



СПбГЭТУ «ЛЭТИ»

Кафедра Вычислительной техники

Дисциплина «Искусственный интеллект»

## *Лекция 13*

### *Модели представления и обработки неопределенных знаний*

*Основы теории нечетких множеств.  
Нечеткая логика*

# Понятие нечеткого множества

- Важным *типом неопределенности*, с которым приходится сталкиваться при формализации *человеческих рассуждений*, является **нечеткость**.
- В 1965 г Л.Заде предложил **теорию нечетких множеств** (Fuzzy Sets)
- В основе понятия **нечеткого множества** (НМ) лежит представление о том, что обладающие *общим свойством элементы* некоторого множества *могут иметь различные степени вырожденности этого свойства* и, следовательно, *различную степень принадлежности* этому свойству.
- Пусть  $U$  – некоторое множество.

*Нечетким множеством  $\tilde{A}$  в  $U$  называется совокупность пар вида:*

$$\{(\mu_{\tilde{A}}(u), u)\}, \text{ где } u \in U, \mu_{\tilde{A}}(u) \in [0, 1]$$

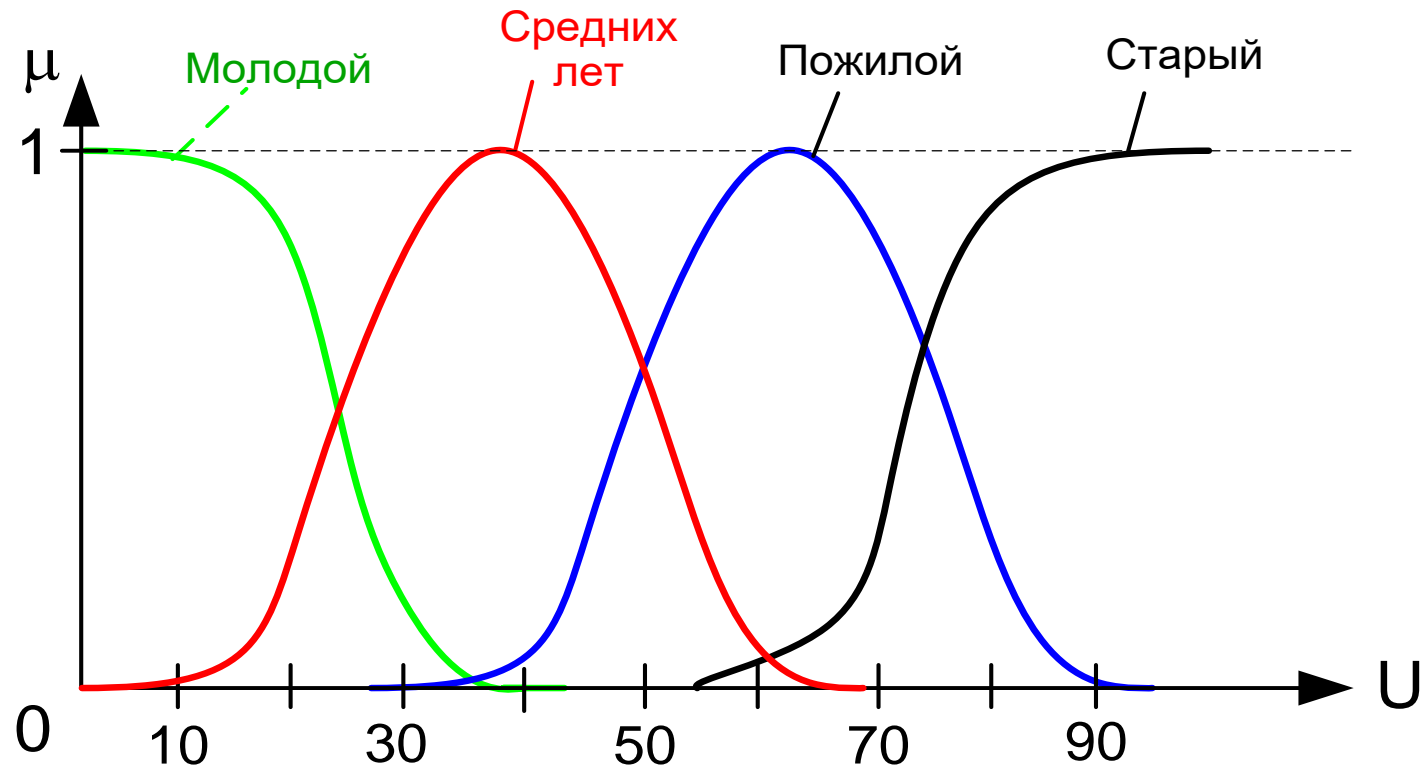
- Значение  $\mu_{\tilde{A}}(u)$  для конкретного элемента  $u$  называется *степенью принадлежности* этого элемента нечеткому множеству  $\tilde{A}$

$$\mu_{\tilde{A}}(u) : U \rightarrow [0, 1]$$

$\mu_{\tilde{A}}$  – называется функцией принадлежности.

# Пример нечетких множеств

- Нечеткие множества соответствующие возрастам:



## Основные операции над нечеткими множествами

По аналогии с традиционной теорией множеств в теории НМ определяются следующие основные операции:

- Объединение:

$$\tilde{A} \cup \tilde{N} = \{(\mu_{\tilde{A} \cup \tilde{N}}(u), u)\}, \text{ где } \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{N}}(u) = \max(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{N}}(u))$$

- Пересечение:

$$\tilde{A} \cap \tilde{N} = \{(\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{N}}(u), u)\}, \text{ где } \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{N}}(u) = \min(\mu_{\tilde{A}}(u), \mu_{\tilde{N}}(u))$$

- Дополнение:

$$\neg \tilde{A} = \{(\mu_{\neg \tilde{A}}(u), u)\}, \text{ где } \mu_{\neg \tilde{A}}(u) = (1 - \mu_{\tilde{A}}(u))$$

- Алгебраическое произведение:

$$\tilde{A} \cdot \tilde{N} = \{(\mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{N}}(u), u)\}, \text{ где } \mu_{\tilde{A} \cdot \tilde{N}}(u) = (\mu_{\tilde{A}}(u) \cdot \mu_{\tilde{N}}(u))$$

## Нечеткие отношения

- *n*-арным нечетким отношением, определенным на множествах  $U_1, U_2, \dots, U_n$  называется нечеткое подмножество декартова произведения  $U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n$ :

$$\tilde{R} = \{ \mu_{\tilde{R}}(u_1, \dots, u_N), (u_1, \dots, u_N) \mid u_i \in U_i, \quad i = \overline{1, N} \}$$

- Так как нечеткое отношение является множеством для него справедливы все операции определенные для нечетких множеств.

## Композиция нечетких отношений

- В практических приложениях теории нечетких множеств важную роль играет операция композиции нечетких отношений.
- Пусть заданы 3 множества  $U, V$  и  $W$  и 2 двухместных нечетких отношения на них:

$$\begin{aligned}\tilde{R} &: U \rightarrow V \\ \tilde{Q} &: V \rightarrow W\end{aligned}$$

Композиция нечетких отношений определяется выражением:

$$\tilde{R} \circ \tilde{Q} = \{ \max_{v \in V} (\min(\mu_{\tilde{R}}(u, v), \mu_{\tilde{Q}}(v, w))), (u, w) \mid u \in U, w \in W \}$$

## Пример композиции нечетких отношений

- Пусть отношение  $R$  задано так:

$\tilde{R}$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$u_1$	0,5	0,7	1,0
$u_1$	0,9	0,6	0,2

- Отношение  $Q$  задано так:

$\tilde{Q}$	$w_1$	$w_2$
$v_1$	0,1	0,7
$v_2$	0,2	0,8
$v_3$	0,9	0,4

Тогда для пары  $(u_1, w_1)$  имеем:

$$\mu_{R \circ Q}(u_1, w_1) = \max_{v \in V} (\min(\mu_R(u_1, v), \mu_Q(v, w_1))) = \max \left\{ \begin{array}{l} \min(\mu_{\tilde{R}}(u_1, v_1), \mu_{\tilde{Q}}(v_1, w_1)) = 0,1 \\ \min(\mu_{\tilde{R}}(u_1, v_2), \mu_{\tilde{Q}}(v_2, w_1)) = 0,2 \\ \min(\mu_{\tilde{R}}(u_1, v_3), \mu_{\tilde{Q}}(v_3, w_1)) = 0,9 \end{array} \right\} = 0,9$$

## Понятие лингвистической переменной

- Для описания нечетких знаний и рассуждений Л.Заде ввел понятие *лингвистической переменной*
- Формально лингвистическая переменная есть пятерка:

$$\langle X, U, T(x), G, M \rangle ,$$

где  $X$  – имя переменной (например, Возраст);

$U$  – базовое множество (например, для возраста  $U = \{0, 1, \dots, 150\}$ );

$T(x)$  – терм-множество – множество лингвистических значений (например, «молодой», «средних лет», «пожилой», «старый»). Каждое лингвистическое значение является меткой нечеткого множества определенного на  $U$ ;

$G$  – синтаксическое правило, порождающее лингвистическое значение переменной  $X$  (например с помощью модификаторов: «очень молодой», «очень старый»);.

$M$  – семантическое правило ставящее в соответствие каждому лингвистическому значению нечеткое подмножество базового множества, то есть функция принадлежности.



## Основные понятия нечеткой логики. Нечеткие высказывания

- *Нечетким высказыванием* (НВ) называется утверждение относительно которого в данный момент времени можно судить о степени его истинности или ложности. *Истинность* НВ принимает значение в интервале  $[0,1]$
- НВ не допускающее разделения на более простые называется *элементарным*.
- НВ, построенное из элементарных с использованием логических связок, называется *составным НВ*.
- Логическим связкам соответствуют операции над истинностью нечетких высказываний.

- Пусть  $a$  и  $b$  - степени истинности НВ. Тогда:

$$a \ \& \ b = \min(a, b);$$

$$a \vee b = \max(a, b);$$

$$\neg a = (1 - a);$$

/\* Для импликации в нечеткой логике предложено несколько определений \*/

$$a \rightarrow b = \min(a, b);$$

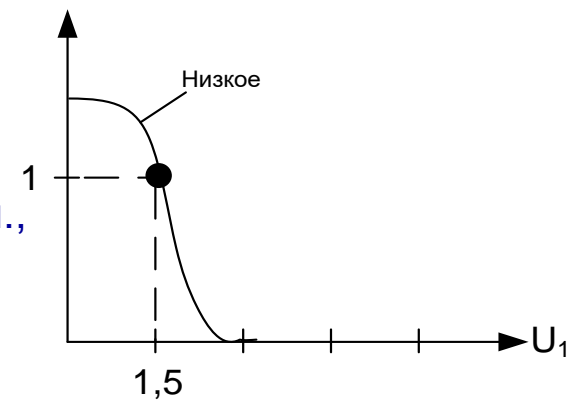
$$a \rightarrow b = \max(1 - a, b);$$

$$a \rightarrow b = \min(1, 1 - a + b);$$

$$a \leftrightarrow b = (a \rightarrow b) \ \& \ (b \rightarrow a) = \min(\max(\neg a, b), \max(a, \neg b));$$

# Нечеткие предикаты

- $n$ -местным *нечетким предикатом*, определенным на множествах  $U_1, U_2, \dots, U_n$  называется выражение содержащее предметные переменные данных множеств и превращающиеся в нечеткие высказывания при замене предметных переменных элементами множеств  $U_1, U_2, \dots, U_n$ ;
- Пусть  $U_1, U_2, \dots, U_n$  – базовые множества лингвистических переменных, а в качестве символов предметных переменных выступают имена лингвистических переменных;
- Тогда примерами нечетких предикатов являются:
  - «давление в цилиндре низкое» - одноместный предикат;
  - «температура в котле значительно выше температуры в теплообменнике» - двуместный предикат;
- При фиксации конкретного элемента базового множества НП обращается в НВ;
- Например, если текущее давление в цилиндре = 1,5 атм., НП «давление в цилиндре низкое» обращается в НВ с истинностью 0,7;



## Композиционное правило вывода

- При построении и реализации нечетких алгоритмов важную роль играет предложенное Л.Заде *композиционное правило вывода*
- Пусть  $R$  – нечеткое отображение  $U \rightarrow V$ , а  $X$  – нечеткое подмножество универсума  $U$ ,
- Тогда  $X$  порождает в  $V$  нечеткое подмножество  $Y$ :

$$Y = X \circ R$$

следующим образом:

$$\mu_Y(v) = \max_u (\min(\mu_X(u), \mu_R(u, v)))$$

- Пример:  $X = \{(0,8 / u_1), (0,3 / u_2)\}$ ,

$R$	$v_1$	$v_2$	$v_3$
$u_1$	0,2	0,5	0,8
$u_2$	1,0	0,7	0,4

$$\tilde{Y} = \tilde{X} \circ R = \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} \begin{bmatrix} 0,8 \\ 0,3 \end{bmatrix} \circ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{bmatrix} 0,2 & 0,5 & 0,8 \\ 1,0 & 0,7 & 0,4 \end{bmatrix} \end{matrix} = \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ \begin{bmatrix} 0,3 & 0,5 & 0,8 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\tilde{Y} = \{(0,3 / v_1), (0,5 / v_2), (0,8 / v_3)\}$$

## Композиционное правило вывода

- Композиционное правило вывода является основой при построении логического вывода в нечеткой логике
- Пусть задано нечеткое высказывание  $A \rightarrow B$ , где  $A$  и  $B$  – нечеткие множества.
- Пусть также задано некоторое высказывание  $A'$ , близкое к  $A$ , но не тождественное ему
- В классической логике широко используется правило вывода Modus Ponens:

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

- Это правило правило обобщается на случай нечеткой логики следующим образом:

$$\frac{\tilde{A}', \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}}{\tilde{B}'}$$

- Пусть множества  $A$  и  $A'$  определены на базовом множестве  $X$ , а  $B$  и  $B'$  на базовом множестве  $Y$
- Естественно считать, что высказывание  $A \rightarrow B$  задает некоторое нечеткое отображение  $R$  из множества  $X$  в  $Y$ :

$$\tilde{R}_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}} : X \rightarrow Y$$

## Композиционное правило вывода

- Тогда в соответствии с композиционным правилом вывода имеем:

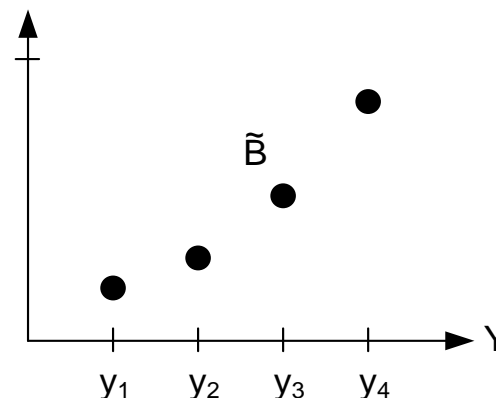
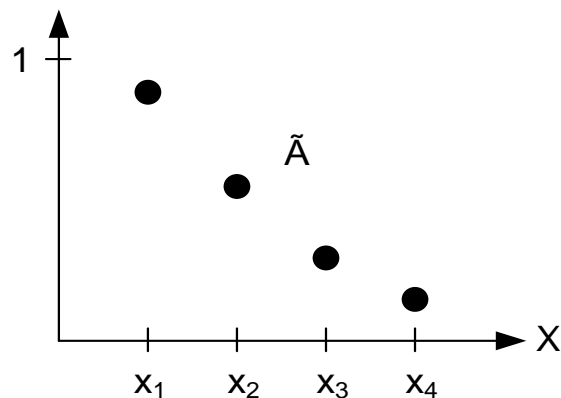
$$\mu_{\tilde{B}'}(y) = \max_{x_i \in X} [\min(\mu_{\tilde{A}'}(x_i) \mu_{\tilde{R}, \tilde{A} \rightarrow \tilde{B}}(x_i, y))]$$

- Рассмотрим НВ: «Если температура в котле *низкая* ( $A$ ), то подогрев *повышенный* ( $B$ )»
- Отношение  $R_{A \rightarrow B}$  строится на основе определения операции импликации в нечеткой логике:

$$\tilde{a} \rightarrow \tilde{b} = \min(\tilde{a}, \tilde{b})$$

$$\tilde{A} = \{0,9 / x_1; 0,7 / x_2; 0,4 / x_3; 0,1 / x_4\}$$

$$\tilde{B} = \{0,2 / y_1; 0,6 / y_2; 0,8 / y_3; 1,0 / y_4\}$$



## Композиционное правило вывода

- Согласно КПВ для  $A \rightarrow B$  рассчитывается матрица нечеткого отношения:

$$\tilde{R}_{\tilde{A} \rightarrow \tilde{B}} : \begin{array}{ccccc} & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} & \begin{array}{c} 0,2 \\ 0,2 \\ 0,2 \\ 0,1 \end{array} & \begin{array}{c} 0,6 \\ 0,6 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{array} & \begin{array}{c} 0,8 \\ 0,7 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{array} & \begin{array}{c} 0,9 \\ 0,7 \\ 0,4 \\ 0,1 \end{array} \end{array}$$

- Тогда для  $A'$  получим  $B'$  :

$$\tilde{A}' = \{0,3 / x_1; 0,8 / x_2; 1,0 / x_3; 0,4 / x_4\}$$

$$\tilde{B}' = \tilde{A}' \circ \tilde{R} = \{0,2 / y_1; 0,6 / y_2; 0,7 / y_3; 0,7 / y_4\}$$

## Композиционное правило вывода

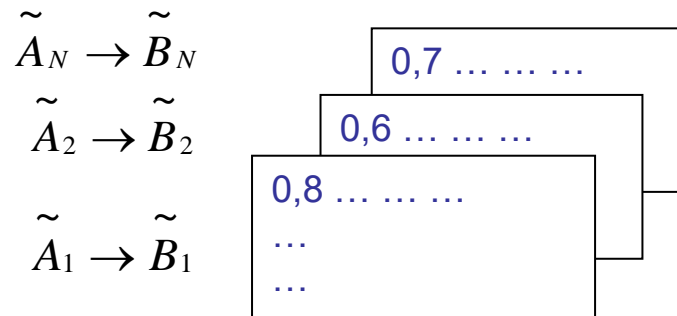
- Практические нечеткие логические алгоритмы содержат не одно, а множество продукционных правил:

Если  $S_1$ , то  $R_1$ , иначе

...

Если  $S_n$ , то  $R_n$ , иначе

- Поэтому нечеткие отношения должны быть построены для каждого отдельного правила, а затем *агрегированы* путем наложения друг на друга

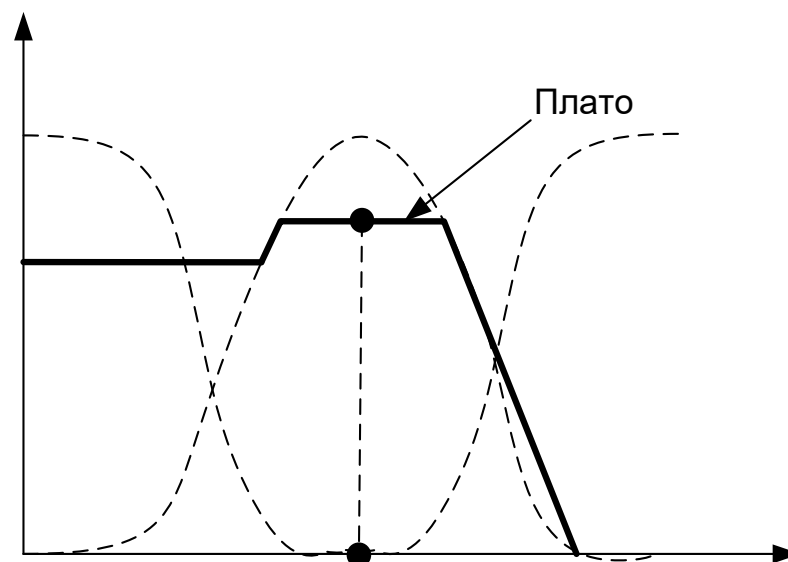


- В качестве агрегирующей операции выбирается или *min* или *max* в зависимости от типа импликации

## Методы дефаззификации. «Середина плато»

- При использовании нечеткого вывода в контуре управления реальным объектом, на объект должно выдаваться четкое управляющее воздействие;
- В этом случае нечеткое множество, формируемое на основе композиционного правила вывода, необходимо преобразовать в четкое значение ;
- Эта процедура называется дефаззификацией. Предложено несколько методов дефаззификации;
- Наиболее часто используется 2 способа:

1. Середина «плато» - выбирается средняя точка среди имеющих максимальные степени принадлежности





## Методы дефаззификации. «Центр тяжести»

2. Центр тяжести – определяется точка которая делит площадь нечеткого множества пополам

