Ce TP peut être fait seul ou à deux et est à rendre pour le **25 avril, 20h**, *accompagné d'un rapport présentant la relaxation lagrangienne obtenue et les résultats des algorithmes sur les instances fournies, ainsi qu'une analyse de ces derniers.*

Problème du sac-à-dos avec conflit

Soit $I = \{1, \dots, n\}$ un ensemble de n objets ayant chacun un poids w_i et un profit p_i $(i \in I)$. On dispose d'un sac-à-dos de capacité W que l'on désire remplir avec des objets de I afin de maximiser le profit total du sac tout en respectant sa capacité. Cependant, certains couples d'objets sont incompatibles ; ils ne peuvent pas appartenir tous les deux au sac-à-dos. Ces couples sont représentés par l'ensemble $E \subset I \times I$ où chaque élément $\{i, j\} \in E$ représente deux objets en conflit.

Si on associe à chaque objet $i \in I$ une variable binaire x_i prenant la valeur 1 si l'objet i est sélectionné dans le sac-à-dos, et 0 sinon, le problème peut se modéliser avec le programme linéaire en nombres entiers suivant :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_C)\ \text{Max.}\ & \sum_{i \in I} p_i x_i & & (1)\\
\texttt{s.c.}\ & \sum_{i \in I} w_i x_i \le W, & & (2)\\
& x_i + x_j \le 1 \qquad \forall \{i, j\} \in E, & & (3)\\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I. & & (4)
\end{aligned}
$$

On constate que l'ensemble des conflits définit un graphe $G = (I, E)$ où les sommets correspondent aux objets et les arêtes aux conlits définis par E. Si $Q \subset I$ est une clique de G (ensemble de sommets deux à deux reliés par une arête), il est clair qu'au plus un seul objet de la clique peut être pris dans le sac-à-dos. Ainsi, si $\mathcal{Q}$ est un ensemble de cliques de G couvrant l'ensemble des conflit de E, un modèle PLNE de meilleure qualité est le suivant :

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{K}_Q)\ \text{Max.}\ & \sum_{i \in I} p_i x_i & & \\
\text{s.c.}\ & \sum_{i \in I} w_i x_i \le W, & & \\
& \sum_{i \in Q} x_i \le 1 \qquad \forall Q \in \mathcal{Q}, & & (5)\\
& x_i \in \{0, 1\} \qquad \forall i \in I. & &
\end{aligned}
$$

Afin d'obtenir de meilleures bornes duales que celles données par la relaxation linéaire de $\mathcal{K}_Q$, nous allons étudier la relaxation lagrangienne des contraintes de clique (5).

Question 1. Ecrivez le modèle mathématique issu de la relaxation lagrangienne des contraintes (5). Introduisez bien les pénalités associées à chaque contrainte.

On remarque que le problème obtenu est un simple problème de sac-à-dos binaire pouvant être résolu par programmation dynamique.

Question 2. Implémentez le programme dynamique permettant de résoudre le problème de sac-à-dos (vous pouvez réutiliser le programme écrit lors du TP de programmation dynamique) pour un vecteur de pénalités donné.

Calculez la solution de la relaxation lagrangienne et sa valeur pour les instances fournies sur Moodle en faisant varier à la main les pénalités associées aux contraintes de clique.

Question 3. Implementez un algorithme de sous-gradient afin de trouvez les pénalités permettant d'obtenir la meilleure borne duale. Notez que dès qu'un vecteur de pénalités permet d'obtenir une solution réalisable, vous pouvez calculer la valeur de cette solution pour le problème original et l'utiliser comme borne primale.

Question 4. Implémentez le modèle mathématique $\mathcal{K}_Q$ avec les contraintes de cliques dans le solveur de votre choix (pythonMip, Gurobi, ...) et calculez la relaxation linéaire du modèle pour les instances fournies sur Moodle. Comparez les bornes duales obtenues par la relaxation linéaire avec les bornes duales obtenues avec la relaxation lagrangienne.