

# Probabilités

03 mai 2017

## 1 Variables aléatoires

$X$  est une variable aléatoire.

$$\mathbb{E}(x) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

### 1.1 Cas discret

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \text{ possibles}} k \cdot \mathbb{P}(X = k)$$

### 1.2 Rappels

#### 1.2.1 Bernoulli

- $X \sim b(p)$ , avec  $0 < p < 1$
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$
  - $\mathbb{E}(X) = 0(1 - p) + 1 \times p = p$

#### 1.2.2 Binomiale

- $X \sim B(n, p)$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*, p \in ]0, 1[$
- Valeurs possibles :  $k \in \{0, 1, \dots, n\}$
  - $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
  -

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = np$$

#### 1.2.3 Géométrique

- $X \sim G(p)$ , avec  $0 < p < 1$
- Valeurs possibles :  $\{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}^*$
  - $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$

#### 1.2.4 Loi de poisson

- $X \sim \lambda > 0$
- Valeurs possibles :  $\mathbb{N}$
  - $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

Or,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Après changement de variable, on voit donc  $\mathbb{E}(X) = \lambda$

### 1.2.5 Loi équirépartie

$X \sim$  sur  $k \in [0, \dots, n]$   
 —  $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}$

## 1.3 Théorème de transfert

Si  $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(x)) = \sum_{k \text{ possibles}} f(k) \mathbb{P}(X = k)$$

## 2 Variance

L'espérance d'une variable est la valeur la *plus représentative* prise par cette variable.  
 C'est une "mesure moyenne de l'écart avec la moyenne".

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] \geq 0 \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2] \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

### 2.1 Variances de variables aléatoires discrètes

#### 2.1.1 Bernoulli

$X \sim b(p)$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= 0^2(1-p) + 1^2p = p \\ \text{Var}(X) &= p - p^2 = p(1-p) \end{aligned}$$

#### 2.1.2 Binomiale

**Aparté : variance d'une somme**

$$\begin{aligned} \text{VAR}(X + Y) &= \mathbb{E}[(X + Y)^2] - (\mathbb{E}(X + Y))^2 \\ &= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) + 2[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)] \end{aligned}$$

avec  $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$  la covariance de X et Y :  $\text{Cov}(X, Y)$

Si X et Y sont indépendantes, alors  $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \text{Cov}(X, Y) = 0$ .

**Variance d'une binomiale** Puisque les différentes variables sont indépendantes, on peut déduire :  $Var(Y) = np(1-p)$

### 2.1.3 Géométrie

$$X \sim G(p) \\ Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$$

### 2.1.4 Loi de Poisson

$$X \sim P(\lambda) \\ Var(X) = \lambda$$

## 3 Lois continues

Caractérisées par

- Un support
- Une densité :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^* \\ x \mapsto f(x)$$

**Exemple :**

- Densité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1$$

- Support :

$$Supp(X) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$$

### 3.1 Densité et espérance

Puisque la loi est continue, l'espérance n'est plus une simple somme mais une intégrale.

Si  $X$  est de densité  $f_X$ , alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x) dx$$

Appliquons le *théorème de transfert* :

Si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , alors

$$\mathbb{E}(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx$$

### 3.2 Fonctions de répartition

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Dans le cas d'une VA  $X$  à densité  $f_X$  :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt$$

C'est donc l'aire sous la courbe de sa densité, arrêtée au point  $x$ .

### 3.2.1 Propriétés universelles

—  $F_X$  est croissante au sens large

—

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F_x(x) = 1$$

—

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F_x(x) = 0$$

— Une FDR est continue à droite

**Remarque :** Dans le cas continu à densité,  $F_X$  est continue. On a donc  $F_X(x)' = f_X(x)$

## 3.3 Correction

### 3.3.1 Exercice 2

1.  $\mu = 0, \sigma = 1$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2/\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\mathbb{E}[X] = 0$$

$$\mathbb{E}[X^2] = 1$$

$$\text{Var}(X) = 1 - \Sigma^2 = 1$$

2.

$$Z = aX + b$$

$$\mathbb{E}(Z) = a\mathbb{E}(X) + b = b$$

$$\text{Var}(Z) = \text{Var}(aX^2)$$