STT 3260
Devoir 6

Mathieu Lemire

2 Décembre 2025

Exo 1

a)

```
> données <- read.table("tongue.txt", header = T)
> Z <- données$type == 1
> données["Z"] <- Z
> library(survival)
> modèle = coxph(Surv(time,delta)~Z, ties = "breslow", data=
    données)
> summary_1 <- summary(modèle)
> summary_1
Call:
coxph(formula = Surv(time, delta) ~ Z, data = données, ties
    = "breslow")

  n= 80, number of events= 53

           coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
ZTRUE -0.4610    0.6307   0.2805 -1.643      0.1

      exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
ZTRUE    0.6307      1.586    0.3639     1.093

Concordance= 0.564  (se = 0.036 )
Likelihood ratio test= 2.61  on 1 df,   p=0.1
Wald test            = 2.7  on 1 df,   p=0.1
Score (logrank) test = 2.75  on 1 df,   p=0.1
```

La valeur-p du score est environ 0.1

b)

```
> beta_chap <- summary_1$coefficients["ZTRUE", "coef"]
```

```
> beta_chap
[1] -0.4609544
> SE_beta  <- summary_1$coefficients["ZTRUE", "se(coef)"]
> SE_beta
[1] 0.2805353
```

$\hat{\beta} = -0.46095$ et $SE_{\hat{\beta}} = 0.2805$
Puisque le risque relatif est définie comme $\exp(\beta)$, on calcule son intervalle de confiance de 95% comme $IC_{95\%}(RR) = \exp(\hat{\beta} \pm 1.96 \times SE_{\hat{\beta}})$

```
> IC_beta <- exp(beta_chap + c(-1, 1) * 1.96 * SE_beta)
> IC_beta
[1] 0.3639264 1.0929656
```

$IC_{95\%}(RR) = [0.36391.093]$

c) et d)

La valeur-p du test de rapport de vraisemblance est environ 0.1, la valeur-p du de Wald est environ 0.1. Les trois valeurs-p sont proches et les trois ne rejette pas l'hypothèse nulle, on n'observe pas d'effet significatifs.

Exo 2

a)

Je pose $\beta := \beta_1$ et $Z = Z_1$, car j'ai fait tout les calcule avec β et Z. Les données

t_i	1	2+	3	4	5+	6
z_i	0	1	1	1	0	0

Table 1: Données

sont ordonnées

- $R(1) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \implies \sum_{j \in R(1)} \exp(\beta^\top Z_j) = 3e^\beta + 3$
- $R(3) = \{3, 4, 5, 6\} \implies \sum_{j \in R(3)} \exp(\beta^\top Z_j) = 2e^\beta + 2$
- $R(4) = \{4, 5, 6\} \implies \sum_{j \in R(4)} \exp(\beta^\top Z_j) = e^\beta + 2$
- $R(6) = \{6\} \implies \sum_{j \in R(6)} \exp(\beta^\top Z_j) = 1$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}(\beta) &= \prod_{i}^{k} \frac{\exp(\beta^\top Z_i)}{\sum_{j \in R(t_i)} \exp(\beta^\top Z_j)} \\
&= \frac{1}{3e^\beta + 3} \times \frac{e^\beta}{2e^\beta + 2} \times \frac{e^\beta}{e^\beta + 2} \times \frac{1}{1} \\
&= \frac{e^{2\beta}}{(3e^\beta + 3)(2e^\beta + 2)(e^\beta + 2)} \\
&= \frac{e^{2\beta}}{6(e^\beta + 1)^2(e^\beta + 2)}
\end{aligned}
$$

b)

$$
\ell_n(\beta) = 2\beta - \log(6) - 2\log(e^\beta + 1) - \log(e^\beta + 2)
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \beta}\ell_n(\beta) &= 2 - \frac{2e^\beta}{e^\beta + 1} - \frac{e^\beta}{e^\beta + 2} \\
0 &= 2 - \frac{2e^{\hat{\beta}}}{e^{\hat{\beta}} + 1} - \frac{e^{\hat{\beta}}}{e^{\hat{\beta}} + 2} \\
0 &= 2(e^{\hat{\beta}} + 1)(e^{\hat{\beta}} + 2) - 2e^{\hat{\beta}}(e^{\hat{\beta}} + 2) - e^{\hat{\beta}}(e^{\hat{\beta}} + 1) \\
0 &= 2(x + 1)(x + 2) - 2x(x + 2) - x(x + 1) \qquad \text{(On pose } \exp(\hat{\beta}) = x\text{)} \\
0 &= (2x^2 + 4 + 2x + 4x) - (2x^2 + 4x) - (x^2 + x) \\
0 &= -x^2 + x + 4 \\
&\implies x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 16}}{-2} = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}
\end{aligned}
$$

Puisque $x = \exp(\hat{\beta}) > 0$, on garde $x = e^{\hat{\beta}} = \frac{1+\sqrt{17}}{2} \approx 2.562$

c)

$$
\begin{aligned}
\hat{H}_o(t) &= \frac{\mathbf{1}\{t \geq 1\}}{3e^{\hat{\beta}} + 3} + \frac{\mathbf{1}\{t \geq 3\}}{2e^{\hat{\beta}} + 2} + \frac{\mathbf{1}\{t \geq 4\}}{e^{\hat{\beta}} + 2} + \frac{\mathbf{1}\{t \geq 6\}}{1} \\
&= \frac{\mathbf{1}\{t \geq 1\}}{3(2.562) + 3} + \frac{\mathbf{1}\{t \geq 3\}}{2(2.562) + 2} + \frac{\mathbf{1}\{t \geq 4\}}{2.562 + 2} + \mathbf{1}\{t \geq 6\} \\
&= \mathbf{1}\{t \geq 1\}0.09358 \ + \mathbf{1}\{t \geq 3\}0.1404 + \mathbf{1}\{t \geq 4\}0.2192 + \mathbf{1}\{t \geq 6\}
\end{aligned}
$$

d)

$$\begin{aligned}\hat{S}(t=5 \mid Z=1) &= \exp(-\hat{H}_o(t=5)e^{\hat{\beta}}) \\ &= \exp(-(0.09358+0.1404+0.2192)\times 2.562) \\ &= \exp(-1.161) \\ &= 0.3132\end{aligned}$$

e)

$$H_o : \beta = 0 \quad H_a : \beta \neq 0$$

La statistique du rapport de vraisemblance est

$$\Lambda = -2(\ell(0) - \ell(\hat{\beta}))$$

$$\begin{aligned}\ell(0) &= -\log(6) - 2\log(2) - \log(3) \\ &\approx -4.2767\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\ell(\hat{\beta}) &= 2(2.562) - \log(6) - 2\log(2.562+1) - \log(2.562+2) \\ &\approx -3.9686\end{aligned}$$

$$\Lambda \approx -2(-4.2767 + 3.9686) = 0.6156$$

Puisque $\chi_{1,0.95} \approx 3.84 > \Lambda_{obs}$, on ne peut pas rejeter l'hypothèse nulle.

f)

$$\begin{aligned}I(\beta) = -\frac{\partial^2}{\partial\beta^2}\ell_n(\beta) &= -\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{2e^\beta}{e^\beta+1} - \frac{e^\beta}{e^\beta+2}\right) \\ &= -\left[\frac{2e^\beta(e^\beta+1) - 2e^{2\beta}}{(e^\beta+1)^2} - \frac{e^\beta(e^\beta+2) - e^{2\beta}}{(e^\beta+2)^2}\right] \\ &= \frac{2e^\beta}{(e^\beta+1)^2} + \frac{e^\beta}{(e^\beta+2)^2}.\end{aligned}$$

On calcule l'estimateur de l'information de Fisher

$$\begin{aligned}\hat{I}(\hat{\beta}) &= \frac{2\times 2.562}{(2.562+1)^2} + \frac{2.562}{(2.562+2)^2} \\ &= 0.40385 + 0.1231 \\ &= 0.52695\end{aligned}$$

On a que

$$Var(\hat{\beta}) = \frac{1}{\hat{I}(\hat{\beta})} = 1.8977$$

Calculons l'intervalle de confiance de 95% pour β

$$IC_{95\%}(\hat{\beta}) = \hat{\beta} \pm 1.96 \times \sqrt{Var(\hat{\beta})} = \log(2.562) \pm 1.96 \times \sqrt{1.8977} = [-1.7592, 3.6408]$$