Modelos de Equilibrio General Dinámicos y Estocásticos
Parte 3

Alejandro Vicondoa

Pontificia Universidad Católica de Chile

2023

Introducción

- Hasta ahora hemos asumido que el Banco Central adoptó exitosamente el régimen de **inflation target (flexible)**, que consiste en:
  - Ajustar i_t ante desviaciones de la inflación con respecto al target
  - Asegurarse que π_t retorna eventualmente al target en el largo plazo
- Sin embargo, hay **2** preguntas clave que no hemos analizado:
  1. ¿Cómo se implementa la tasa de interés i_t?
  2. ¿En qué sentido esta política monetaria es **eficiente**?

Estructura

1. **Implementación de la política monetaria**

2. La regla y el principio de Taylor

3. Política monetaria óptima

4. Trade-off de Politica Monetaria: desinflación óptima, estabilización óptima

Implementación de la Política Monetaria

- La tasa de interés que afecta la demanda agregada es la tasa de interés real, de una madurez mediana/larga

- Sin embargo, el Banco Central no controla directamente r_t

- Su **instrumento directo** es la tasa de interés nominal de muy corto plazo sobre las reservas (i^R) y la cantidad de reservas (R^s)

- Vamos a analizar la relación que hay entre (i^R, R^s) y r_t

- Para analizar la relación entre estas tasas utilizaremos:
  - La **ecuación de Fisher**
  - Presentar y utilizar la **estructura de plazo de las tasas de interés**
  - Presentar y utilizar el **mercado interbancario de reservas**

Expectativas de Inflación y Ecuación de Fisher

- La ecuación de Fisher y la regla de política monetaria son:

$$\begin{aligned} \textbf{FE} &: \quad r_t = i_t - \pi_{t+1} \\ \textbf{MP} &: \quad i_t = \bar{r} + \pi_{t+1} + \gamma(\pi_t - \bar{\pi}) \end{aligned}$$

- Asumamos que el Banco Central conoce las expectativas de inflación π_{t+1} (por ejemplo a través de encuestas y modelos de predicción)

- El Banco Central targetea el valor de i_t consistente con el valor deseado de r_t:

$$i_t = \bar{r} + \gamma(\pi_t - \bar{\pi}) + \pi_{t+1}$$

- Nos movimos de la tasa de interés **real** a la **nominal** objetivo; ahora necesitamos movernos desde la **madurez larga** a la **madurez más corta**

La Estructura de Plazo de las Tasas de Interés

- La estructura de plazos relaciona las tasas de interés de diferentes madureces

- Asuma que un inversor tiene $1 para invertir en un horizonte a 2 años, y que podemos utilizar bonos de 2 plazos: 3 meses y 2 años

- Todas las tasas de interés están **anualizadas**; el inversor puede:
  - Comprar un bono a 2-años a la tasa de interés nominal $i_s^{2y}\%$, y obtener $\$(1+i_s^{2y})^2$ dentro de 2 años
  - Comprar una sucesión de bonos a 3 meses, con lo cual dentro de dos años obtendrá:

$$\$ \underbrace{\left(1+i_s^{3m}\right)^{\frac{1}{4}}}_{\text{inversión inicial}} \times \underbrace{\left(1+i_{s+3m}^{3m}\right)^{\frac{1}{4}} \times \left(1+i_{s+6m}^{3m}\right)^{\frac{1}{4}} \ldots \times \left(1+i_{s+21m}^{3m}\right)^{\frac{1}{4}}}_{\text{7 reinversiones}}$$

donde i_s^{3m} es la tasa de interés corriente para un plazo de 3-meses y i_{s+3m}^{3m}, i_{s+6m}^{3m} y i_{s+3m}^{3m}, i_{s+6m}^{3m},... son las expectativas del valor de la tasa de interés dentro de 3 meses, 6 meses, etc.

La Estructura de Plazo de la Tasa de Interés

- **Si no existe una barrera al arbitraje y los inversores son neutrales al riesgo, los retornos esperado de ambas inversiones se deben igualar**. Para tasas de interés bajas (para que se cumpla $\ln(1+i) \simeq i$) esto implica:

$$i_s^{2y} \simeq \frac{1}{8}\left(i_s^{3m} + \sum_{j=1}^{7} i_{s+j\times 3m}^{3m}\right)$$

  Por lo tanto, la tasa de interés de bonos de madurez larga es el promedio esperado de las tasas de interés de bonos de corto plazo

- Si $LHS > RHS$, los inversores se endeudan a corto plazo para comprar bonos a largo plazo hasta que esta igualdad se verifique (y al revés cuando $LHS < RHS$)

La Estructura de Plazo de Tasas de Interés

- En la práctica los inversores son aversos al riesgo mientras que los bonos de largo plazo tiene un **interest-rate risk**, i.e., el de tener que revender el bono cuyo valor ha caido porque las tasas de interés se han incrementado

- Por lo tanto, los bonos de largo plazo tienen un **term premium** sobre los bonos de corto plazo:

$$i_s^{2y} \simeq \underbrace{\frac{1}{8}\left(i_s^{3m} + \sum_{j=1}^{7} i_{s+j\times 3m}^{3m}\right)}_{\text{promedio de tasas de interes de corto plazo}} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{term premium}}}{\varphi^{3m,2y}},$$

La Estructura de Plazo de Tasas de Interés

- La estructura de plazo de las tasas de interés implica que el Banco Central puede influir sobre las tasas de interés nominales de largo plazo manipulando las tasas de interés nominales de muy corto plazo, las que están más cercanas a sus instrumentos de política

- La tasa de política relevante es la de préstamos de corto plazo en el mercado interbancario (i.e. la **Fed Funds rate** en US, la **EONIA** en la zona Euro, la **LIBOR** en UK)

- Si la FED desea que la tasa de interés de los bonos a 1 año sea i_s^{1y}, debe fijar la secuencia de tasas de corto plazo $\{i_{s+j\times 1d}^{1d}\}_{j=0}^{365}$ para que se cumpla:

$$\sum_{j=0}^{365} i_{s+j\times 1d}^{1d} = 365 \times (i_s^{1y} - \varphi^{1d,1y}), \quad \varphi^{1d,1y} \text{ given}$$

La Estructura de Plazo de Tasas de Interés

- Si denotamos con $\tilde{i}_t$ al promedio futuro de las tasas de interés de corto plazo y a φ el term premium sobre los bonos a 1 año, entonces:

$$i_t = \tilde{i}_t + \varphi$$

  para que se cumpla que:

$$r_t = \tilde{i}_t + \varphi - \pi_{t+1}$$

- Para manipular i_t se requiere anunciar un sendero entero de tasas de interés de política monetaria futuras; esto puede funcionar solo si:

  1. El term premium φ es estable (como ocurre en "tiempos normales")
  2. La trayectoria de las tasas de interés de corto plazo es predecible, mediante una comunicación adecuada

La Tasa de Interés en el Mercado Interbancario

- Denotemos i^M a la tasa de interés de corto plazo (e.g., the Fed funds rate)

- i^M no la fija libremente el Banco Central ya que es un precio de equilibrio, determinado en el mercado interbancario de reservas

- Al finalizar cada día, existen desbalances transitorios entre los bancos: algunos bancos tienes superavit y otros tienen déficit

- El déficit transitorio que tiene un banco se puede resolver de 3 formas:
  - Un **préstamo interbancario** de un banco con superavit
  - Un **pago directo** en dinero de reserva
    (debitado desde la cuenta del banco comercial con el Banco Central)
  - Un préstamos de emergencia del Banco Central (prohibitivo)

- i^M es la tasa de interés de equilibrio **en los préstamos interbancarios**

La Tasa de Interés en el Mercado Interbancario

- ¿Cómo se determina i^M? Por la oferta y demanda de **dinero de reserva**
- Las reservas bancarias, que se guardan en cuentas en el Banco Central, rinden una tasa de interés i^R, la cual es **fijada directamente** por el Banco Central
- Un banco con superavit puede mantener el exceso de dinero de reserva en la cuenta y ganar i^R, o prestarle a los bancos con déficit y obtener i^M
- No puede ocurrir que $i^M < i^R$: la oferta de dinero de reserva en el mercado interbancario sería o y los bancos con necesidades necesitarías ofrecer mayor tasas de interés hasta que $i^M \geq i^R$
- $i^M - i^R$ = **costo de oportunidad de las reservas guardadas** en el Banco Central

La Tasa de Interés en el Mercado Interbancario

- Al elegir cuanto dinero de reserva tener, cada banco hace un balance entre:
  - El costo de oportunidad de las reservas $i^M - i^R$
  - El beneficio de enfrentar potencial shocks de liquidez, sin tener que pedir prestado en condiciones menos favorables e inciertas

- Dado que los shocks de liquidez se generan por transacciones entre bancos, para sus clientes, son más grandes y frecuentes en expansiones

- Por último la **demanda por dinero de reserva** toma la siguiente forma:

$$R^d = R^d(\underbrace{i^M - i^R}_{-}, \underset{+}{y})$$

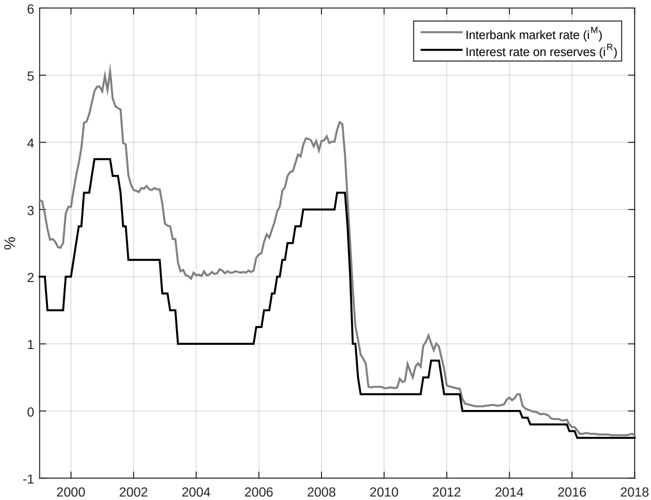
La Tasa de Interés en el Mercado Interbancario

- De donde viene la **oferta** de dinero de reserva R^s?
- De **operaciones de mercado abierto** = compra (venta) de activos por parte del Banco Central desde (hacia) un banco, contra un crédito (débito) en las reservas
- i^M se determina por la igualdad entre oferta y demanda:

$$R^s = R^d(\underbrace{i^M - i^R}_{-}, \underset{+}{y}) \;\Rightarrow\; i^M = i^M(\underset{+}{i^R}, \underset{+}{y}, \underset{-}{R^o}) \geq i^R$$

- Resumiendo, el Banco Central:
  - Fija un piso para i^M a través de i^R
  - Fija la distancia entre $i^M - i^R$ a través de R^s
- Cuando el Banco Central incrementa la escasez del dinero de reserva (vendiendo activos a los bancos), el buffer de los bancos para enfrentar shocks de liquidez es menor y, por lo tanto, requieren un retorno mayor (i^M) para prestar

La Tasa de Interés en el Mercado Interbancario



Tasa de interés del mercado interbancario y de reservas en la Zona Euro. Fuente: ECB

Estructura

1. Implementación de la política monetaria
2. **La regla y el principio de Taylor**
3. Política monetaria óptima
4. Desinflación óptima, estabilización óptima

La Regla de Taylor

- El comportamiento de i^M en el tiempo se describre por “la regla de Taylor”

- Taylor (1993, 1999) mostró que la siguiente regla explica bastante bien el comportamiento observado de la Fed Funds

$$i_t^M = 2 + \pi_t + \frac{1}{2}(\pi_t - 2) + \frac{1}{2}(y_t - \tau_t^y)$$

  donde τ_t^y es la tendencia lineal del producto

- Por extensión, cada regla con i_t^M en el lado izquierdo se denomina “regla de Taylor”, con distintos determinantes en el RHS (desempleo, tipo de cambio, índices bursátiles...)

La Regla de Taylor

- Las reglas de Taylor **no son** funciones de reacción ya que es r_t, y no i_t^M, lo que afecta el objetivo que les preocupa a los bancos centrales, la demanda agregada **AD**

- Las reglas de Taylor ayudan a los bancos centrales a **comunicar** sobre las decisiones y hacerlos más transparente (porque el control sobre r_t es indirecto e imperfecto, mientras que el control sobre i_t^M es directo)

- Esto hace el sendero de i_t^M más predecible, y por lo tanto más probable que influencie las tasas de interés de largo plazo en la forma en la que el Banco Central desea

El Principio de Taylor

- Asuma que θ_t, y_t^n son constantes y normalizados a 0 (por simplicidad)
- El sistema AS-AD deviene:

$$\textbf{AD}: y_t = -\gamma\sigma\left(\pi_t - \bar{\pi}\right)$$
$$\textbf{AS}: \pi_t = \pi_{t-1} + \kappa y_t$$

- Reemplazando y_t por su valor en la curva AS y factorizando se obtiene:

$$\begin{aligned} \pi_t &= \pi_{t-1} - \sigma\gamma\kappa\left(\pi_t - \bar{\pi}\right) \\ &= \bar{\pi} + \Gamma\left(\pi_{t-1} - \bar{\pi}\right), \quad \text{with} \quad \Gamma = \frac{1}{1+\gamma\sigma\kappa} > 0 \end{aligned}$$

- π_t es estable si y solo si $\Gamma < 1$, esto es, si y solo si $\gamma > 0$

El Principio de Taylor

- John B. Taylor es también conocido por el **Principio de Taylor**

- La tasa de interés nominal se debe incrementar más que la inflación

- La regla de PM es consistente con este principio si y solo si $\gamma > 0$ ya que, combinando la regla de política monetaria con la AS para π_{t+1} se obtiene:

$$
\begin{aligned}
i_t &= \bar{r} + \pi_{t+1} + \gamma(\pi_t - \overline{\pi}) \\
i_t &= \bar{r} + \pi_t + \kappa\left(y_{t+1} - y^n_{t+1}\right) + \gamma(\pi_t - \overline{\pi}) \\
i_t &= (\bar{r} - \gamma\overline{\pi}) + (1+\gamma)\,\pi_t + \kappa\left(y_{t+1} - y^n_{t+1}\right)
\end{aligned}
$$

- Si $\gamma > 0$, implica que la tasa de interés nominal responde más que 1 a 1 a la inflación

- La "Gran Inflación " de 1970s en Estados Unidos y en otros países se explica muchas veces por la falla de los Bancos Centrales en cumplir con el Principio de Taylor

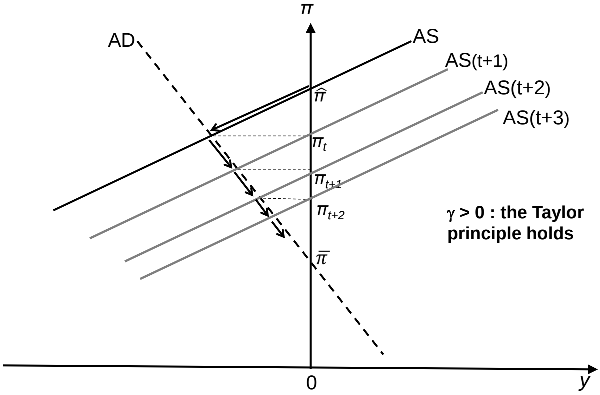
El Principio de Taylor

- Asuma que un shock macroeconómico causa que la inflación se desvíe de su target en el período $t-1$, i.e., $\pi_{t-1} = \hat{\pi} > 0$

- Gráficamente, la curva AS se desplaza en el tiempo por su intercepto

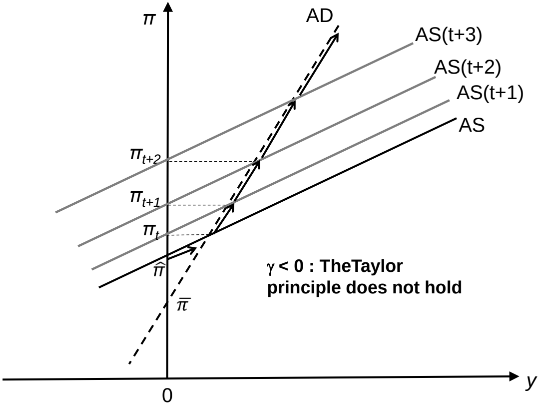
- Si $\gamma \lesseqgtr 0$ determina la **pendiente de la AD** ($\lesseqgtr 0$) y por lo tanto si los cambios en la AS estabilizan la inflación

El Principio de Taylor



Estabilidad de la Inflación cuando se cumple el Principio de Taylor. Cualquier desvío de la inflación con respecto a su target se corrige automáticamente

El Principio de Taylor



Inestabilidad de la Inflación cuando no se cumple el Principio de Taylor. Cualquier desvío de la inflación con respecto a su target da lugar a divergencia de la inflación

Estructura

1. Implementación de la política monetaria
2. La regla y el principio de Taylor
3. **Política monetaria óptima**
4. Trade-off de Politica Monetaria: desinflación óptima, estabilización óptima

La Asignación Eficiente

$$\max U_{C_{i,t},L_{i,t}}(C_t, L_t)$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} C_{i,t} &= Z_t L_{i,t}, \ \forall i \in [0,1] \\ L_t &= \int_0^1 L_{i,t} di \end{aligned}$$

Condiciones de Optimalidad:

$$C_{i,t} = C_t, \ \forall \ i \in [0,1]$$

$$L_{i,t} = L_t, \ \forall \ i \in [0,1]$$

$$-\frac{U_{l,t}}{U_{c,t}} = MPL_t$$

donde $MPL_t \equiv Z_t$

Asignación Eficiente

Asignación Eficiente:

- Producen y consumen la misma cantidad de todos los bienes
- La tasa marginal de sustitución entre consumo y ocio iguala a la tasa marginal de transformación (al igual que ocurre con precios flexibles y competencia perfecta)
- Asignar la misma cantidad de trabajo a todas las firmas

Este resultado es una consecuencia de:

- Todos los bienes entran de forma simétrica en la función de utilidad
- La concavidad de la función de utilidad y de la función de producción (idéntica para todos los bienes)

2 factores generan que **la asignación de equilibrio del modelo sea subóptima**:

1. **Estática:** la presencia de poder de mercado en el mercado de bienes
2. **Dinámica:** el ajuste infrecuente de precios por parte de las firmas $\Rightarrow$ los mark-ups efectivos (distintos de los óptimos) varían en el tiempo

1. Distorsión Estática

Las firmas enfrentan una demanda imperfectamente elástica por su variedad diferenciada $\Rightarrow$ cobran un precio por sobre su costo marginal (**poder de mercado**)

Precio óptimo: $p_t = \mu + w_t - z_t$, where $\mu = \frac{1}{\eta - 1}$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{U_{l,t}}{U_{c,t}} = \frac{L_t^{\frac{1}{\xi}-1}}{C_t^{\frac{-1}{\sigma}}} = \frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu} < Z_t$$

Esto no satisfeca la tercera condición de la asignación eficiente. El **mark-up genera un nivel de empleo ineficiente (más bajo)**

Asumamos que existe un **subsidio al empleo** τ financiado con impuestos de suma fija (i.e. no distorsivos). Bajo precios flexibles, $P_t = (1 + \mu)\frac{(1-\tau)W_t}{Z_t}$.

$$\Longrightarrow \quad -\frac{U_{l,t}}{U_{c,t}} = \frac{L_t^{\frac{1}{\xi}-1}}{C_t^{\frac{-1}{\sigma}}} = \frac{W_t}{P_t} = \frac{Z_t}{\mu(1-\tau)}$$

Subsidio óptimo: $\mu(1 - \tau) = 1$ o, equivalentemente, $\tau = \frac{1}{\eta}$.

El equilibrio con precios flexibles es eficiente en este caso

2. Distorsión Dinámica

Distorsiones asociadas con la presencia de rigideces de precios

1. Markups que varían en el tiempo
2. Distorsiones de precios relativos (diferencias de markups entre firmas)

1. Variaciones de markups resultado de los precios pegajosos (asumiendo que hay un subisidio óptimo):

$$P_t = \mu_t \underbrace{\frac{(1-\tau)\,W_t}{Z_t}}_{\Psi_t} = \frac{\mu_t}{\mu}\frac{W_t}{MPL_t}$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{U_{l,t}}{U_{c,t}} = \frac{L_t^{\frac{1}{\xi}-1}}{C_t^{\frac{-1}{\sigma}}} = \frac{W_t}{P_t} = MPL_t\frac{\mu}{\mu_t} \neq MPL_t$$

Requisito de eficiencia: el markup promedio $(\mu_t) =$ markup deseado (μ), all t.

2. Distorsiones de precios relativos son resultado de la fijación de precios pegajosa (falta de sincronización en el ajuste de precios): $C_{i,t} \neq C_{j,t}$ si $P_{i,t} \neq P_{j,t} \Rightarrow L_{i,t} \neq L_{j,t}$. La política óptima requiere que los precios y las cantidades (por lo tanto los costos marginales) se igualen entre los bienes.

Política Monetaria Optima en el Modelo NK

Los markups variantes en el tiempo y las distorsiones de precios relativos originan una asignación de recursos ineficiente. Los precios fallan en cumplir su rol de asignar recursos de forma eficiente.

Supuestos:

- Subsidio óptimo al empleo

  $\Longrightarrow$ el equilibrio con precios flexibles es eficiente
- Si no se heredan distorsiones de precios, i.e. $P_{i,-1} = P_{-1}$ para todos los bienes $i \in [0, 1]$

Política monetaria óptima: replica el equilibrio de precios flexibles

Implementación: **comprometerse a estabilizar los costos marginales a un nivel consistente con el markup deseado por parte de las firmas**, *dado los precios actuales*:

- Ninguna firma tiene incentivos a ajustar sus precios, i.e. $P_t^* = P_{t-1}$ y, por lo tanto, $P_t = P_{t-1}$ para $t = 0, 1, 2, ...$(estabilidad del nivel de precios agregado).

- El empleo y producto de equilibrio machean sus contrapartes empíricas

Equilibrio con la Política Optima

- Asumamos que $\pi_{t-1} = 0$. Por lo tanto:

$$\pi_t = \kappa(y_t - y_t^n)$$

  para estabilizar la inflación necesitamos que $y_t = y_t^n$

- ¿Cómo logramos que se cumple que $y_t = y_t^n$? Usando la IS:

$$y_t^n = \theta_t - \sigma(r_t^n - \bar{r})$$

  y

$$y_t = \theta_t - \sigma(r_t - \bar{r})$$

  Por lo tanto, para alcanzar el producto natural se tiene que cumplir que $r_t = r_t^n$. Esto implica:

$$i_t = r_t^n \quad \forall t$$

- Desafio: r_t^n no es observable

Equilibrio con la Política Optima

Consideremos la especificación de la New-Keynesian Phillips Curve:

$$\widetilde{y}_t = -\frac{1}{\sigma}(i_t - E_t\{\pi_{t+1}\} - r_t^n) + E_t\{\widetilde{y}_{t+1}\}$$

$$\pi_t = \beta E_t\{\pi_{t+1}\} + \kappa \widetilde{y}_t$$

donde $\widetilde{y}_t \equiv y_t - y_t^n$
Si se alcanza:

$$y_t = y_t^n \quad \Rightarrow \quad \widetilde{y}_t = 0$$

La curva de oferta agregada implica que:

$$\pi_t = 0$$

La Dynamic IS implica que:

$$i_t = r_t^n \quad \forall t$$

Política Monetaria Optima

Dos propiedades de la política óptima:

- Desviaciones de las variables con respecto a sus niveles naturales deben ser eliminadas para eliminar las distorsiones dinámicas. Desincentivar a las firmas a cambiar sus precios se logra estabilizando sus markups en el nivel deseado

- La estabilidad de precios implica un nivel eficiente de producto. La **Estabilidad de Precios** emerge como una característica de la política óptima aun cuando no es el objetivo. No hay necesidad de conicer el nivel eficiente de producto ya que se puede alcanzar con la política de estabilización de precios. La estabilización del producto y de la inflación bajo la política óptima se conoce como **La Divina Coincidencia**.

Si se alcanza la estabilidad de precios, debe ocurrir que ninguna firma ajusta su precio aun cuando tenga la opción de hacerlo

Política Monetaria Optima - Respuesta Shocks de Demanda

- ¿Cómo debe responder el Banco Central ante shock de demanda (θ_t)?
- Recordemos que las curvas IS y AS son:

$$\begin{aligned} \textbf{IS} &: \quad y_t = \theta_t - \sigma\left(r_t - \bar{r}\right) \\ \textbf{AS} &: \quad \pi_t = \pi_{t-1} + \kappa\left(y_t - y_t^n\right) \end{aligned}$$

- Asuma que $(y_{t-1}, \pi_{t-1}) = (\bar{y}, \bar{\pi}) = (0, 0)$, y que ocurre un shock dθ_t
- Fijar d$r_t = \frac{1}{\sigma}$dθ_t implica $(y_t, \pi_t) = (0, 0)$, lo que minimiza los desvíos de ambas variables
- La política óptima estabiliza completamente el producto y la inflación en respuesta a un AD shock: esto es lo que se conoce como "**la Divina Coincidencia**" (Blanchard-Galí, 2007)

Política Monetaria Optima - Respuesta Shocks de Productividad

- ¿Cómo debe responder el Banco Central ante shock de productividad (z_t)?
- Asuma que $(y_{t-1}, \pi_{t-1}) = (\bar{y}, \bar{\pi}) = (0, 0)$, y que ocurre un shock dz_t
- El cambio en z_t afecta al producto natural y al de competencia perfecta
- Un incremento en z_t genera una brecha de producto negativa, lo que reduce la inflación (OA)
- El Banco Central reduce i_t, lo que reduce r_t e incrementa la demanda agregada, contribuyendo a cerrar la brecha de producto y a estabilizar la inflación
- Fijar d$r_t = \frac{1}{\sigma}$dy_t^n implica $(y_t, \pi_t) = (y_t^n, 0)$, lo que minimiza los desvíos de ambas variables
- La política óptima estabiliza completamente el producto y la inflación en respuesta a un shock de productividad (“**la Divina Coincidencia**” (Blanchard-Galí, 2007))

Política Monetaria Optima

- Hasta aquí no hay trade-off para la política monetaria
- La OA viene representada por:

$$\pi_t = \pi_{t-1} + \kappa\,(y_t - y_t^n)$$

  Supuesto Implícito: $y_t^e - y_t^n = 0$. El producto de precios flexibles mantiene una diferencia constante en el tiempo con el producto eficiente. Por lo tanto, el objetivo es que el producto se parezca al de precios flexibles
- **Strict Inflation Targeting** es la política monetaria óptima
- Sin embargo, en la práctica los Banco Centrales enfrentan trade-offs y no adoptan Strict Inflation Targeting. ¿Por qué?
- 2 casos de ejemplo:
  1. Desinflación óptima
  2. Estabilización de markup shocks

Estructura

1. Implementación de la política monetaria
2. La regla y el principio de Taylor
3. Política monetaria óptima
4. **Trade-off de Politica Monetaria: desinflación óptima, estabilización óptima**

La Función de Pérdida del Banco Central

- Especificamos las **preferencias del Banco Central**, tipicamente:

$$L(y_t, \pi_t) = \lambda (y_t - \bar{y})^2 + (\pi_t - \bar{\pi})^2$$

  donde $\bar{y}, \bar{\pi}$ son los targets y $\lambda \geq 0$ es el peso en la estabilización del producto

- La política monetaria en el momento t afecta el intercepto de $AS(t+1)$, por lo tanto el Banco Central va a alcanzar en el período $t+1$

- Tomando esto en consideración requiere que la función de pérdida **intertemporal**:

$$L_t^I = L(y_t, \pi_t) + \beta L(y_{t+1}, \pi_{t+1}) + \beta^2 L(y_{t+2}, \pi_{t+2}) + \ldots, \quad 0 \leq \beta < 1$$

- 2 trade-offs potenciales:
  - Cerrar $y_t - \bar{y}$ vs. $\pi_t - \bar{\pi}$ en el período t
  - Cerrar las brechas en el período t vs en el futuro

La Función de Pérdida del Banco Central

- El Banco Central elige r_t para minimizar L_t^l
- Esto es, la regla de PM es reemplazada por: $\{r_{t+k}\}_{k=0}^{\infty} = \arg\min L_t^l$
- El resto del modelo AS-AD no se modifica:

$$\begin{aligned} \textbf{IS} &: \quad y_t = \theta_t - \sigma\left(r_t - \bar{r}\right) \\ \textbf{AS} &: \quad \pi_t = \pi_{t-1} + \kappa\left(y_t - y_t^n\right) \end{aligned}$$

- Elegir óptimamente r_t es equivalente a elegir y_t óptimamente, lo que es lo mismo que elegir π_t óptimamente
- Para conveniencia resolveremos $\{\pi_{t+k}\}_{k=0}^{\infty} = \arg\min L_t^l$, y luego recuperaremos $\{r_{t+k}\}_{k=0}^{\infty}$ usando la AS y la AD

1. Desinflación Óptima

- Asuma que π_{t-1} es alta (e.g., in 1979) pero que el target de inflación $\bar{\pi}$ cae (a zero, por simplicidad) en el período t (= "Volcker shock")

- Asuma además (también por simplicidad) que $\bar{y} = y_t^n = 0$ (i.e., $z_t = \xi\mu^*$)

- De la AS, la inflación puede caer ($\pi_t < \pi_{t-1}$) sólo si la recesión ocurre ($y_t < y_t^n$), y el producto undershoots el target ($y_t < \bar{y}$)

- La velocidad óptima de desinflación pondera los beneficios de acercarse a $\bar{\pi}$ contra los costos de moverse lejos de $\bar{y}$

1. Desinflación Óptima

- Asuma primero una velocidad exógena de desinflación Ω:

$$\text{for } k \geq 0 : \pi_{t+k} = \Omega \pi_{t+k-1}, \; 0 \leq \Omega \leq 1$$

en el que

$$\pi_{t+k} = \begin{cases} \hat{\pi} > 0 & \text{for } k = ..., -2, -1 \\ \Omega^{k+1} \hat{\pi} & \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- De la AS, la trayectoria implícita para el producto es:

$$y_{t+k} = -\kappa^{-1} (\pi_{t+k-1} - \pi_{t+k})$$

de modo que

$$y_{t+k} = \begin{cases} 0 & \text{for } k = ..., -2, -1 \\ -\kappa^{-1} (1 - \Omega) \Omega^k \hat{\pi} & \text{for } k = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

- Cuanto más rápida es la desinflación (Ω es chico), más grande es la recesión ($(1 - \Omega) \hat{\pi} / \kappa$ en el período t) pero más corta es la recesión

1. Desinflación Óptima

- La **pérdida acumulada del producto** es independiente de Ω:

$$-\sum_{k=0}^{\infty} y_{t+k} = \underbrace{\kappa^{-1}(1-\Omega)\hat{\pi}}_{\text{perdida de} y_t} + \underbrace{\kappa^{-1}(1-\Omega)\Omega\hat{\pi}}_{\text{perdida de} y_{t+1}} + \underbrace{\kappa^{-1}(1-\Omega)\Omega^2\hat{\pi}}_{\text{perdida de} y_{t+2}} + \dots$$

$$= \kappa^{-1}(1-\Omega)(1+\Omega+\Omega^2+\dots)\hat{\pi} = \frac{\hat{\pi}}{\kappa}$$

- "**Ratio de Sacrificio**" = pérdida acumulada de producto sobre el tamaño de la desinflación

$$S = -\frac{\sum_{k=0}^{+\infty} y_{t+k}}{\hat{\pi} - \underbrace{\bar{\pi}}_{=0}} = \frac{1}{\kappa} = \frac{\xi\omega}{1-\omega}$$

- El Ratio de Sacrificio en el tiempo en una ventana de tiempo $[t, t+T]$ es:

$$S_{t+T} = \frac{-\sum_{k=0}^{T}\left(y_{t+k} - y^{\tau}_{t+k}\right)}{\pi_{t+T} - \pi_t} \simeq \frac{-\sum_{k=0}^{T}\left(\frac{Y_{t+k} - Y^{\tau}_{t+k}}{Y^{\tau}_{+k}}\right)}{\pi_{t+T} - \pi_t}$$

1. Desinflación Optima

Table 6.1
Empirical sacrifice ratios

Country	Disinflation period	T (quarters)	$\pi_{t+T} - \pi_t$ (%)	S_{t+T}
France	1974T2–1974T4	10	2.98	0.0363
	1981T2–1986T4	23	10.42	0.0240
Germany	1965T4–1967T3	7	2.43	0.1024
	1973T1–1977T3	18	4.23	0.1054
	1980T1–1986T3	26	5.95	0.1423
United Kingdom	1961T2–1963T3	9	2,10	0.0764
	1975T1–1978T2	13	9.71	0.0347
	1980T2–1983T3	13	11.12	0.0117
	1984T2–1986T3	9	3.03	0.0347
United States	1969T4–1971T4	8	2.14	0.1175
	1974T1–1976T4	11	4.00	0.0957
	1980T1–1983T4	15	8.83	0.0733

Source: Ball (1994).

1. Desinflación Optima

- Ahora computemos la velocidad **óptima** de desinflación
- El Banco Central minimiza:

$$L_t^I = \lambda y_t^2 + \pi_t^2 + \beta(\lambda y_{t+1}^2 + \pi_{t+1}^2) + \beta^2(\lambda y_{t+2}^2 + \pi_{t+2}^2) + \dots$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} \textbf{AS(t+k)} : \pi_{t+k} &= \pi_{t+k-1} + \kappa y_{t+k}, \text{ for } k = 0, 1, \dots, \\ \pi_{t-1} &= \hat{\pi} \text{ given} \end{aligned}$$

- Invirtiendo las curvas **AS(t+k)** y sustituyendolas en L_t^I:

$$L_t^I = \{[\lambda \kappa^{-2}(\pi_t - \pi_{t-1})^2 + \pi_t^2] + \\ \beta[\lambda \kappa^{-2}(\pi_{t+1} - \pi_t)^2 + \pi_{t+1}^2] + \beta^2[\lambda \kappa^{-2}(\pi_{t+2} - \pi_{t+1})^2 + \pi_{t+2}^2] + \dots\}$$

1. Desinflación Optima

- Las condiciones de primer orden con respecto a π_{t+k}s son:

$$\frac{\partial L_t^I}{\partial \pi_{t+k}} = \beta^k \{2\lambda \kappa^{-2}(\pi_{t+k} - \pi_{t+k-1}) + 2\pi_{t+k} - 2\beta\lambda\kappa^{-2}(\pi_{t+k+1} - \pi_{t+k})\} = 0$$

  Rearreglando los términos:

$$\pi_{t+k} = \frac{\pi_{t+k-1} + \beta\pi_{t+k+1}}{1 + \beta + \kappa^2/\lambda}, \; k = 0, 1, \ldots$$

- En cualquier momento $t+k$, la desinflación óptima depende de la inflación en el período previo y de la inflación (óptima) del período siguiente

1. Desinflación Optima

- Analicemos ahora el caso más simple en el que $\beta = 0$ (**Discreción**):

$$\pi_{t+k} \quad = \quad \left(\frac{\lambda}{\lambda + \kappa^2}\right)\pi_{t+k-1}, \text{ for } k = 0, 1, \ldots$$

- La velocidad óptima de desinflación en ese caso es:

$$\Omega = \frac{\lambda}{\lambda + \kappa^2}$$

- La desinflación es más rápida (i.e. Ω más chico) cuando:
  - El peso relativo en la estabilización del producto (λ) es bajo
  - La respuesta de la inflación a la recesión (κ) es alta

1. Desinflación Optima

- ¿Qué ocurre cuando $\beta > 0$ (**Compromiso**)? Bastante similar excepto que:

$$\Omega = \frac{1}{2\beta}\left[1+\beta+\frac{\kappa^2}{\lambda}-\sqrt{\left(1+\beta+\frac{\kappa^2}{\lambda}\right)^2-4\beta}\right] \xrightarrow[\beta\to 0]{} \frac{\lambda}{\lambda+\kappa^2}$$

- Ω es más chico (i.e. la desinflación es más rápida) cuando β crece

- La razón es que la desinflación ahora hace la desinflación del próximo período más sencilla (al mover el intercepto de la curva de oferta del próximo período más) y un Banco Central que mira al futuro toma esto en consideración

1. Desinflación Optima

- Hay una representación gráfica simple de la política óptima
- La dinámica de la inflación se caracteriza por estas dos ecuaciones:

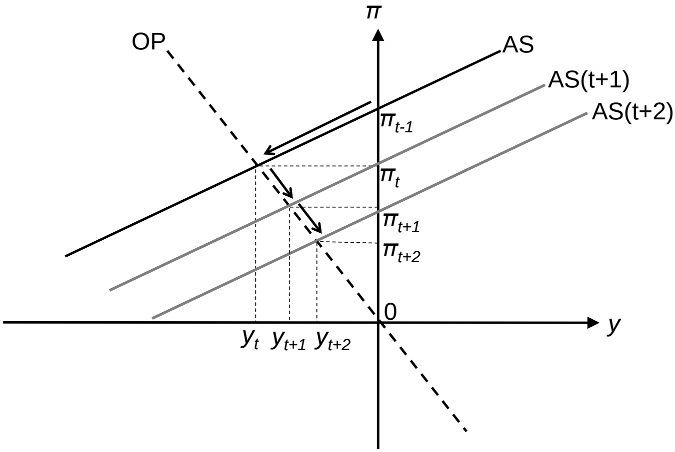
$$\textbf{Desinflación Optima} : \pi_t = \Omega \pi_{t-1}$$
$$\textbf{AS} : \pi_t = \pi_{t-1} + \kappa y_t$$

- Utilizando las 2 expresiones para eliminar π_{t-1} obtenemos la curva **OP**:

$$\textbf{OP} : \pi_t = -\left(\frac{\kappa\Omega}{1-\Omega}\right) y_t$$

- La curva OP es decreciente en el plano (y, π): siempre que π_t **overshoots** el target $\bar{\pi}$ $(= 0)$, la política de desinflación está en camino y el producto debe **undershoot** el target: $\bar{y}$ $(= 0)$
- La curva OP (basada en la política óptima) reemplaza la curva AD

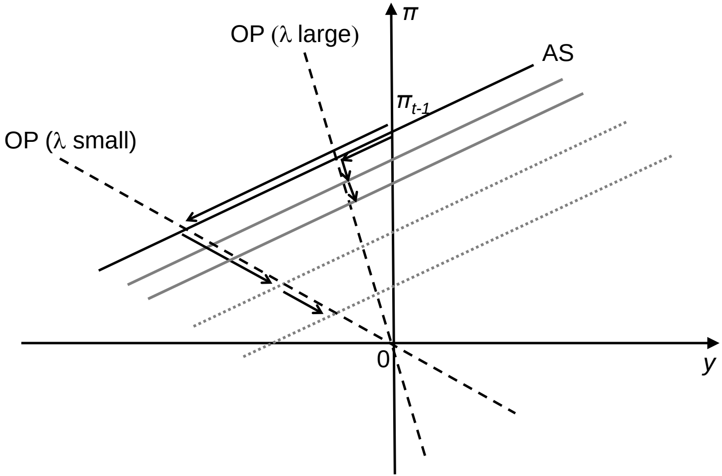
1. Desinflación Optima



1. Desinflación Optima

- La pendiente de la curva OP depende de Ω, y por lo tanto de λ
- Cuanto más chico es λ, más chico es Ω y más plana es la curva OP
- Por lo tanto, más pronunciada, pero también corta, es la recesión

1. Desinflación Optima



1. Desinflación Optima

- ¿Cómo se implementa la desinflación óptima?
- Para reducir la inflación, el Banco Central adopta una política monetaria contractiva($r_t \uparrow$) que reduce la demanda agregada ($y_t \downarrow$)
- Recuerde que la dinámica de y_t implícita por la velocidad de desinflación es Ω:

$$y_{t+k} = -\kappa^{-1}(1-\Omega)\Omega^k \hat{\pi}$$

- Invirtiendo la curva IS y abstrayéndonos de los shocks de demanda $\theta_t = 0$, obtenemos:

$$r_{t+k} = \bar{r} - \frac{1}{\sigma} y_{t+k} = \bar{r} + \frac{(1-\Omega)\Omega^k \hat{\pi}}{\sigma\kappa}$$

- El Banco Central incrementa r_t por sobre $\bar{r}$ en t y después la reduce gradualmente hasta $\bar{r}$ cuando la inflación se acerca al target

2. Estabilización Optima

Considere que: $y_t - y_t^n \equiv (y_t - y_t^e) + (y_t^e - y_t^n)$. Por lo tanto, la OA se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
\pi_t &= \pi_{t-1} + \kappa(y_t - y_t^n) \\
\pi_t &= \pi_{t-1} + \kappa(y_t - y_t^e + y_t^e - y_t^n) \\
\pi_t &= \pi_{t-1} + \kappa(y_t - y_t^e) + \underbrace{\kappa(y_t^e - y_t^n)}_{\equiv u_t}
\end{aligned}$$

donde u_t es una variable aleatoria.

Alguna imperfección real genera que **la diferencia entre el producto eficiente y el natural varíe en el tiempo**. Woodford (2003) denomina a estos shocks de oferta ineficientes y se denominan **markup shocks**. Por lo tanto, el producto natural no representa el óptimo en todo momento.

2. Estabilización Optima

El u_t se podría explicar por:

- Variaciones exógenas en el markup óptimo en el tiempo: podría explicarse por variaciones en la elasticidad de sustitución entre bienes en el ciclo económico. En este caso $y_t^n = z_t - \xi \mu_t^*$ (i.e. μ^* varía en el tiempo) mientras que y_t^e no se modifica

- Variaciones exógenas en los markups salariales (si el modelo tuviera imperfecciones en el mercado laboral).

En estos casos, la variación de la inflación no estaría explicada por cambios en la brecha de producto y **no sería posible estabilizar la inflación y la brecha de producto simultaneamente (i.e. no se verifica la Divina Coincidencia)**.

La clave para generar el tradeoff es que **la inflación y la brecha de producto tienen diferente signo**

2. Estabilización Optima

- Ahora analicemos un **AS shock**, asumiendo que y_t^n varía en el tiempo por la presencia de **markup shocks** ($y_t^n = z_t - \xi \mu_t^*$. Asumamos que este shock no tiene persistencia

- Consideremos primero el caso en el que $\beta = 0$:

$$\min_{\pi_t} L_t = \lambda (y_t - \bar{y})^2 + (\pi_t - \bar{\pi})^2$$

sujeto a

$$\textbf{AS}: \pi_t = \pi_{t-1} + \kappa (y_t - y_t^n), \quad \pi_{t-1} \text{ given}$$

- Invirtiendo la curva AS, sustituyéndola en L_t y computando las condiciones de primer orden con respecto a π_t se obtiene:

$$\pi_t = \Omega \pi_{t-1} - \Omega \kappa y_t^n$$

con

$$\Omega = \frac{\lambda}{\lambda + \kappa^2}$$

2. Estabilización Optima

- El término Ω antes de π_{t-1} refleja la velocidad óptima de desinflación
- El término $\Omega\kappa$ antes que y_t^n refleja la respuesta óptima ante el shock
- Asumamos que $(y_{t-1}, \pi_{t-1}) = (0, 0)$ y $y_t^n \downarrow$
- De la curva AS, el efecto directo del shock es incrementar π_t
- El Banco Central puede en principio estabilizar completamente π_t via una política monetaria contractiva... pero al hacer esto llevará y_t **debajo** de su target $\bar{y}$
- Hay un **policy tradeoff**, que viene del hecho de que los shocks AS empujan la inflación π_t y y_t en direcciones opuestas (distinto de AD shocks)

2. Estabilización Optima

- Considerando la forma cuadrática de la función de pérdida, la política óptima balancea entre la inflación alta π_t y el menor y_t cuando y_t^n cae

- Formalmente, dado que $\pi_t = \Omega\pi_{t-1} - \Omega\kappa y_t^n$, con $\mathrm{d}y_t^n < 0$ tenemos:

$$\mathrm{d}\pi_t = -\Omega\kappa \mathrm{d}y_t^n > 0$$

- Entonces, de la curva AS tenemos

$$\mathrm{d}\pi_t = \kappa(\mathrm{d}y_t - \mathrm{d}y_t^n)$$

$$\Rightarrow \mathrm{d}y_t = (1-\Omega)\,\mathrm{d}y_t^n < 0$$

- El Banco Central implementa una política monetaria contractiva para mitigar las presiones inflacionarias al costo de una recesión

2. Estabilización Optima

- ¿Qué ocurre cuando $\beta > 0$?

- Parecido al caso anterior con la excepción:

$$\Omega = \frac{1}{2\beta}\left[1+\beta+\frac{\kappa^2}{\lambda}-\sqrt{\left(1+\beta+\frac{\kappa^2}{\lambda}\right)^2-4\beta}\right]$$

- β reduce Ω, por la misma razón que para la velocidad óptima de desinflación

2. Estabilización Optima

- De nuevo, podemos computar la curva OP que reemplaza la curva AD

- Empezamos con:

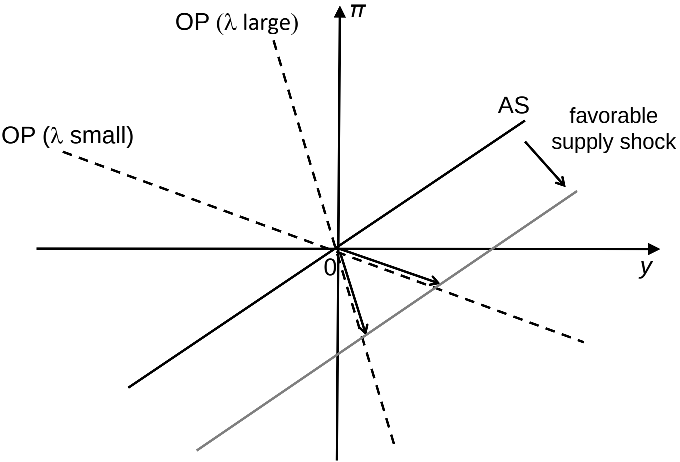
$$\textbf{Estabilización Optima}: \pi_t = \Omega\pi_{t-1} - \kappa\Omega y_t^n$$
$$\textbf{AS}: \pi_t = \pi_{t-1} + \kappa(y_t - y_t^n)$$

  y después eliminamos π_{t-1} para encontrar:

$$\textbf{OP}: \pi_t = -\left(\frac{\Omega\kappa}{1-\Omega}\right) y_t$$

- λ determina la pendiente de la curva OP (via el coeficiente Ω) y por lo tanto la respuesta óptima de política monetaria ante el AS shock

2. Estabilización Optima



2. Estabilización Optima

- ¿Cuan eficiente es la curva MP para estabilizar los shocks macroeconómicos?
- Computamos el valor de r_t implicito por la política óptima:

$$\left.\begin{array}{l} \textbf{IS} : r_t = \bar{r} - \frac{y_t - \theta_t}{\sigma} \\ \textbf{OP} : y_t = -\left(\frac{1-\Omega}{\kappa\Omega}\right)\pi_t \end{array}\right\} \Rightarrow r_t = \bar{r} + \left(\frac{1-\Omega}{\sigma\kappa\Omega}\right)\pi_t + \frac{\theta_t}{\sigma}$$

- La curva MP replica la respuesta óptima ante AS shocks; de hecho, el análisis de política óptima nos dice que γ se debe fijar a:

$$\gamma^* = \frac{1-\Omega}{\sigma\kappa\Omega} \geq 0$$

- Pero la curva MP no produce la respuesta óptima ante un **AD shock**: implica demasiado **gradualismo**
- Podrían existir buenas razones para el gradualismo (e.g. estabilidad de precios de activos, información imperfecta,...), no tomados en consideración en este análisis

Política Monetaria Optima con Tradeoffs

- En respuesta a un cost-push shock, la política óptima implica dejar caer al producto caer por debajo de su valor eficiente y a la inflación estar por sobre su valor óptimo.

- Si bien se puede lograr la estabilización completa de la inflación en un período esto no es óptimo ya que induciría fuertes pérdidas del producto

- Esta política de permitir inflación distinta de la óptima en la transición convergiendo a la inflación objetivo después de ciertos periodos ayuda a racionalizar objetivos de inflación flexibles (**Flexible Inflation/Price Level Targeting**). El Banco Central permanece comprometido a estabilizar la inflación en el mediano plazo.