STT 3260
Devoir 1

Mathieu Lemire

23 Septembre 2025

Exercice 1

a)

La densité d'une loi log-Normale(μ, σ^2) est $\frac{1}{t\sigma}\phi\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)$, calculons son espérance pour ensuite trouver le temps moyen jusqu'au décès.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T] &= \int_0^\infty t\frac{1}{t\sigma}\phi\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)dt \\
&= \int_0^\infty \frac{1}{\sigma}\phi\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)dt \qquad v=\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}, \quad dv=\frac{1}{t\sigma}dt, \quad t=\exp(v\sigma+\mu) \\
&= \int_{-\infty}^\infty \exp(v\sigma+\mu)\phi(v)dv \\
&= \exp(\mu)\int_{-\infty}^\infty \exp(v\sigma)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2}{2}\right)dv \\
&= \exp(\mu)\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(v\sigma-\frac{v^2}{2}\right)dv \\
&= \exp(\mu)\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2-2v\sigma}{2}\right)dv \\
&= \exp(\mu)\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{v^2-2v\sigma+\sigma^2-\sigma^2}{2}\right)dv \\
&= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(v-\sigma)^2}{2}\right)dv \\
&= \exp\left(\mu+\frac{\sigma^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

Avec $\mu = 3.177$ et $\sigma = 2.084$, on a $\mathbb{E}[T] = \exp\left(3.177 + \frac{2.084^2}{2}\right) \approx 198.052$ jours
Pour la médiane, évaluons t_p qui représente le p-ième quantile, où p est le

percentile.

$$\begin{aligned}
S(t_p) &= 1 - p \\
1 - \Phi\left(\frac{\log(t_p) - \mu}{\sigma}\right) &= 1 - p \\
\Phi\left(\frac{\log(t_p) - \mu}{\sigma}\right) &= p \\
\frac{\log(t_p) - \mu}{\sigma} &= \Phi^{-1}(p) \\
\log(t_p) &= \sigma\Phi^{-1}(p) + \mu \\
t_p &= \exp\left(\sigma\Phi^{-1}(p) + \mu\right)
\end{aligned}$$

Où $\Phi^{-1}(p)$ est le p-ième percentile de la distribution normale centré réduite. Par symétrie de la distribution normale, la moitié de la densité est à gauche de μ et l'autre moitié est à droite de μ. Puisque la médiane est $p = 0.5$, on a dans ce cas $\sigma\Phi^{-1}(0.5) = 0$ et

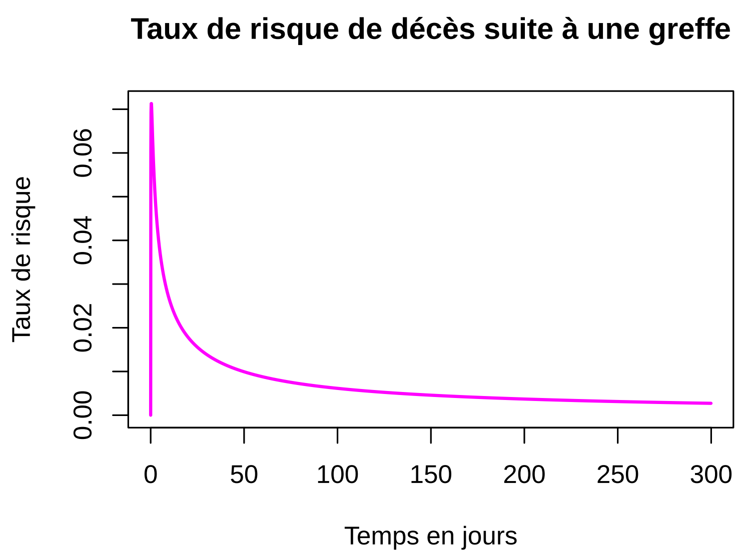
$$\begin{aligned}
t_{0.5} &= \exp(\mu) \\
&= \exp(3.177) \\
&\approx 23.975
\end{aligned}$$

b)

Puisque la fonction de survie d'une loi log-normale de moyenne μ et de variance σ est $S(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\log(t)-\mu}{\sigma}\right)$, avec $\mu = 3.177$ et $\sigma = 2.084$, on a

$$\begin{aligned}
S(100) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(100) - 3.177}{2.084}\right) \approx 1 - \Phi\left(0.6853\right) \approx 0.2465773 \\
S(200) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(200) - 3.177}{2.084}\right) \approx 1 - \Phi\left(1.0179\right) \approx 0.1543627 \\
S(300) &= 1 - \Phi\left(\frac{\log(300) - 3.177}{2.084}\right) \approx 1 - \Phi\left(1.21247\right) \approx 0.1126663
\end{aligned}$$

c)



On remarque que le taux de risque croit jusqu'à quelques jours après la greffe et plus redescend lentement. On peut interpréter que le patient à plus de chance de décéder quelques jours après la greffe et puis quand le patient commence à guérir de l'opération et que sa situation se stabilise, le risque de décès diminue et puis se stabilise.

Exercice 2

Soit la variable aléatoire Θ représentant le taux de risque d'un individu de la population suit une distribution gamma:

$$f(\theta) = \frac{\lambda^\beta \theta^{\beta-1} \exp(-\lambda\theta)}{\Gamma(\beta)}$$

On a pour chaque individu de la population:

$$f(x \mid \Theta = \theta) = \theta \exp(-\theta x)$$

On trouve la densité marginale de X en intégrant la densité jointe de X et θ:

$$
\begin{aligned}
f_X(x) &= \int f(x,\theta)d\theta \\
&= \int_0^\infty f(x|\theta)f(\theta)d\theta \\
&= \int_0^\infty \frac{\lambda^\beta \theta^{\beta-1}\exp(-\lambda\theta)}{\Gamma(\beta)}\theta\exp(-\theta x)d\theta \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}\int_0^\infty \theta^\beta \exp(-(\lambda+x)\theta)d\theta \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}\frac{1}{(\lambda+x)^\beta}\int_0^\infty (\lambda+x)^\beta\theta^\beta \exp(-(\lambda+x)\theta)d\theta \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)(\lambda+x)^\beta}\int_0^\infty \big((\lambda+x)\theta\big)^\beta \exp(-(\lambda+x)\theta)d\theta \qquad u=(\lambda+x)\theta, \quad du=(\lambda+x)d\theta \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)(\lambda+x)^\beta}\int_0^\infty \frac{1}{\lambda+x}u^\beta\exp(-u)du \\
&= \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)(\lambda+x)^{\beta+1}}\Gamma(\beta+1) \\
&= \frac{\lambda^\beta\beta\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta)(\lambda+x)^{\beta+1}} \\
&= \frac{\lambda^\beta\beta}{(\lambda+x)^{\beta+1}}
\end{aligned}
$$

a)

On trouve à présent la fonction de survie de X:

$$
\begin{aligned}
S_X(x) &= \int_x^\infty f_X(t)dt \\
&= \int_x^\infty \frac{\lambda^\beta\beta}{(\lambda+t)^{\beta+1}}dt \\
&= \left[\frac{-\lambda^\beta}{(\lambda+t)^\beta}\right]_{t=x}^{t=\infty} \\
&= \frac{\lambda^\beta}{(\lambda+x)^\beta} \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\beta
\end{aligned}
$$

b)

On trouve le taux de risque:

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{f(x)}{S(x)} \\ &= \frac{\dfrac{\beta\lambda^\beta}{(\lambda+x)^{\beta+1}}}{\left(\dfrac{\lambda}{\lambda+x}\right)^\beta} \\ &= \frac{\beta}{\lambda+x} \end{aligned}$$

On analyse la limite à 0 et à l'infinie , la dérivé et la dérivé seconde du taux de risque:

$$\lim_{x\to 0} h(x) = \frac{\beta}{\lambda}$$

$$\lim_{x\to \infty} h(x) = 0$$

$$h'(x) = -\frac{\beta}{(\lambda+x)^2} < 0 \ , \ \forall x \geq 0$$

$$h''(x) = \frac{2\beta}{(\lambda+x)^3} > 0 \ , \ \forall x \geq 0$$

Donc, le taux risque est une fonction décroissante et convexe sur $[0, \infty)$ dont l'image est $\left(0, \frac{\beta}{\lambda}\right]$.

1 Code Exercice 1 c)

```r
# Survie lognormale
lognormale_survie <- function(t, mu, sigma) {
  return (1 - pnorm( (log(t) - mu)/sigma ))
}

# Densité lognormale
lognormale_densite <- function(t, mu , sigma) {
  return (dnorm( (log(t) - mu)/sigma ) /(t*sigma))
}

# Risque lognormale
lognormale_risque <- function(t, mu, sigma) {
  return(lognormale_densite(t,mu,sigma)/ lognormale_survie(t,mu,sigma))
}

# Temps jusqu'à 300 jours
t <- seq(0.00001,300, 0.1)

mu = 3.177
sigma = 2.084

plot(t, lognormale_risque(t,mu,sigma), type="l", lwd=2, col="magenta", ylab="Taux de risque",
     main="Taux de risque de décès suite à une greffe", xlab="Temps en jours")
```