DP-elimination

Matouš Mařík

```
One of the preprocessing steps can be to eliminate some of the variables using so-
called DP-elimination (or DP-resolution). In particular, assume we have a CNF ϕ
and a variable x which we want to eliminate. Denote
    ϕ0 = {C ∈ ϕ | ¬x ∈ C}
    ϕ1 = {C ∈ ϕ | x ∈ C}
    ϕr = {C ∈ ϕ | C ∩ {x, ¬x} = ∅}
Namely, ϕ0 consists of the clauses containing negative literal ¬x, ϕ1 consists of
the clauses containing positive literal x, ϕr contains the rest of the clauses.
Let us now define
    ϕdp = {Res(C0, C1) | C0 ∈ ϕ0, C1 ∈ ϕ1}
where Res(C0, C1) denotes the clauses originating from C0 and C1 by resolution.
Show that ϕ is equisatisfiable with ϕ′ = ϕr ∧ ϕdp.
```

Splnitelná $\varphi \implies$ splnitelná φ'

- nechť α je nějaké úplné ohodnocení φ, které jí splňuje - tedy je jejím (úplným modelem) ... $\alpha \models \varphi$
- potom určitě $\alpha \models \varphi_r$, neboť jsou to původní klauzule z φ
- stačí ukázat, že i $\alpha \models \varphi_{dp}$
  - každou klauzuli $C_r \in \varphi_{dp}$ lze přímo odvodit rezolucí z φ, tedy $\varphi \vdash C_r$
  - každý model formule je modelem i rezolucí odvozených klauzulí, tedy $\varphi \models C_r$
  - z toho plyne že $\alpha \models \varphi_{dp}$

Splnitelná $\varphi' \implies$ splnitelná φ

- jsou splnitelné $\varphi_r \wedge \varphi_{dp}$, je třeba dokázat, že z toho vyplývá, že jsou splnitelné $\varphi_0 \wedge \varphi_1$
- α' je úplný model splňující φ', který neobsahuje proměnnou x
  - triviálně $\alpha' \models \varphi_r$
- nechť C_n je jakákoliv z klauzulí $C_0 \backslash \{\neg x\}$ (kde $C_0 \in \varphi_0$ ze zadání), nebo z klauzulí $C_1 \backslash \{x\}$ (kde $C_1 \in \varphi_1$ ze zadání), která <u>není</u> modelem α' splněna
  - pokud takovou klauzuli nelze najít, pak $\alpha' \models \varphi_0 \wedge \varphi_1$
  - pro zbytek bodů se BÚNO předpokládá, že $C_n \equiv C_{n,0} \backslash \{\neg x\}$, kde $C_{n,0}$ je nějaká konkrétní $C_0 \in \varphi_0$

- protože $\alpha' \models \varphi' \implies \alpha' \models \varphi_{dp}$, pak $\mathrm{Res}(C_{n,0}, C_1)$ jsou modelem splněny pro všechny $C_1 \in \varphi_1$
- protože $\alpha' \not\models C_n$ (protože tak byla vybrána C_n), pak musí platit $\alpha' \models C_1 \backslash \{x\}$ a to pro všechny $C_1 \in \varphi_1$, z čehož vyplývá, že platí $\alpha' \models \varphi_1$
- model α který vznikne rozšířením modelu α' tak, že $\alpha(x) = 0$ splňuje φ
  - protože model α obsahující $\neg x$ splní všechny klauzule z φ_0

- díky CNF tvaru formule rozšířený model určitě splňuje všechny klauzule, které splňoval původní model