6-7 БИЛИНЕЙНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

Одной из самых простых является билинейная поверхность. Билинейная поверхность конструируется из четырех угловых точек единичного квадрата в параметрическом пространстве, т.е. из точек $P(0,0)$, $P(0,1)$, $P(1,1)$ и $P(1,0)$. Любая точка на поверхности определяется линейной интерполяцией между противоположными границами единичного квадрата, как это показано на рис. 6-25. Любая точка внутри параметрического квадрата задается уравнением

$$Q(u,w) = P(0,0)(1-u)(1-w) + P(0,1)(1-u)w + P(1,0)u(1-w) + P(1,1)uw. \quad (6\text{-}41)$$

В матричном виде

$$Q(u,w) = \begin{bmatrix} 1-u & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P(0,0) & P(0,1) \\ P(1,0) & P(1,1) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1-w \\ w \end{bmatrix}. \quad (6\text{-}42)$$

Необходимо, чтобы интерполируемая поверхность удовлетворяла исходным данным. В этом случае легко проверить, что угловые точки принадлежат этой поверхности, т.е. $Q(0,0) = P(0,0)$ и т.д.

Уравнение (6-42) задано в обобщенном матричном представлении интерполированной поверхности, а именно - матрица функций смешения по одной из бипараметрических переменных, геометрическая матрица, представляющая исходные данные, и матрица функций смешения по другой параметрической переменной.

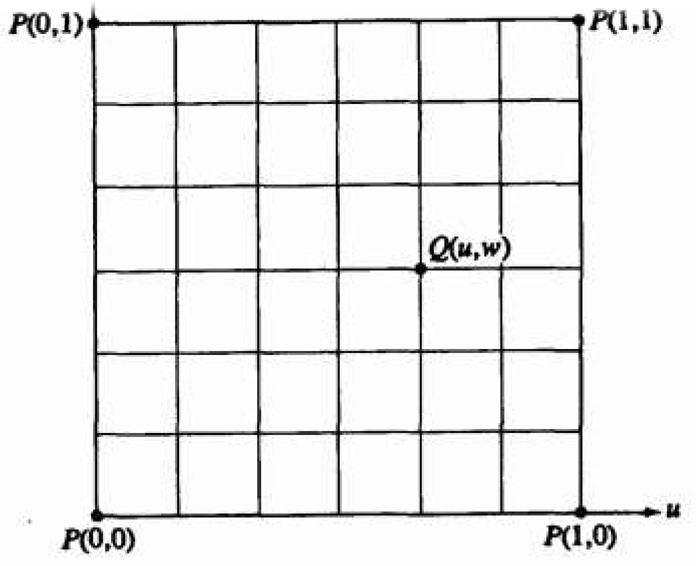

Рис. 6-25 Билинейная интерполяция в параметрическом пространстве.

При изучении параметрических интерполированных поверхностей мы будем постоянно пользоваться этим представлением.

Если координатные векторы четырех точек, определяющих билинейную поверхность, заданы в трехмерном объектном пространстве, то будет трехмерна и билинейная поверхность, получаемая в результате отображения параметрического пространства в объектное. Если четыре определяющие точки не лежат в одной плоскости, то и билинейная поверхность также не лежит ни в какой плоскости. Действительно, в общем случае она сильно изогнута, пример этого показан на рис. 6-26. Определяющие точки являются концами противоположных диагоналей на противоположных гранях единичного куба. В результате получаем гиперболический параболоид. В качестве иллюстрации рассмотрим следующий пример.

Пример 6-9 Билинейная поверхность

Найти точку на билинейной поверхности, заданной точками $P(0,0)=[0 \quad 0 \quad 1]$, $P(0,1)=[1 \quad 1 \quad 1]$, $P(1,0)=[1 \quad 0 \quad 0]$, $P(1,1)=[0 \quad 1 \quad 0]$, т.е. концами противоположных диагоналей, лежащих на противоположных гранях единичного куба в объектном пространстве. Искомая точка имеет координаты $u = w = 0.5$ в параметрическом пространстве.

$$Q(u,w)=\begin{bmatrix} x(u,w) & y(u,w) & z(u,w) \end{bmatrix}$$

тогда из уравнения (6-41) имеем

$$Q(0.5,0.5)=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}(1-0.5)(1-0.5)+\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}(1-0.5)(0.5)+$$

$$+\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}(0.5)(1-0.5)+\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}(0.5)(0.5)=$$

$$=0.25\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}+0.25\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}+$$

$$+0.25\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}+0.25\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}0.5 & 0.5 & 0.5\end{bmatrix}.$$

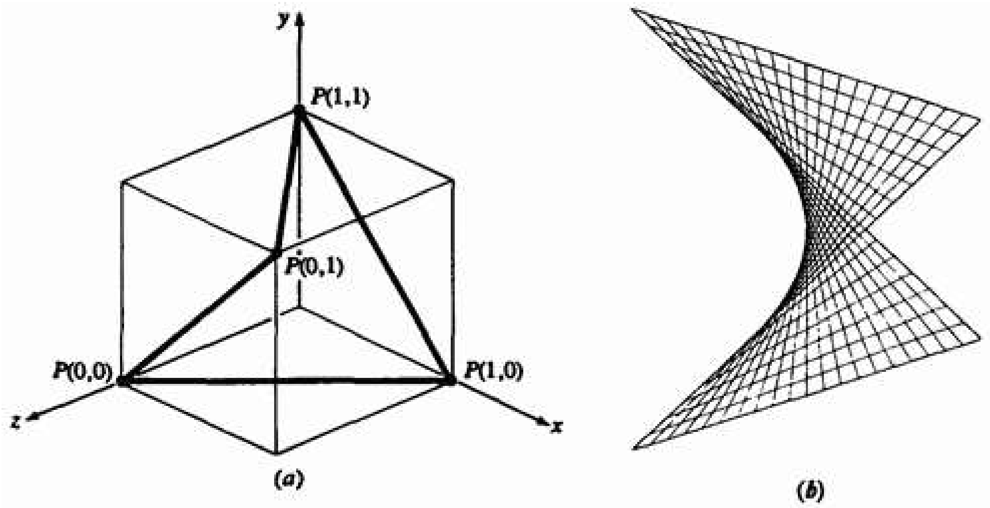

Рис. 6-26 Билинейная поверхность. (a) Определяющие угловые точки; (b) поверхность.

Вся поверхность изображена на рис. 6-26b.

Заметим, что каждая изопараметрическая линия на билинейной поверхности является прямой линией. В самом деле, эта поверхность является двулинейчатой (см. разд. 6-8).

<< Предыдущая Оглавление Следующая >>