集合论与图论
第三讲(I) 二元关系

孙猛

北京大学数学科学学院信息科学系

http://www.is.pku.edu.cn/∼sunm
sunmeng@math.pku.edu.cn

2013.3.12

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

等价关系

定义

设集合$A \neq \emptyset$，$R \subseteq A \times A$，若R是自反的、对称的和传递的，则称R为A上的等价关系，简称等价关系。

例

设A为某班学生的集合，下列关系中哪些是等价关系？

1. $R_1 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x$与$y$同年生$\}$;
2. $R_2 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x$与$y$同姓$\}$;
3. $R_3 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x$的年龄不比$y$小$\}$;
4. $R_4 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x$与$y$选修同一门课程$\}$;
5. $R_5 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x$的体重比$y$重$\}$。

等价关系

例

设$A \neq \emptyset$且$R \subseteq A \times A$，对R依次进行3种闭包运算有6种不同的顺序，其中哪些顺序产生的关系一定是等价关系？

等价类

定义

设$A \neq \emptyset$，R是A上的等价关系，$\forall x \in A$，令$[x]_R = \{y \mid y \in A \wedge xRy\}$，则称$[x]_R$为$x$的关于$R$的等价类，简称为$x$的等价类。在不引起混乱时，可将$[x]_R$ 简记为$[x]$。

等价类

例

设$A \subseteq N$且$A \neq \emptyset$，令$R_n = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y(mod\ n)\}, n \geq 2$，则$R_n$是$A$上的等价关系。

例

设$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 8\}$，求$R_3 = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \equiv y(mod\ 3)\}$的等价类，并画出$R_3$的关系图。

解：R_3的等价类如下：

$$
\begin{aligned}
&[1] = [4] = \{1, 4\}\\
&[2] = [5] = [8] = \{2, 5, 8\}\\
&[3] = \{3\}
\end{aligned}
$$

等价类

定理

设R是非空集合A上的等价关系，对任意的$x, y \in A$，下面各式成立：

1. $[x]_R \neq \emptyset$且$[x]_R \subseteq A$;
2. 若$\langle x, y \rangle \in R$，则$[x]_R = [y]_R$;
3. 若$\langle x, y \rangle \notin R$，则$[x]_R \cap [y]_R = \emptyset$;
4. $\bigcup\{[x]_R \mid x \in A\} = A$。

等价类

例

设$C^* = \{a + bi | a, b$为实数且$a \neq 0\}$，在C^*上定义:

$$R = \{\langle a + bi, c + di\rangle | a + bi, c + di \in C^* \wedge ac > 0\}$$

证明R是C^*上的等价关系，给出R产生的等价类，并说明其几何意义。其中i为虚数单位。

商集

定义

设R是非空集合A上的等价关系，以关于R的全体不同的等价类为元素的集合称作A关于R的**商集**，简称A的商集，记作A/R。

例

设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},n\geq 1$，$E_A,I_A,R_{ij}=I_A\cup\{\langle a_i,a_j\rangle,\langle a_j,a_i\rangle\}$都是$A$上的等价关系，求它们对应的商集，其中$a_i,a_j\in A$且$i\neq j$。

商集

例

$A=\{a,b,c\}$，求出A上的全体等价关系及其对应的商集。

解： 按上例中$n=3$的情况，$A=\{a,b,c\}$上有5种不同的等价关系：

1. E_A，其商集为$A/E_A=\{\{a,b,c\}\}$;
2. I_A，其商集为$A/I_A=\{\{a\},\{b\},\{c\}\}$;
3. $R_1=I_A\cup\{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\}$，$A/R_1=\{\{a,b\},\{c\}\}$;
4. $R_2=I_A\cup\{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\}$，$A/R_2=\{\{a,c\},\{b\}\}$;
5. $R_3=I_A\cup\{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\}$，$A/R_3=\{\{b,c\},\{a\}\}$。

问题： A上还有其余的等价关系吗?

A上共有$2^{3^2}=2^9=512$个不同的二元关系，可通过对A的划分来寻找A上的等价关系。

划分

定义

设A为非空集合，若存在A的一个子集族$\mathcal{A}$满足：

1. $\emptyset \notin \mathcal{A}$;
2. $\forall x, y \in \mathcal{A}$且$x \neq y$，则$x \cap y = \emptyset$;
3. $\bigcup \mathcal{A} = A$。

则称$\mathcal{A}$为A的一个划分，$\mathcal{A}$中元素称为划分块。

设$A_1, A_2, \cdots, A_n$是某全集E的非空真子集。

$$\mathcal{A}_i = \{A_i, \sim A_i\}, i = 1, 2, \cdots, n$$
$$\mathcal{A}_{ij} = \{A_i \cap A_j, \sim A_i \cap A_j, A_i \cap \sim A_j, \sim A_i \cap \sim A_j\}, i, j = 1, 2, \cdots, n, i \neq j$$
$$\cdots\cdots$$
$$\mathcal{A}_{12\cdots n} = \{\sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap \sim A_n, \sim A_1 \cap \sim A_2 \cap \cdots \cap A_n, \cdots, A_1 \cap A_2 \cap A_n\}$$

若将以上各集中的空元素均去掉，则这些集族都是E的划分。

等价关系和划分的关系

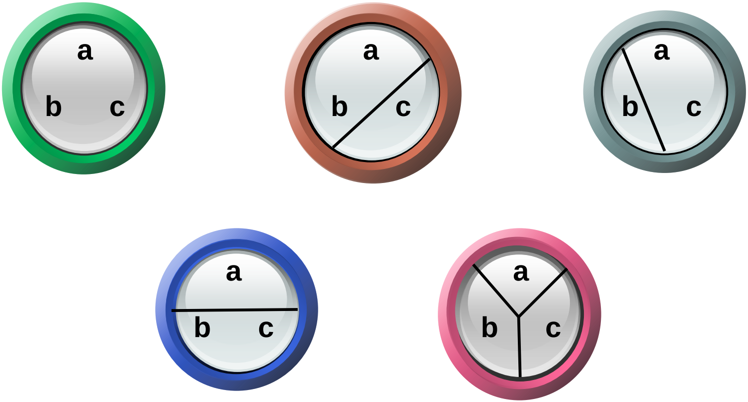
定理

设A为一个非空集合。

1. 设R为A上的任意一个等价关系，则对应R的商集A/R为A的一个划分;
2. 设A为A的一个划分，令$R_A = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x, y$属于$A$的同一划分块$\}$，则$R_A$为$A$上的等价关系。

- 本定理证明作为作业。
- 本定理说明，非空集合A上的等价关系与A的划分是一一对应的，于是A 上有多少个不同的等价关系，就产生同样个数的不同的划分，反之亦然。
- 给定n元集合A（$n \geq 1$），若能求出A上全部的划分，也就求出了A上全部的等价关系。

等价关系和划分



第二类Stirling数

如何求出A的全部划分？

- 数学模型：将n个不同的球放入r个相同的盒中（$n \geq r$），并且要求无空盒，有多少种不同的放法？
- 不同的放球方法数即为n元集A的不同的划分数，设其为$S(n,r)$，称为第二类Stirling 数，它有如下性质：
  - $S(n,0)=0$，$S(n,1)=1$，$S(n,2)=2^{n-1}-1$，$S(n,n-1)=C_n^2$，$S(n,n)=1$;
  - 满足递推公式$S(n,k)=k\times S(n-1,k)+S(n-1,k-1)$。

从而有

$$S(n,k)=\frac{1}{k!}\sum_{j=1}^{k}(-1)^{k-j}C(k,j)j^n$$

等价关系和划分

例

集合$A=\{a,b,c,d\}$上有多少不同的等价关系？

加细

定义

设$\mathcal{A}$和$\mathcal{A}'$都是集合A的划分，若$\mathcal{A}$的每个划分块都含于$\mathcal{A}'$的某个划分块中，则称$\mathcal{A}$是$\mathcal{A}'$的加细。

- $\mathcal{A}$是$\mathcal{A}'$的加细当且仅当$R_{\mathcal{A}} \subseteq R_{\mathcal{A}'}$。

例

设$\pi_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$，$\pi_2 = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$都是集合$A$的划分，证明

$$\mathcal{A} = \{A_i \cap B_j \neq \emptyset \mid i = 1, 2, \cdots, m; j = 1, 2, \cdots, n\}$$

也是A的划分，并且$\mathcal{A}$既是π_1的加细，也是π_2的加细。

加细

例

设$A=\{a,b,c\}$，找出A的全部划分及对应的等价关系，以及划分间的加细和关系中的包含关系。

解： 由第二类Stirling数易知，A上共有5个划分:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \{\{a,b,c\}\} & \mathcal{A}_2 &= \{\{a\},\{b,c\}\} \\ \mathcal{A}_3 &= \{\{b\},\{a,c\}\} & \mathcal{A}_4 &= \{\{c\},\{a,b\}\} \\ \mathcal{A}_5 &= \{\{a\},\{b\},\{c\}\} \end{aligned}$$

它们对应的等价关系分别为

$$\begin{aligned} R_{\mathcal{A}_1} &= E_A & R_{\mathcal{A}_2} &= I_A \cup \{\langle b,c\rangle,\langle c,b\rangle\} \\ R_{\mathcal{A}_3} &= I_A \cup \{\langle a,c\rangle,\langle c,a\rangle\} & R_{\mathcal{A}_4} &= I_A \cup \{\langle a,b\rangle,\langle b,a\rangle\} \\ R_{\mathcal{A}_5} &= I_A \end{aligned}$$

二元关系

- 有序对与笛卡尔积
- 二元关系
- 关系矩阵和关系图
- 关系的性质
- 二元关系的幂运算
- 关系的闭包
- 等价关系和划分
- 序关系

偏序关系

定义

设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$，若R是自反的、反对称的和传递的，则称R是A上的偏序关系。

- 偏序关系R常记为$\preccurlyeq$，$\langle x, y\rangle \in R$（或$xRy$）记为$x \preccurlyeq y$;
- 根据$\preccurlyeq$的不同含义，可以有不同的记法。

偏序关系

例

1. 设A是实数集合的非空子集。A上的小于等于关系
$$\leqslant = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \leq y\}$$
与大于等于关系
$$\geqslant = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x \geq y\}$$
都是A上的偏序关系。
2. 设A为正整数集$\mathbb{Z}_+$的非空子集，A上的整除关系
$$\mid = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x|y\}$$
为偏序关系。

偏序关系

例

设A为一集合，$\mathcal{A}$为A的子集族，称$\subseteq = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \mathcal{A} \wedge x \subseteq y\}$为$\mathcal{A}$上的包含关系，易知$\subseteq$为偏序关系。

设$A = \{a, b\}$，考虑A的下面3个子集族:

$$\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}\}, \quad \mathcal{A}_2 = \{\{a\}, \{a, b\}\}, \quad \mathcal{A}_3 = \mathcal{P}(A)$$

它们对应的包含关系分别为:

$$\begin{aligned}
\subseteq_1 &= I_{\mathcal{A}_1} \cup \{\langle \emptyset, \{a\}\rangle, \langle \emptyset, \{b\}\rangle\}; \\
\subseteq_2 &= I_{\mathcal{A}_2} \cup \{\langle \{a\}, \{a, b\}\rangle\}; \\
\subseteq_3 &= I_{\mathcal{A}_3} \cup \{\langle \emptyset, \{a\}\rangle, \langle \emptyset, \{b\}\rangle, \langle \emptyset, \{a, b\}\rangle, \langle \{a\}, \{a, b\}\rangle, \langle \{b\}, \{a, b\}\rangle\}.
\end{aligned}$$

$\subseteq_1, \subseteq_2, \subseteq_3$分别为$\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ 上的偏序关系。

偏序关系

例

设A为非空集合，π是由A的一些划分组成的集合，称

$$\preccurlyeq_r = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in \pi \wedge x\text{是}y\text{的加细}\}$$

为π上的加细关系，易知$\preccurlyeq_r$是偏序关系。

设$A = \{a, b, c\}$，$\mathcal{A}_1 = \{\{a, b, c\}\}$，$\mathcal{A}_2 = \{\{a\}, \{b, c\}\}$，$\mathcal{A}_3 = \{\{b\}, \{a, c\}\}$，$\mathcal{A}_4 = \{\{c\}, \{a, b\}\}$，$\mathcal{A}_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$都是$A$的划分。取

$$\pi_1 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2\}, \pi_2 = \{\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3\}, \pi_3 = \{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5\}$$

它们对应的加细关系分别为:

$$\preccurlyeq_1 = I_{\pi_1} \cup \{\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1\rangle\}, \qquad \preccurlyeq_2 = I_{\pi_2},$$
$$\preccurlyeq_3 = I_{\pi_3} \cup \{\langle \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1\rangle, \langle \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_1\rangle, \langle \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_1\rangle, \langle \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_1\rangle, \langle \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_2\rangle, \langle \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_3\rangle, \langle \mathcal{A}_5, \mathcal{A}_4\rangle\}$$

$\preccurlyeq_1, \preccurlyeq_2, \preccurlyeq_3$分别为$\pi_1, \pi_2, \pi_3$上的偏序关系。

偏序集

定义

称一个非空集合A及A上的一个偏序关系$\preccurlyeq$组成的有序二元组$\langle A, \preccurlyeq\rangle$ 为一个偏序集。

定义

设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为一个偏序集，若对于$\forall x, y \in A$，如果$x \preccurlyeq y \vee y \preccurlyeq x$，则称$x$与$y$是可比的。若$x$与$y$是可比的，且$x \prec y$（即$x \preccurlyeq y \wedge x \neq y$），但不存在$z \in A$，使得$x \prec z \prec y$，则称$y$覆盖$x$。

哈斯图

根据偏序关系的特点，可以将偏序关系的关系图画的简单些，就是哈斯图。哈斯图具体画法为:

1. 省去关系图中每个顶点处的环;
2. 若$x \prec y$且y覆盖x，将代表y的顶点放在代表x的顶点之上，并在x与y 之间连线，省去有向边的箭头，使其成为无向边，若$x \prec y$但y不覆盖x，则省掉x与y顶点之间的连线。

例

画出下列各偏序关系的哈斯图:

1. $\langle A, |\rangle$，其中$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15\}$;
2. $\langle \mathcal{A}, \subseteq\rangle$，其中$\mathcal{A} = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}\}$为$A = \{a, b, c\}$的子集族。

全序关系与全序集

定义

设$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为偏序集，若$\forall x, y \in A$，$x$与$y$均可比，则称$\preccurlyeq$为$A$上的全序关系（或线序关系），此时称$\langle A, \preccurlyeq\rangle$为全序集。

- 设A为实数集的非空子集，则$\langle A, \leq\rangle$和$\langle A, \geq\rangle$均为全序集，即$\leq$和$\geq$是全序关系。
- 哈斯图为从下至上的一条线是全序关系的充分必要条件。

拟序关系与拟序集

定义

设$R \subseteq A \times A$且$A \neq \emptyset$，若R是反自反的和传递的，则称R为A上的拟序关系，常将R记成$\prec$，并称$\langle A, \prec \rangle$为拟序集。

定理

设$\preccurlyeq$为非空集合A上的偏序关系，$\prec$为A上的拟序关系，则

1. $\prec$是反对称的;
2. $\preccurlyeq - I_A$为A上的拟序关系;
3. $\prec \cup I_A$为A上的偏序关系。

拟序关系与偏序关系的哈斯图在画法上完全相同，只是前者的各顶点处均无环，这与关系表达式是一致的，而后者则是省掉了各顶点处的环。

拟序关系

例

- A为实数集的非空子集，$<=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x<y\}$和$>=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in A\wedge x>y\}$都是拟序关系，相应的拟序集为$\langle A,<\rangle$和$\langle A,>\rangle$。
- B为$\mathbb{Z}_+$的子集，$|'=\{\langle x,y\rangle \mid x,y\in B\wedge x|y\wedge x\neq y\}$是拟序关系，相应的拟序集为$\langle B,|'\rangle$。

三歧性

定理

设$\prec$为非空集合A上的拟序关系，$\forall x, y \in A$，则

1. $x \prec y$，$x = y$，$y \prec x$三式中至多有一式成立；
2. 若$(x \prec y \vee x = y) \wedge (y \prec x \vee y = x)$，则$x = y$。

定义

1. 设$\prec$为非空集合A上的拟序关系，若$\forall x, y \in A$，$x \prec y$，$x = y$，$y \prec x$三式中有且仅有一式成立，则称$\prec$ 具有三歧性。
2. 设$\prec$为非空集合上的拟序关系，且$\prec$满足三歧性，则称$\prec$为A上的拟线序关系（或拟全序关系），称$\langle A, \prec \rangle$为拟线序集。

$\prec$为A上的拟线序关系，即$\forall x, y \in A$，若$x \neq y$，则$x \prec y$，$y \prec x$中有且只有一式成立，$\prec$的哈斯图也是“一条线”。

最小（大）元与极小（大）元

定义

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为一个偏序集，$B \subseteq A$。

1. 若存在$y \in B$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$，则称$y$为$B$的最小元;
2. 若存在$y \in B$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$，则称$y$为$B$的最大元;
3. 若存在$y \in B$，使得$\forall x(x \in B \wedge x \preccurlyeq y \rightarrow x = y)$，则称$y$为$B$的极小元;
4. 若存在$y \in B$，使得$\forall x(x \in B \wedge y \preccurlyeq x \rightarrow x = y)$，则称$y$为$B$的极大元。

对任意的$\langle A, \preccurlyeq \rangle$，$B \subseteq A$,

- B的最大（小）元，一定是B的极大（小）元，若B的最大（小）元存在，则一定是惟一的。
- 若B是有穷集，则B的极大（小）元是一定存在的，并且可能有多个，但最大元和最小元不一定存在。

界和确界

定义

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为一个偏序集，$B \subseteq A$。

1. 若存在$y \in A$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow x \preccurlyeq y)$，则称$y$为$B$的上界。
   设$C = \{y \mid y$是B的上界$\}$，若C存在最小元，则称它为B的最小上界或上确界。
2. 若存在$y \in A$，使得$\forall x(x \in B \rightarrow y \preccurlyeq x)$，则称$y$为$B$的下界。
   设$D = \{y \mid y$是B的下界$\}$，若D存在最大元，则称它为B的最大下界或下确界。

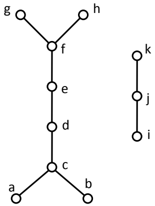
- B的上界和下界不一定存在;
- B的上界和下界存在时，上确界和下确界也不一定存在。

链和反链

定义

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为一个偏序集，$B \subseteq A$。

1. 若对于$\forall x, y \in B$，x与y均可比，则称B为A中的一条链，B中元素个数称为链的长度。
2. 若对于$\forall x, y \in B$且$x \neq y$，则x与y均不可比，则称B为A中的一条反链，B中元素个数称为反链的长度。



- 左图所示为偏序集$\langle A, \preccurlyeq \rangle$的哈斯图，其中$A = \{a, b, \cdots, k\}$。
- $B_1 = \{a, c, d, e\}$为一条长度为4的链。
- $B_2 = \{a, e, h\}$为一条长度为3的链。
- $B_3 = \{g, h, k\}$为一条长度为3的反链。
- $B_4 = \{a\}$既是长度为1的链，又是长度为1的反链，而$B_5 = \{a, b, g, h\}$既不是链，也不是反链。

链和反链

定理

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为一个偏序集，若$A$中最长链的长度为$n$，则
(1) A中存在极大元;
(2) A存在n个划分块的划分，每个划分块都是反链。

推论

设$\langle A, \preccurlyeq \rangle$为一个偏序集，若$A$中元素为$mn+1$个，则$A$中存在长度为$m+1$的反链，或存在长度为$n+1$的链。

良序关系和良序集

定义

设$\langle A, \prec\rangle$为一个拟全序集，若对于A的任何非空子集B均有最小元，则称$\prec$ 为良序关系，$\langle A, \prec\rangle$为良序集。

例

设$A \subseteq \mathbb{N}$，则$\langle A, <\rangle$为良序集，其中$<$为小于关系，而$\langle \mathbb{Z}, <\rangle$、$\langle \mathbb{Z}, >\rangle$都不是良序集。

作业

设A为一个非空集合。证明:

1. 设R为A上的任意一个等价关系，则对应R的商集A/R为A的一个划分;
2. 设A为A的一个划分，令$R_{\mathcal{A}} = \{\langle x, y\rangle \mid x, y \in A \wedge x, y$属于$\mathcal{A}$的同一划分块$\}$，则$R_{\mathcal{A}}$为$A$上的等价关系。