Probabilités

Informations sur le projet

23 mai 2018

1 Arrivées

1.1 Recommandations

— Travailler en temps continu
— Développer avec des lois exponentielles

On suppose que les arrivées se font à des instants aléatoires $T_1, T_2, ..., T_n$.
On pose $T_0 = 0$ et $X_k = T_k - T_{k-1}$
On peut prendre $X_k \sim Exp(\lambda)$ et les X_k indépendants entre eux.

$$T_k = \sum_{i=1}^{k} X_i \sim \Gamma(k, \lambda)$$

Soit N_t le nombre de requêtes reçues entre $[0, t]$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(T_k \leq t < T_{k+1}) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{1}{t}T_k \leq 1 < \frac{1}{t}T_{k+1}\Big) \\ &\frac{1}{t}T_k \sim \Gamma(k, \lambda t) \\ &\frac{1}{t}T_{k+1} \sim \Gamma(k+1, \lambda t) \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}\end{aligned}$$

Cf feuille pour le graphique

$$\mathbb{P}(\underbrace{N_7 - N_5}_{\sim P(2\lambda)} = 3) = \frac{(2\lambda)^3}{3!}e^{-2\lambda}$$

2 Service

Enoncé : le temps de service d'une requête est en moyenne de $\frac{1}{\mu}$

On suppose les temps de service indépendants entre eux et on les suppose de loi $Exp(\mu)$.

— $S_0 = 0$, $S_1 \sim Exp(\mu)$
— $S_{i+1} = S_i + Y_i$ où $Y_i \sim Exp(\mu)$, indépendant des autres Y_j.

X_t le nombre de requêtes encore dans le système (en service + file d'attente) à l'instant t

2.1 Un seul serveur

Cf. feuille

— 1 serveur

— Arrivées : $Exp(\lambda)$

— Temps de service : $Exp(\mu)$

Si on pose $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$, en temps long :

$$\mathbb{P}(X_t = k) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^k$$

avec $0 \leq k \leq N$.

Cette formule permet de vérifier les simulations.

Le nombre moyen de requêtes dans le système (en service + dans la file) est en temps long :

$$\mathbb{E}(X_t) = \frac{\rho}{1-\rho^{N+1}}\Big(\frac{1-\rho^{N-1}}{1-\rho} - N\rho^N\Big)$$

Probabilité de perte

$$\mathbb{P}(X_t = N) = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\rho^N$$

Question Si on sait qu'il y a eu n arrivées de requêtes dans l'intervalle $[0, t]$, comment se distribuent $T_1, T_2, ..., T_n$ sur cet invervalle ?

Supposons $N_t = 1$, $s < t$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T_1 \leq s | N_t = 1) &= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, N_t = 1)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, T_2 > t)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(T_1 \leq s, T_1 + X_2 > t)}{\mathbb{P}(N_t = 1)} \\
&= \frac{\lambda s e^{-\lambda t}}{\lambda t e^{-\lambda t}} \\
&= \frac{s}{t}
\end{aligned}$$

Donc $(T_1 | N_t = 1) \sim Unif(0, t)$