}^2 sí es espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

¡Fin del material!