СПбГЭТУ «ЛЭТИ»
Кафедра Вычислительной техники

Дисциплина «Искусственный интеллект»

Лекция 11

Логические модели представления знаний: Логика предикатов первого порядка

Логика предикатов 1-го порядка: Алфавит

- Алфавит ЛППП включает следующие группы символов:
  - *предметные константы*: *a, b, c, d,…*
    - идентификаторы (имена) конкретных объектов рассматриваемой предметной области – элементов области интерпретации ***D***
  - *предметные переменные*: $x, y, z, v, u, w, \ldots x_n, y_n, z_n, \ldots$
    - могут принимать значения констант
  - *функциональные символы*: *f, g, h,…*
  - *предикатные символы*: *P, Q, R, S, T,…*
    - обозначают свойства и отношения объектов в рассматриваемой предметной области (области интерпретации)
  - *логические связки*: $\neg$, $\vee$, &, $\to$, $\leftrightarrow$ (имеют традиционный смысл)
  - *два логических квантора*: $\exists$ - существования; $\forall$ - всеобщности
    - $\forall x\, P(x)$, $\exists x\, Q(x, y)$
  - скобки: (,),

Логика предикатов 1-го порядка: Язык

- *Терм:*
  - предметная *константа*;
  - предметная *переменная*;
  - или *функциональная форма*;

- *Функциональная форма*:
  - синтаксически задается функциональным символом со списком аргументов-термов в скобках:

    $f\,(t_1, \ldots, t_n)$, где $t_1, \ldots, t_n$ – термы

    Например: $f\ (a, x, g(y))$

  - интерпретируется как некоторая n–местная функция, заданная на области интерпретации:

    $D^n \to D$; (отображение декартового произведения в область интерпретации)

    Примеры интерпретации :

    $f\,(x, y)$ – "$x + y$" ; $g\,(x)$ – "x^2" ; $f(a, x, g(x))$ – " a-x+x^2 "

Логика предикатов 1-го порядка: Язык + интерпретация

- *Предикатная форма или* ***атом***:
  - синтаксически задается предикатным символом со списком аргументов-термов: $P\,(f_1, \ldots, f_n)$;
  - соответствует отношению, заданному на предметной области: $D^n \rightarrow \{F, T\}$;
  - число предметных переменных, к которым относится данная предикатная форма, называется ее *местностью*.

  Пример: *P(x)* – "x – четное число" – одноместная предикатная форма

  Q(x, y) – "x > y" – двуместная предикатная форма

- *Область интерпретации D* (*Domain*) – множество объектов, свойства и отношения которых предполагается описывать средствами языка логики предикатов 1-го порядка

Правила построения формул в ЛППП

1. Любая предикатная форма (*атом*) является формулой логики предикатов первого порядка.

2. Если X и Y – формулы, то:

   $\neg X$, $(X \vee Y)$, $(X \,\&\, Y)$, $(X \rightarrow Y)$, $(X \leftrightarrow Y)$ – тоже формулы

3. Если x – предметная переменная, A – некоторая формула, то:

   $\forall xA$, $\exists xA$ – тоже формулы

4. Других формул нет

Квантификаторы

- *Область действия квантификатора* – формула, к которой относится данный квантификатор:

$$\forall x\ \underbrace{[P(x)\ \&\ Q(x, y)]}_{\text{область действия}} \vee R(u)\ \&\ Q(z, b)$$

- Переменная, *находящаяся в области действия* соответствующего *квантификатора*, называется *связанной*:

$$\forall x\ [P(x)\ \&\ Q(x, y)] \vee R(u)\ \&\ Q(z, b)$$

- В противном случае – *свободной*:

$$\forall x\ [P(x)\ \&\ Q(x, y)] \vee R(u)\ \&\ Q(z, b)$$

- Формула, *не содержащая свободных переменных*, называется *замкнутой*

$$\forall x \exists y \exists u \forall z\ [P(x) \& Q(x, y) \vee R(u) \& Q(z, b)]$$

- Замкнутая формула *является высказыванием*! (Независимо от интерпретации переменных, но *при фиксированной интерпретации языка)*

Пример формализации высказывания в ЛППП

Пример: «Для любых двух чисел, если одно из них четно, а другое – нечетно, то их сумма нечетна»

Область интерпретации D – множество чисел

$P(x)$ – «x – четно»

$f(x, y)$ – «$x + y$»

$\forall x\ \forall y\ [P(x)\ \&\ \neg P(y) \rightarrow \neg P(f(x, y))]$

Формула замкнутая. Высказывание истинное

Логика первого порядка - логика, в которой рассматриваются только высказывания об объектах, свойствах и отношениях *предметной области*.

Если требуется рассматривать высказывания о высказываниях – нужна *логика второго порядка* и т. д.

Метод резолюций в логике предикатов

- Особенности реализации метода резолюций в логике предикатов обусловлены *более сложным синтаксисом языка* (наличием у атомов аргументов, функциональных форм, квантификаторов и др.) и проявляются на двух этапах:
  - на этапе *преобразования формул* из стандартной формы в *клаузальную* (аналог КНФ);
  - на этапе применения правила резолюций к дизъюнктам, у которых атомы контрарной пары отличаются аргументами:

$(\neg P(x) \vee Q(y))$ и $(P(f(z)) \vee \neg R(x))$

Можно ли построить резольвенту?

Получение клаузальной формы

Прежде всего надо преобразовать формулы в форму, позволяющие применить метод резолюции

В логике предикатов преобразования формул к нужной форме – более сложная задача вследствие более богатого синтаксиса языка (наличия квантификаций, свободных и связанных вхождений переменных и др.)

В ЛППП аналогом КНФ является *клаузальная форма.*

Преобразование формул ЛППП из стандартной формы в клаузальную выполняется в три этапа:

1. Преобразование в *предваренную форму*.
2. Получение *замкнутой* и *сколемовской формы*.
3. Преобразование матрицы в КНФ – получение *клаузальной формы*.

Преобразование формул в *предваренную форму*

- *Предваренная форма* – представление формулы, в котором *все квантификации размещаются в начале*, затем следует формула, не содержащая квантификаций:

$$K_1\ K_2 \ldots\ K_n\ M,$$

где K_i (i =1,...n) – квантификатор всеобщности или существования ($\forall$-квантификация либо $\exists$-квантификация);
M – формула не содержащая квантификаций (матрица).

- Конечная последовательность квантификаций в начале формулы называют *префиксом*
  - Квантификации в префиксе относятся к различным переменным и их порядок, в общем случае, имеет значение.

- Для любой формулы логики предикатов существует *логически эквивалентная ей предваренная форма*.

Алгоритм преобразования формул в *предваренную форму*

Алгоритм получения предваренной формы для произвольной формулы логики предикатов включает следующие шаги:

1. Исключение связок импликации и эквивалентности.

2. Переименование для всех подформул (при необходимости) связанных переменных таким образом, чтобы никакая переменная не имела бы одновременно свободных и связанных вхождений.

3. Удаление квантификаций, область действия которых не содержит вхождений квантифицированной переменной.

4. Сужение области действия отрицаний и снятие двойных отрицаний. При этом помимо законов де Моргана и инволюции используются следующие тождества:

$\neg(\forall x A) = \exists x(\neg A)$;

$\neg(\exists x A) = \forall x(\neg A)$.

5. Перенос всех квантификаций в начало формулы по следующим правилам:

$(\forall x A \mathbin{\&} \forall x B) = \forall x(A \mathbin{\&} B)$;

$(\forall x A \vee \forall x B) = \forall x(\mathrm{A} \vee B)$;

$(\forall x A \mathbin{\&} B) = \forall \mathrm{x}(A \mathbin{\&} B)$, если формула B не содержит x;

$(\exists x A \mathbin{\&} B) = \exists \mathrm{x}(A \mathbin{\&} B)$, если формула B не содержит x.

$(\forall x A \vee B) = \forall \mathrm{x}(A \vee B)$, если формула B не содержит x;

$(\exists x A \vee B) = \exists \mathrm{x}(A \vee B)$, если формула B не содержит x.

При выполнении этого шага некоторые *связанные переменные могут быть переименованы*. Например, формула $\exists \mathrm{xP(x)} \mathbin{\&} \forall \mathrm{xQ(x)}$ будет сначала преобразована в $\exists \mathrm{xP(x)} \mathbin{\&} \forall \mathrm{yQ(y)}$, после чего применены правила преобразования

Пример преобразования формулы в *предваренную форму*

Пример. Преобразовать в предваренную форму следующую формулу:

$$\exists y \forall x(\neg Q(x, y) \vee \neg P(y)) \rightarrow (R(v) \,\&\, \forall v \exists z \forall w S(v, z))$$

Решение.

1. Исключение связок импликации и эквивалентности:

$$\neg \exists y \forall x(\neg Q(x, y) \vee \neg P(y)) \vee (R(v) \,\&\, \forall v \exists z \forall w S(v, z))$$

2. Переименование.

$$\neg \exists y \forall x(\neg Q(x, y) \vee \neg P(y)) \vee (R(v) \,\&\, \forall u \exists z \forall w S(u, z))$$

3. Удаление ненужных квантификаций:

$$\neg \exists y \forall x(\neg Q(x, y) \vee \neg P(y)) \vee (R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z)) \qquad [\text{удален } \forall w\,]$$

4. Сужение области действия отрицаний и снятие двойных отрицаний:

$$\forall y(\neg \forall x(\neg Q(x, y) \vee \neg P(y))) \vee (R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z))$$

$$\forall y \exists x(\neg(\neg Q(x, y) \vee \neg P(y))) \vee (R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z))$$

$$\forall y \exists x(\neg\neg Q(x, y) \,\&\, \neg\neg P(y)) \vee (R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z))$$

$$\forall y \exists x(Q(x, y) \,\&\, P(y)) \vee (R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z))$$

5. Перенос квантификаций в начало формулы.

$$\forall y\, [\exists x(Q(x, y) \,\&\, P(y)) \vee R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z)]$$

$$\forall y \exists x[Q(x, y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, \forall u \exists z S(u, z)]$$

$$\forall y \exists x \forall u[Q(x, y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, \exists z S(u, z)]$$

$$\forall y \exists x \forall u \exists z[Q(x, y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, S(u, z)]$$ – *предваренная форма*

Получение замкнутой формы

- Предваренная форма в общем случае *может содержать свободные переменные*
- При анализе выполнимости достаточно оперировать *только замкнутыми формулами*, т.е. формулами *не содержащими свободных переменных*
- Действительно, если A – формула, содержащая свободные переменные $x_0, \ldots, x_n$, которая (после переименования) *не содержит ни одного связанного вхождения* этих переменных, то замкнутая формула $\exists x_1 \ldots \exists x_n A$ выполнима тогда и только тогда, когда выполнима формула A.
- Например, формула:

$$\forall y \exists x\ [Q(x, y)\ \&\ S(u, z)]$$

после преобразования *в замкнутую форму* примет вид:

$$\exists u \exists z \forall y \exists x\ [Q(x, y)\ \&\ S(u, z)]$$

Сколемовская форма

- Всякой замкнутой формуле A можно поставить в соответствие формулу S_A, не содержащую кванторов существования, такую, что формулы A и S_A либо *обе выполнимы*, либо *обе невыполнимы*
  - Таким образом, проверка невыполнимости формулы A может быть сведена к проверке невыполнимости формулы S_A
- Форма S_A называется *сколемовской формой*
- Алгоритм получения сколемовской формы (сколемизация) из замкнутой предваренной формы включает следующие шаги:

1. Сопоставить каждой $\exists$-квантифицированной переменной список предшествующих ей в префиксе $\forall$-квантифицированных переменных и некоторый функциональный символ, местность которого равна мощности полученного списка.

2. В матрице формулы заменить каждое вхождение каждой $\exists$-квантифицированной переменной на терм, полученный путем добавления к соответствующему функциональному символу списка аргументов, сопоставленных этой переменной.

3. Удалить из формулы все $\exists$-квантификации.

Пример получения сколемовской формы

Сколемизируем полученную выше замкнутую формулу:

$$\forall y \exists x \forall u \exists z [Q(x, y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, S(u, z)]$$

1. Каждой $\exists$-квантифицированной переменной ставится в соответствие функциональную форму от предшествующих ей в префиксе $\forall$-квантифицированных переменных:

   x – $f(y)$;

   z – $g(y, u)$

2. Подставим в формулу функциональные формы:

$$\forall y \exists x \forall u \exists z [Q(f(y), y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, S(u, g(y, u))].$$

3. Удалим $\exists$-квантификации:

$\forall y \forall u [Q(f(y), y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, S(u, g(y, u))]$ – *сколемовская форма,* (*замкнутая, универсально квантифицированная*)

Квантификаторы можно явно не выписывать:

$$[Q(f(y), y) \,\&\, P(y) \vee R(v) \,\&\, S(u, g(y, u))]$$

Метод резолюций в логике предикатов. Унификация

- При реализации метода резолюций дизъюнкты могут содержать атомы контрарной пары с различными аргументами:

$$(\neg P(x) \vee Q(y)) \quad \text{и} \quad (P(f(z)) \vee \neg R(x))$$

Непосредственно построить резольвенту нельзя!

- Для решения этой проблемы используется *унификация*
- *Подстановка* σ есть отображение множества V переменных в множество T термов. Подстановка σ задается множеством упорядоченных пар:

$$\sigma = \{(x_1, t_1), . . . ,(x_n, t_n)\} ,$$

где $x_i \neq t_j$.

- Пусть t - терм, а σ - подстановка, тогда терм $\sigma[t]$ получается одновременной заменой всех вхождений переменных x в t на их образы относительно σ.
- Например, пусть $t = h(f(x), y, v)$ и $\sigma = \{(x, a), (y, g(b, z)), (v, w)\}$,

тогда $\sigma[t] = h(f(a), g(b, z), w)$

Композиция подстановок. Унификатор

- Композиция двух подстановок σ_1 и σ_2 есть функция $(\sigma_2 \circ \sigma_1)$, определяемая следующим образом:
- $$(\sigma_2 \circ \sigma_1)[t] = \sigma_2[\sigma_1[t]].$$
- Таким образом, композиция представляет собой результат *применения σ_2 к термам подстановки* σ_1 *с последующим добавлением всех пар из* σ_2, *содержащих переменные, не входящие* в σ_1.

  Например, пусть $\sigma_1 = \{ (z, g(x, y)) \}$ и $\sigma_2 = \{ (x, a), (y, b), (v, c), (z, d) \}$,
  тогда $(\sigma_2 \circ \sigma_1) = = \{(z, g(a, b)), (x, a), (y, b), (v, c)\}$.

- Терм t_2 называется *конкретизацией* (частным случаем, примером) терма t_1, если существует подстановка σ, такая, что $t_2 = \sigma[t_1]$. Терм t вполне конкретизирован, если он не содержит ни одной переменной.
- Применение подстановки к литералу означает применение ее ко всем термам - аргументам этого литерала. Результат применения подстановки σ к литералу L обозначим $\sigma[L]$.
- Подстановка σ называется унификатором для множества литералов $\{L_1, L_2, \ldots, L_k\}$, если имеет место равенство: $\sigma[L_1] = \sigma[L_2] = \ldots = \sigma[L_k]$.

  Множество $\{L_i\}$ литералов называется в этом случае *унифицируемым*.
- Таким образом, *унификатор порождает общий пример для множества литералов*

Наиболее общий унификатор

- *Наиболее общий* (или простейший) *унификатор* (*НОУ*) для $\{L_i\}$ – унификатор σ_1, такой что, если σ_2 - какой-нибудь унификатор для $\{L_i\}$, дающий $\sigma_2\{L_i\}$, то найдется подстановка σ_3, такая, что

$$\sigma_2\{L_i\} = (\sigma_3 \circ \sigma_1)\ \{L_i\}.$$

Другими словами, НОУ сводим к любому другому унификатору путем композиции с некоторой подстановкой. Поэтому НОУ *порождает наименее конкретизированный общий пример*.

Алгоритм построения НОУ.

1. Положить k := 0, σ_k := ε (пустая подстановка). Перейти к п. 2.
2. Если $\sigma_k\{L_i\}$ не является одноэлементным множеством, то перейти к п. 3. Иначе положить НОУ:= σ_k и закончить работу.
3. Каждая из литер в $\sigma_k\{L_i\}$ рассматривается как цепочка символов и выделяются первые термы - аргументы, не являющихся одинаковыми у всех элементов $\sigma_k\{L_i\}$. Эти термы образуют множество рассогласования B_k.
   B_k упорядочивается так, что в начале располагаются переменные, а затем - остальные термы.
   Пусть V_k – первый элемент B_k, а U_k - следующий за ним элемент.
   Тогда, если V_k - переменная, не входящая в U_k, то принять $\sigma_{k+1} := \{(U_k, V_k)\} \circ \sigma_k$, k:=k+1, перейти к п. 2.
   В противном случае окончить работу с отрицательным результатом.

Построение НОУ. Пример

- Найти НОУ для следующего множества литералов (или установить его неунифицируемость)
- $\{L_i\} = \{P(x, z, v,), P(x, f(y),y), P(x, z, b)\}$.
- Решение:

1. $k := 0$, $\sigma_0 := \varepsilon$.

2. Имеем $\sigma_0 \circ \{ L_i \} = \{P(x, z, v), P(x, f(y), y), P(x, z, b)\}$.

Элементы множества различны, поэтому переходим к составлению множества рассогласования.

3. $B_0 = \{z, f(y), z\} = \{z, f(y)\}$, отсюда $\sigma_1 := \{(z, f(y))\} \circ \varepsilon = \{(z, f(y))\}$.

$\sigma_1 \circ \{ L_i \} = \{P(x, f(y), v), P(x, f(y), y), P(x, f(y), b)\}$ - элементы множества различны.

4. $B_1 = \{v, y, b\}$, $\sigma_2 = \{(v, y)\} \circ \sigma_1 = \{(v, y)\} \circ \{(z, f(y))\} = \{(z, f(y)), (v, y)\}$.

$\sigma_2 \circ \{ L_i \} = \{P(x, f(y), y), P(x, f(y), y), P(x, f(y), b)\} = \{P(x, f(y), y), P(x, f(y), b)\}$ - элементы множества различны.

5. $B_2 = \{y, b\}$, $\sigma_3 = \{(y, b)\} \circ \sigma_2 = \{(z, f(b)), (v, b), (y, b)\}$.

$\sigma_3 \circ \{L_i\} = \{P(x, f(b), b), P(x, f(b), b), P(x, f(b), b)\} = \{P(x, f(b), b)\}$.

Получили одноэлементное множество, содержащее общий пример для исходного множества литералов, а σ_3 - есть НОУ.