Probabilités: cours 3

15 mai 2017

1 Rappels

1.1 Espérance

Mesure de tendance
$\mathbb{E}(X)$ est de la même dimension que X. Deux façons de la calculer :
— Cas discret :
$$\mathbb{E}(X) = \sum_k k\mathbb{P}(X = k)$$
— Cas continu :
$$\mathbb{E}(X) = \int_{\mathbb{R}} xf(x)dx$$
Elle est sensible aux valeurs extrêmes.

Propriétés :

—
$$\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} a_k X_k] = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{E}(X_k)$$

1.2 Variance et écart-type

Mesures de dispersion.
$Var(X)$ est de dimension au carré par rapport à X. $\sigma(x)$ est de même dimension que X.

1.2.1 Formules

Variance

—
$$Var(X) = \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) \geq 0$$
—
$$Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - (\mathbb{E}(X))^2$$

1.2.2 Propriétés

Variance

— $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$
— $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X)$ où $Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

2 Fonctions génératrices

1. Fonction génératrice des probabilités : $G_X(s) = \mathbb{E}(s^x)$
2. Fonction génératrice des moments : $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tx})$

La première est utilisée dans les cas discrets, la seconde dans les cas discrets et continus.

2.1 Fonction génératrice des probabilités

Notation $0^0 = 1$

Exercice 2 Supposons X à valeurs dans $\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} s^k \mathbb{P}(X = k) \\ G_X(0) &= \mathbb{P}(X = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} G_X(s) &= \mathbb{P}(X = 1) + 2s\mathbb{P}(X = 2) + ... + ks^{k-1}\mathbb{P}(X = k) + ... \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} ks^{k-1}\mathbb{P}(X = k) \\ \frac{d}{ds} G_X(0) &= \mathbb{P}(X = 1) \end{aligned}$$

Dérivons à nouveau :

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{ds^2} G_X(s) &= 2\mathbb{P}(X = 2) + 6s\mathbb{P}(X = 3) + ... + (k-1)ks^{k-2}\mathbb{P}(X = k) + ... \\ \frac{d}{ds} G_X(0) &= 2\mathbb{P}(X = 2) \end{aligned}$$

Si on dérive n fois :

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{ds^n} G_X(0) &= n!\mathbb{P}(X = n) \\ &\implies \mathbb{P}(X = n) = \frac{1}{n!}\left(\frac{d^n}{ds^n} G_X(0)\right) \end{aligned}$$

2.1.1 Exemples

Loi de Bernoulli $X \sim b(p)$

$$\begin{aligned} G_X(s) &= s^0\mathbb{P}(X = 0) + s^1(\mathbb{P}(X = 1)) \\ &= (1-p) + sp \end{aligned}$$

Si $X_1, ..., X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes :

$$\begin{aligned} G_{X_1+...+X_n}(S) &= \mathbb{E}(s^{X_1+...+X_n}) \\ &= \mathbb{E}\left[s^{X_1} \times s^{X_2} \times ... \times s^{X_n}\right] \\ &\text{or il y a indépendance entre les VA} \\ &= \mathbb{E}(s^{X_1})\mathbb{E}(s^{X_2})...\mathbb{E}(s^{X_n}) \\ &= G_{X_1}(s)...G_{X_n}(s) \end{aligned}$$

Loi binomiale $X \sim B(n, p)$
$X = \sum_{k=1}^{n} B_k$ où $B_k \sim b(p)$ indépendantes.
$G_X(s) = (G_B(s))^n = \big((1-p) + sp\big)$

Par calcul direct :

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{k=0}^{n} s^k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (sp)^k (1-p)^{n-k} \end{aligned}$$

Loi géométrique

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{E}(s^x) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} s^k (1-p)^{k-1} p \\ &= ps \sum_{k=1}^{+\infty} \big(s(1-p)\big)^{k-1} \\ &= \frac{ps}{1-s(1-p)} \end{aligned}$$

Loi de Poisson

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \mathbb{E}(s^x) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(s\lambda)^k}{k!} \right) e^{-\lambda} \\ &= e^{(s-1)\lambda} \end{aligned}$$

2.1.2 Lien avec l'espérance

$$\begin{aligned} G'_X(s) &= \sum_{k=1}^{+\infty} k s^{k-1} \mathbb{P}(X = k) \\ G'_X(1) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

Si on dérive à nouveau...

$$\begin{aligned} G''_X(s) &= \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1) s^{k-2} \mathbb{P}(X = k) \\ G''_X(1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X = k) = \mathbb{E}(X(X-1)) \\ &= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X) \end{aligned}$$

2.2 Fonction génératrice des moments

$$M'_X(t) = \mathbb{E}\Big[Xe^{tX}\Big]$$
$$M'_X(0) = \mathbb{E}(X)$$

Dérivons...

$$M''_X(t) = \mathbb{E}\Big[X^2e^{tX}\Big]$$
$$M''_X(0) = \mathbb{E}(X^2)$$

Dérivons n fois :

$$M^{(n)}_X(t) = \mathbb{E}\Big[X^ne^{tX}\Big]$$
$$M^{(n)}_X(0) = \mathbb{E}(X^n)$$

2.2.1 FGM dans le cas continu

Loi uniforme

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_a^b e^{tx}\frac{1}{b-a}dx \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{e^{tx}}{t}\right]_a^b \\ &= M_X(t) = \frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)} \end{aligned}$$

Loi exponentielle

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \int_0^{+\infty} e^{tx}\lambda e^{-\lambda x}dx \\ &= \lambda\int_0^{+\infty} e^{-(\lambda-t)x}dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t}\int_0^{+\infty}(\lambda-t)e^{-(\lambda-t)x}dx \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-t} \end{aligned}$$

Avec $t \leq \lambda$.

Loi normale centrée réduite $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
f_Z(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \\
\mathbb{E}(e^{tZ}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}+tx} dx \\
&\text{Contenu de l'exponentielle :} \\
&= -\frac{1}{2}(x^2 - 2tx) \\
&= -\frac{1}{2}\left[(x-t)^2 - t^2\right] \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2} dx \\
&= e^{\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx
\end{aligned}$$

Or cette intégrale vaut 1 car c'est la densité d'une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(t,1)$.
Donc $M_Z(t) = e^{\frac{t^2}{2}}$.

$$\begin{aligned}
X &= \sigma Z = \mu \\
M_X(t) &= \mathbb{E}(e^{tx}) \\
&= \mathbb{E}(e^{t(\sigma Z + \mu)}) \\
&= e^{t\mu}\mathbb{E}(e^{t\sigma Z}) \\
&= e^{t\mu} M_Z(t\sigma) \\
&= e^{t\mu + \frac{t^2\sigma^2}{2}}
\end{aligned}$$