

سوال 1

مسئله

در این تمرین، دو زیرفضا در یک فضای برداری داده شده‌اند. هدف این است که:

۱. اشتراک دو زیرفضا را بیابیم:

تعیین کنید کدام بردارها همزمان عضو هر دو زیرفضا هستند (یعنی بردارهایی که در W_1 و W_2 قرار دارند).

۲. پایه‌ی اشتراک را استخراج کنید:

یک مجموعه‌ی خطی مستقل از بردارها به دست آورید که کل اشتراک $W_1 \cap W_2$ را تولید می‌کند (یعنی یک پایه برای این اشتراک).

۳. الگوریتم گرام-اشمیت را اجرا کنید:

از الگوریتم گرام-اشمیت استفاده کنید تا از پایه‌ی استخراج شده، یک پایه‌ی متعامد (یا متعامد نرمال) برای $W_1 \cap W_2$ به دست آورید.

ورودی

در ورودی ابتدا یک عدد d داده می‌شود که بعد فضای داده شده است. سپس در خط بعد دو عدد m و n داده می‌شود که بیانگر تعداد بردارها در دو زیرفضا است. در $m + n$ خط بعدی نیز در هر خط یک بردار ورودی داده می‌شود که m تای اول مربوط به W_1 است و n تای بعدی مربوط به W_2 است.

خروجی

در خروجی مجموعه پایه متعامد دو زیرفضا را چاپ کنید که در هر ستون یکی از پایه‌ها را نشان دهید. اگر دو زیرفضا اشتراکی نداشتند عدد صفر را چاپ کنید.

مثال

ورودی نمونه 1

4
2 2
1 0 1 1
0 1 1 0
1 1 2 1
0 1 1 0

خروجی نمونه 1

-0.3440 0.5307
-0.4213 -0.6500
-0.7654 -0.1193
-0.3440 0.5307

ورودی نمونه 2

3
2 2
1 0 0
2 0 0
0 1 0
0 3 0

خروجی نمونه 2

0

سوال 2

- محدودیت زمان: ۲ ثانیه
- محدودیت حافظه: ۲۵۶ مگابایت

در این مسئله هدف ما یافتن پایه‌ای orthonormal برای چهار زیرفضای اصلی ماتریس دلخواه M و ابعاد این زیرفضاها است. (فضاهای ستونی و پوچ M و M^T).

از آنجایی که برای هر زیرفضا ممکن است بی‌شمار پایه orthonormal وجود داشته باشد، باید به ازای هر Q محاسبه‌شده، که ستون‌های آن پایه‌ای orthonormal برای زیرفضای مدنظر هستند، ماتریس QQ^T را به‌عنوان خروجی ارائه کنیم. (می‌توان نشان داد که اگر ستون‌های Q و Q' پایه‌هایی orthonormal برای زیرفضایی یکسان باشند، آنگاه رابطه $QQ^T = Q'Q'^T$ برقرار است).

ورودی:

در خط اول، دو عدد m و n با فاصله از یکدیگر آمده‌اند که ابعاد ماتریس M را نشان می‌دهند. در هر یک از m خط بعدی، n عدد با فاصله از یکدیگر آمده‌اند که عناصر سطرهای M را مشخص می‌کنند.

خروجی:

برای هر یک از چهار زیرفضای اصلی $N(M)$ ، $C(M)$ ، $N(M^T)$ و $C(M^T)$ ، به ترتیب موارد زیر را چاپ کنید:

۱. بُعد زیرفضای مربوطه.
 ۲. ماتریس QQ^T که Q پایه‌ای orthonormal برای آن زیرفضاست.
- تمام مقادیر ماتریس‌ها باید با دقت سه رقم اعشار نمایش داده شوند.

مثال:

ورودی نمونه 1:

3 3

6187 -1755 302

8621 -1926 -3421

-2707 4980 1935

خروجی نمونه 1:

3

1.000 0.000 0.000

0.000 1.000 0.000

0.000 0.000 1.000

0

0.000 0.000 0.000

0.000 0.000 0.000

0.000 0.000 0.000

3

1.000 0.000 0.000

0.000 1.000 0.000

0.000 0.000 1.000

0

0.000 0.000 0.000

0.000 0.000 0.000

0.000 0.000 0.000

ورودی نمونه 2:

3 2

3634 4424

-460 -560

-4370 -5320

خروجی نمونه 2:

1

0.406 -0.051 -0.488

-0.051 0.007 0.062

-0.488 0.062 0.587

1

0.597 -0.490

-0.490 0.403

1

0.403 0.490

0.490 0.597

2

0.594 0.051 0.488

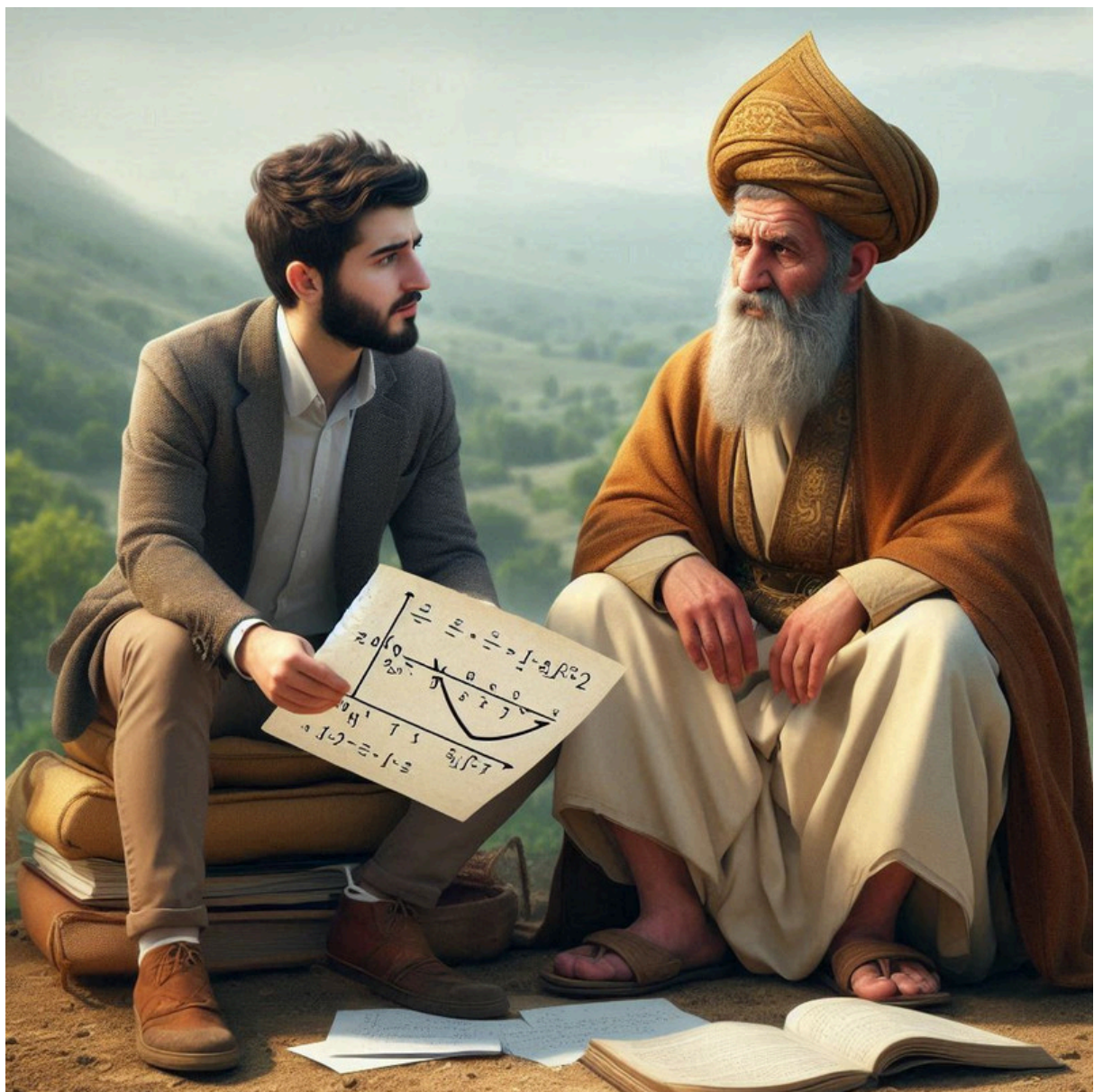
0.051 0.993 -0.062

0.488 -0.062 0.413

سوال 3

کیکاووس که آنقدر حواس پرت است که یادش رفته در مسابقهٔ انتگرال گیری امسال ثبت نام کند، ادعا دارد که میتواند در مسابقهٔ سال بعد مقام اول را کسب کند. برای همین به پیش دوستش ارشیا رفته، و از او سوال انتگرال میگیرد. ارشیا هم چون کل روزش را در حال مطالعه جبرخطی بوده، از کیکاووس میخواهد تا به ازای a و b داده شده، انتگرال زیر را کمینه کند:

$$\int_a^b (\ln(t) - x - yt - zt^2)^2 dt$$



حال، کیکاووس پس از کلی فکر کردن و حل کردن سؤال به این فکر افتاده است که اگر به جای $t^2, t, 1$ چندجمله‌ای‌های دلخواه خودش را می‌گذاشت مینیمم انتگرال بالا چه میشد. به کیکاووس کمک کنید به جواب سؤال خود برسد. البته دقت کنید باید از دستورات ساده کتابخانه numpy مانند جمع و تفریق و ضرب بردار و ماتریس استفاده کنید. حق ندارید از دستورات پیشرفته تر مانند واریانس ماتریس استفاده کنید. همچنین، توصیه میشود برای دقت بیشتر محاسبات از np.float128 استفاده کنید.

ورودی

در خط اول ورودی عدد n می‌آید که نشان دهنده تعداد چندجمله‌ای‌ها است.

$$0 \leq n \leq 15$$

در هر خط بعدی یک چندجمله‌ای $P_i(x)$ داده میشود که هر کدام به فرمت زیر است:

$$(+/-)a_1x^{b_1} (+/-)a_2x^{b_2} \dots (+/-)a_kx^{b_k}$$

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_k \geq 0 \quad a \in \mathbb{R}$$

$$b_1 > b_2 > \dots > b_k \geq 0 \quad b_j \in \mathbb{Z}$$

برای ورودی گرفتن چندجمله‌ای می‌توانید از regex زیر استفاده کنید:

```
1 | import re
2 | p = [(float(a), int(b)) for a, b in re.findall(r'([+-]\d+(?:\.\d+)?)*\^(\d+)', s)]
```

خروجی

کیکاووس پس از بررسی فراوان متوجه شد که $\int_0^1 \ln(x)^2 dx = 2$ و $\forall m \in \mathbb{Z}^{\geq 0} \int_0^1 t^m \ln(t) dt = -\frac{1}{(m+1)^2}$ حال، از آنجا که کیکاووس حوصله فکرکردن بیشتر روی سؤال را ندارد و میخواهد باقی زمانش را به اداره کشور بپردازد به او کمک کنید که به جوابش برسد.

برنامه شما باید در یک خط، کمینه مقدار انتگرال

$$\int_0^1 (\ln(x) - \alpha_1 p_1(x) - \alpha_2 p_2(x) - \dots - \alpha_n p_n(x))^2 dx$$

را به صورت fixed point و با سه رقم اعشار چاپ کند.

مثال

ورودی نمونه ۱

```
3
+1*x^2
+1*x^1
+1*x^0
```

خروجی نمونه ۱

```
0.111
```

در این حالت کمینه انتگرال زمانی رخ می‌دهد که $\alpha_1 = -5, \alpha_2 = 8, \alpha_3 = -\frac{10}{3}$ باشند، بنابراین کمینه مقدار انتگرال برابر $0.111 \approx \frac{1}{9}$ است.

ورودی نمونه ۲

```
10
+1*x^100
+1*x^99
+1*x^98
+1*x^97
+1*x^96
+1*x^95
+1*x^94
+1*x^93
+1*x^92
+1*x^91
```


خروجی نمونه ۲

1.999

ورودی نمونه ۳

7
-99.652*x^143+28.759*x^304+22.102*x^143
+20.271*x^388-54.965*x^96+47.388*x^96
+35.146*x^196+91.355*x^377-28.201*x^196
+25.051*x^377-47.328*x^388+81.997*x^304
-13.091*x^143-25.812*x^377+24.273*x^304
+19.272*x^304+79.834*x^388-50.219*x^388
+83.339*x^388+44.149*x^388-66.461*x^377

خروجی نمونه ۳

1.994