

# Equisatisfiability of CNF with blocked clause

Matouš Mařík

Let  $\phi$  be a CNF and  $C \in \phi$  a clause in  $\phi$  and  $l \in C$  a literal in  $C$ . We say that  $C$  is blocked by literal  $l$  if for every other clause  $D \in \phi$  which contains  $\neg l$  we have that  $\text{Res}(C, D)$  is a tautology (i.e. there is another literal  $l' \in C$  such that  $\neg l' \in D$ ). Show that  $\phi$  is equisatisfiable with  $\phi \setminus \{C\}$ , i.e.  $\phi$  is satisfiable if and only if  $\phi \setminus \{C\}$  is satisfiable.

Splnitelná  $\phi \Rightarrow$  splnitelná  $\phi \setminus \{C\}$

- triviální - stejný model

Splnitelná  $\phi \setminus C \Rightarrow$  splnitelná  $\phi$

- $l$  ... blokující literál  $C$
  - pokud  $\phi$  obsahuje pouze jednu klauzuli  $C$  pak  $\phi$  je vždy splněna a neprázdná  $C$  je vždy splnitelná
  - $l_D$  ... literál  $C \setminus l$ , pro který platí  $\neg l_D \in D$
  - pokud  $\phi \setminus C$  je splnitelná, pak existuje model (který je úplné ohodnocení všech literálů  $\phi$ )  $a$ , takový, že:
    1. buď  $a(l) = 1 \Rightarrow a \models C \Rightarrow \phi$  je splnitelná
    2. nebo  $a(l) = 0$ 
      - existuje-li nějaký  $l_D \in a$  pak  $a \models C$
- 
- jinak by pro všechny  $D \in \phi \setminus C$  jejich literál  $\neg l_D$  (literál vyplývající z tautologie vznikající rezolucí, definovaný výše) byl v  $a$ , tedy  $a(l_D) = 0$
  - a tedy model  $a'$  t.ž. pro každý literál  $l' \neq l$  platí  $a'(l') = a(l')$  a zároveň  $a'(l) = 1$  (tedy model, který se od  $a$  liší tím, že místo  $\neg l$  obsahuje  $l$ ), splňuje jak  $C$ , tak  $\phi \setminus C$
  - tedy  $a'$  splňuje bod 1.