1. Rozwiąż układ równań

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix} \tag{1}$$

Uzasadnij wybór algorytmu. Uwaga! (1) to macierz rzadka, więc użycie algorytmu dla macierzy pełnej jest nieprawidłowe (zadanie nie będzie zaliczone).

2. Dane jest macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{128\times 128}$ o następującej strukturze

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 & 0 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 & 1 \\ \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \tag{2}$$

Rozwiązać równanie $\mathbf{Ax} = \mathbf{e}$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą (2), natomiast $\mathbf{e}$ jest wektorem, którego wszystkie składowe są równe 1, za pomocą

(a) metody Gaussa-Seidela,

(b) metody gradientów sprzężonych.

Algorytmy **muszą** uwzględniać strukturę macierzy (2)!
Proszę porównać graficznie tempo zbieżności tych metod, to znaczy jak zmieniaję się normy $\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}\|$, gdzie $\mathbf{x}_k$ oznacza $k$-ty iterat. Porównać efektywną złożoność obliczeniową ze złożonością obliczeniową rozkładu Cholesky'ego dla tej macierzy.

3. Dana jest macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{19}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & -\frac{17}{12} \\ \frac{13}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{11}{12} & \frac{13}{12} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} \\ \frac{13}{12} & -\frac{11}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{13}{12} \\ -\frac{17}{12} & \frac{13}{12} & \frac{5}{6} & \frac{5}{6} & \frac{13}{12} & \frac{19}{12} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Przy użyciu metody potęgowej znajdź jej dwie największe na moduł wartości własne i odpowiadające im wektory własne.

4. Sprowadź macierz z zadania 3 do postaci trójdiagonalnej, a następnie znajdź jej wszystkie wartości własne.

5. Konstruując odpowiednią macierz symetryczną, rzeczywistą, znajdź wartości własne i unormowane wektory własne poniższej macierzy hermitowskiej:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & -i \\ 1 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 1 \\ i & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

Wskazówka: Wektory własne tej macierzy mogą być zespolone. Normę wektora $\mathbf{u} \in \mathbb{C}^N$ obliczamy jako $\|\mathbf{u}\|^2 = \mathbf{u}^\dagger \mathbf{u}$.

6. Dana jest macierz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Znajdź jej (przybliżony) wektor własny do wartości własnej $\lambda \simeq 0.38197$.
Uwaga: w zadaniu **nie** chodzi o to, aby znaleźć **wszystkie** wartości własne powyższej macierzy, a następnie wskazać wektor własny odpowiadający podanej przybliżonej wartości własnej. Prawidłowe rozwiązanie nie obejmuje szukania żadnych wartości własnych, a **jedynie** konstrukcję (przybliżonego) wektora własnego odpowiadającego podanej (przybliżonej) wartości własnej.

7. Znajdź, z dokładnością do czterech cyfr dziesiętnych, wartości współczynników wielomianu interpolacyjnego opartego na następującej tabelce (ze względów typograficznych tabelka ma orientację pionową, a nie, jak to jest zwyczajowo, poziomą; $x$ oznacza węzeł, $f(x)$ wartość funkcji w węźle):

| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| $-1.00$ | $6.00000000000000$ |
| $-0.75$ | $3.04034423828125$ |
| $-0.50$ | $1.74218750000000$ |
| $-0.25$ | $1.26361083984375$ |
| $0.25$ | $0.75982666015625$ |
| $0.50$ | $0.63281250000000$ |
| $0.75$ | $0.85809326171875$ |
| $1.00$ | $2.00000000000000$ |

Sporządź wykres uzyskanego wielomianu w przedziale $-2 \leqslant x \leqslant 1.25$ i zaznacz na nim punkty, które posłużyły do jego konstrukcji.
Uwaga: Jeśli zadanie to zostanie wykonane prawidłowo, obliczone współczynniki wielomianu interpolacyjnego będą "ładne". Należy użyć wszystkich cyfr znaczących podanych w treści zadania.

8. Znajdź wartości funkcji
$$f(x) = \frac{1}{1+5x^2} \tag{6}$$
w punktach $-7/8, -5/8, -3/8, -1/8, 1/8, 3/8, 5/8, 7/8$ a następnie skonstruuj wielomian interpolacyjny Lagrange'a oparty na tych węzłach i wartościach funkcji (6) w tych węzłach. Narysuj wykres wielomianu interpolacyjnego. w przedziale $[-1.25, 1.25]$, zaznaczając na nim węzły i wartości w węzłach. Punkt dodatkowy: znajdź *współczynniki* wielomianu interpolacyjnego.

9. Skonstruuj wielomian interpolacyjny dla funkcji (6) oparty na węzłach
$$x_j = \cos\left(\frac{2j-1}{16}\,\pi\right), \quad j = 1, 2, \ldots, 8 \tag{7}$$
i sporządź jego wykres w przedziale $[-1.25, 1.25]$, zaznaczając na nim węzły i wartości w węzłach. Porównaj z wynikami zadania 8, jeśli je robiłeś.

10. Skonstruuj naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 8. Sporządź jego wykres.

11. Skonstruuj naturalny splajn kubiczny dla funkcji i węzłów z zadania 9. Sporządź jego wykres.

12. Skonstruuj interpolację funkcjami wymiernymi według algorytmu Floatera i Hormanna z parametrem $d = 3$ dla funkcji i węzłów z zadania 8. Sporządź odpowiedni wykres.

13. Posługując się wzorem trapezów i metodą Romberga, oblicz całkę
$$I = \int\limits_0^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\, e^{-x}\, dx \tag{8}$$
z dokładnością do $10^{-7}$.
Uwaga! Rozwiązanie powinno zawierać tabelkę (tableau) konstruowaną w metodzie Romberga.

Wskazówka:
$$I = \underbrace{\int\limits_0^A \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\, e^{-x}\, dx}_{I_1} + \underbrace{\int\limits_A^\infty \sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\, e^{-x}\, dx}_{I_{\text{ogon}}} \tag{9}$$
przy czym
$$|I_{\text{ogon}}| \leqslant \int\limits_A^\infty \left|\sin\left(\pi \frac{1+\sqrt{x}}{1+x^2}\right)\right|\, e^{-x}\, dx \leqslant \int\limits_A^\infty e^{-x}\, dx = e^{-A}\,. \tag{10}$$
Znajdź $A$ takie, że $e^{-A} < 10^{-7}$, a następnie znajdź numerycznie wartość $I_1$ z odpowiednią dokładnością.

14. Niech
$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^x \cos\left(\frac{1+t}{t^2+0.04}\right)\, e^{-t^2}\, dt \tag{11}$$
Narysuj wykres $F(x)$ oraz oblicz $\lim\limits_{x\to\infty} F(x)$ z dokładnością $10^{-8}$.

15. Stosując metodę Laguerre'a wraz ze strategią obniżania stopnia wielomianu i wygładzania, znajdź wszystkie rozwiązania równań

$$243z^7 - 486z^6 + 783z^5 - 990z^4 + 558z^3 - 28z^2 - 72z + 16 = 0 \tag{12a}$$
$$z^{10} + z^9 + 3z^8 + 2z^7 - z^6 - 3z^5 - 11z^4 - 8z^3 - 12z^2 - 4z - 4 = 0 \tag{12b}$$
$$z^4 + iz^3 - z^2 - iz + 1 = 0 \tag{12c}$$

Uwaga: to jest *jedno* zadanie.

16. Rozwiąż układ równań

$$2x^2 + y^2 = 2 \tag{13a}$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{4} \tag{13b}$$

17. Zmajdź, z dokładnością do $10^{-6}$, minimum funkcji

$$y = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{16}x \tag{14}$$

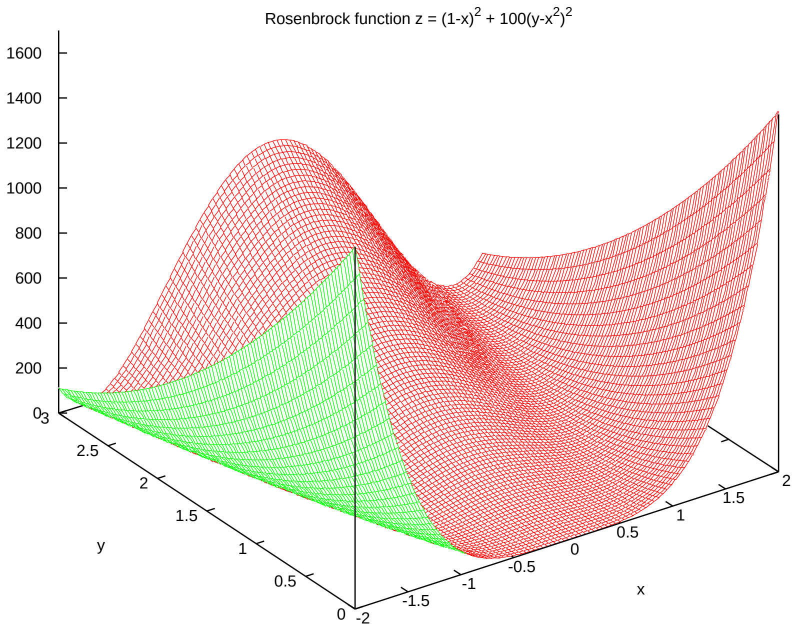
(a) za pomocą metody złotego podziału,

(b) za pomocą metody Brenta.

Porównaj szybkość zbieżności obu metod.
Uwaga: To jest jedno zadanie. Ważne, aby w obu podpunktach znaleźć *to samo* minimum.

18. Znajdź minimum funkcji będącej wielomianem interpolacyjnym z zadania 7.

19. Znajdź numerycznie (analitycznie zrobić można to bardzo łatwo) minimum funkcji Rosenbrocka (zobacz rysunek)



$$f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2\,. \tag{15}$$

Rozpocznij poszukiwania od kilku–kilkunastu różnych, losowo wybranych punktów i oszacuj, ile trzeba kroków aby zbliżyć się do minimum narozsądną odległość. Przedstaw graficznie drogę, jaką przebywa algorytm poszukujący minimum (to znaczy pokaż położenia kolejnych minimalizacji kierunkowych lub kolejnych zaakceptowanych kroków wykonywanych w metodzie Levenberga–Marquardta).

20. Startując z kilku losowo wybranych punktów poczatkowych, znajdź minima *czterowymiarowej* funkcji Rosenbrocka

$$f(x_1,x_2,x_2,x_4) = (1-x_1)^2 + 100(x_2-x_1^2)^2 + 100(x_3-x_2^2)^2 + 100(x_4-x_3^2)^2\,. \tag{16}$$

21. Startując ze 128 punktów początkowych, rozmieszczonych losowo w kwadracie $[-3,3]\times[-3,3]$, znajdź minima funkcji

$$f(x,y) = 0.25x^4 + y^2 - 0.5x^2 + 0.125x + 0.0625(x-y) \tag{17}$$

22. Dopasuj wielomiany niskich stopni do danych zawartych w pliku `http://th-www.if.uj.edu.pl/zfs/gora/metnum16/w.txt`, zakładając, że pomiary są nieskorelowane i obarczone takim samym błędem. Ustal za pomocą kryterium Akaike, jaki stopień wielomianu wybrać. Przyjmując

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(y_i - w(x_i))^2\,, \tag{18}$$

gdzie $(x_i,y_i)$ oznaczają punkty pomiarowe, $N$ jest liczbą pomiarów, $w(x)$ dopasowanym wielomianem, znajdź macierz kowariancji estymatorów (czyli współczynników dopasowanego wielomianu).
Jest to jeden z niewielu przypadków, w których trzeba explicite znaleźć odwrotność jakiejś macierzy.

23. Znajdź przybliżenia Padé $R_{40}$, $R_{22}$, $R_{04}$ funkcji

$$E(x) = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-x^2\sin\theta^2}\,d\theta\,,\quad x\in(-1,1) \tag{19}$$

Sporządź ich wykresy, oraz wykres samej funkcji (19), w przedziale $[-0.5,0.5]$. Czy przybliżenia $R_{31}, R_{13}$ istnieją?

PFG