Devoir 1
IFT 3155/6155

Mathieu Lemire

11 Septembre 2025

Exercice 2.2.2

Dans la *base de polarisation standard*, les photons polarisés horizontalement et diagonalement à 45^o sont des décrit comme suit:

- $|\leftrightarrow\rangle = 1\,|\leftrightarrow\rangle + 0\,|\updownarrow\rangle = (\cos 0°)\,|\leftrightarrow\rangle + (\sin 0°)\,|\updownarrow\rangle$
- $|\swarrow\!\!\nearrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\leftrightarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\updownarrow\rangle = (\cos 45°)\,|\leftrightarrow\rangle + (\sin 45°)\,|\updownarrow\rangle$

En général, un photon polarisés linéairement avec angle α s'écrit comme suit:

$$|\alpha\rangle = (\cos\alpha)\,|\leftrightarrow\rangle + (\sin\alpha)\,|\updownarrow\rangle$$

Nous avons en particulier:

- $|0°\rangle = |\leftrightarrow\rangle$
- $|45°\rangle = |\swarrow\!\!\nearrow\rangle = |+\rangle$
- $|-45°\rangle = \big(\cos(-45°)\big)\,|\leftrightarrow\rangle + \big(\sin(-45°)\big)\,|\updownarrow\rangle = |\nwarrow\!\!\searrow\rangle = |-\rangle$

On peut modéliser le passage du photon dans le filtre polarisateur orienté avec angle ϕ comme une fonction ou *porte* qui prend en entré ou *laisse passer* un photon polarisé linéairement avec angle α:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_\phi\big(\,|\alpha\rangle\,\big) &= \mathsf{F}_\phi\Big(\big(\cos(\alpha)\big)\,|\leftrightarrow\rangle + \big(\sin(\alpha)\big)\,|\updownarrow\rangle\Big) \\
&= \mathsf{F}_\phi\big(\cos(\alpha)\,|\leftrightarrow\rangle\,\big) + \mathsf{F}_\phi\big(\sin(\alpha)\,|\updownarrow\rangle\,\big) \\
&= \big(\cos(\alpha-\phi)\big)\,|\leftrightarrow\rangle + \big(\sin(\alpha-\phi)\big)\,|\updownarrow\rangle
\end{aligned}$$

Le photon polarisé linéairement avec angle α traverse le filtre polarisateur orienté avec angle ϕ avec probabilité $|\cos(\alpha - \phi)|^2$ et est re-polarisé à angle ϕ. Il est bloqué avec probabilité $|\sin(\alpha - \phi)|^2$

Premièrement, en prenant le cas dont le filtre polarisateur est orienté à un angle $\phi = 0$, on a:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{0^\circ}\big(\,|{\leftrightarrow}\rangle\,\big) &= \big(\cos(0^\circ - 0^\circ)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(0^\circ - 0^\circ)\big)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= (\cos 0^\circ)\,|{\leftrightarrow}\rangle + (\sin 0^\circ)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= 1\,|{\leftrightarrow}\rangle + 0\,|{\updownarrow}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{0^\circ}\big(\,|{\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow}\rangle\,\big) &= \big(\cos(45^\circ - 0^\circ)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(45^\circ - 0^\circ)\big)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= (\cos 45^\circ)\,|{\leftrightarrow}\rangle + (\sin 45^\circ)\,|{\updownarrow}\rangle
\end{aligned}$$

Puisque le photon $|{\leftrightarrow}\rangle$ passe tout le temps[1], il est naturel de décider qu'elle était la polarisation du photon projeter comme:

- H si le photon passe
- D si le photon ne passe pas

On a $p_H = |\sin 0^\circ|^2 = 0$, car pour toute entré $|{\leftrightarrow}\rangle$ l'appareil décidera H car $|{\leftrightarrow}\rangle$ passe toujours à travers le filtre polarisateur. Si l'entrée est $|{\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow}\rangle$, on se trompe lorsque le photon passe, avec probabilité $p_D = |\cos 45^\circ|^2 = 0.5$. Donc, $p_{err} = 0.5$. Ce qui n'est pas très bon...

On retrouve le même problème si on oriente le filtre polarisateur à un angle de 45°:

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{45^\circ}\big(\,|{\leftrightarrow}\rangle\,\big) &= \big(\cos(0^\circ - 45^\circ)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(0^\circ - 45^\circ)\big)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= \big(\cos(-45^\circ)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(-45^\circ)\big)\,|{\updownarrow}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{45^\circ}\big(\,|{\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow}\rangle\,\big) &= \big(\cos(45^\circ - 45^\circ)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(45^\circ - 45^\circ)\big)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= \cos(0^\circ)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \sin(0^\circ)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= 1\,|{\leftrightarrow}\rangle + 0\,|{\updownarrow}\rangle
\end{aligned}$$

Donc toutes les entrés $|{\swarrow\!\!\!\!\!\nearrow}\rangle$ passera à travers le filtre polarisateur, il s'en suit qu'on décidera:

- D si le photon passe
- H si le photon ne passe pas

Dans ce cas, $p_{\mathsf{D}} = |\sin 0^\circ|^2 = 0$, $p_{\mathsf{H}} = |\cos(-45^\circ)|^2 = 0.5$ et $p_{\mathsf{err}} = 0.5$

[1]Car on suppose le scénario étant parfait

On pourrait croire que pour minimiser l'erreur sur la pire entrée, on devrait placer le filtre polarisateur à un angle situé à mi-chemin entre les deux angle de polarisation des deux photons, soit $\frac{45°+0°}{2} = 22.5°$. Vérifions mathématiquement quelle serait cette angle en trouvant l'angle ϕ tel que la probabilité que $|{\leftrightarrow}\rangle$ passe soit égale à la probabilité que $|{\nearrow\!\!\!\swarrow}\rangle$ soit bloqué.

$$\begin{aligned}
\cos^2(0° - \phi) &= \sin^2(45° - \phi) \\
1 - \sin^2(-\phi) &= \sin^2(45° - \phi) \\
1 &= \sin^2(-\phi) + \sin^2(45° - \phi) \\
1 &= \frac{1 - \cos(-2\phi)}{2} + \frac{1 - \cos(2(45° - \phi))}{2} \\
1 &= 1 - \frac{\cos(-2\phi)}{2} - \frac{\cos(90° - 2\phi))}{2} \\
0 &= \cos(-2\phi) + \cos(90° - 2\phi)) \\
0 &= \cos(-2\phi) + \sin(2\phi) \\
0 &= \cos(2\phi) + \sin(2\phi) \\
0 &= 1 + \tan(2\phi) \qquad \text{Puisque } \cos(2\phi) \neq 0 \\
\tan^{-1}(-1) &= 2\phi \\
-45° &= 2\phi \\
\phi &= -22.5°
\end{aligned}$$

Avec l'angle $\phi = -22.5°$ on a

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{-22.5°}\big(\,|{\leftrightarrow}\rangle\,\big) &= \big(\cos(0° - (-22.5°))\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(0° - (-22.5°))\big)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= \big(\cos(22.5°)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(22.5°)\big)\,|{\updownarrow}\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathsf{F}_{-22.5°}\big(\,|{\nearrow\!\!\!\swarrow}\rangle\,\big) &= \big(\cos(45° - (-22.5°))\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(45° - (-22.5°))\big)\,|{\updownarrow}\rangle \\
&= \big(\cos(67.5°)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(\sin(67.5°)\big)\,|{\updownarrow}\rangle
\end{aligned}$$

Donc, $|{\leftrightarrow}\rangle$ passe avec probabilité $|\cos(22.5°)|^2 \approx 0.85355$ et $|{\nearrow\!\!\!\swarrow}\rangle$ passe avec probabilité $|\cos(67.5)|^2 \approx 0.14645$. La règle de décision minimisant les erreurs seraient:

- H si le photon passe
- D si le photon ne passe pas

$p_{\mathsf{H}} = |\sin(22.5°)|^2 \approx 0.14645 \approx |\cos(67.5°)|^2 = p_{\mathsf{D}}$ et donc $p_{\mathsf{err}} \approx 0.14645$

Voici un dessin de l'appareil

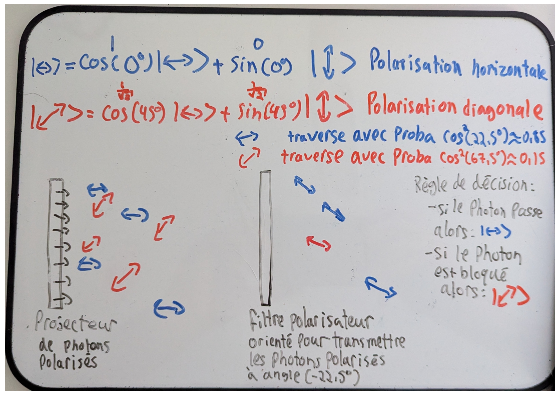

Figure 1: Représentation de l'appareil

Exercice 2.2.3

Une manière de savoir à coup sûr si le photon polarisé linéairement est $|\leftrightarrow\rangle$ ou $|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle$ est de choisir un angle parallèle à l'un de ces photos et décider l'autre photon si le photon ne passe pas.

Par exemple, pour $\phi = 0°$, on est certain à $|\sin 45°|^2 = 0.5$ du temps que c'est un $|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle$ lorsqu'un $|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle$ est projetée vers le filtre polarisateur. On décide donc de cette manière:

- H jamais
- D si le photon ne passe pas
- ? si le photon passe

Dans ce cas, $q_{\mathsf{H}} = 1$ et $q_{\mathsf{D}} = 1 - 0.5 = 0.5$ et $p_{\mathsf{cond}} = 1 - 1 = 0$. Il faut faire mieux!

Une autre manière serait de choisir un angle orthogonal à l'un des photons polarisés et de décider l'autre photon si le photon passe.

Par exemple, avec $\phi = 90°$, $|\leftrightarrow\rangle$ ne passe jamais mais $|\swarrow\!\!\!\nearrow\rangle$ passe avec probabilité $|\cos(-45°)|^2 = 0.5$. On décidera dans ce cas de cette manière:

- H jamais
- D Si le photon passe
- ? si le photon ne passe pas

On se retrouve avec une situation similaire, $q_{\mathsf{H}} = 1$ et $q_{\mathsf{D}} = 1 - 0.5 = 0.5$ et $p_{\mathsf{cond}} = 1 - 1 = 0$. On ne serait pas plus avancé si on choisit un angle $\phi = 45°$ ou $\phi = -45°$.

Changeons d'approche et restons dans un cadre purement théorique. Si on utilise une porte W qui prend en entré un photon polarisé à angle α et dont la sortie est décrit comme suit:

$$\mathsf{W}(|\alpha\rangle) = \begin{cases} \big(|\cos(\alpha)|^2 - |\sin(\alpha)|^2\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle \\ \Big(1 - \big(|\cos(\alpha)|^2 - |\sin(\alpha)|^2\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\,|{\updownarrow}\rangle \end{cases}$$

Ou plus simplement par identité trigonométrique:

$$\mathsf{W}(|\alpha\rangle) = \begin{cases} \big(\cos(2\alpha)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle \\ \big(1 - |\cos(2\alpha)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,|{\updownarrow}\rangle \end{cases}$$

La sortie vérifier belle et bien la condition de normalisation:

$$\begin{aligned} |\cos(2\alpha)|^2 + \left|(1 - |\cos(2\alpha)|^2)^{\frac{1}{2}}\right|^2 &= |\cos(2\alpha)|^2 + (1 - |\cos(2\alpha)|^2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

On aurait donc pour $\alpha = 0°$ et $\alpha = 45°$:

$$\begin{aligned} \mathsf{W}(|0°\rangle) &= \big(\cos(0°)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(1 - |\cos(0°)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,|{\updownarrow}\rangle \\ &= 1\,|{\leftrightarrow}\rangle + 0\,|{\updownarrow}\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{W}(|45°\rangle) &= \big(\cos(2 \times 45°)\big)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(1 - |\cos(2 \times 45°)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,|{\updownarrow}\rangle \\ &= \cos(90°)\,|{\leftrightarrow}\rangle + \big(1 - |\cos(90°)|^2\big)^{\frac{1}{2}}\,|{\updownarrow}\rangle \\ &= 0\,|{\leftrightarrow}\rangle + 1\,|{\updownarrow}\rangle \end{aligned}$$

Après la sortie de la porte, on remarque que $\mathsf{W}(|0°\rangle)$ et $\mathsf{W}(|45°\rangle)$ sont orthogonale. Du coup, on pourrait les distinguer avec certitude. Dans ce cas si on pouvait utiliser une telle porte, on aurait $q_{\mathsf{H}} = 0$ et $q_{\mathsf{D}} = 0$ et $p_{\mathsf{cond}} = 1 - 0 = 1$

Je me doute bien que ce n'est pas l'approche que vous demandiez mais je me suis dit que si on pouvait *orthogonaliser* les états, on pourrait les distinguer à coup sur.

Voici une petite animation de la porte W légèrement modifié