STT 3260
Devoir 3

Mathieu Lemire

17 Octobre 2025

```r
library(survival)
```

Exercice 1

a)

Estimations des paramètres pour le groupe 0

Pour le groupe 0, on a

```r
data <- read.table("C:/Users/14385/Desktop/A25/STT 3260/Devoirs/Devoir 3/kidney.txt",
                   header=TRUE)

groupe_0_weib <- survreg(Surv(time, delta) ~ 1,
                         data = data[data$type == 2,],
                         dist = "weibull")
summary(groupe_0_weib)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     2, ], dist = "weibull")
##             Value Std. Error    z       p
## (Intercept) 5.411      1.024 5.29 1.3e-07
## Log(scale)  0.616      0.265 2.32    0.02
##
## Scale= 1.85
##
## Weibull distribution
## Loglik(model)= -51.6   Loglik(intercept only)= -51.6
## Number of Newton-Raphson Iterations: 7
## n= 76
```

Estimation de α_0

On a

$$\log(\hat{\sigma}_0) = 0.616 \implies \hat{\sigma}_0 = \exp(0.616) \approx 1.852$$

Comme $\sigma = \dfrac{1}{\alpha}$, on a $\alpha = \dfrac{1}{\sigma}$. On calcule $\hat{\alpha}_0$

$$\hat{\alpha}_0 = \frac{1}{\hat{\sigma}_0} = \frac{1}{1.852} \approx 0.54$$

```
mu_0 <- unname(groupe_0_weib$coefficients)
sigma_0 <- groupe_0_weib$scale
alpha_0 <- 1/sigma_0
alpha_0
```

```
## [1] 0.540188
```

Écart type de $\hat{\alpha}_0$

On doit utiliser la méthode delta:

$$\widehat{Var(g(\hat{\beta}))} = (g'(\hat{\beta}))^2 Var(\hat{\beta}) \implies \sqrt{\widehat{Var(g(\hat{\beta}))}} = \left|g'(\hat{\beta})\right| \sqrt{Var(\hat{\beta})}$$

Puisque la relation entre $\log(\sigma)$ et α est $\alpha = g(\log(\sigma)) = \exp(-\log(\sigma))$, on a :

$$\frac{\hat{\alpha}}{d(\log\hat{\sigma})} = -\exp(-\log(\hat{\sigma}))$$

$$\begin{aligned}
\widehat{SE}(\hat{\alpha}_0) = \sqrt{\widehat{Var}(\hat{\alpha}_0)} &= \left|\frac{\hat{\alpha}_0}{d(\log\hat{\sigma}_0)}\right| \sqrt{Var(\log\hat{\sigma}_0)} \\
&= \left|-\exp(-\log(\hat{\sigma}_0))\right| \sqrt{Var(\log\hat{\sigma}_0)} \\
&= \left|-\hat{\alpha}_0\right| \sqrt{Var(\log\hat{\sigma}_0)} \\
&\approx \left|-0.54\right| \times 0.265 \\
&= 0.1431
\end{aligned}$$

Estimation de λ_0

La relation entre μ et λ est $\mu = \dfrac{-\log(\lambda)}{\alpha} \implies \lambda = \exp(-\alpha\mu)$. Puisque $\hat{\mu}_0 = 5.411$, on a

$$\hat{\lambda}_0 = \exp(-\hat{\alpha}_0\hat{\mu}_0) = \exp(-0.54 \times 5.411) \approx 0.0538$$

```
lambda_0 <- exp(-alpha_0 * mu_0)
lambda_0 <- unname(lambda_0)
lambda_0
```

```
## [1] 0.05377752
```

Écart type de $\hat{\lambda}_0$

On pose $\eta = \log(\sigma)$, ce qui implique que $\lambda = \exp\left(-\frac{\mu}{\sigma}\right) = \exp\left(-\mu \exp(-\log \mu)\right) = \exp\left(-\mu e^{-\eta}\right)$.

On calcule les dérivées de $\lambda = g(\mu, \eta)$:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = -e^{-\eta} \exp(-\mu e^{-\eta}) = -\lambda e^{-\eta} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} = \mu e^{-\eta} \exp(-\mu e^{-\eta}) = \lambda \mu e^{-\eta}$$

On calcule la variance estimée de $\hat{\lambda}$

$$\widehat{Var(\hat{\lambda})} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\mu}} & \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\eta}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Var(\hat{\mu}) & Cov(\hat{\mu}, \hat{\eta}) \\ Cov(\hat{\mu}, \hat{\eta}) & Var(\hat{\eta}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\mu}} \\ \frac{\partial \hat{\lambda}}{\partial \hat{\eta}} \end{pmatrix}$$

```
eta_0 <- log(sigma_0)
vecteur_der_0 <-c(-lambda_0*exp(-eta_0) , lambda_0*mu_0 *exp(-eta_0))
vecteur_der_0
```

```
## [1] -0.02904997  0.15718630
```

```
matrice_var_0 <- groupe_0_weib$var
matrice_var_0
```

```
##             (Intercept) Log(scale)
## (Intercept)   1.0478158 0.22738874
## Log(scale)    0.2273887 0.07022616
```

```
var_lamda_0 <- as.numeric(t(unname(vecteur_der_0)) %*% unname(matrice_var_0) %*% unname(vecteur_der_0))
var_lamda_0
```

```
## [1] 0.0005427366
```

Donc $\widehat{Var(\hat{\lambda}_0)} \approx 0.0005427$ et l'écart type estimé est

```
std_err_lambda_0 <- as.numeric(sqrt(var_lamda_0))
std_err_lambda_0
```

```
## [1] 0.02329671
```

Donc $\widehat{SE(\hat{\lambda}_0)} \approx 0.0233$

Estimations des paramètres pour le groupe 1

```
groupe_1_weib <- survreg(Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type == 1,], dist = "weibull")
summary(groupe_1_weib)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     1, ], dist = "weibull")
##              Value Std. Error    z      p
## (Intercept)  3.194      0.180 17.7 <2e-16
## Log(scale)  -0.467      0.203 -2.3  0.021
##
## Scale= 0.627
##
## Weibull distribution
## Loglik(model)= -65   Loglik(intercept only)= -65
## Number of Newton-Raphson Iterations: 6
## n= 43
```

Estimation de α_1

On a

$$\log(\hat{\sigma}_1) = -0.467 \implies \hat{\sigma}_1 = \exp(-0.467) \approx 0.627 \implies \hat{\alpha}_1 = \frac{1}{\hat{\sigma}_1} = \frac{1}{0.627} \approx 1.595$$

```r
mu_1 <- unname(groupe_1_weib$coefficients)
sigma_1 <- groupe_1_weib$scale
alpha_1 <- 1/sigma_1
alpha_1
```

```
## [1] 1.594824
```

Écart type de $\hat{\alpha}_1$

$$\begin{aligned}\widehat{SE(\hat{\alpha}_1)} &= \left| -\hat{\alpha}_1 \right| \sqrt{Var(\log \hat{\sigma}_1)} \\ &\approx \left| -1.595 \right| \times 0.203 \\ &= 0.323785\end{aligned}$$

Estimation de λ_1

Puisque $\hat{\mu}_1 = 3.194$, on a

$$\hat{\lambda}_1 = \exp(-\hat{\alpha}_1 \hat{\mu}_1) = \exp(-1.595 \times 3.194) \approx 0.00613$$

```r
lambda_1 <- exp(-alpha_1 * mu_1)
lambda_1 <- unname(lambda_1)
lambda_1
```

```
## [1] 0.006135598
```

Écart type de $\hat{\lambda}_1$

On calcule en premier les dérivés partielles de $\hat{\lambda}_1$ par rapport à η_1 et par rapport à μ_1

```
eta_1 <- log(sigma_1)
vecteur_der_weib_1 <-c(-lambda_1*exp(-eta_1) , lambda_1*mu_1 *exp(-eta_1))
vecteur_der_weib_1
```

```
## [1] -0.009785197  0.031252575
```

La matrice de covariance $Cov(\hat{\mu}, \hat{\eta})$ est

```
matrice_var_1 <- groupe_1_weib$var
matrice_var_1
```

```
##             (Intercept) Log(scale)
## (Intercept)  0.03258009 0.01616489
## Log(scale)   0.01616489 0.04102682
```

On calcule à présent $Var(\hat{\lambda}_1)$

```
var_lambda_1 <- as.numeric(t(vecteur_der_weib_1) %*% matrice_var_1 %*% vecteur_der_weib_1)
var_lambda_1
```

```
## [1] 3.330455e-05
```

On calcule maintenant l'écart type

```
std_err_lambda_1 <- sqrt(var_lambda_1)
std_err_lambda_1
```

```
## [1] 0.005771009
```

On a $\widehat{SE(\hat{\lambda}_1)} = 0.00577$

b)

On teste l'hypothèse que $\alpha = 1$ pour chacun des groupe. On pose

$$H_0 : \alpha = 1 \qquad H_1 : \alpha \neq 1$$

Mais puisqu'on a $\alpha = \frac{1}{\sigma} \implies \log(\alpha) = -\log(\sigma)$ et pour $\alpha = 1 \implies \log(\sigma) = 0$ On avait déjà posé plus haut que $\eta = \log(\sigma)$. Nos hypothèses sont alors:

$$H_0 : \eta = 0 \qquad H_1 : \eta \neq 0$$

Tests pour le groupe 0

On rappel la sortie:

```r
summary(groupe_0_weib)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     2, ], dist = "weibull")
##             Value Std. Error    z       p
## (Intercept) 5.411      1.024 5.29 1.3e-07
## Log(scale)  0.616      0.265 2.32    0.02
##
## Scale= 1.85
##
## Weibull distribution
## Loglik(model)= -51.6   Loglik(intercept only)= -51.6
## Number of Newton-Raphson Iterations: 7
## n= 76
```

Test de Wald

La statistique de Wald est déjà calculer, $W = 2.32$ et la p-valeur associé à la statistique de Wald pour η est de $0.02 < 0.05$. On peut rejetter l'hypothèse nulle au niveau 5% mais nous ne pouvons pas rejetter l'hypothèse nulle au niveau 1%

Test du rapport de vraisemblance

Pour $\alpha = 1$ la distribution Weibull(α, λ) suit une distribution Exponentielle(λ). On peut faire l'ajustement avec l'exponentielle et faire le test du rapport de vraisemblance puisque l'Exponentielle(λ) est emboîté dans la Weibull$(\alpha = 1, \lambda)$

```r
groupe_0_exp <- survreg( Surv(time, delta) ~1,
                         data = data[data$type == 2,],
                         dist = "exp")
summary(groupe_0_exp)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     2, ], dist = "exp")
##             Value Std. Error    z      p
## (Intercept) 4.011      0.302 13.3 <2e-16
##
## Scale fixed at 1
##
## Exponential distribution
## Loglik(model)= -55.1   Loglik(intercept only)= -55.1
## Number of Newton-Raphson Iterations: 6
## n= 76
```

On calcule la statistitque de test:

$$\Lambda = -2[\ell(\alpha_0 = 1, \hat{\lambda}_0) - \ell(\hat{\alpha}_0, \hat{\lambda}_0)] \approx -2[-55.1 - (-51.6)] = 7$$

Nous avons un paramètre de différent entre les modèles donc on calcule la valeur-p avec une χ^2_1. La valeur-p est

$$\mathbb{P}(\chi^2_1 \geq 7) = 0.008150972$$

```
valeur_p_rap_vrai_groupe_0 <-pchisq(7,1,lower.tail = FALSE)
names(valeur_p_rap_vrai_groupe_0) <- "Valeur-p"
valeur_p_rap_vrai_groupe_0
```

```
##    Valeur-p
## 0.008150972
```

On rejette l'hypothèse nulle au niveau 1%

Tests pour le groupe 1

On rappel la sortie:

```
summary(groupe_1_weib)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     1, ], dist = "weibull")
##              Value Std. Error    z      p
## (Intercept)  3.194      0.180 17.7 <2e-16
## Log(scale)  -0.467      0.203 -2.3  0.021
##
## Scale= 0.627
##
## Weibull distribution
## Loglik(model)= -65   Loglik(intercept only)= -65
## Number of Newton-Raphson Iterations: 6
## n= 43
```

Test de Wald

La statistique de Wald est donc $W = -2.3$ et la valeur-p associé au test de Wald pour η_1 est valeur-p $= 0.021$. On a les mêmes conclusions que pour le groupe 0, on rejette l'hypothèse nulle au niveau de confiance maximale de 3%.

Test du rapport de vraisemblance

On calcule le modèle exponentielle pour le groupe 1

```
groupe_1_exp <- survreg( Surv(time, delta) ~ 1,
                         data = data[data$type == 1,],
                         dist = "exp")
summary(groupe_1_exp)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     1, ], dist = "exp")
##             Value Std. Error    z      p
## (Intercept) 3.477      0.258 13.5 <2e-16
##
## Scale fixed at 1
##
## Exponential distribution
## Loglik(model)= -67.2   Loglik(intercept only)= -67.2
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 43
```

On calcule la statistitque de test:

$$\Lambda = -2[\ell(\alpha_1 = 1, \hat{\lambda}_1) - \ell(\hat{\alpha}_1, \hat{\lambda}_1)] \approx -2[-67.2 - (-65)] = 4.4$$

La valeur-p est

$$\mathbb{P}(\chi_1^2 \geq 4.4) = 0.008150972$$

```r
pchisq(4.4, 1, lower.tail = FALSE)
```

```
## [1] 0.03593893
```

On rejette l'hypothèse nulle au niveau 5% mais encore une fois on ne peut la rejetter au niveau 1%.

d)

On veut tester si la mise en place du cathérer n'a aucun effet avec Z la variable indicatrice qui vaut 1 si l'individu appartient au groupe 1 et 0 sinon. Puisque dans le modèle on a γZ, on a les hypothèses:

$$H_0 : \gamma = 0 \qquad H_1 : \gamma \neq 0$$

```r
data$Z <- data$type - 1
reg_weib_cov <- survreg(Surv(time=time,event=delta)~Z, data=data, dist="weibull")
summary(reg_weib_cov)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time = time, event = delta) ~ Z, data = data,
##     dist = "weibull")
##             Value Std. Error     z      p
## (Intercept) 3.597      0.339 10.61 <2e-16
## Z           0.623      0.469  1.33   0.18
## Log(scale)  0.129      0.167  0.77   0.44
##
## Scale= 1.14
##
## Weibull distribution
## Loglik(model)= -122   Loglik(intercept only)= -122.9
##  Chisq= 1.93 on 1 degrees of freedom, p= 0.16
## Number of Newton-Raphson Iterations: 7
## n= 119
```

La statistique de Wald pour Z est $W_Z = 1.33$ avec une valeur-p associé $= 0.18$ On ne rejette pas l'hypothèse nulle, même au niveau de signification 15%.

On calcule $h(t|Z)$ pour un modèle de defaillance accéléré Weibull:

$$\begin{aligned} h(t|Z) &= h_o(te^{-\gamma Z})e^{-\gamma Z} \\ &= \alpha\lambda(te^{-\gamma Z})^{\alpha-1}e^{-\gamma Z} \\ &= \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\alpha\gamma Z} \end{aligned}$$

$$h(t|Z=0) = \alpha\lambda t^{\alpha-1} \qquad h(t|Z=1) = \alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\alpha\gamma}$$

Le risque relatif est:

$$RR(t) = \frac{h(t|Z=1)}{h(t|Z=0)} = \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\alpha\gamma}}{\alpha\lambda t^{\alpha-1}} = e^{-\alpha\gamma}$$

Qui ne dépend pas de t

On calcule l'estimation du risque relatif:

$$\widehat{RR} = \exp(-\hat{\alpha}\hat{\gamma}) = \exp\left(-\frac{\hat{\gamma}}{\hat{\sigma}}\right) = \exp\left(-\frac{0.623}{1.14}\right) \approx 0.579$$

Pour construire l'intervalle de confiance pour le risque relatif estimé, il faut utiliser la méthode delta

On réécrit RR en fonction de $\eta = \log(\sigma)$ puisque $\alpha = \exp(-\log(\sigma)) \implies \alpha = \exp(-\eta) \implies RR = \exp(-e^{-\eta}\gamma)$

$$\frac{\partial RR}{\partial \mu} = 0 \qquad \frac{\partial RR}{\partial \gamma} = -e^{-\eta}RR = -\frac{RR}{\sigma} \qquad \frac{\partial RR}{\partial \eta} = e^{-\eta}\gamma RR = \frac{\gamma RR}{\sigma}$$

La matrice de covariance de $(\hat{\mu}, \hat{\gamma}, \hat{\eta})$ est

```r
matrice_cov <- reg_weib_cov$var
dimnames(matrice_cov) <- list(c("mu","gamma","eta"),
                              c("mu","gamma","eta"))
matrice_cov
```

```
##                 mu       gamma        eta
## mu      0.11495310 -0.06486478 0.02831467
## gamma -0.06486478  0.21976245 0.02108246
## eta    0.02831467  0.02108246 0.02792395
```

Le vecteur gradient est

```r
sigma_reg <- reg_weib_cov$scale
gamma_reg <- reg_weib_cov$coefficients[2]
RR <- exp(-gamma_reg/sigma_reg)
vecteur_gradient <- c(0, -RR/sigma_reg, (gamma_reg* RR) / sigma_reg)
names(vecteur_gradient) <- c("Der(RR/mu)", "Der(RR/gamma)", "Der(RR/eta)")
vecteur_gradient
```

```
##    Der(RR/mu) Der(RR/gamma)   Der(RR/eta)
##     0.0000000    -0.5085176     0.3166780
```

```r
variance_RR <- as.numeric(t(vecteur_gradient) %*% matrice_cov %*% vecteur_gradient)
names(variance_RR) <- "Var(RR)"
variance_RR
```

```
##    Var(RR)
## 0.05283867
```

Donc$\widehat{Var}(\widehat{RR}) = 0.0528$

L'intervalle de confiance de 95% pour $\widehat{RR}$ est

```r
cat("\n", "IC de 95% pour RR", "\n")
```

```
##
##  IC de 95% pour RR
```

```r
IC_RR <- RR + c(-1,1) * qnorm(0.975) * sqrt(variance_RR)
names(IC_RR) <- c("IC_inf", "IC_sup")
IC_RR
```

```
##    IC_inf    IC_sup
## 0.1278475 1.0289082
```

Puisque $RR = 0.578$ le groupe 1 est moins à risque en moyenne mais on n'observe pas une différence significative au niveau 95% car 1 est inclue dans l'intervalle de confiance

Le facteur d'accélération est $e^{-\hat{\gamma}} = 0.5364685$

```r
facteur_acc <- exp(-gamma_reg)
names(facteur_acc) <- "Facteur d'accélération"
facteur_acc
```

```
## Facteur d'accélération
##              0.5364685
```

Un intervalle de confiance de 95% pour le facteur d'accélération est

```r
cat("\n", "IC de 95% pour RR", "\n")
```

```
##
##  IC de 95% pour RR
```

```r
IC_gamma_neg <- -gamma_reg + c(-1,1)*qnorm(0.975)*0.469
IC_fac_acc <-  exp(IC_gamma_neg)
names(IC_fac_acc) <- c("IC_inf", "IC_sup")
IC_fac_acc
```

```
##    IC_inf    IC_sup
## 0.2139591 1.3451099
```

Puisque le facteur d'accélération est 0.5364, le temps est accélérer pour le groupe 1 par rapport au groupe 0. Puisque 1 est dans l'intervalle de confiance, on n'observe pas une différence significative au niveau 95%.

Exercice 2

Estimations des paramètres pour le groupe 0

Pour le groupe 0, on a

```
groupe_0_logLogistique <- survreg(Surv(time, delta) ~ 1,
                          data = data[data$type == 2,],
                          dist = "loglogistic")
summary(groupe_0_logLogistique)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     2, ], dist = "loglogistic")
##             Value Std. Error    z       p
## (Intercept) 5.005      0.978 5.12 3.1e-07
## Log(scale)  0.551      0.261 2.11   0.035
##
## Scale= 1.74
##
## Log logistic distribution
## Loglik(model)= -51.4   Loglik(intercept only)= -51.4
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 76
```

Puisque la log-logistique à les même relations entre leurs paramètres que la Weibull on procède de la même façon

```
mu_log_0 <- unname(groupe_0_logLogistique$coefficients)
sigma_log_0 <- groupe_0_logLogistique$scale
alpha_log_0 <- 1/sigma_log_0
names(alpha_log_0) <- "alpha"
alpha_log_0
```

```
##     alpha
## 0.5761436
```

$$
\begin{aligned}
\widehat{SE(\hat{\alpha}_0)} &= \Big| -\hat{\alpha}_0 \Big| \sqrt{Var(\log\hat{\sigma}_0)} \\
&\approx \Big| -0.576 \Big| \times 0.261 \\
&= 0.150336
\end{aligned}
$$

```
lambda_log_0 <- exp(-alpha_log_0 * mu_log_0)
names(lambda_log_0) <- "lambda"
lambda_log_0
```

```
##     lambda
## 0.05591777
```

```r
eta_log_0 <- log(sigma_log_0)
vecteur_der_0 <-c(-lambda_log_0*exp(-eta_log_0) , lambda_log_0*mu_log_0 *exp(-eta_log_0))
names(vecteur_der_0) <- c("der(lambda/mu)", "der(lambda/eta)")
vecteur_der_0
```

```
##  der(lambda/mu) der(lambda/eta)
##     -0.03221667      0.16125975
```

```r
matrice_var_0 <- groupe_0_logLogistique$var
dimnames(matrice_var_0) <- list(c("mu", "eta"), c("mu", "eta"))
matrice_var_0
```

```
##            mu        eta
## mu  0.9572879 0.20682464
## eta 0.2068246 0.06818513
```

```r
var_log_lambda_0 <- as.numeric(t(vecteur_der_0) %*% matrice_var_0 %*% vecteur_der_0)
names(var_log_lambda_0) <- "Var(lambda)"
var_log_lambda_0
```

```
##  Var(lambda)
## 0.0006177043
```

```r
std_err_lambda_log_0 <- sqrt(var_log_lambda_0)
names(std_err_lambda_log_0) <- "SE(lambda)"
std_err_lambda_log_0
```

```
## SE(lambda)
## 0.02485366
```

Estimations des paramètres pour le groupe 1

```r
groupe_1_logLogistique <- survreg(Surv(time, delta) ~ 1,
                         data = data[data$type == 1,],
                         dist = "loglogistic")
summary(groupe_1_logLogistique)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     1, ], dist = "loglogistic")
##              Value Std. Error     z      p
## (Intercept)  2.964      0.200 14.85 <2e-16
## Log(scale)  -0.618      0.206 -3.01 0.0026
##
## Scale= 0.539
##
## Log logistic distribution
## Loglik(model)= -65.2   Loglik(intercept only)= -65.2
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 43
```

```r
mu_log_1 <- unname(groupe_1_logLogistique$coefficients)
sigma_log_1 <- groupe_1_logLogistique$scale
alpha_log_1 <- 1/sigma_log_1
names(alpha_log_1) <- "alpha"
alpha_log_1
```

```
##    alpha
## 1.855738
```

$$
\begin{aligned}
\widehat{SE(\hat{\alpha}_1)} &= \Big| -\hat{\alpha}_1 \Big| \sqrt{Var(\log\hat{\sigma}_1)} \\
&\approx \Big| -1.8557 \Big| \times 0.206 \\
&= 0.38227
\end{aligned}
$$

```r
lambda_log_1 <- exp(-alpha_log_1 * mu_log_1)
names(lambda_log_1) <- "lambda"
lambda_log_1
```

```
##      lambda
## 0.004083069
```

```r
eta_log_1 <- log(sigma_log_1)
vecteur_der_1 <-c(-lambda_log_1*exp(-eta_log_1) , lambda_log_1*mu_log_1 *exp(-eta_log_1))
names(vecteur_der_1) <- c("der(lambda/mu)", "der(lambda/eta)")
vecteur_der_1
```

```
##  der(lambda/mu) der(lambda/eta)
##    -0.007577107     0.022460581
```

```r
matrice_var_1 <- groupe_1_logLogistique$var
dimnames(matrice_var_1) <- list(c("mu", "eta"), c("mu", "eta"))
matrice_var_1
```

```
##             mu        eta
## mu  0.03985497 0.01722003
## eta 0.01722003 0.04223489
```

```r
var_log_lambda_1 <- as.numeric(t(vecteur_der_1) %*% matrice_var_1 %*% vecteur_der_1)
names(var_log_lambda_1) <- "Var(lambda)"
var_log_lambda_1
```

```
##  Var(lambda)
## 1.773351e-05
```

```r
std_err_lambda_log_1 <- sqrt(var_log_lambda_1)
names(std_err_lambda_log_1) <- "SE(lambda)"
std_err_lambda_log_1
```

```
##  SE(lambda)
## 0.004211117
```

Tests de Wald

Les hypothèses sont encore

$$H_0 : \eta = 0 \qquad H_1 : \eta \neq 0$$

Groupe 0

```r
summary(groupe_0_logLogistique)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     2, ], dist = "loglogistic")
##             Value Std. Error    z       p
## (Intercept) 5.005      0.978 5.12 3.1e-07
## Log(scale)  0.551      0.261 2.11   0.035
##
## Scale= 1.74
##
## Log logistic distribution
## Loglik(model)= -51.4   Loglik(intercept only)= -51.4
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 76
```

La statistique de Wald est $W_{\eta_0} = 2.11$ avec la valeur-p associé $= 0.035$. Encore une fois on ne peut pas rejetter l'hypothèse au niveau 1% mais on peut le faire au niveau 5%.

Groupe 1

```r
summary(groupe_1_logLogistique)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time, delta) ~ 1, data = data[data$type ==
##     1, ], dist = "loglogistic")
##              Value Std. Error     z      p
## (Intercept)  2.964      0.200 14.85 <2e-16
## Log(scale)  -0.618      0.206 -3.01 0.0026
##
## Scale= 0.539
##
## Log logistic distribution
## Loglik(model)= -65.2   Loglik(intercept only)= -65.2
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 43
```

La statistique de Wald est $W_{\eta_1} = -3.01$ avec la valeur-p associé $= 0.0026$. On rejette l'hypothèse nulle au niveau 0.5%

d)

On calcule $h(t|Z)$ pour un modele de defaillance accéléré Log-logistique:

$$\begin{aligned} h(t|Z) &= h_o(te^{-\gamma Z})e^{-\gamma Z} \\ &= \frac{\alpha(te^{-\gamma Z})^{\alpha-1}\lambda}{1+\lambda(te^{-\gamma Z})^{\alpha}}e^{-\gamma Z} \\ &= \frac{\alpha t^{\alpha-1}e^{-\alpha\gamma Z}\lambda}{1+\lambda t^{\alpha}e^{-\alpha\gamma Z}} \end{aligned}$$

$$h(t|Z=0) = \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}{1+\lambda t^{\alpha}} \qquad h(t|Z=1) = \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\alpha\gamma}}{1+\lambda t^{\alpha}e^{-\alpha\gamma}}$$

Le risque relatif est:

$$\begin{aligned} RR(t) &= \frac{h(t|Z=1)}{h(t|Z=0)} \\ &= \frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}e^{-\alpha\gamma}}{1+\lambda t^{\alpha}e^{-\alpha\gamma}}\left(\frac{\alpha\lambda t^{\alpha-1}}{1+\lambda t^{\alpha}}\right)^{-1} \\ &= \frac{e^{-\alpha\gamma}}{1+\lambda t^{\alpha}e^{-\alpha\gamma}} \\ &= \frac{e^{-\alpha\gamma}(1+\lambda t^{\alpha})}{1+\lambda t^{\alpha}e^{-\alpha\gamma}} \end{aligned}$$

Qui dépend de t

```r
reg_log_cov <- survreg(Surv(time=time,event=delta)~Z, data=data, dist="loglogistic")
summary(reg_log_cov)
```

```
##
## Call:
## survreg(formula = Surv(time = time, event = delta) ~ Z, data = data,
##     dist = "loglogistic")
##              Value Std. Error    z      p
## (Intercept) 3.4178     0.3689 9.26 <2e-16
## Z           0.4588     0.4984 0.92   0.36
## Log(scale)  0.0545     0.1668 0.33   0.74
##
## Scale= 1.06
##
## Log logistic distribution
## Loglik(model)= -122.9   Loglik(intercept only)= -123.3
##  Chisq= 0.89 on 1 degrees of freedom, p= 0.35
## Number of Newton-Raphson Iterations: 5
## n= 119
```

```
mu_reg_log <- reg_log_cov$coefficients[1]
sigma_reg_log <- reg_log_cov$scale
alpha_reg_log <- 1 /sigma_reg_log
gamma_reg_log <- reg_log_cov$coefficients[2]
lamda_reg_log <- exp(-mu_reg_log*alpha_reg_log)

RR_t <- function(t, alpha = alpha_reg_log, gamma = gamma_reg_log, lambda =lamda_reg_log){
  num <- exp(-alpha * gamma) *(1 + lambda*t^alpha)
  den <- 1 + lambda * t^alpha *exp(-alpha*gamma)
}
```

```
temps <- seq(0,40,0.1)
plot(temps, RR_t(temps))
```