Fiche – Espaces vectoriels

Fait avec amour et passion par votre homme Matisse

1. Espace vectoriel

Définition

Donnée : un corps $\mathbb{K}$.
Un $\mathbb{K}$**-espace vectoriel** est un triplet $(E, +, \cdot)$ où :
- $(E, +)$ est muni de l'associativité, commutativité, élément neutre 0, opposé $-x$.
- $\cdot : \mathbb{K} \times E \to E$ vérifie, pour tout $x, y \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

$$\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y, \quad (\lambda+\mu)x = \lambda x + \mu x, \quad \lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x, \quad 1x = x.$$

Propriétés

Pour tout $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{K}$:

$$0x = 0, \quad \lambda 0 = 0, \quad (-\lambda)x = \lambda(-x) = -(\lambda x), \quad \lambda x = 0 \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0).$$

Exemples

Exemples d'espaces vectoriels :

$$\mathbb{K}^n, \quad \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ (suites)}, \quad F(X, \mathbb{K}), \quad \text{espaces de polynômes}, \quad \text{espaces de matrices}.$$

2. Sous-espaces vectoriels et sous-espace engendré

Définition

$F \subset E$ est un **sous-espace vectoriel** (sev) de E si

$$0 \in F \quad \text{et} \quad \forall x, y \in F,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K},\ \lambda x + \mu y \in F.$$

Mémo méthode

Pour montrer que F est un sev de E :

$$0 \in F, \quad x, y \in F \Rightarrow x + y \in F, \quad x \in F, \lambda \in \mathbb{K} \Rightarrow \lambda x \in F.$$

Propriétés

- Intersection d'une famille de sev $\Rightarrow$ sev.
- En général, $F \cup G$ n'est **pas** un sev.

Définition

Pour $A \subset E$, le **sous-espace engendré** par A, noté $\mathrm{Vect}(A)$, est le plus petit sev contenant A.
Si $A = \{x_1, \dots, x_n\}$:

$$\mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n) = \{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n : \lambda_i \in \mathbb{K}\} = \mathrm{Vect}(A).$$

Exemples

Droite vectorielle. Pour $x \in E$,

$$\mathrm{Vect}(x) = \mathbb{K}x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

Si $E = \mathbb{K}x$ pour un $x \neq 0$, alors E est une **droite vectorielle**.

Propriétés

Colinéarité.
$x, y \in E$ sont **colinéaires** si $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tel que $y = \lambda x$ (ou $x = \lambda y$).

3. Applications linéaires, noyau, image

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Définition

$f : E \to F$ est **linéaire** si

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

On note $L(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et $L(E) = L(E, E)$.

Mémo méthode

Pour montrer qu'une application f est linéaire, il faut montrer que :

$$\forall x, y \in E,\ \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}\ f(\lambda x\ + \mu y) = \lambda f(x)\ +\ \mu f(y)$$

Exemples

Cas particuliers :
- $E = F$: f est un **endomorphisme**.
- f bijective : **isomorphisme**.
- Endomorphisme + bijectif : **automorphisme**.

Propriétés

Noyau et image.

$$\ker f = \{x \in E : f(x) = 0\}, \qquad \mathrm{Im}\, f = \{f(x) : x \in E\}.$$

Ce sont des sous-espaces vectoriels.

Lien avec injectivité/surjectivité :

$$f \text{ injective} \iff \ker f = \{0\}, \qquad f \text{ surjective} \iff \mathrm{Im}\, f = F.$$

Propriétés

$$\forall f, g \in GL(E),\ f \circ g \in GL(E)$$

4. L(E) et groupe linéaire GL(E)

Définition

Espace vectoriel $L(E,F)$. Avec les opérations

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) = \lambda f(x),$$

$L(E,F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition

Groupe linéaire. On note

$$GL(E) = \{u \in L(E) \ : \ u \text{ est bijective}\}.$$

Avec la composition :
- $\mathrm{Id}_E \in GL(E)$;
- $u, v \in GL(E) \Rightarrow v \circ u \in GL(E)$;
- $u \in GL(E) \Rightarrow u^{-1} \in GL(E)$.

5. Somme, somme directe, supplémentaires

Définition

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, A, B deux sous-espaces vectoriels.
Somme.

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\},$$

c'est le plus petit sev contenant A et B.

Définition

Somme directe. On dit que A et B sont en **somme directe** si

$$\forall a \in A, \forall b \in B,\ a + b = 0 \Rightarrow a = b = 0.$$

On note alors $A \oplus B$ au lieu de $A + B$.

Mémo méthode

Somme direct :

$$A \oplus B \iff A \cap B = \{0\}.$$

Définition

Sous-espaces supplémentaires. A et B sont **supplémentaires** dans E si

$$E = A \oplus B.$$

Autrement dit, tout $x \in E$ s'écrit d'une *unique* façon $x = a + b$ avec $a \in A$, $b \in B$. Pour montrer une telle égalité, l'analyse synthèse est une méthode pertinente

Mémo méthode

Version géométrique du théorème du rang.
Soit $f \in L(E,F)$ et A un supplémentaire de $\ker f$ dans E : $E = \ker f \oplus A$. Alors l'application

$$\varphi : A \to \operatorname{Im} f, \quad x \mapsto f(x)$$

est un isomorphisme.

6. Projecteurs

Définition

Un **projecteur** de A parallèlement à B est un endomorphisme $p \in L(E)$ tel que

$$p^2 = p. \ \forall (a,b) \in (A,B), \ p(a+b) = a$$

Propriétés

Lien avec les supplémentaires.
Soit A, B deux sev tels que $E = A \oplus B$. Alors il existe un **unique** projecteur p tel que

$$\operatorname{Im} p = A, \quad \ker p = B,$$

et pour tout $x = a + b$ (avec $a \in A$, $b \in B$),

$$p(x) = a.$$

Réciproquement, si p est un projecteur, alors

$$E = \ker p \oplus \operatorname{Im} p.$$

7. Symétries

Définition

Soit A, B deux sev supplémentaires de E : $E = A \oplus B$. La **symétrie par rapport à A parallèlement à B** est l'endomorphisme $s \in L(E)$ défini par

$$\forall a \in A, \forall b \in B, \quad s(a+b) = a - b.$$

Propriétés

- $s \circ s = \mathrm{Id}_E$ donc s est un automorphisme et $s^{-1} = s$.
- $\ker(s - \mathrm{Id}) = A$, $\ker(s + \mathrm{Id}) = B$.
- Une application $s \in L(E)$ est une symétrie $\iff s^2 = \mathrm{Id}_E$.

8. Hyperplans

Définition

Un **hyperplan** de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle

$$H = \ker \varphi, \quad \varphi \in E^\star = L(E, \mathbb{K}), \ \varphi \neq 0.$$

Propriétés

- Un hyperplan est un sev strict de E.
- H est un hyperplan $\iff H$ admet une **droite vectorielle** comme supplémentaire :

$$\exists x_0 \notin H \quad E = H \oplus \mathbb{K}x_0.$$

- Si $E = \mathbb{K}^n$, les hyperplans sont les ensembles

$$H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\},$$

  avec $(a_1, \ldots, a_n) \neq 0$ (droites par l'origine dans $\mathbb{R}^2$, plans par l'origine dans $\mathbb{R}^3$, etc.).