Probabilités

Lois jointes et gamma

23 mai 2018

1 Rappel

Si X suit la loi à densité f_X, alors :

$$\forall A \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(X \in A) = \int_A f_X(x)dx$$

2 Lois jointes

Il s'agit des lois des **vecteurs aléatoires**.

Exemple : Si X et Y sont des variables aléatoires, alors (X, Y) est un vecteur aléatoire dont la loi s'appelle la loi jointe de X et de Y.

2.1 Fonction de répartition des vecteurs aléatoires

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}^2$, sa fonction de répartition est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^2, F_{(X,Y)}(x, y) &= \mathbb{P}(\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}) \\ &= \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)\end{aligned}$$

$$F_{(X,y)} : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$$

2.1.1 Limites

$$\begin{aligned}\lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= \mathbb{P}(X \leq x) = F_X(x) \\ \lim_{x \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= \mathbb{P}(Y \leq y) = F_Y(y) \\ \lim_{x \to +\infty} \lim_{y \to +\infty} F_{(X,Y)}(x, y) &= 1\end{aligned}$$

2.1.2 Deux principaux cas

— Cas discret :

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \sum_{k \leq x} \sum_{l \leq y} \mathbb{P}(X = k, Y = l)$$

— Cas continu :

$$F_{(X,Y)}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{y} f_{(X,Y)}(s, t)dt \right) ds$$

2.2 Fonction de densité

La fonction

$$f_{(X,Y)} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^+$$

est telle que

$$\int \int_{\mathbb{R}^2} f_{(X,Y)}(x,y)dxdy = 1$$

est appelée **densité jointe**.

2.2.1 Densités marginales

Si (X,Y) est à densité

$$f_{(X,Y)}(s,t)$$

alors :

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(x,t)dt$$
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{(X,Y)}(s,y)ds$$

Ces densités sont appelées **densités marginales**.

2.3 Propriétés générales

Si (X,Y) est un vecteur aléatoire à densité $f_{(X,Y)}$, alors :

— $\mathbb{P}\big((X,Y) \in Dom\big) = \int \int_{Dom} f_{(X,Y)}(s,t)dtds$

— Si X et Y sont indépendantes, alors $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$

— Lois conditionnelles $f_{(X \setminus Y=y)}(x) := \frac{f_{(X,Y)}(x,y)}{f_Y(y)}$

3 Lois gamma

$\Gamma(n,\lambda), n \in \mathbb{N}^*, \lambda > 0$

3.1 Densité

$f_X(x) = \frac{\lambda^n}{(n-1)} x^{n-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$

Exemple $\Gamma(1,\lambda) f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^{+*}}$

3.2 Fonction génératrice des moments

Rappel On a déjà montré que si $X \sim Exp(\lambda)$, alors $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx}) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$, $t \leq \lambda$

Exemple Soit $Y \sim \Gamma(n,\lambda)$

$$\begin{aligned}
M_Y(t) &= \mathbb{E}(e^{tY}) \\
&= \int_0^{+\infty} e^{ty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda - t)^n}{(n-t)!} y^{n-1} e^{-(\lambda - t)y} dy \\
&= \left(\frac{\lambda}{\lambda - t}\right)^n
\end{aligned}$$

Proposition Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi $Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$, alors la variable aléatoires $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$.

Remarque

- Si $X \sim Unif(0,1)$, alors $-\frac{1}{\lambda} ln(U) \sim Exp(\lambda)$
- Si $U_1, ..., U_n$ sont des variables aléatoires indépendantes de loi $Unif(0,1)$, alors

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} ln(U_i) = -\frac{1}{\lambda}\Big(\prod_{i=1}^{n} U_i\Big) \sim \Gamma(n, \lambda)$$

3.3 Espérance et variance

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{\lambda}$$
$$Var(X) = \frac{n}{\lambda^2}$$
$$M_X(t) = \Big(\frac{\lambda}{\lambda - t}\Big)^n$$

Car les différentes exponentielles sont indépendantes !

4 Loi de Poisson

$P(\lambda)$, $\lambda > 0$

On a vu que si $X \sim P(\lambda)$, sa fonction génératrice des probabilités s'écrit, pour $s < 1$:

$$G_X(s) = e^{-\lambda(1-s)}$$

Exemple Soit $X \sim P(\lambda)$, $Y \sim P(\mu)$, avec $\lambda > 0$ et $\mu > 0$

Supposons X indépendant de Y, quelle est la loi de $X + Y$?

$$\begin{aligned} G_{X=Y}(s) &= G_X(s) \times G_Y(s) \\ &= e^{-\lambda(1-s)} \times e^{-\mu(1-s)} \\ &= e^{-(\lambda+\mu)(1-s)} \end{aligned}$$

Il s'agit d'une fonction génératrice d'une $P(\lambda + \mu)$.

Propriété Soient $X_1, ..., X_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Alors la variable aléatoire

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim P\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\Big)$$

4.1 Algorithme de simulation d'une loi $P(\lambda)$

```
C = 0
U = RANDOM
TANT QUE U > exp(- lambda) FAIRE
  C = C + 1
  U = U * RANDOM
N = C
```

Dis moi Jamy, pourquoi ça marche cet algorithme ?

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=0) &= \mathbb{P}(U \leq e^{-\lambda}) \\ &= e^{-\lambda}\end{aligned}$$

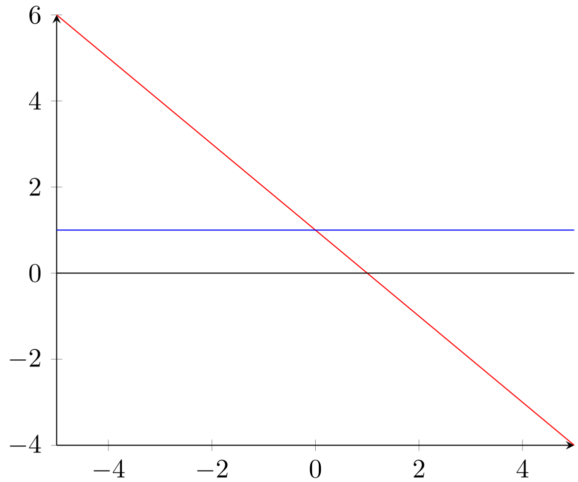
Pour $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=k) &= \mathbb{P}\Big(\prod_{i=0}^{k} U_i \leq e^{-\lambda} < \prod_{i=0}^{k-1} U_i\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big[ln(\prod_{i=0}^{k} U_i) \leq -\lambda < ln(\prod_{i=0}^{k-1} U_i)\Big] \\ &= \mathbb{P}\Big[-ln(\prod_{i=0}^{k} U_i) \geq \lambda > -ln(\prod_{i=0}^{k-1} U_i)\Big] \\ &= \mathbb{P}\Big[-\frac{1}{\lambda}ln(\prod_{i=0}^{k} U_i) \geq 1 > -\frac{1}{\lambda}ln(\prod_{i=0}^{k-1} U_i)\Big] \\ T_{n+1} &= -\frac{1}{\lambda}ln(\prod_{i=0}^{k-1} U_i) \sim \Gamma(n+1,\lambda) \\ T_{k+1} &= T_k - \frac{1}{\lambda}ln(U_k) \\ &= T_k + X_{k+1} \qquad \text{où } X_{k+1} = -\frac{1}{\lambda}ln(U_{k+1})\end{aligned}$$

- $T_k \sim P(k,\lambda)$
- $X_{k+1} \sim Exp(\lambda)$
- $T_k et X_{k+1}$ sont indépendantes

$$\begin{aligned}f_{(X_{k+1},T_k)}(x,y) &= f_{X_{k+1}}(x) f_{T_k}(y) \\ &= \lambda e^{-\lambda x} \frac{\lambda}{(k-1)!} y^{k-1} e^{-\lambda y} \mathbb{1}_{x>0,y>0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N=k) &= \mathbb{P}(T_k + X_{k+1} \geq 1 > T_k) \\ &= \mathbb{P}\big((X_{k+1},T_k) \in \Delta\big) \\ &= \int\int_{\Delta} f_{X_{k+1},T_k}(x,y)dxdy \\ \Delta &= \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} : x+y \geq 1 > y\big\}\end{aligned}$$



Δ est entre bleu, noir et à droite de rouge.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N=k) &= \int_0^1 \frac{\lambda^k}{(k-1)!} y^{k-1} e^{-\lambda y} \Big(\int_{1-y}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx \Big) dy \\
&= \int_0^1 \frac{\lambda^k}{(k-1)!} y^{k-1} e^{-\lambda y} \Big[-e^{-\lambda x} \Big]_{1-y}^{+\infty} dy \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^1 y^{k-1} e^{-\lambda y} e^{-\lambda(1-y)} dy \\
&= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} e^{-\lambda} \int_0^1 y^{k-1} dy \\
&= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}
\end{aligned}$$