Analiza 1. Predavanja

Matija Sirk

25. oktober 2017

Povzetek

Skupni zapiski s predavanj Analize 1.
Lose all hope you who enter here.

Kazalo

1 Števila

1.1 Naravna Števila

So števila s katerimi štejemo. Množica naravnih števil: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Vsako naravno število n ima svojega naslednika n^+. 1 je edini element $\mathbb{N}$, ki ni naslednik nobenega $n \in \mathbb{N}$.

Opisana so s Peanovimi aksiomi. Naravna števila so množica, skupaj s pravilom, ki vsakemu naravnemu številu n priredi njegovega naslednika n^+, ki je prav tako naravno število in velja:

Aksiom 1.1. $\forall m, n \in \mathbb{N} : m^+ = n^+ \Leftrightarrow m = n$

Aksiom 1.2. *Obstaja* $1 \in \mathbb{N}$, *ki ni* n^+ *nobenega* $n \in \mathbb{N}$

Aksiom 1.3. $A \subset \mathbb{N}$ *in* $1 \in A$ *in* $n \in A \Rightarrow n^+ \in A \Leftrightarrow A = \mathbb{N}$

Tretjemu Peanovemu aksiomu pravimo tudi aksiom popolne indukcije. Pazi, da je tukaj simbol $\subset$ simbol za podmnožico, ne za pravo podmnožico.

Primer 1.1. Dokaži, da je za vsak $n \in \mathbb{N}$ izraz $4^n - 3n + 8$ deljiv z 9.

$$n = 1 :$$
$$4^1 - 3 * 1 + 8 = 9,\ 9 \mid 9 \texttt{ (Dokaz za bazo indukcije)}$$

$$n \to n + 1 :$$
$$4^n - 3n + 8 = 9k,\ k \in \mathbb{Z}$$
$$4^n = 9k + 3n - 8 \texttt{ (Indukcijska predpostavka)}$$

$$4^{n+1} - 3(n+1) + 8 = 4 * 4^n - 3n + 5 = 4 * (9k + 3n - 8) - 3n + 5 =$$
$$= 9 * 4k + 9n - 9 * 3 = 9(4k + n - 3),$$
$$9 \mid 9(4k + n - 3) \texttt{ (Dokaz za indukcijski korak)}$$

Ker velja trditev za bazo indukcije in ker za vse $n \in \mathbb{N}$ velja indukcijski korak, po načelu popolne indukcije trditev velja $\forall n \in \mathbb{N}$. ■

Naravna števila lahko seštevamo in množimo (aksiomatska definicija bo pri *Logiki in Množicah*). Prav tako jih lahko uredimo po velikosti - $\mathbb{N}$ je (linearno) urejena. Vsaka neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ ima najmanši element in je urejena. Vsaka končna neprazna podmnožica $\mathbb{N}$ ima največji element.

1.2 Cela Števila

V celih številih je smiselno definirano tudi odštevanje. $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

Seštevanje in množenje se z $\mathbb{N}$ razširita tudi na $\mathbb{Z}$. Tudi $\mathbb{Z}$ ima definirano urejenost na običajen način.

Urejenost:

$$x - y = 0 \Rightarrow x = y$$
$$x - y > 0 \Rightarrow x > y$$

V splošnem deljenje ni definirano.

1.3 Racionalna Števila

Racionalna števila so kvocienti celih in naravnih števil. $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n};\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\}$

Racionalna števila lahko pogosto napišemo na več načinov - različni ulomki lahko zaznamujejo isto število (kvocient): $\frac{4}{3} = \frac{8}{6}$

Enakost v racionalnih številih: $\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml = kn$

Racionalna števila lahko naivno skonstruiramo takole:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N} = \{(m, n);\ m \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

To množico razdelimo na ekvivalenčne razrede tako, da grupiramo skupaj v razred tiste ulomke, ki predstavljajo isti kvocient. Torej, urejena para $\frac{m}{n}$ in $\frac{k}{l}$ sta v istem razredu, če zanju velja: $\frac{m}{n} = \frac{k}{l} \Leftrightarrow ml = kn$. Racionalno število je razred urejenih parov in ga označimo z $\frac{m}{n}$ (oziroma z poljubnim drugim predstavnikom razreda).

Računske operacije v $\mathbb{Q}$: