Poročilo o projektni nalogi pri predmetu Matematično modeliranje

Matija Krigl

May 2024

Contents

1 Naloga

Dana je diskretna verižnica (podatki so mase in dolžine posameznih členkov ter obesišči verižnice).

(a) Za vsak posamezen členek verižnice določite njegovo težišče.

(b) Skozi obesišči verižnice in težišče vsakega posameznega členka napeljite interpolacijski polinom p.

(c) Izračunajte dolžino l polinoma p med obesiščema.

(d) Določite zvezno verižnico, ki poteka skozi dani obesišči in ima dolžino enako l. Kakšna je razdalja med najnižjo točko polinoma p (gledano med obesiščema) in najnižjo točko zvezne verižnice?

2 Diskretna verižnica in iskanje težišč

2.1 Matematično ozadje

Diskretna verižnica je vrv sestavljena iz gibko vpetih togih členkov, palic. Imenujemo jo *verižnica*, ker ima obliko prosto obešene vrvi.

Naj bo diskretna verižnica sestavljena iz $n+1$ členkov dolžin

$$L_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1$$

in mas

$$M_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Da bi določili težišča posameznih členkov, moramo najprej izračunati koordinate njihovih krajišč:

$$(x_i, y_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n+1,$$

kjer sta obeščišči podani kot (x_0, y_0) in (x_{n+1}, y_{n+1}).

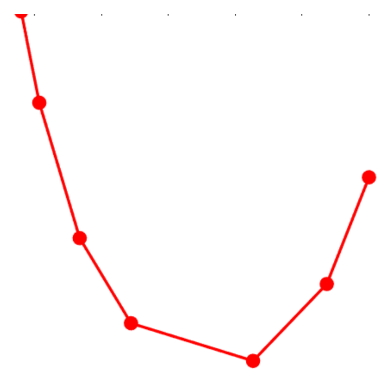

Figure 1: Primer diskretne verižnice sestavljene iz 6-tih členkov.

Ravnotežne pogoje dosežemo z zahtevo, da je težišče čim nižje, kar je ekvivalentno minimizaciji potencialne energije.

Koordinati težišča palice izračunamo kot srednjo vrednost koordinat obeh koncev palice. Zato moramo poznati koordinate prijemališč ravne palice $A(x_{i-1}, y_{i-1})$ in $B(x_i, y_i)$. Vsak par zaporednih točk je enako oddaljen kar ustreza radiju krožnice. Težišče palice $T_i(\alpha_i, \beta_i)$:

$$\alpha_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$$

$$\beta_i = \frac{y_{i-1} + y_i}{2}$$

To lahko zapišemo tudi kot vektor:

$$T_i = \left(\frac{x_{i-1} + x_i}{2}, \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \right)$$

Vezani ekstrem prevedemo na neveznega z uvedbo Langrangeovih multiplikatorjev. Ravnotežne enačbe dobimo z odvajanjem nevezanega ekstrema funkcije s parcialnim odvajanjem po x_i, y_i, in λ_i. Problem prevedemo na sistem 3n+1 enačb za 3n+1 neznank.

$$\xi_i = x_i - x_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$
$$\eta_i = y_i - y_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1.$$

Vpeljemo tudi spremenljivko za delno vsoto μ_i:

$$\mu_i = \frac{M_i + M_{i+1}}{2}.$$

Funkcija F_uv - Matlab

Funkcija ima spremenljivko `w` in vrne vrednost vektorske funkcije za diskretno verižnico.

Izračunamo `kvoc`:

$$\frac{\eta_i}{\xi_i} = v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

Z uporabo `kvoc` izračunamo vektorja θ in ξ. Ker velja

$$U(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \xi_i - (x_{n+1} - x_0),$$
$$V(u, v) = \sum_{i=1}^{n+1} \eta_i - (y_{n+1} - y_0),$$

smo problem prevedli na manjši sistem.
Z uporabo `fsolve` poiščemo ničle funkcije. Tako izboljšamo začetni približek `w_0` določimo neznanki v in u.

Funkcija diskrVeriznica - Matlab

Ko najdemo u in v, lahko izračunamo horizontalne (ξ_i) in vertikalne (η_i) komponente za vsak členek.

Velja:

$$\xi_i = \frac{L_i}{\sqrt{1 + \left(v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j\right)^2}}, \quad i = 1, 2, \dots, n+1,$$

in

$$\eta_i = \xi_i \left(v - u \sum_{j=1}^{i-1} \mu_j \right), \quad i = 1, \dots, n+1.$$

Izračunamo koordinate x in y. ξ predstavlja horizontalne razdalje med vozlišči,η pa predstavlja vertikalne razdalje med vozlišči.`cumsum` izračuna kumulativno vsoto teh razdalj in dobimo končne koordinate x in y.

Funkcija dolociTezisce - Matlab

Funkcija uporablja vektorske operacije za izračun težišč. Koordinate členkov v matriki (*koordinate_clenkov*). Težišča se izračunajo tako, da vzamemo povprečje vsakega para sosednjih točk.

3 Interpolacija polinoma

3.1 Matematično ozadje

Interpolacija polinomov je metoda, s katero najdemo polinom, ki gre skozi nabor danih točk. Predpostavimo, da imamo n točk $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Želimo najti polinom $P(x)$ stopnje $n-1$, ki zadošča pogoju:

$$P(x_i) = y_i \quad \text{za vse} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

V našem primeru so točke $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ koordinate dveh obesišč verižnice in težišč vsakega posameznega členka.

Funkciji `polyfit` in `polyval` - Matlab

Funkciji `polyfit` in `polyval` omogočata delo s polinomsko interpolacijo in evalvacijo polinomov. Povežimo to s konceptom interpolacije polinomov.

Funkcija `polyfit` je MATLAB-ova funkcija, ki izračuna koeficiente polinoma, ki najbolje ustreza naboru podatkov v smislu najmanjših kvadratov. Če imamo podatke (x, y), uporaba funkcije `polyfit` je:

$$p = \texttt{polyfit}(x, y, n)$$

kjer je: x vektor abscis (x-koordinat) podatkovnih točk; y je vektor ordinat (y-koordinat) podatkovnih točk; n stopnja polinoma. Funkcija `polyfit` vrne vektor koeficientov polinoma $p(x) = p_1 x^n + p_2 x^{n-1} + \ldots + p_{n+1}$.

Funkcija `polyval` je MATLAB-ova funkcija, ki vrednoti polinom z danimi koeficienti pri določenih vrednostih x. Če imamo polinom določene koeficiente p, uporaba funkcije `polyval` je:

$$y = \texttt{polyval}(p, x)$$

kjer je: p vektor koeficientov polinoma; x so točke, pri katerih želimo vrednotiti polinom.

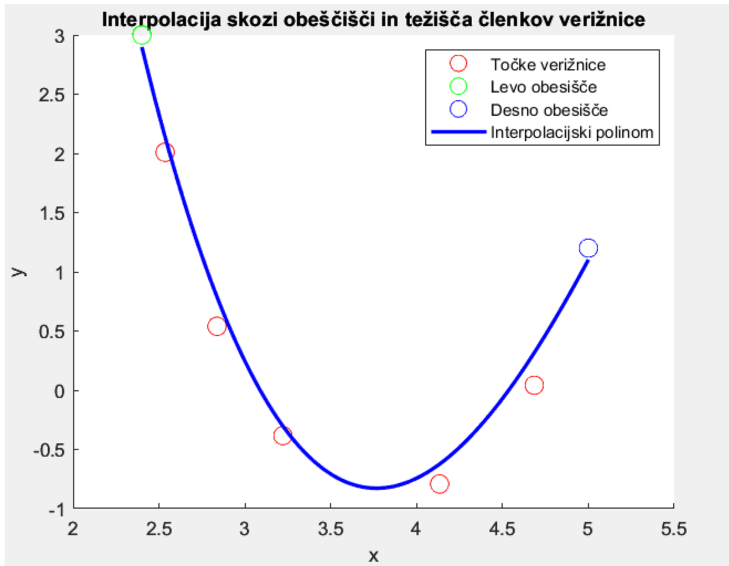

Figure 2: Primer interpolacije polinoma iz 6-tih členkov.

4 Izračun dolžine krivulje

4.1 Matematično ozadje

Dolžina krivulje, ki jo opisuje polinom med dvema točkama, temelji na formuli za dolžino krivulje v ravnini.

Dolžina krivulje je enaka vsoti neskončno majhnih segmentov krivulje. Majhen segment dolžine krivulje ds med dvema točkama (x, y) in $(x + dx, y + dy)$ je podan z:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$$

Če izrazimo dy v odvisnosti od dx, dobimo:

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

Celotna dolžina krivulje med točkama $x = a$ in $x = b$ je torej:

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

5 Razdalja med najnižjema točkama

Najnižja točka interpolacijskega polinoma

Prvi odvod polinoma p je polinom dp. Kadar je prvi odvod enak nič, imamo stacionarno točko. Na tej točki je bodisi maksimalen, minimalen ali ima točko prevoja. Polinom predstavljen s svojimi koeficienti nam polyder vrne koeficiente odvoda tega polinoma.

$$dp = \text{polyder}(p)$$

Iskanje ničel prvega odvoda (stacionarne točke):

$$\text{stacionarne\_tocke} = \text{roots}(dp)$$

Funkcija `roots(dp)` najde ničle polinoma dp (oz. stacionarne točke polinoma p).

Relavantne stacionarne točke ležijo znotraj intervala $[a, b]$. Filtriramo stacionarnih točk znotraj intervala $[a, b]$.

Izračunamo še vrednosti polinoma v stacionarnih točkah:

$$\text{vrednosti\_relavantnih} = \text{polyval}(p, \text{relavantne\_stacionarne})$$

Funkcija `polyval(p, relavantne_stacionarne)` izračuna vrednosti polinoma p v filtriranih stacionarnih točkah.

Izračun vrednosti polinoma na robovih intervala:

$$\text{rob\_a} = \text{polyval}(p, a)$$

$$\text{rob\_b} = \text{polyval}(p, b)$$

Nato izračunamo vse pomembne vrednosti in združimo vrednosti polinoma v vseh relevantnih točkah (stacionarnih točkah in robovih intervala) in njihove koordinate.

```
vrednosti_interp_pol = [vrednosti_relavantnih; rob_a; rob_b];
tocke_interp_pol = [relavantne_stacionarne; a; b];
```

Uporabimo funkcijo `min`, da najdemo najmanjšo vrednost izmed vseh relevantnih vrednosti. `min_value` bo najmanjša vrednost, `min_index` pa indeks, kjer se ta vrednost pojavi. `najnizja_tocka_pol` bo koordinata x, kjer polinom doseže to najmanjšo vrednost.

```
[min_value, min_index] = min(vrednosti_interp_pol);
najnizja_tocka_pol = tocke_interp_pol(min_index);
```

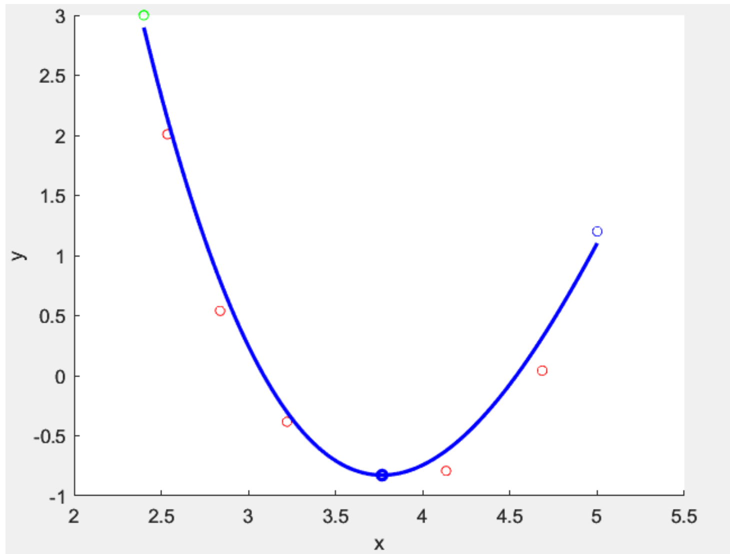

Figure 3: Primer interpolacijskega polinoma in njegov minimum

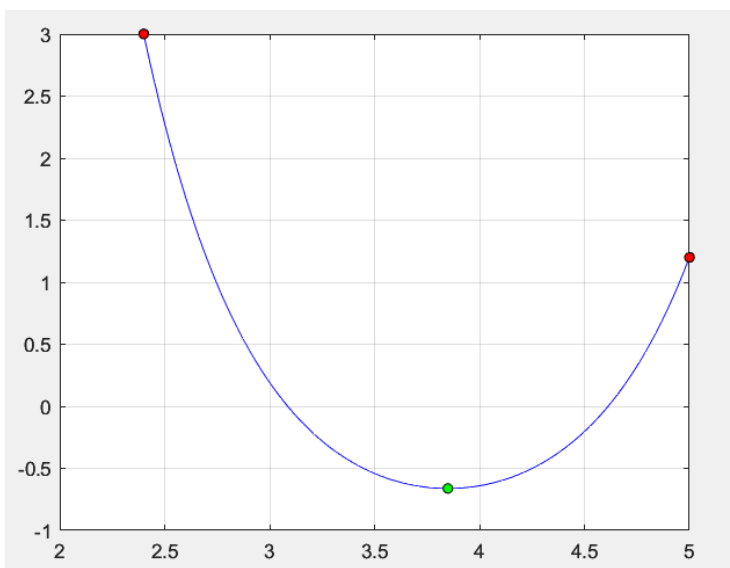

Figure 4: Primer zvezne verižnice in njen minimum

Zvezna verižnica

Zvezna verižnica opisuje obliko idealne vrvi, ki je obešena med dvema točkama in podvržena samo svoji teži.

Oblika verižnice je podana z enačbo:

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right),$$

kjer je cosh hiperbolični kosinus in a pozitivna konstanta, ki je določena s fizikalnimi lastnostmi vrvi in geometrijo problema.

Tanke gibka nit je obešene v točkah $T_1 = (a, A)$ in $T_2 = (b, B)$, če ima nit dolžino ℓ.

Oblika verižnice je opisana s funkcijo $y = w(x)$.

Funkcija w minimizira potencialno energijo, kar pomeni, da mora biti funkcional ϕ minimalen:

$$\phi(w) = \int_a^b w(x)\sqrt{1 + w'^2(x)}\, dx.$$

Geometrijski pogoji:

$$w(a) = A, \quad w(b) = B.$$

Izoperimetrični pogoj:

$$\int_a^b \sqrt{1 + w'^2(x)}\, dx = \ell.$$

Problem rešimo z uvedbo Lagrangeovega multiplikatorja in Euler-Lagrangeove enačbe. Enačbo zvezne verižnice rešimo parametrično z Jacobijevo iteracijo.

Poglejmo, kako je ta teorija implementirana v MATLAB kodi.

zvVeriznica_iteracijskaFun - Matlab

Ta funkcija uporablja iterativni pristop za reševanje enačbe $z = \sinh(\rho z)$, kjer je ρ parametrična konstanta. To je v skladu s teoretično izpeljavo, kjer enačbo rešujemo z Jacobijevo iteracijo. S tem izračunamo približek $z = \lim_{k\to\infty} z_k$.

zvVeriznica - Matlab

To je glavna funkcija za izračun in risanje zvezne verižnice. Funkcija uporablja iterativni rezultat z za izračun parametrov v, u, C, D in nato določi obliko verižnice $w(x)$ ter jo nariše.

Ko imamo izračunan z, izračunamo parametra v, u:

$$v = \text{atanh}\left(\frac{B - A}{L}\right) + z$$

$$u = \text{atanh}\left(\frac{B - A}{L}\right) - z$$

še C, D:

$$C = \frac{b - a}{v - u}$$

$$D = \frac{av - bu}{v - u}$$

Izračun λ:

$$\lambda = A - C \cosh\left(\frac{a - D}{C}\right)$$

Velja $w(x)$:

$$w(x) = \lambda + C \cosh\left(\frac{x - D}{C}\right)$$

Najnižja točka $T_{\mathbf{min}}$:

$$T_{\min} = [D, \lambda + C]$$

Matematično ozadje za izračun razdalje

Matematično ozadje za izračun razdalje med dvema točkama v ravnini temelji na evklidski geometriji. Evklidska razdalja med dvema točkama v dvodimenzionalnem prostoru je podana z Pitagorovim izrekom.

Če imamo dve točki $P_1 = (x_1, y_1)$ in $P_2 = (x_2, y_2)$, je razdalja d med njima izračunana kot:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

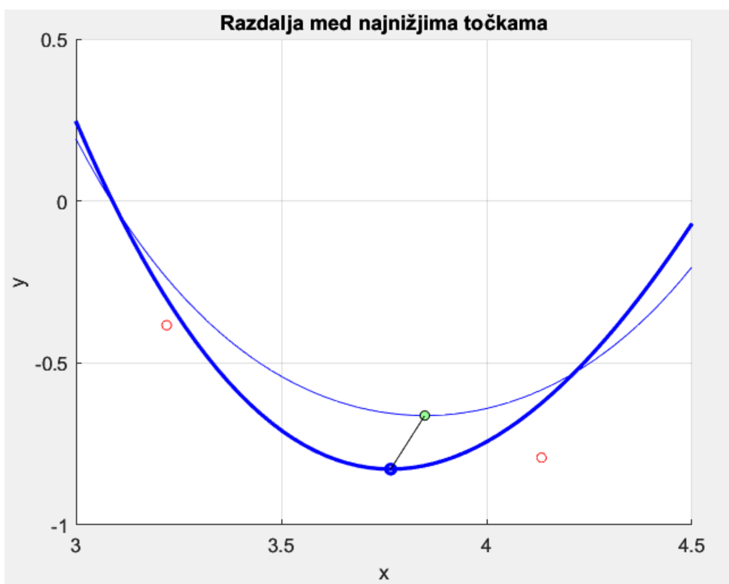

Figure 5: Razdalja

6 Viri in literatura

- Zapiski s predvanj in vaj pri predmetu Matematično modeliranje, dostopno: https://ucilnica.fmf.uni-lj.si/course/view.php?id=135Spletna učilnica

- Teorija za izračun dolžine krivulje, dostopno na https://mathinsight.org/length_curves_refresherMath Inside.

- Matlabov center za pomoč in dokumentacija vgrajenih funkcij https://ch.mathworks.com/help/matlab/re Works.

- Matlab: Curve Fitting (polyfit and polyval) https://www.youtube.com/watch?v=GOwPA1LPDaQt=374