СЕЧЕНИЕ ПИРАМИДЫ

Учебно-методическое пособие

Лысков А. И., Максимова О. В., Бурлуцкая Н. Б.

Часть 1 и 2

Методы построения вспомогательных проекций

1. Общие понятия

1.1. Проекции прямой, плоскости или фигуры, находящейся в случайном положении относительно плоскостей проекций, не всегда удобны для решения той или иной конкретной задачи. Например, проекции отрезка, расположенного наклонно ко всем плоскостям проекций, не дают непосредственного представления о натуральной его длине. Можно сказать, что в данном случае проекции отрезка «неудобны» для решения поставленного вопроса. Между тем, если бы тот же отрезок был параллелен одной из плоскостей проекций, то проектировался бы на эту плоскость без искажения, и мы могли бы судить о его действительной длине без всяких дополнительных построений. При таком положении отрезка можно считать его проекции «удобными» для решения интересующего нас вопроса.

Если на эпюре изображена тем или другим способом плоскость общего положения, то без специальных построений нельзя сказать, какой угол образует она с плоскостью $П_1$ или с плоскостью $П_2$. Между тем, если бы та же плоскость была проецирующей, то наклон одного из ее следов к оси X непосредственно давал бы величину интересующего нас угла. Первое из этих двух положений плоскости неудобно для решения данного вопроса, второе — удобно.

Можно привести много примеров подобного рода.

Как же следует поступить в том случае, если основные две проекции (на плоскости $П_1$ и $П_2$) неудовлетворительны в каком-либо отношении, например, не дают ясного представления о форме оригинала или затрудняют решение какой-либо частной задачи? Необходимо прибегнуть к построению новых, вспомогательных проекций, упрощающих решение задачи или помогающих выяснить интересующие нас подробности. Так, например, две проекции цилиндра на плоскости $П_1$ и $П_2$ не позволяют установить форму оригинала. Построение вспомогательной проекции на плоскость $П_3$ устраняет все сомнения. Эта вспомогательная проекция облегчает решение различных задач на поверхности цилиндра.

Другим методом построения вспомогательных изображений можно воспользоваться, когда нужно найти точку пересечения профильной прямой с плоскостью. Проекции профильных прямых на $П_1$ и $П_2$ вообще можно считать «неудобными», их проекции вертикальны. Для получения вспомогательного, более удобного изображения можно изменить направление проектирования, т. е. вместо ортогонального проектирования воспользовались косоугольным. При этом нужно построить вспомогательную проекцию на одной из основных плоскостей (например, на $П_1$), и на биссекторной плоскости *IV* четверти (что несколько проще, но необязательно).

1.2. Существуют и другие методы построения вспомогательных проекций. Они основаны на следующем соображении.

Очевидно, если при заданном положении предмета относительно плоскостей $П_1$ и $П_2$ получаются неудовлетворительные изображения, то вместо изменения направления проектирования можно изменить положение проектируемого предмета.

Для получения более выгодного положения проектируемого предмета относительно плоскостей проекций можно действовать двояко: либо повернуть оригинал в более удобное положение (например, при желании определить истинную величину и форму плоской фигуры повернуть ее в положение, параллельное одной из плоскостей проекций), либо, наоборот, оставив сам предмет неподвижным, переместить одну или обе плоскости проекций, установив их так, чтобы полученные на них новые проекции были более удобны для решения задачи.

В обоих случаях заданные проекции предмета изменяются. Возникает вопрос, как выполнить это преобразование на эпюре, т. е. каким образом от заданных проекций перейти к новым, полученным в результате поворота проектируемого предмета или перемены плоскостей проекций? Способы выполнения этих действий на эпюре и рассматриваются далее.

2. Метод перемены плоскостей проекций

2.1. Пусть имеется система двух взаимно перпендикулярных плоскостей $П_1$ и $П_2$ (будем в дальнейшем сокращенно обозначать такую систему $П_1/П_2$) и точка в пространстве *A* (*рис. 1*).

Проекции точки: горизонтальная — A_1, фронтальная—A_2.

Положим, что по каким-либо соображениям мы нашли целесообразным заменить плоскость $П_2$ другой в е р т и к а л ь н о й плоскостью проекций $П_4$, оставив прежнюю плоскость $П_1$. Плоскости $П_4$ и $П_1$ также взаимно перпендикулярны и потому могут быть приняты за новую систему плоскостей

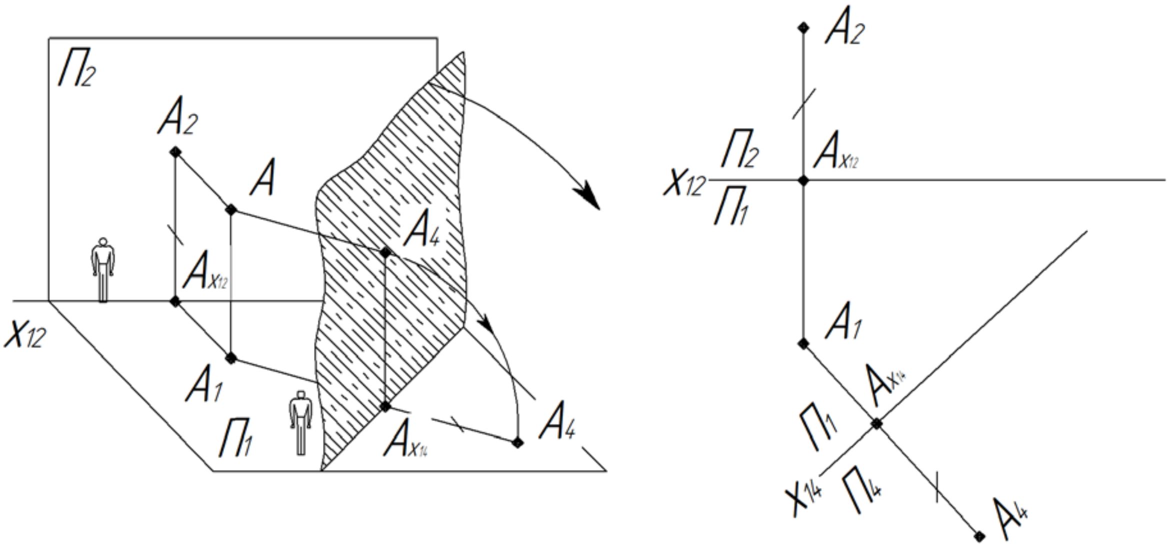


Рис. 1

проекций $П_1/П_4$ Вся разница состоит в том, что зритель, который раньше предполагался в положении *I*, должен теперь переместиться в положение *II* и стать лицом к плоскости $П_4$, так чтобы точка *A* была по-прежнему между ним и вертикальной плоскостью проекций.

Линия пересечения плоскостей $П_1$ и $П_4$, т. е. X_{14} будет теперь новой осью проекций.

Найдем ортогональные проекции точки *A* в новой системе $П_1/ П_4$.

Очевидно, замена плоскости $П_2$ совершенно не отражается на горизонтальной проекции точки A_1: так как плоскость $П_1$ осталась прежняя, то и проекция точки *A* на эту плоскость не изменит своего положения.

Для получения новой вертикальной проекции точки *A* на плоскости $П_2$ надо опустить из *A* перпендикуляр на плоскость $П_2$, который и определит искомую проекцию A_2. Итак, вместо проекций A_1 и A_2 в системе $П_1/ П_2$ мы имеем теперь проекции A_1 и A_4 в системе $П_1/ П_4$.

Легко установить связь между старыми и новыми проекциями. Расстояние точки *A* от плоскости $П_1$ не изменилось, так как эта плоскость осталась в прежнем положении.

Следовательно, расстояние новой проекции от новой оси равно расстоянию заменяемой проекции от предыдущей оси.

Для перехода к эпюре представим теперь, что плоскость $П_1$, повернута, как на шарнире, вокруг новой оси X_{24} и совмещена с плоскостью $П_2$. Тогда и новая вертикальная проекция A_4 совместится с плоскостью $П_4$ и при этом окажется на одном перпендикуляре к оси X_{14}, с проекцией A_2.

На *рис. 1* справа показаны построения, которые надо произвести на эпюре, чтобы от изображения точки в системе $П_1/\ П_2$ (проекции A_1 и A_2) перейти к изображению ее в системе $П_1/\ П_4$ (проекции A_1 и A_2). Эти построения сводятся к следующему: из A_2 надо опустить перпендикуляр на новую ось X_{14} и отложить на нем расстояние $A_{X12}\,A_2 = A_{X14}\,A_4$.

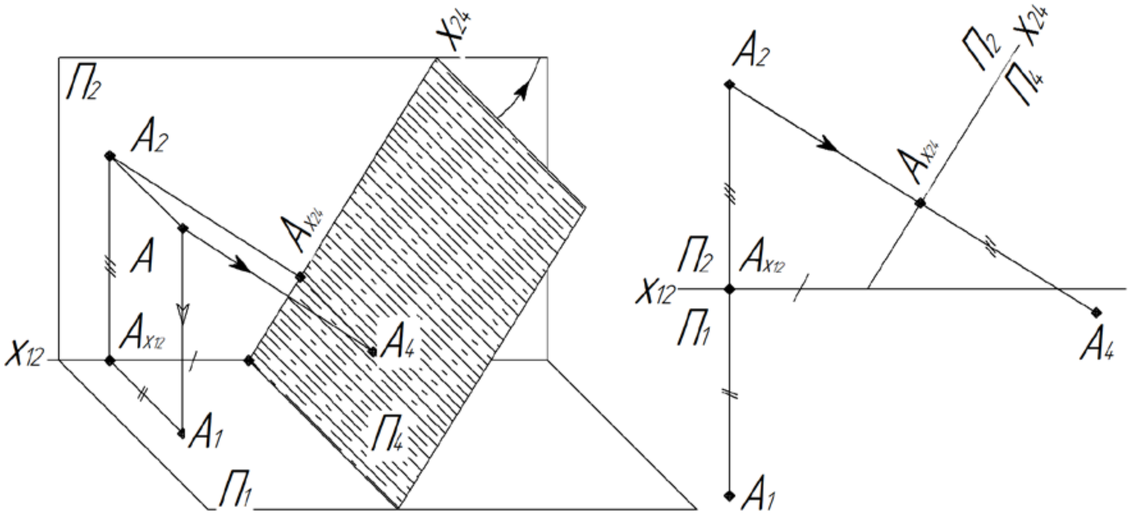


Рис. 2

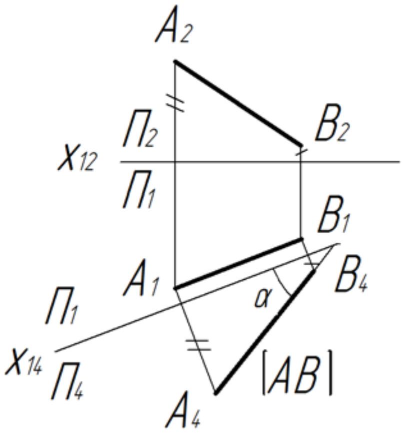
2.2. К аналогичным заключениям можно прийти и при замене горизонтальной плоскости $П_1$ какой-либо другой плоскостью $П_4$, перпендикулярной к плоскости $П_2$ (*рис. 2*). Новая плоскость $П_4$ образует с прежней плоскостью $П_2$ новую систему $П_2/П_4$. Линия пересечения их дает новую ось проекций X_{24}.

Плоскость $П_4$ не является уже «горизонтальной», но название это понимается условно и плоскости проекций могут занимать в пространстве любое положение.

При перемене плоскости $П_1$ вертикальная проекция A_2 точки A не изменяется, равно как и расстояние точки A от плоскости $П_2$, т. е. $A_{X12}\,A_2 = A_{X24}\,A_4$.

Поэтому для построения новой горизонтальной проекции A_4 надо из A_2 опустить перпендикуляр на ось X_{24} и отложить на нем расстояние $A_{X12}\,A_2$.

2.3. Объединяя оба правила в одно, можно сформулировать его так: для построения на эпюре новой проекции точки при перемене одной из плоскостей проекций надо опустить перпендикуляр на новую ось из той проекции точки, которая не меняется, и отложить на нем расстояние от заменяемой проекции до предыдущей оси. Теперь мы можем с новой точки зрения истолковать знакомое уже нам проектирование на профильную плоскость $П_3$. Очевидно, его можно рассматривать как один из случаев перемены плоскостей проекций.



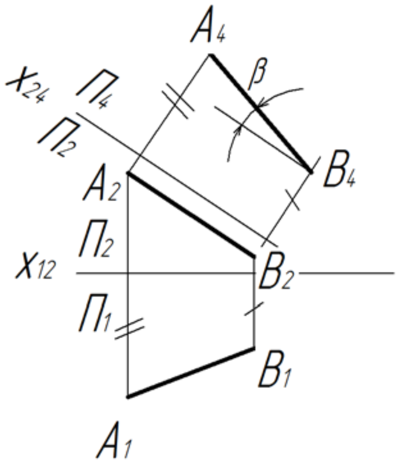


Рис. 3 *Рис. 4*

Зная, как строятся при перемене плоскостей проекций новые проекции отдельных точек, можно построить новые проекции и любой группы точек, т.е. линии, плоскости или фигуры.

2.4. Заметим, что нельзя менять обе плоскости проекций сразу. Новая плоскость проекций должна сохранять перпендикулярность к остающейся плоскости. Поэтому замену плоскостей можно производить только последовательно, сначала изменить одну плоскость, затем другую. Если требуется для решения задачи, эту операцию можно повторять неограниченное число раз.

2.5. На *рис. 3* показано построение новой фронтальной проекции отрезка *AB* при замене плоскости $П_2$ плоскостью $П_4$. Цель этого преобразования — определение истинной длины отрезка. Новую фронтальную плоскость $П_4$ надо установить параллельно *AB*. На эпюре это выразится в том, что новая ось проекций X_{14} будет параллельна горизонтальной проекции A_1B_1. Где именно провести на чертеже новую ось совершенно безразлично, лишь бы она была параллельна *AB*. Выбрав положение новой оси X_{14}, остается построить новые фронтальные проекции A_4 и B_4 концевых точек отрезка, руководствуясь вышеизложенным правилом. Рассматривая полученное расположение проекций A_1B_1 и A_4B_4 отрезка относительно новой оси X_{14}, легко видеть, что в новой системе $П_1/П_4$ отрезок AB является горизонталью (т.е. параллелен плоскости $П_4$), следовательно, проектируется на плоскость $П_4$, в натуральную величину.

Рис. 4 показывает, как решается та же задача переменной горизонтальной плоскости проекций: новая ось X_{24} проведена параллельно A_2B_2. Новая горизонтальная проекция A_4B_4 в системе $П_2/П_4$ дает натуральную величину отрезка AB. Вместе с тем определились и действительные величины углов α и β, которые образует прямая AB с плоскостями проекций $П_1$ и $П_2$.

При этом, если концы данного отрезка расположены в разных четвертях пространства, как на *рис. 5*, необходимо обращать внимание на знаки координат: в случае одинаковых знаков откладывать соответствующие расстояния в одну и ту же сторону от новой оси, в случае разных знаков — в обе стороны от новой оси. В примере (*рис. 5)* точка *A* данного отрезка расположена в *IV* четверти, точка *B* — в *I* четверти. Такое относительное расположение точек сохранилось и после замены плоскости $П_2$ на $П_4$. В новой системе $П_1/П_4$ точка *A* тоже расположена в *IV* четверти, точка *B* — в *I* четверти.

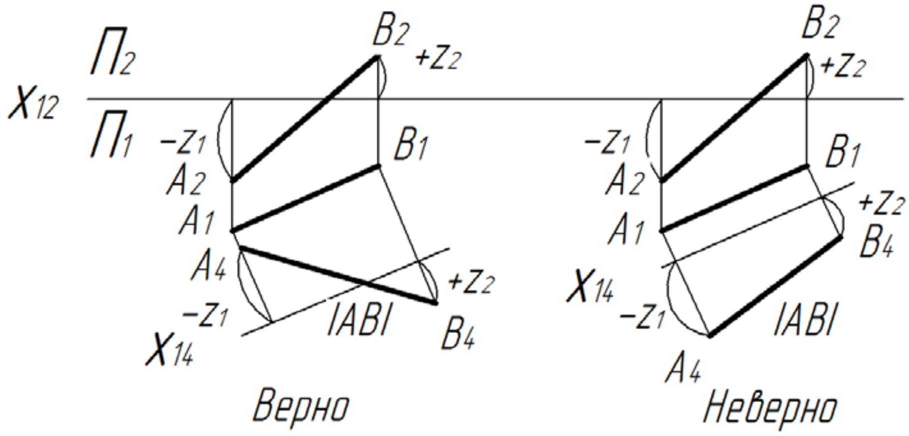


Рис. 5

Справа на *рис. 5* показало неверное решение: аппликаты точек *A* и *B*, имеющие разные знаки, отложены в одну сторону от оси X_{14}, вследствие чего относительное положение точек *A и B* нарушилось.

2.6. На *рис.6* отрезок *AB* способом перемены плоскостей приведен в положение, перпендикулярное к новой горизонтальной плоскости проекций $П_5$. В отличие от предыдущей эта задача не может быть решена сразу одной заменой плоскости $П_1$. Необходимо предварительно изменить плоскость $П_2$ так, чтобы сделать AB // $П_4$. После этого заменяется плоскость $П_1$, причем, по смыслу задачи надо провести новую ось перпендикулярно к A_4B_4. В системе $П_4/П_5$ данная прямая проектируется в точку (проекции A_5 и B_5 совпадают), что и доказывает перпендикулярность AB к плоскости $П_5$.

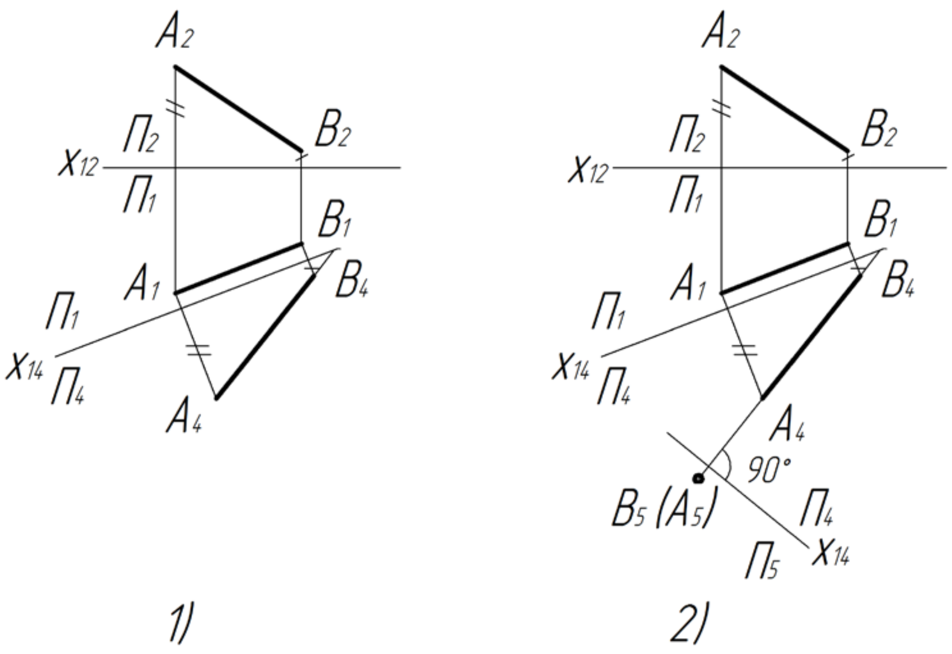


Рис. 6

Если нужно сделать заданную прямую перпендикулярной к плоскости $П_4$, необходимо предварительно привести ее в положение, параллельное горизонтальной плоскости $П_1$.

2.7. Посмотрим, как преобразуется при перемене плоскостей $П_1$ или $П_2$ изображение заданной плоскости. На *рис. 7* задана своими следами плоскость *P* общего положения. Требуется сделать данную плоскость проецирующей (например, фронтально проецирующей) в новой системе плоскостей проекций. Зная, что горизонтальный след фронтально проецирующей плоскости должен быть перпендикулярен к оси проекций, выбираем новую ось X_{14} перпендикулярно $P_{П1}$ и заменяем плоскость $П_2$ новой плоскостью $П_4$. Положение следа $P_{П1}$ не изменится при перемене плоскости $П_2$, но точка схода следов перейдет теперь на новую ось в точку P_{X14}.

Остается найти новое положение фронтального следа в системе $П_1/П_4$. С этой целью взята произвольная точка $(N_2,\ N_1)$ на старом следе $П_2$ и построена ее новая фронтальная проекция N_4 в системе $П_1/П_4$. Очевидно, след $P_{П2}$, будет проходить через N_4. Для построения его можно воспользоваться и любой другой точкой плоскости P, так как известно, что все вертикальные проекции точек, принадлежащих фронтально проецирующей плоскости, совпадают с вертикальным следом. Выполненное преобразование дает и величину угла α, составляемого плоскостью *P* с плоскостью *П₁*.

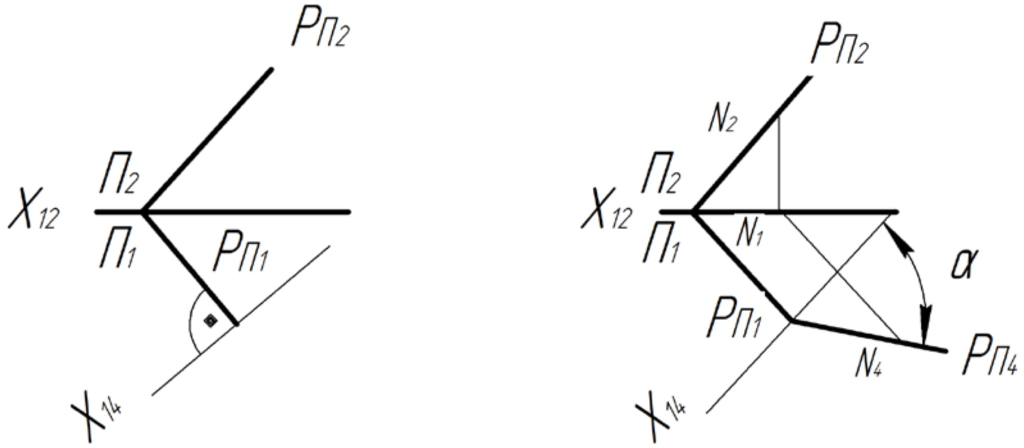


Рис. 7

Для более точного построения следа $P_{П2}$ надо брать точку (N_2, N_1) как можно дальше от точки схода P_{X14}.

2.8. На *рис. 8* та же задача выполнена для случая, когда на эпюре нет следов

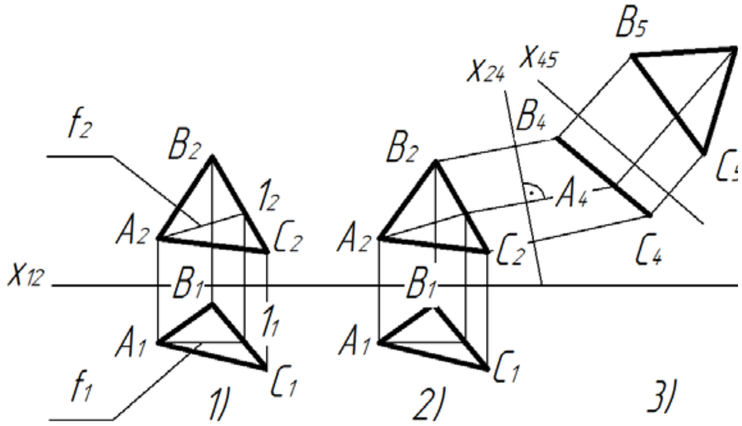


Рис. 8

плоскости: плоскость задана треугольником *ABC,* и требуется сделать ее горизонтально проецирующей. Для этого проводим фронталь плоскости *ABC*, т. е. прямую, параллельную этому следу. Новая ось X_{24}, проведенная перпендикулярно к фронтали, будет перпендикулярна и к отсутствующему фронтальному следу. Построив в системе $П_2/П_4$ новые горизонтальные проекции вершин треугольника A_4, B_4 и C_4, убеждаемся, что он спроецировался на плоскость $П_4$, в одну прямую линию. Это и есть признак того, что в системе

$П_2/П_4$ треугольник расположен в горизонтально проектирующей плоскости. Задача решена. Одновременно определился угол β, образуемый заданной плоскостью с плоскостью $П_2$.

2.9. На *рис. 8* построение продолжено с целью определить истинные размеры и форму треугольника *ABC.*

Для этого установлена новая фронтальная плоскость $П_5$ параллельная плоскости треугольника, т. е. на эпюре проведена новая ось проекций $X_{45} \parallel A_4B_4C_4$. Спроецировав треугольник на эту плоскость, мы и получим его истинную фигуру $A_5B_5C_5$.

Как видим, для построения истинной формы и размеров плоской фигуры методом перемены плоскостей проекций требуется произвести двойную перемену: сначала преобразовать плоскость данной фигуры в проецирующую относительно новой плоскости проекций (т. е. получить одну из проекций фигуры в виде прямой линии), затем вторично спроецировать фигуру на параллельную ей плоскость.

2.10. На *рис. 9* метод перемены плоскостей проекций применен для преобразования проекций наклонной призмы. Изменена плоскость $П_2$, причем новая плоскость $П_4$ установлена параллельно боковым ребрам призмы. Видно, что и в этом случае решение сводится к построению новых проекций отдельных точек— вершин призмы.

Новая вертикальная проекция призмы на плоскости $П_4$, дает истинную величину всех боковых ребер призмы.

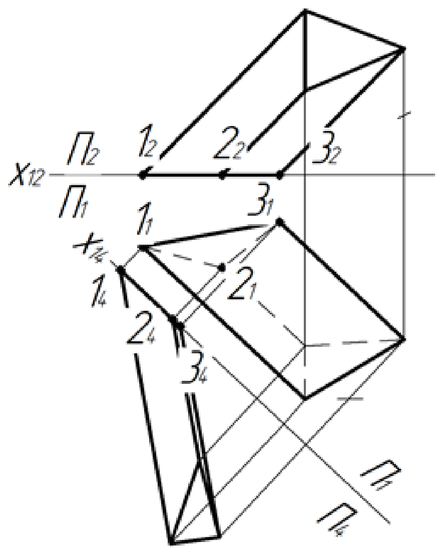


Рис. 9

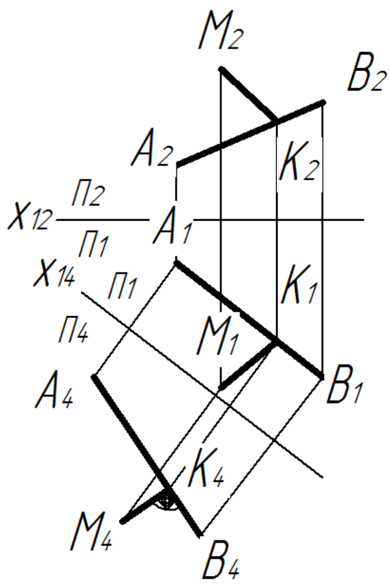


Рис. 10

2.11. Метод перемены плоскостей проекций весьма упрощает решение различных задач. Он удобен также и в графическом отношении, так как новые оси проекций можно проводить в любом месте чертежа и использовать таким образом свободное поле листа, избегая наложения проекций друг на друга и связанной с этим неясности эпюр.

Для иллюстрации преимуществ этого метода ниже показано решение нескольких задач, которые другими способами решаются сравнительно сложно.

Задача 1. Из данной точки *M* опустить перпендикуляр на данную прямую *AB* (*рис. 10*).

Можно решить эту задачу, не пользуясь методом перемены плоскостей проекций, например, так:

1) провести через точку *M* плоскость, перпендикулярную к прямой *AB,* что само по себе требует некоторых вспомогательных построений;

2) найти точку встречи проведенной плоскости с прямой *AB* (т. е. выполнить три действия;

3) соединить найденную точку с точкой *M.*

Методом перемены плоскостей эта задача решается заменой всего одной плоскости Π_1 или Π_2. Новая ось выбирается параллельно A_1B_1 (или A_2B_2). При этом условии прямая *AB* будет параллельна плоскости Π_2, (или Π_1); значит, прямой угол между *AB* и искомым перпендикуляром будет проецироваться на эту плоскость без искажения (теорема о проецировании прямого угла). Другими словами, M_4K_4 и есть проекция искомого перпендикуляра на плоскости Π_4. Остается построить проекции точки *K,* т. е. K_1 и K_2 *в* старой системе Π_1/Π_2 и соединить их с M_1 и M_2.

Задача 2. Определить расстояние между двумя параллельными плоскостями *P и Q* (*рис. 11*).

Расстояние между двумя параллельными плоскостями есть длина перпендикуляра, опущенного из какой-либо точки одной плоскости на другую плоскость. Исходя из этого соображения, можно решить задачу следующим образом (не применяя метода перемены плоскостей проекций):

1) взять на плоскости *P* произвольную точку;

2) опустить из этой точки перпендикуляр на плоскость *Q;*

3) найти точку встречи опущенного перпендикуляра с плоскостью *Q;*

4) соединить проекции обеих точек, т. е. найти проекции перпендикуляра;

5) по проекциям перпендикуляра определить его истинную длину.

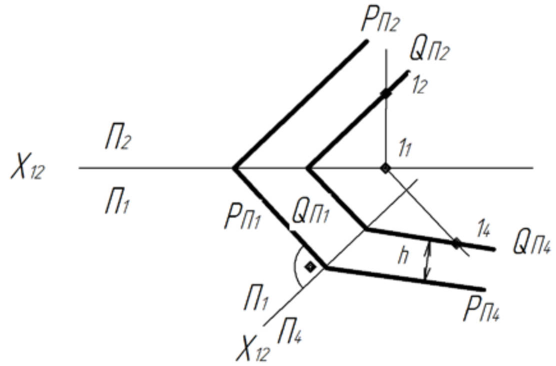


Рис. 11

Итого пять основных действий, не считая различных вспомогательных построений.

Между тем задача может быть решена простой переменой одной плоскости проекций *($П_1$ или $П_2$)*. Решение показано на *рис. 11*. Произведена замена плоскости $П_2$ так, чтобы в новой системе $П_1/П_4$ обе данные плоскости были фронтально проецирующими. С этой целью новая ось X_4 проведена перпендикулярно к следам $P_{П1}$ и $Q_{П1}$. Построен новый вертикальный след одной из плоскостей, например, $Q_{П4}$. След $P_{П4}$, проведен параллельно $Q_{П4}$, так как параллельность плоскостей сохраняется и в новой системе. Теперь отрезок h, перпендикулярный к следам $P_{П4}$ и $Q_{П4}$, непосредственно выражает расстояние между данными плоскостями.

Преимущества второго способа решения очевидны.

Задача 3. Определить величину двугранного угла, образуемого двумя пересекающимися плоскостями P и Q.

Пусть заданы своими следами плоскости *P и Q,* пересекающиеся по линии *MN* (*рис. 12*). Если бы линия пересечения *MN* была перпендикулярна к какой-либо плоскости проекций, то двугранный угол между *P* и *Q* проектировался бы на эту плоскость в натуральную величину.

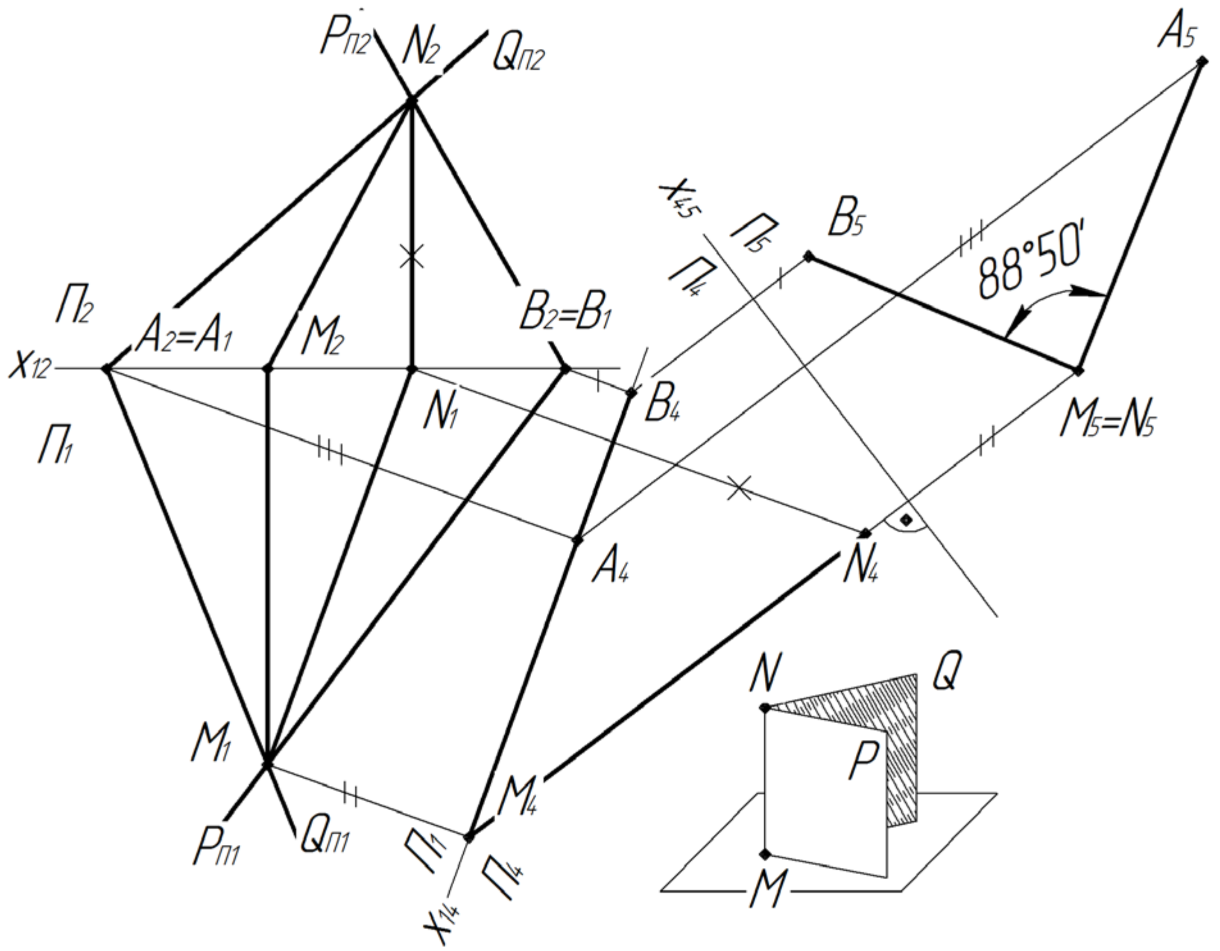


Рис. 12

Исходя из такого соображения, заменим данную систему плоскостей проекций $П_1/П_2$ новой системой $П_4/П_5$ так, чтобы прямая *MN* была в ней перпендикулярна к плоскости $П_5$.

Эта операция описана выше, в п. 2.6 (*рис. 6*). Заменяем сначала плоскость $П_2$ новой плоскостью $П_4$, установив ее параллельно *MN;* значит, новая ось проекций X_{14} должна быть проведена параллельно M_1N_1. Новые вертикальные проекции точек *M, A* и *B,* лежащих в самой плоскости $П_1$, будут лежать на новой оси в точках M_4, A_4 и B_4; новая вертикальная проекция точки *N*—в N_4 и, следовательно, новая вертикальная проекция прямой *MN* будет M_4N_4. Затем меняем плоскость $П_1$, причем новую ось проводим перпендикулярно к M_4N_4 и строим, как обычно, новые горизонтальные проекции тех же четырех точек A_5,

B_5, C_5 и M_5. При этом, проекции M_5 и N_5 совпадут, и угол выразит натуральную величину двугранного угла.

Аналогично решается эта задача и в том случае, если плоскости заданы не следами, а каким-либо иным способом.

Решая задачи по определению плоских сечений твердых тел, чаще всего удобно использовать метод перемены плоскостей проекций. В приложении рассмотрены задачи, в которых требуется определить сечение четырехгранной пирамиды *ABCD* плоскостью Ω при различных вариантах задания её положения. Одним из условий является то, что плоскость Ω должна содержать точку *E*, принадлежащую заданной грани пирамиды. Секущая плоскость может быть перпендикулярна или параллельна грани (ребру) пирамиды, содержать какое-либо ребро или вершину.

6. Выводы

Несмотря на разнообразие способов построения вспомогательных изображений, облегчающих решение задач графическими средствами, в основе всех этих способов лежат два главных принципа:

1) изменение направления проецирования, т. е. использование в качестве вспомогательного средства косоугольного проектирования;

2) изменение относительного положения проецируемого предмета и плоскостей проекций.

Первый из этих методов используют чаще всего художники и архитекторы для построения теней предметов.

Второй способ, изменение относительного положения проектируемого предмета и плоскостей проекций, может быть осуществлено в свою очередь двумя путями:

а) поворотом самого проектируемого предмета в более удобное положение (метод вращения и его разновидности);

б) перемещением плоскостей проекций (метод перемены плоскостей проекций).

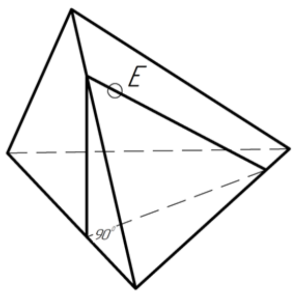
Возможно так же и сочетание различных методов.

Совокупность рассмотренных графических приемов составляет далеко не весь рабочий инструментарий начертательной геометрии.

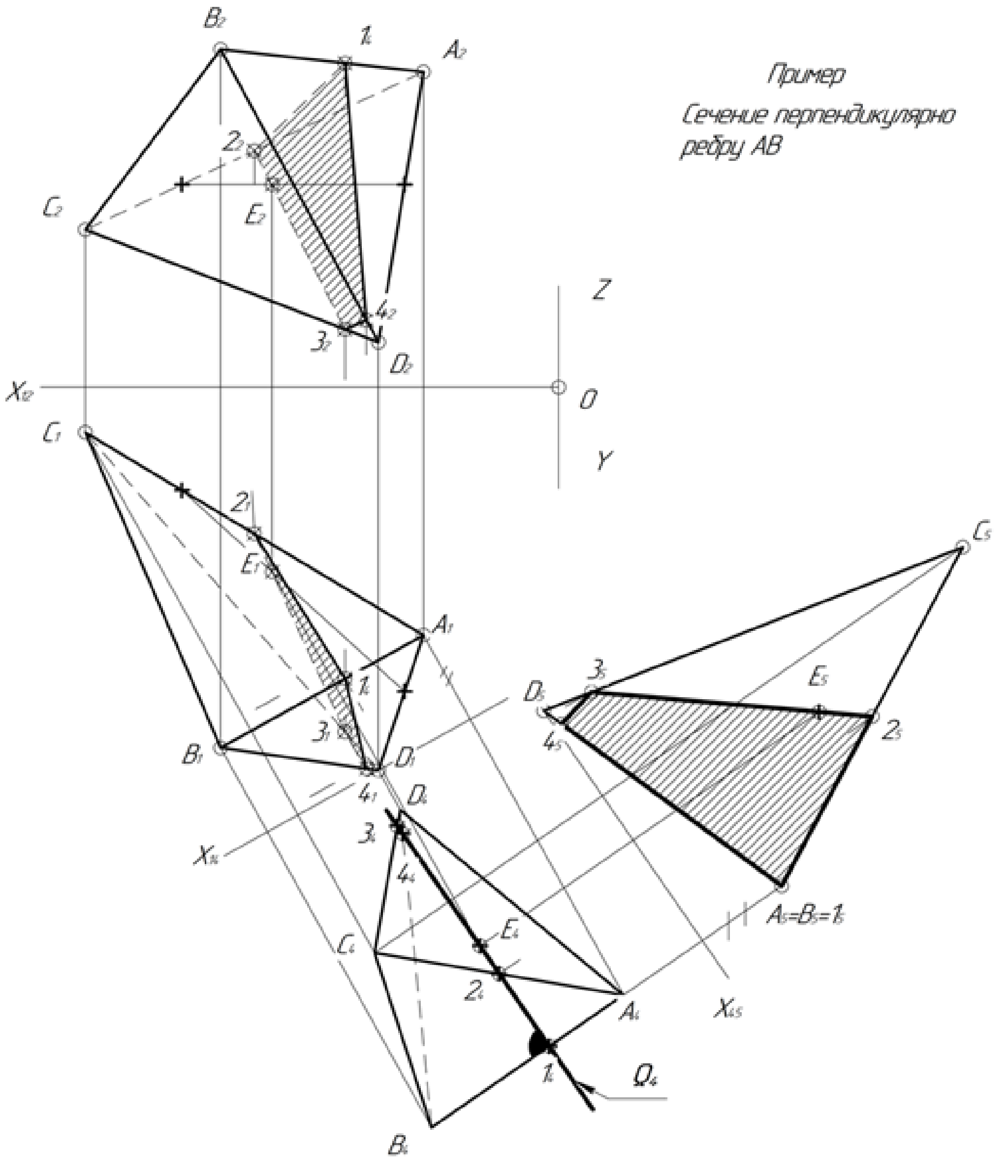
Приложение

Построить сечение четырехгранной пирамиды *ABCD* плоскостью **Ω** при различных вариантах задания ее положения так, чтобы плоскость проходила через точку Е, принадлежащую заданной грани пирамиды.

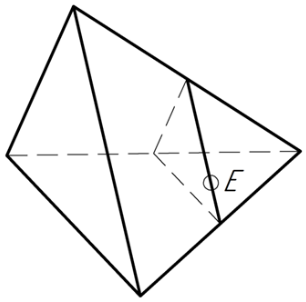
1. Плоскость Ω перпендикулярна ребру *AB*.



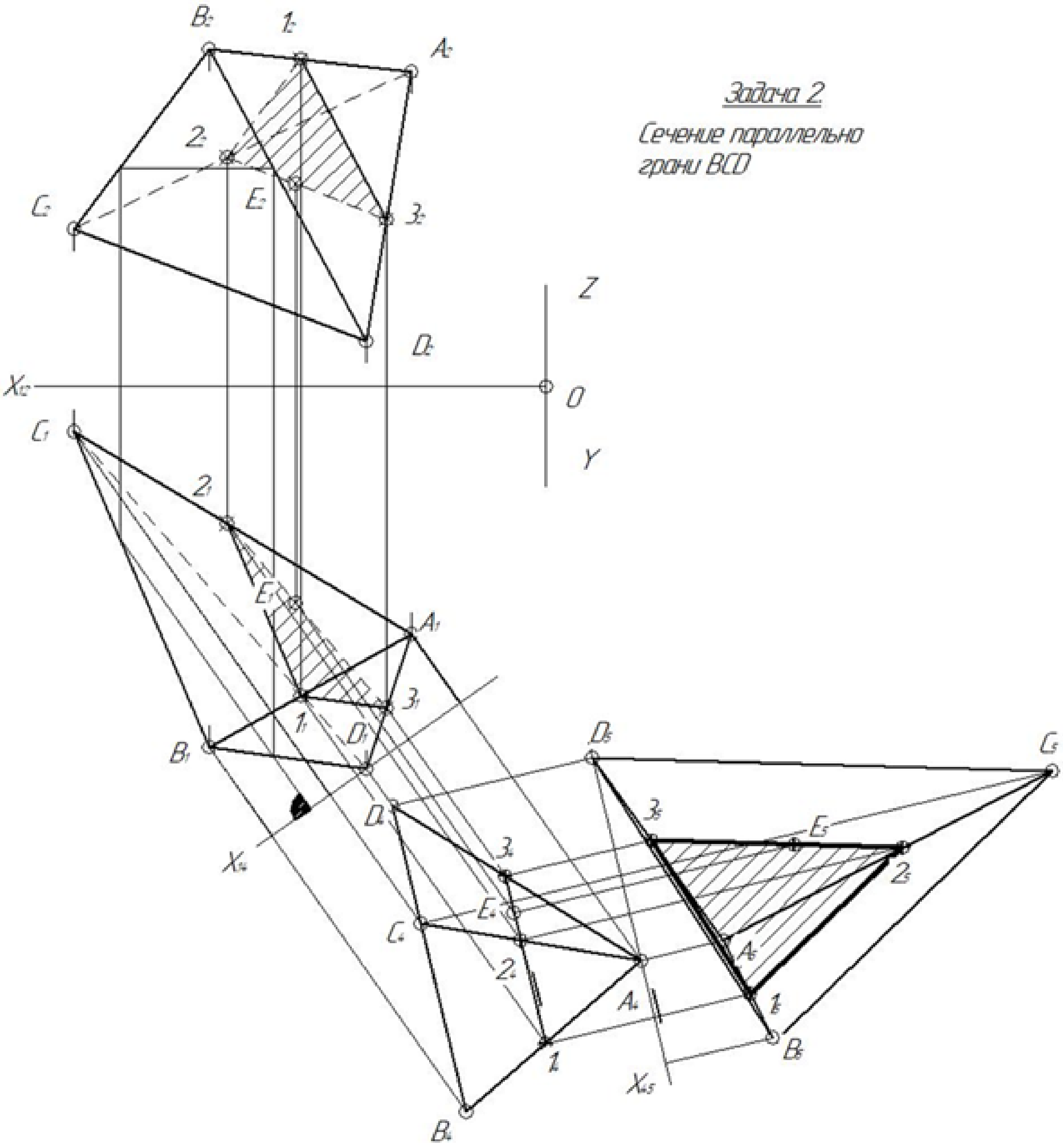
Для решения этой задачи необходимо сделать замену плоскости $П_2$ на $П_4$ так, чтобы ребро *AB* стало параллельно $П_4$ ($A_1B_1//П_4$). Тогда плоскость Ω будет проецирующей и проведем Ω_4 через E_4 перпендикулярно A_4B_4. На пересечении Ω_4 с ребрами пирамиды дадут сечение, натуральную величину которого найдем в новой системе $П_4/П_5$ на новой плоскости $П_5 // \Omega_4$.



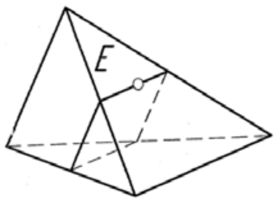
2. Секущая плоскость параллельна грани



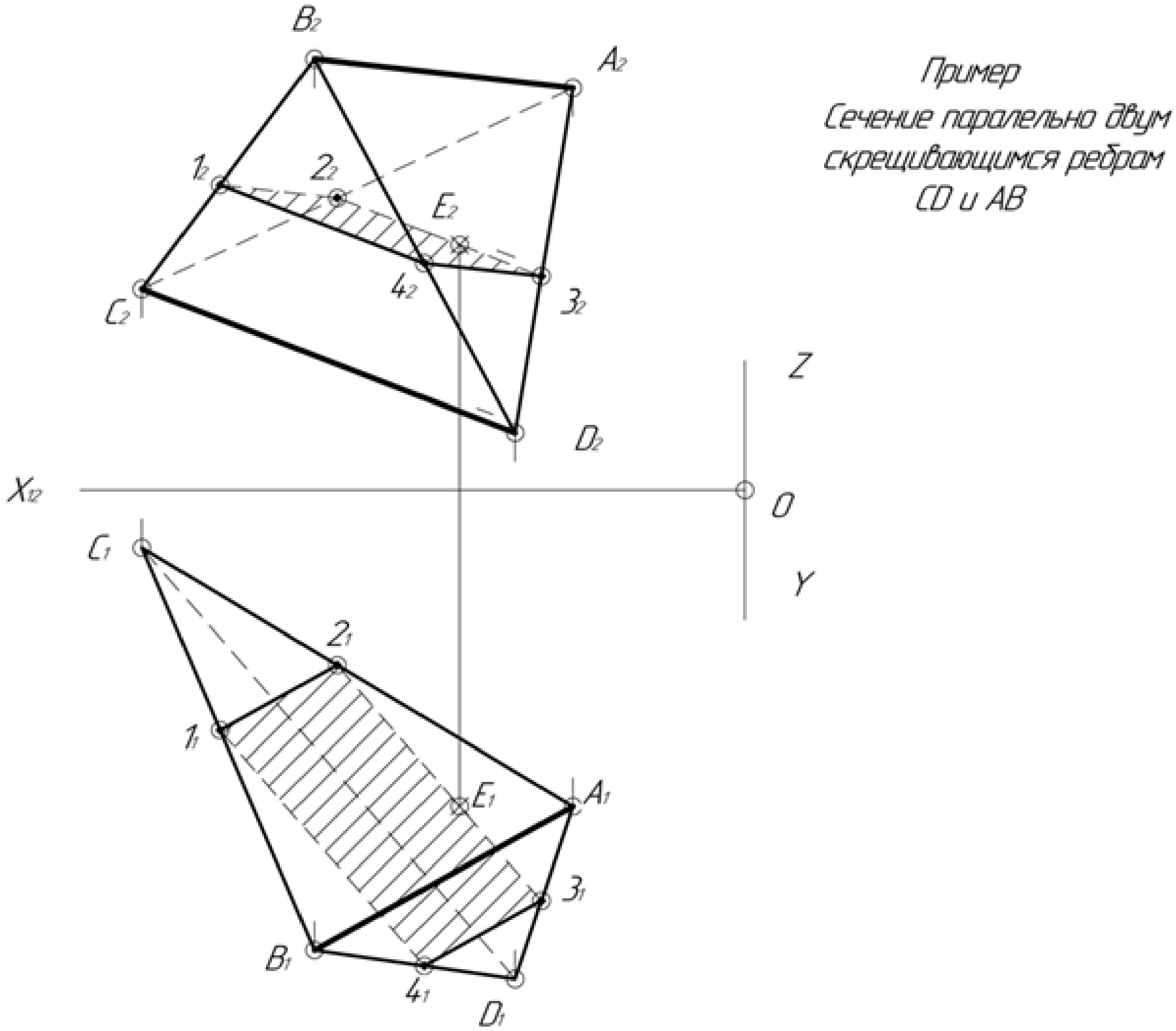
Так как сечение Ω параллельно грани, следовательно, стороны сечения должны быть параллельны соответствующим ребрам на фронтальной и горизонтальной проекции, как следует из инвариантных свойств параллельных прямых



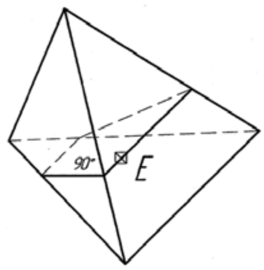
3. Секущая плоскость Ω параллельна двум скрещивающим ребрам



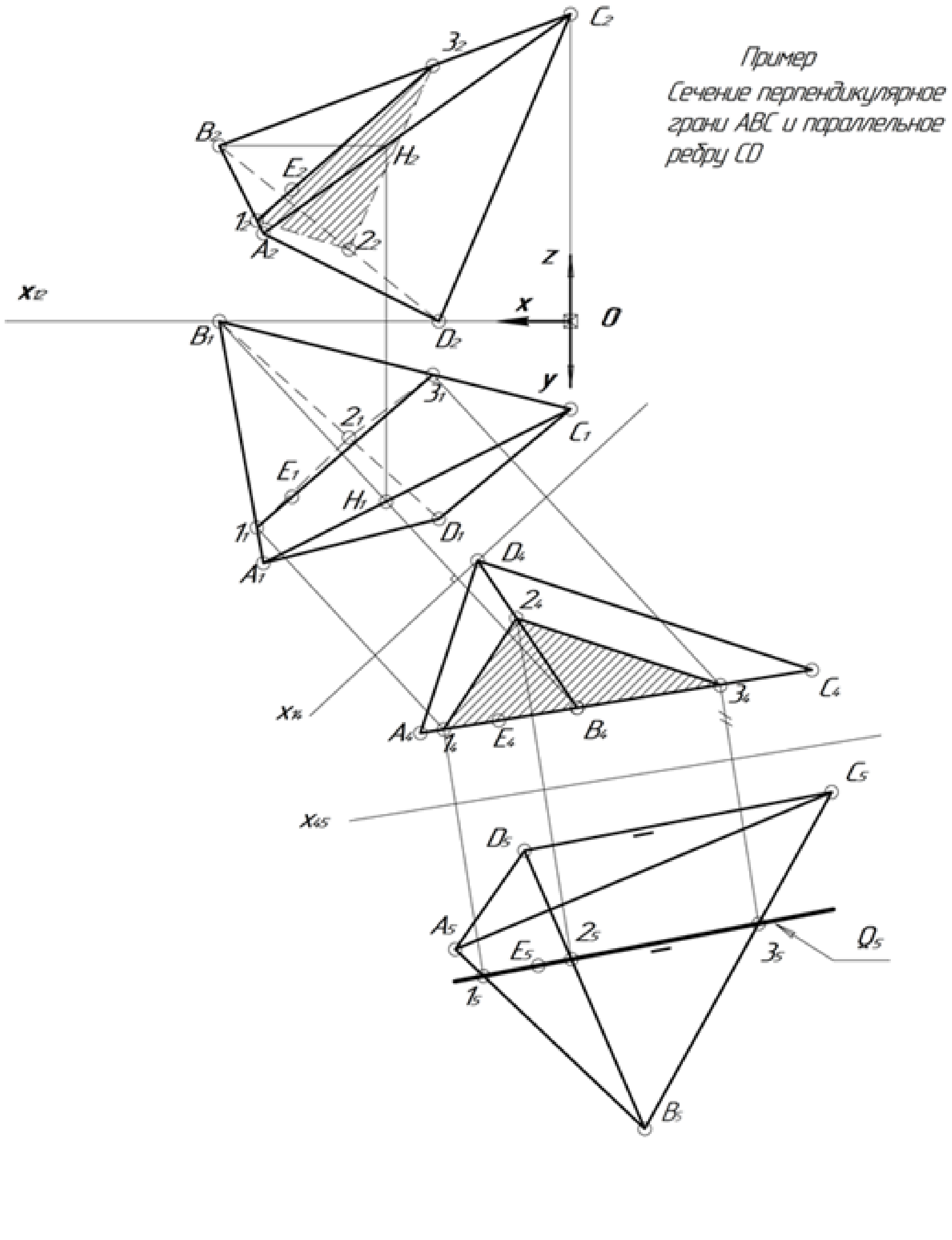
Для того, чтобы построить сечение Ω достаточно через точку E провести прямую параллельную ребру, лежащему в грани, которой принадлежит точка E, а затем из полученных точек провести прямые в прилегающих гранях параллельно второму ребру и соединить полученные точки – это и будет искомое сечение.



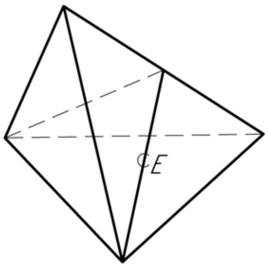
4. Секущая плоскость *Ω* перпендикулярна Σ и параллельна стороне в гране Σ



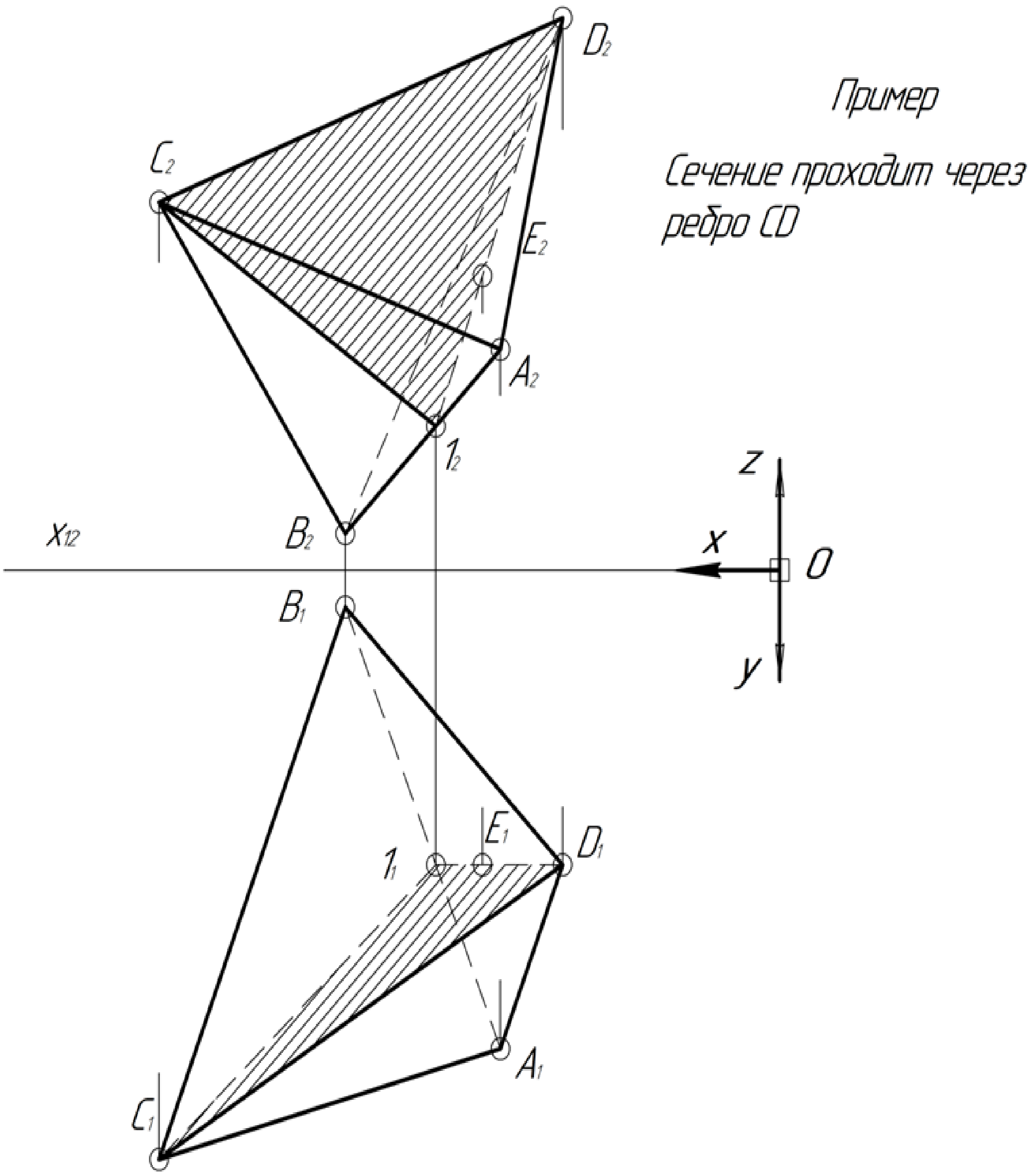
Для того, чтобы решить задачу нужно перевести грань в положение параллельное новой плоскости проекций, т.е. необходимо сделать две замены плоскостей: сначала $П_2$ на $П_4$, где X_{14} перпендикулярна проекции горизонтали грани H_1B_1(т.е. перпендикулярна грани *ABC*), затем $П_4$ на $П_5$, где $Ω_5$ параллельна проекции ребра C_5D_5(т.е. параллельна ребру *CD*).



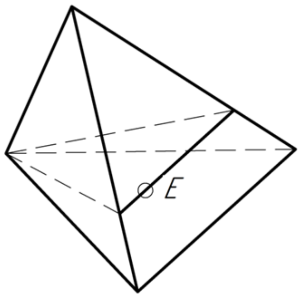
5. Секущая плоскость Ω проходит через ребро вне грани Σ



Для того, чтобы построить сечение Ω необходимо через точку E провести прямую, которая соединяется с заданным ребром.



6. **Секущая плоскость Ω параллельно ребру через вершину вне Σ**



Для того, чтобы построить сечение Ω необходимо через точку Е провести прямую, параллельно ребру, а затем соединить с вершиной