Probabilités

03 mai 2017

1 Variables aléatoires

X est une variable aléatoire.

$$\mathbb{E}(x) = \int_{\Omega} X(\omega) d\mathbb{P}(\omega)$$

1.1 Cas discret

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k \ possibles} k.\mathbb{P}(X = k)$$

1.2 Rappels

1.2.1 Bernoulli

$X \sim b(p)$, avec $0 < p < 1$
- $\mathbb{P}(X = 0) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$
- $\mathbb{E}(X) = 0(1 - p) + 1 \times p = p$

1.2.2 Binomiale

$X \sim B(n, p)$, avec $n \in \mathbb{N}^*, p \in]0, 1[$
- Valeurs possibles : $k \in \{0, 1, ..., n\}$
- $\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$
- $$\mathbb{E}(Y) = \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = np$$

1.2.3 Géométrique

$X \sim G(p)$, avec $0 < p < 1$
- Valeurs possibles : $\{1, 2, 3, ...\} = \mathbb{N}^*$
- $\mathbb{P}(X = k) = (1 - p)^{k-1} p$

1.2.4 Loi de poisson

$X \sim \lambda > 0$
- Valeurs possibles : $\mathbb{N}$
- $P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

—

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda \sum_{k=1}^{+\infty} k \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda}$$

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Après changement de variable, on voit donc $\mathbb{E}(X) = \lambda$

1.2.5 Loi équirépartie

$X\sim$ sur $k \in [0, ..., n]$

— $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{n+1}$

1.3 Théorème de transfert

Si $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(f(x)) = \sum_{k\ possibles} f(k)\mathbb{P}(X = k)$$

2 Variance

L'espérance d'une variable est la valeur la *plus représentative* prise par cette variable.
C'est une "mesure moyenne de l'écart avec la moyenne".

$$\begin{aligned} VAR(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E})^2] \geq 0 \\ &= \mathbb{E}[X^2 - 2X\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2] \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(2X\mathbb{E}(X)) + \mathbb{E}((\mathbb{E}(X))^2) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + (\mathbb{E}(X))^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2 \end{aligned}$$

2.1 Variances de variables aléatoires discrètes

2.1.1 Bernoulli

$X \sim b(p)$

$$\mathbb{E}(X^2) = 0^2(1-p) + 1^2 p = p$$
$$Var(X) = p - p^2 = p(1-p)$$

2.1.2 Binomiale

Aparté : variance d'une somme

$$\begin{aligned} VAR(X+Y) &= \mathbb{E}[(X+Y)^2] - (\mathbb{E}(X+Y)^2) \\ &= \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - (\mathbb{E}(X))^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - (\mathbb{E}(Y))^2 \quad = Var(X) + Var(Y) + 2[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(\end{aligned}$$

avec $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$ la covariance de X et Y : $Cov(X, Y)$
Si X et Y sont indépendantes, alors $\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = Cov(X, Y) = 0$.

Variance d'une binomiale Puisque les différentes variables sont indépendantes, on peut déduire : $Var(Y) = np(1-p)$

2.1.3 Géométrique

$X \sim G(p)$
$Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

2.1.4 Loi de Poisson

$X \sim P(\lambda)$
$Var(X) = \lambda$

3 Lois continues

Caractérisées par
- Un support
- Une densité :

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R} \to \mathbb{R}^* \\ & x \mapsto f(x) \end{aligned}$$

Exemple :
- Densité :

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = 1$$

.
- Support :

$$Supp(X) = \{x \in \mathbb{R}, f(x) > 0\}$$

3.1 Densité et espérance

Puisque la loi est continue, l'espérance n'est plus une simple somme mais une intégrale.
Si X est de densité f_X, alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$$

Appliquons le *théorême de transfert* :
Si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, alors

$$\mathbb{E}(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx$$

3.2 Fonctions de répartition

$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$
Dans le cas d'une VA X à densité f_X :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$$

C'est donc l'aire sous la courbe de sa densité, arrêtée au point x.

3.2.1 Propriétés universelles

- F_X est croissante au sens large
- $$\lim_{x \to +\infty} F_x(x) = 1$$
- $$\lim_{x \to -\infty} F_x(x) = 0$$
- Une FDR est continue à droite

Remarque : Dans le cas continu à densité, F_X est continue. On a donc $F_X(x)' = f_X(x)$