

# Задача о паросочетаниях. Венгерский алгоритм

Над текстом работала: Кашапова Ольга

## Введение

Что такое “Венгерский алгоритм”. Это алгоритм, который способен решать задачу о паросочетаниях. Он также называется и “Алгоритмом Куна”, отсюда и его новое название - Кун был венгром. Его суть в том, что нужно найти решение задачи о назначениях, то есть, например, назначить работников на должности при минимальной заработной плате им от работодателя.

## Демонстрация работы алгоритма

### Этап 1

Итак, у нас есть матрица смежности графа. Для наглядности разберём этот алгоритм на примере. Суть в том, чтобы взять такие стоимости рёбер в матрице смежностей, чтобы они давали минимальную (максимальную) сумму, при этом на одной строке или в одном столбце не может быть более одного выбранного ребра.

|    |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|
| 32 | 28 | 4 | 26 | 4 |
| 17 | 19 | 4 | 17 | 4 |
| 4  | 4  | 5 | 4  | 4 |
| 17 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| 21 | 16 | 4 | 13 | 4 |

Если произвольно выбрать минимальную стоимость рёбер, начав с конца, то получится следующее:

|    |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|
| 32 | 28 | 4 | 26 | 4 |
| 17 | 19 | 4 | 17 | 4 |
| 4  | 4  | 5 | 4  | 4 |
| 17 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| 21 | 16 | 4 | 13 | 4 |

В итоге мы получим:  $17+28+4+4+4 = 57$  Многовато, не находите ли?

Так давайте же разберёмся, как находить эти паросочетания!

## Этап 2

В части 1 этого алгоритма необходимо будет из каждой строки вычесть минимальное число, находящееся в ней, чтобы в них оказались "0". При этом должно оказаться так, что в каждом столбце также будет хотя бы один "0". Иначе - нужно также вычесть минимальное из столбцов, которые не содержат "0".

На матрице это будет выглядеть так, причём во всех столбцах окажутся "0":

|    |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|
| 28 | 24 | 0 | 22 | 0 |
| 13 | 15 | 0 | 13 | 0 |
| 0  | 0  | 1 | 0  | 0 |
| 13 | 10 | 0 | 10 | 0 |
| 17 | 12 | 0 | 9  | 0 |

Вот как-то так!

Но давайте убедимся в том, что эта матрица смежности не даёт нам совершенного паросочетания (сочетания, которое соединяет всё и вся). Для этого существует два способа.

**Первый** - неформальный - если посмотреть на матрицу, то можно сказать, что нельзя выбрать нули таким образом, чтобы они "выбивали" одновременно все строки и столбцы, при этом не задевая других (короче говоря, как в sudoku одно число на одну строку и на один столбец).

**Второй** - формальный - для того, чтобы узнать количество совершенных (читать - нужных нам) паросочетаний в графе по матрице смежности, нам нужно посчитать перманент матрицы, но не этой, а той, которая получается заменой "0" на "1", а чисел, больших "0" на "0".

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

Нам нужно посчитать перманент этой матрицы, и если он равен “0”, то и решений пока нет. Перманент - это как детерминант, только миноры не меняют знак, то есть все слагаемые будут с “+”. В данном примере, если раскладывать по 1 столбцу, а затем по второму (уже в матрице 4x4), то можно заметить, что в перманенте будут “0”, то есть здесь пока решений не будет ( $1 \cdot (0 \cdot (...) + 0 \cdot (...) + 0 \cdot (...) + 0 \cdot (...))$ ).

<https://ru.wikipedia.org/wiki/Перманент> - что такое перманент.

### Этап 3

Итак, что же нам требуется сделать здесь? Если вкратце, то здесь нужно вычеркнуть строки и столбцы, при этом должно быть минимальное число вычёркиваний. Я придумал, как это сделать проще. Смотрите, берём какой-нибудь “0” и смотрим, что в данной клетке лучше вычеркнуть, если строку, то вычёркиваем строку, если столбец, то вычёркиваем столбец, и повторяем с невычеркнутыми “0”. Лучше всего начинать со строк и столбцов, где больше нулей. Например, для левого среднего верхнего нуля в таблице выше проще вычеркнуть строку - так и делаем (далее - серым обозначены вычеркнутые столбцы).

|    |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|
| 28 | 24 | 0 | 22 | 0 |
| 13 | 15 | 0 | 13 | 0 |
| 0  | 0  | 1 | 0  | 0 |
| 13 | 10 | 0 | 10 | 0 |
| 17 | 12 | 0 | 9  | 0 |

Теперь внимание, сейчас нам нужно, во-первых, найти на оставшихся, “белых” в данном случае клетках наименьшее число и вычесть из этих белых клеток, получив где-то ещё “0”. Во-вторых, это самое наименьшее число мы должны (!!!) прибавить на пересечения вычеркнутых строк и столбцов, то есть на пересечении “серых” строк и столбцов в данном случае.

Здесь это будет число “9”. Мы вычтем “9” из “белых” клеток, но прибавим к “1” и “0” на пересечении “серых”. В итоге мы получим следующую матрицу.

|    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|---|
| 19 | 15 | 0  | 13 | 0 |
| 4  | 6  | 0  | 4  | 0 |
| 0  | 0  | 10 | 0  | 9 |
| 4  | 1  | 0  | 1  | 0 |
| 8  | 3  | 0  | 0  | 0 |

Проверим.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |

Аналогично предыдущему случаю разложим матрицу по первой строке и получим "0"  
 $(1 \cdot (0 \cdot (\dots) + 0 \cdot (\dots) + 0 \cdot (\dots) + 0 \cdot (\dots)))$ .

## Повторение

Повторим алгоритм.

|    |    |    |    |   |
|----|----|----|----|---|
| 19 | 15 | 0  | 13 | 0 |
| 4  | 6  | 0  | 4  | 0 |
| 0  | 0  | 10 | 0  | 9 |
| 4  | 1  | 0  | 1  | 0 |
| 8  | 3  | 0  | 0  | 0 |

Минимальное число в "белых" клетках - "1". Вычтем 1 из "белых" клеток, добавим к пересечения "серых".

|    |    |    |    |    |
|----|----|----|----|----|
| 18 | 14 | 0  | 12 | 0  |
| 3  | 5  | 0  | 3  | 0  |
| 0  | 0  | 11 | 0  | 10 |
| 3  | 0  | 0  | 0  | 0  |
| 8  | 3  | 1  | 0  | 1  |

Проверим.

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |

|   |   |   |   |   |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |

Разложим по 1 строке. В итоге получим  $1*1*1(1*1 + 1*1) = 1*2 = 2$ , то есть получим 2 совершенных паросочетания. Покажем их.

Ответ

Паросочетание 1.

|    |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|
| 32 | 28 | 4 | 26 | 4 |
| 17 | 19 | 4 | 17 | 4 |
| 4  | 4  | 5 | 4  | 4 |
| 17 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| 21 | 16 | 4 | 13 | 4 |

Паросочетание 2.

|    |    |   |    |   |
|----|----|---|----|---|
| 32 | 28 | 4 | 26 | 4 |
| 17 | 19 | 4 | 17 | 4 |
| 4  | 4  | 5 | 4  | 4 |
| 17 | 14 | 4 | 14 | 4 |
| 21 | 16 | 4 | 13 | 4 |

В итоге получаем  $4 + 4 + 4 + 14 + 13 = 39$ . Это и будет нашим ответом.

Как выделять паросочетания в матрице - это отдельная тема, можно, например, искать единственные нули в строках или в столбцах, а затем уже выбирать из оставшихся.

## ВЕНГЕРСКИЙ МЕТОД

**Вход.** Матрица  $[c_{ij}]$  размера  $n \times n$  с неотрицательными целочисленными элементами.

**Выход.** Оптимальное полное паросочетание (представленное массивом *напарник*) в полном двудольном графе  $B = (V, U, E)$  с числом вершин  $|V| = |U| = n$  и стоимостями  $c_{ij}$ .

```
begin
for all  $v_i \in V$  do напарник $[v_i] := 0$ ,  $\alpha_i := 0$ ;
for all  $u_j \in U$  do напарник $[u_j] := 0$ ,  $\beta_j := \min_i \{c_{ij}\}$ ;
(comment: задание начальных значений)
for  $i := 1, \dots, n$  do (comment: повторить для  $n$  этапов)
begin
 $A := \emptyset$ ;
for all  $v \in V$  do свободная $[v] := 0$ ;
for all  $u \in U$  do невязка $[u] := \infty$ ;
for all  $v_i, u_j$  для которых  $v_i \in V$ ,  $u_j \in U$  и  $\alpha_i + \beta_j = c_{ij}$  do
if напарник $[u_j] = 0$  then свободная $[v_i] := u_j$ ;
else  $A := A \cup \{(v_i, \text{напарник}[u_j])\}$ ;
(comment: построение вспомогательного графа)
```

```
Q :=  $\emptyset$ ;
for all  $v_i \in V$  do
if напарник $[v_i] = 0$  then
begin
if свободная $[v_i] \neq 0$  then УВЕЛИЧЕНИЕ( $v_i$ ),
go to конецэтапа;
 $Q := Q \cup \{v_i\}$ ;
метка $[v_i] := 0$ ;
for all  $u_k \in U$  do
if  $0 < c_{ik} - \alpha_i - \beta_k < \text{невязка}[u_k]$  then
невязка $[u_k] := c_{ik} - \alpha_i - \beta_k$ , сосед $[u_k] := v_i$ ;
end;
```

поиск: while  $Q \neq \emptyset$  do  
begin  
пусть  $v_i$  — любая вершина из  $Q$ ;  
удалить  $v_i$  из  $Q$ ;  
for all непомеченные  $v_j \in V$ , такие, что  $(v_i, v_j) \in A$  do

```
begin
метка $[v_j] := v_i$ ;
 $Q := Q \cup \{v_j\}$ ;
if свободная $[v_j] \neq 0$  then УВЕЛИЧЕНИЕ( $v_j$ ),
go to конецэтапа;
for all  $u_k \in U$  do
if  $0 < c_{jk} - \alpha_j - \beta_k < \text{невязка}[u_k]$  then
невязка $[u_k] := c_{jk} - \alpha_j - \beta_k$ , сосед $[u_k] := v_j$ ;
end
```

end;  
МОДИФИЦИРОВАТЬ;  
go to поиск

конецэтапа: end

end

procedure МОДИФИЦИРОВАТЬ

(comment: она вычисляет  $\theta_i$ , пересчитывает все  $\alpha$  и  $\beta$  и привлекает новые вершины для продолжения поиска)

## Ссылки на использованные источники

<https://www.youtube.com/watch?v=HXPALIZzxTI> - хорошее видео об основах венгерского алгоритма, дано объяснение, однако идею с графом (точнее, с построением, было бы неэффективно), интересный момент про перманент матрицы, позволяющий определить наличие решений.

<https://habr.com/ru/post/422009/> - статья о венгерском алгоритме на пальцах, из неё стоит взять идею о том, как лучше заменить этап с построением графа и обвода

строк/столбцов вычёркиванием (что гораздо эффективнее и проще реализовать в программе).

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Венгерский\\_алгоритм](https://ru.wikipedia.org/wiki/Венгерский_алгоритм) - статья на Wikipedia.

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача\\_о\\_назначениях](https://ru.wikipedia.org/wiki/Задача_о_назначениях) - статья на Wikipedia.

# Данная задача о паросочетаниях

## Формулировка задания

### Формулировка задания

Задача: распределить имеющиеся силы (сотрудников) по поступившим задачам.

Исходные данные:

1. Список поступивших задач (Приложение 1).
2. Расчет имеющихся сил (Приложение 2).

Необходимо предложить варианты распределения имеющихся сил с учетом следующих целевых функций:

- минимальное время выполнения всех задач;
- минимальное время выполнения срочных задач;
- минимальное время выполнения важных задач;
- максимальное качество выполнения всех задач;
- максимально быстрое выполнение особо важной задачи (особо важных задач);
- максимально качественное выполнение особо важной задачи (особо важных задач);
- максимально равномерная нагрузка на всех сотрудников;
- распределение в зависимости от важности задач;
- распределение в зависимости от срока задач;
- минимальное время выполнения всех задач без ограничения продолжительности рабочего времени (но не более 36 часов подряд, в том числе с учетом общей продолжительности перерывов 6 часов);
- минимальное время выполнения всех задач с привлечением заместителя начальника отдела не более 4 часов в стандартный рабочий день (при важности задачи 3 можно привлекать максимально).

При распределении сил учитывать, что:

- начальник отдела не занимается непосредственным исполнением документов, а выполняет административные и редакторские функции;
- расчетно-плановый период – 30 суток;
- важность задачи подразумевает приоритет исполнения по качеству, но без ущерба для сроков выполнения остальных задач.
- одну задачу можно распределять на несколько сотрудников, владеющих одинаковым языком (делить по объему).



# Исходные данные

Расчет имеющихся сил

| Подразделение |                                     |                                |                                       |                              |                                   |            |
|---------------|-------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------|------------------------------|-----------------------------------|------------|
| №             | Должность                           | ФИО                            | Языки                                 | Качество работы<br>(мах. 10) | Скорость работы<br>(листов в час) | Примечания |
| 1             | Начальник отдела                    | ИВАНОВ<br>Иван Иванович        | Английский<br>Немецкий                |                              |                                   |            |
| 2             | Заместитель<br>начальника<br>отдела | ПЕТРОВ<br>Петр Петрович        | Английский<br>Французский             | 9<br>8                       | 1<br>0,75                         |            |
| 3             | Начальник<br>группы                 | ЕГОРОВ<br>Егор Егорович        | Испанский<br>Английский               | 7<br>6                       | 1<br>0,5                          |            |
| 4             | Начальник<br>группы                 | ТИМОФЕЕВ<br>Тимофей Тимофеевич | Немецкий<br>Английский                | 5<br>5                       | 1,5<br>1,5                        |            |
| 5             | Старший<br>сотрудник отдела         | СИДОРОВ<br>Сидр Сидорович      | Английский<br>Португальский           | 8<br>9                       | 1<br>1                            |            |
| 6             | Старший<br>сотрудник отдела         | АНДРЕЕВ<br>Андрей Андреевич    | Итальянский                           | 8                            | 1                                 |            |
| 7             | Сотрудник отдела                    | МИХАЙЛОВ<br>Михаил Михайлович  | Польский<br>Английский                | 4<br>7                       | 0,5<br>0,75                       |            |
| 8             | Сотрудник отдела                    | ДАНИЛОВ<br>Даниил Даниилович   | Английский<br>Французский<br>Немецкий | 7<br>6<br>8                  | 0,75<br>0,75<br>1                 |            |
| Усиление      |                                     |                                |                                       |                              |                                   |            |
| 9             | Замначальника<br>отдела             | АРТЕМОВ<br>Артем Артемович     | Французский<br>Английский             | 9<br>3                       | 1,25<br>0,5                       |            |
| 10            | Старший<br>сотрудник отдела         | СЕРГЕЕВ<br>Сергей Сергеевич    | Английский<br>Итальянский             | 6<br>7                       | 1<br>0,75                         |            |
| 11            | Сотрудник отдела                    | ГАВРИЛОВ<br>Гавриил Гаврилович | Английский<br>Испанский               | 8<br>4                       | 1<br>1                            |            |

Список поступивших задач

| №   | Тип     | Язык          | Объем<br>(листов) | Сложность<br>(мах. 10) | Важность<br>(мах. 3) | Сроки<br>(дней) | Примечания |
|-----|---------|---------------|-------------------|------------------------|----------------------|-----------------|------------|
| 1.  | Перевод | Английский    | 5                 | 5                      | 3                    | 1               |            |
| 2.  | Перевод | Английский    | 15                | 6                      | 1                    | 2               |            |
| 3.  | Перевод | Французский   | 10                | 9                      | 1                    | 5               |            |
| 4.  | Перевод | Немецкий      | 40                | 5                      | 2                    | 25              |            |
| 5.  | Перевод | Испанский     | 12                | 4                      | 2                    | 4               |            |
| 6.  | Перевод | Французский   | 17                | 6                      | 1                    | 15              |            |
| 7.  | Перевод | Итальянский   | 9                 | 7                      | 1                    | 21              |            |
| 8.  | Перевод | Английский    | 187               | 4                      | 2                    | 7               |            |
| 9.  | Перевод | Английский    | 45                | 5                      | 1                    | 1               |            |
| 10. | Перевод | Английский    | 3                 | 5                      | 1                    | 2               |            |
| 11. | Перевод | Английский    | 12                | 5                      | 2                    | 25              |            |
| 12. | Перевод | Португальский | 6                 | 7                      | 2                    | 18              |            |
| 13. | Перевод | Португальский | 15                | 6                      | 2                    | 14              |            |
| 14. | Перевод | Португальский | 11                | 4                      | 3                    | 4               |            |
| 15. | Перевод | Немецкий      | 87                | 6                      | 2                    | 30              |            |

|     |         |             |    |   |   |    |  |
|-----|---------|-------------|----|---|---|----|--|
| 16. | Перевод | Немецкий    | 32 | 6 | 3 | 10 |  |
| 17. | Перевод | Немецкий    | 2  | 5 | 1 | 7  |  |
| 18. | Перевод | Английский  | 34 | 4 | 2 | 28 |  |
| 19. | Перевод | Французский | 60 | 5 | 1 | 7  |  |
| 20. | Перевод | Английский  | 55 | 6 | 2 | 14 |  |
| 21. | Перевод | Английский  | 9  | 5 | 1 | 10 |  |
| 22. | Перевод | Английский  | 7  | 5 | 3 | 5  |  |
| 23. | Перевод | Французский | 9  | 8 | 1 | 1  |  |
| 24. | Перевод | Испанский   | 23 | 6 | 2 | 7  |  |
| 25. | Перевод | Английский  | 42 | 9 | 1 | 10 |  |
| 26. | Перевод | Итальянский | 12 | 7 | 2 | 21 |  |
| 27. | Перевод | Английский  | 15 | 6 | 1 | 3  |  |
| 28. | Перевод | Французский | 7  | 5 | 1 | 3  |  |
| 29. | Перевод | Французский | 9  | 5 | 3 | 4  |  |
| 30. | Перевод | Английский  | 4  | 4 | 2 | 5  |  |
| 31. | Перевод | Немецкий    | 7  | 5 | 3 | 7  |  |
| 32. | Перевод | Испанский   | 2  | 6 | 2 | 2  |  |

## Решение

| должность | имя      | языки       | Качество | ск   | задачи   |
|-----------|----------|-------------|----------|------|--|
| зам       | петров   | английский  | 9        | 1    | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|           |          | французский | 8        | 0,75 | 3, 6, 19, 23, 28, 29                           |
| нач       | егоров   | испанский   | 7        | 1    | 5, 24, 32                                      |
|           |          | английский  | 6        | 0,5  | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
| нач       | timoфеев | немецкий    | 5        | 1,5  | 4, 15, 16, 17, 31                              |

|     |          |               |   |      |  |
|-----|----------|---------------|---|------|--|
|     |          | английский    | 5 | 1,5  | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     | сидоров  | английский    | 8 | 1    | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     |          | португальский | 9 | 1    | 12, 13, 14                                     |
|     | андреев  | итальянский   | 8 | 1    | 7, 26  |
|     | михайлов | польский      | 4 | 0,5  |  |
|     |          | английский    | 7 | 0,75 | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     | данилов  | английский    | 7 | 0,75 | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     |          | французский   | 6 | 0,75 | 3, 6, 19, 23, 28, 29                           |
|     |          | немецкий      | 8 | 1    | 4, 15, 16, 17, 31                              |
| зам | артемов  | французский   | 9 | 1,25 | 3, 6, 19, 23, 28, 29                           |
|     |          | английский    | 3 | 0,5  | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     | сergieв  | английский    | 6 | 1    | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     |          | итальянский   | 7 | 0,75 | 7, 26  |
|     | гаврилов | английский    | 8 | 1    | 1, 2, 8, 9, 10, 11, 18, 20, 21, 22, 25, 27, 30 |
|     |          | испанский     | 4 | 1    | 5, 24, 32                                      |

## Ссылки на использованные источники (транспортная задача)

[https://studme.org/80790/ekonomika/otkrytaya\\_model\\_transportnoy\\_zadachi](https://studme.org/80790/ekonomika/otkrytaya_model_transportnoy_zadachi) - открытая транспортная задача

<http://matecos.ru/mat/matematika/otkrytaya-transportnaya-zadacha-2.html> - тоже открытая транспортная задача

<https://www.resolventa.ru/data/metodstud/transproblem.pdf>

Мне кажется, что КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ У ПЕРЕВОДЧИКОВ - это “имеющийся груз”, а КОЛИЧЕСТВО СТРАНИЦ У ЗАКАЗОВ - это “заказанный груз”, а то, что будет стоять

непосредственно в матрице - это деление одного на другое, то есть дни, или стоимость "перевозки". Либо можно подставить вместо этого КАЧЕСТВО.

[https://ru.wikipedia.org/wiki/Транспортная\\_задача](https://ru.wikipedia.org/wiki/Транспортная_задача) - вот это, так как там предусматривается распределение на несуществующих исполнителей.

<https://habr.com/ru/post/63982/> - формулировка задачи о назначениях