Probabilités

14 mai 2017

1 Eemple de lois continues

1.1 Loi uniforme sur (a,b)

$a < b$
$a, b \in \mathbb{R}$

- Densité : $f(x) = \frac{1}{b-a} \nVdash_{a,b}(x)$
- Fonction de répartition :

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\ &= 0 \ si \ x \leq a \\ &= \frac{x-a}{b-a} \ si \ a < x \leq b \\ &= 1 \ si \ x > b \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx = \int_{a}^{b} \frac{x}{b-a} dx \\ &= [\frac{x}{2(b-a)}]_a^b \\ &= \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} \\ &= \frac{a+b}{2} \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx \\ &= \int_{a}^{b} \frac{x^2}{b-a} dx \\ &= [\frac{x^3}{3(b-a)}]_a^b \\ &= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} \\ &= \frac{b^2 + ab + a^2}{3} \end{aligned}$$

-

$$\begin{aligned} Var(X) &= \frac{1}{12}(b^2 - 2ab + a^2) \\ &= \frac{1}{12}(b-a)^2 \end{aligned}$$

1.2 Passage d'une uniforme centrée réduite à une uniforme (a,b)

Si $U \sim Unif(0,1)$, on pose :
$X = (b-a)U + a \sim Unif(a,b)$

2 Loi exponentielle

$X \sim Exp(\lambda) \ et \ \lambda > 0$

2.1 Densité

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ pour \ x > 0 \ sinon \ 0$$

2.2 FDR

$$F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

si $x > 0$, 0 sinon.

2.3 E et V

$\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

2.4 Propriétés

Si $X \sim Exp(1)$, quelle est la loi de $\frac{1}{\lambda}X$?

$$\begin{aligned} F_Y(x) = \mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\frac{1}{\lambda}X \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x) \\ = F_X(\lambda x) \end{aligned}$$

Donc $Y \sim Exp(\lambda)$
Soit $U \sim Unif(0,1)$, $Y = -\frac{1}{\lambda}ln(U)$

$$\begin{aligned} F_Y(x) = \mathbb{P}(-\frac{1}{\lambda}ln(U) \leq X) \\ = 0 \ si \ x \leq 0 \end{aligned}$$