Université Savoie Mont Blanc Année 2019-2020
UFR SceM L1 S2 MIST-CMI Informatique

MATH201-MIST
TP algèbre linéaire

NB : Dans les systèmes d'équations, les équivalences sont en faite des implications, je me suis trompé de symbole...

Prénom NOM : Simon Léonard

Groupe de TP/Nom de l'intervenant : CMI-INFO / Stéphane Simon

Date/horaire de la séance : 16-04-2020 / 9h - 12h

Consignes :

— Se connecter à `Cocalc.com`

— Créer un compte (avec l'adresse mel `Prenom.Nom@etu.univ-smb.fr`)

— Créer un nouveau projet (dossier) nommé `MATH201-MIST-2019-2020`

— Créer un nouveau fichier Jupiter Notebook nommé `MATH201-MIST-TP-Prenom-Nom.ipynb` dans ce projet

— Sélectionner le *`Kernel`* `SageMath (Development, Py3)`

— Répondre aux questions directement sur l'énoncé du TP et le rendre *précisément* lors du deuxième CC, 10 min. avant le début de l'épreuve (absence au TP = 0/20, TP non rendu ce jour = 0/20)

Exercice 1. [Matrices et produit matriciel]

1. Dans `sage`, pour entrer la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

il suffit de taper `M = matrix([[1,2,3],[4,5,6]])` et d'appuyer sur `Ctrl-Entrée`.
Pour voir si la matrice M est bien saisie, taper M et appuyer sur `Ctrl-Entrée`.

2. Dans `sage` pour entrer le vecteur colonne

$$V = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$$

taper `V = matrix([[7],[8],[9]])` et appuyer sur `Ctrl-Entrée`.
Pour voir si le vecteur V est bien saisi, taper `V` et appuyer sur `Ctrl-Entrée`.

3. On considère un entier $n \geqslant 1$. On considère un vecteur ligne et un vecteur colonne à n entrées

$$L = (l_1, l_2, \ldots, l_n) \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On définit le produit $L \cdot C$ de la manière suivante

$$L \cdot C = l_1c_1 + l_2c_2 + \cdots + l_nc_n = \sum_{i=1}^{n} l_ic_i.$$

Effectuer à la main le produit $L \cdot C$ pour

$$L = (1,2,3),\ C = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\quad L \cdot C = (-2)$$

Vérifier votre calcul en saisissant sous `sage` `L` et `C` et en effectuant le produit `L*C`.
On considère une matrice M ayant m lignes et n colonnes et un vecteur colonne C

$$M = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

On définit le produit de M par C en effectuant le produit de chaque ligne de M avec la colonne C :

$$M \cdot C = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C \\ L_2 \cdot C \\ \vdots \\ L_m \cdot C \end{pmatrix}$$

Effectuer à la main le produit

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Vérifier votre calcul avec `sage` en entrant la matrice `A` et le vecteur `C` correspondant, puis en tapant `A*C`.

4. On définit le produit d'une matrice T ayant n colonnes avec une matrice S ayant n lignes en effectuant le produit de T par les colonnes de S, successivement colonne par colonne :

$$T = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_i \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_j & \cdots & C_p \end{pmatrix}$$

$$T.S = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C_1 & \cdots & L_1 \cdot C_j & \cdots & L_1 \cdot C_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_i \cdot C_1 & \cdots & L_i \cdot C_j & \cdots & L_i \cdot C_p \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ L_m \cdot C_1 & \cdots & L_m \cdot C_j & \cdots & L_m \cdot C_p \end{pmatrix}.$$

Observez que la matrice $T \cdot S$ a autant de lignes que T et autant de colonnes que S.
Effectuer les produits suivants

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Vérifier vos calculs avec `sage`.

Exercice 2. [Matrices et applications linéaires] On considère l'application

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-y, z-y). \end{array}$$

1. Montrer que cette application est linéaire.
   Une application est linéaire si elle est additive et homogène.
   (a) Soit $u=(x,y,z)$, $u'=(x',y',z')\in\mathbb{R}^3$, deux vecteurs.
   (b) Vérification de l'additivité :
   $$\begin{aligned} f(u+u') &= f((x+x', y+y', z+z')) \\ &= (x+x'-y-y', z+z'-y-y') \\ &= (x-y+x'-y', z-y+z'-y') \\ &= (x-y, z-y)+(x'-y', z'-y') \\ &= f(u)+f(u') \end{aligned}$$
   (c) Vérification de l'homogénéité :
   $$\begin{aligned} f(\lambda u) &= f((\lambda x, \lambda y, \lambda z)) \\ &= (\lambda x-\lambda y, \lambda z-\lambda y) \\ &= (\lambda(x-y), \lambda(z-y)) \\ &= \lambda(x-y, z-y) \\ &= \lambda f(u) \end{aligned}$$
   Puisque l'application est additive et homogène, l'application est linéaire.

2. On note $\mathcal{C}_3=((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ et $\mathcal{C}_2=((1,0),(0,1))$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ respectivement.
   Montrer que les composantes des vecteurs $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ et $f(0,0,1)$ dans la base $\mathcal{C}_2$ sont
   $$[f(1,0,0)]_{\mathcal{C}_2}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, [f(0,1,0)]_{\mathcal{C}_2}=\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}, [f(0,0,1)]_{\mathcal{C}_2}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$
   Je vérifie donc pour chaque cas :
   $$f(1,0,0)=(1-0,0-0)=(1,0) \tag{1}$$
   $$f(0,1,0)=(-1,-1) \tag{2}$$
   $$f(0,0,1)=(0,1) \tag{3}$$

3. La matrice
   $$mat(f,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2)=\left(\ [f(1,0,0)]_{\mathcal{C}_2}\ \middle|\ [f(0,1,0)]_{\mathcal{C}_2}\ \middle|\ [f(0,0,1)]_{\mathcal{C}_2}\ \right)=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$$
   est appelé *matrice* de f dans les bases $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_2$.
   En utilisant le produit matriciel défini dans l'exercice 1, montrer que pour tout x, y, $z\in\mathbb{R}$ on a
   $$[f(x,y,z)]_{\mathcal{C}_2}=mat(f,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2)[(x,y,z)]_{\mathcal{C}_3}.$$

D'une part,

$$\begin{aligned}
[f(x,y,z)]_{\mathcal{C}_2} &= [f(x,0,0)]_{\mathcal{C}_2} + [f(0,y,0)]_{\mathcal{C}_2} + [f(0,0,z)]_{\mathcal{C}_2} \\
&= x \cdot [f(1,0,0)]_{\mathcal{C}_2} + y \cdot [f(0,1,0)]_{\mathcal{C}_2} + z \cdot [f(0,0,1)]_{\mathcal{C}_2} \\
&= x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x-y \\ -y+z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
&mat(f,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2) \cdot [(x,y,z)]_{\mathcal{C}_3} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x-y \\ -y+z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Donc $[f(x,y,z)]_{\mathcal{C}_2} = mat(f,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2)[(x,y,z)]_{\mathcal{C}_3}$.

4. Dans `sage`, saisir dans la variable `M` la matrice $mat(f,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2)$ puis utiliser `sage` pour calculer

$$[f(1234,5678,9101)]_{\mathcal{C}_2} = \begin{pmatrix} -4444 \\ 3423 \end{pmatrix}$$

5. Calculer le noyau de f. Justifier. Vérifier votre calcul avec `sage` en tapant la commande `M.right_kernel()`
On cherche $f(x,y,z) = 0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$.

$$\begin{aligned}
&f(x,y,z) = (0,0) \\
\implies &\begin{cases} x - y = 0 \\ z - y = 0 \end{cases} \\
\implies &x = y = z
\end{aligned}$$

donc $ker(f) = \{x = y = z\} =< (1,1,1) >$

6. Rappeler la définition du *rang* de f. Le calculer directement à partir de la définition puis à l'aide du théorème du rang. Vérifier votre calcul en tapant dans `sage` la commande `M.image()`.
Le rang d'une application linéaire est la dimension du sous-espace vectoriel image de cette même application. Autrement écrit, $rg\, f = dim\, im\, f$.

$$\begin{aligned}
im\, f &= \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, (a,b) = f(x,y,z)\} \\
&= \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x - y = a \\ z - y = b \end{cases} \right\} \\
&= \left\{ (a,b) \in \mathbb{R}^2 : \exists (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} x = a + z - b \\ y = z - b \end{cases} \right\} \\
&= \mathbb{R}^2
\end{aligned}$$

Avec le théorème du rang :

$$\begin{aligned} dim\, \mathbb{R}^3 &= dim(ker\, f) + rg(f) \\ rg(f) &= dim\, \mathbb{R}^3 - dim(ker\, f) \\ &= 3 - 1 \\ &= 2 \\ &\implies im\, f = \mathbb{R}^2 \end{aligned}$$

Donc $rg\, f = dim\, im\, f = dim\, \mathbb{R}^2 = 2$

Exercice 3. [Obtenir des résultats avec `sage` et les vérifier] On considère l'application linéaire

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+y+z, x+y+z, x+y+z) \end{array}.$$

1. En utilisant `sage`, donner une base du noyau de f.

   Soit M la matrice de l'application linéaire f, avec $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   `M.right_kernel()` renvoie la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Donc $ker\, f =< (1, 0, -1), (0, 1, -1) >$.

2. Vérifier à la main que la famille obtenue est bien une base du noyau de f.

   On vérifie que la famille est libre
   Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ -\alpha - \beta = 0 \end{cases} \iff \alpha = \beta = 0$$

   Donc $< (1, 0, -1), (0, 1, -1) >$ est une famille libre.

   On vérifie que la famille est génératrice
   Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.

$$\alpha(1, 0, -1) + \beta(0, 1, -1) = (a, b, c) \iff \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b \\ -\alpha - \beta = c \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = a \\ \beta = b \\ c = -a - b \end{cases}$$

   Donc la famille est génératrice.

Exercice 4. [Multiplication matricielle et composition d'applications]. On considère les applications linéaires

$$f \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (a, b) & \mapsto & (a+b, -a-b, a-b) \end{array}, \qquad g \quad : \quad \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x+z, x+y) \end{array}.$$

On note $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ respectivement.

1. Exprimer les composées

$$— \quad f \circ g \quad : \quad \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto & \begin{aligned} f(x+z, x+y) &= (x+z+x+y, -x-z-x-y, x+z-x-y) \\ &= (2x+y+z, -2x-y-z, z-y) \end{aligned} \end{array}$$

— $\begin{array}{cccc} g\circ f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (a,b) & \mapsto & g(a+b,-a-b,a-b)=(a+b+a-b,a+b-a-b)=(2a,0) \end{array}$

2. Calculer les matrices suivantes

— $M = mat(f,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_3) = (\,f(1,0)|f(0,1)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

— $N = mat(g,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_2) = (\,g(1,0,0)|g(0,1,0)|g(0,0,1)\,) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

— $M\cdot N = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

— $N\cdot M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

— $A = mat(f\circ g,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_3) = (\,f\circ g(1,0,0)|f\circ g(0,1,0)|f\circ g(0,0,1)\,) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

— $B = mat(g\circ f,\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_2) = (\,g\circ f(1,0)|g\circ f(0,1)\,) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Que constatez-vous ?

Je constate que $A = M\cdot N$ et $B = N\cdot M$.

3. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{ccccc} h & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z,y+z,z) \end{array}$$

(a) Saisir dans `sage` la matrice

$$H = mat(h,\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) En utilisant `sage`, calculer H^k en choisissant divers entiers naturels k.

— Que conjecturez-vous pour H^n avec $n\in\mathbb{N}$?

Je conjecture que $H^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— Vérifier votre conjecture avec `sage` en calculant `H^1000 =`

$H^{1000} = \begin{pmatrix} 1 & 1000 & 500500 \\ 0 & 1 & 1000 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— Prouvez votre conjecture.

Nous allons le démontrer par récurrence. Soit $P(n)$: $H^n = \begin{pmatrix} 1 & n & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Initilisation

$$H^2 = H \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 = n & \frac{2(2+1)}{2} = \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 2 = n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Hérédité

Soit $k \in \mathbb{N}$ et $H^k = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$H^k \cdot H = \begin{pmatrix} 1 & k & \frac{k(k+1)}{2} \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & k+1 & \frac{(k+1)(k+2)}{2} \\ 0 & 1 & k+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = H^{k+1}$$

$P(n)$ et initialisé est héréditaire.

(c) Expliciter la composée millième de h avec lui-même

$$\begin{array}{rcccl} h^{(1000)} & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x + ny + z\frac{n(n+1)}{2}, y + nz, z) \\ & & & & = (x, 1000y + \frac{n(n+1)}{2} z, z + 1000z, z) \end{array}$$

Exercice 5. [Résolution d'un système linéaire avec `sage` et applications]

1. Résoudre le système linéaire suivant en appliquant la méthode du pivot de Gauss

$$\begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ x-y-z=2 & L_2 \\ x-y+z=3 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \mapsto L_1 \\ -2y-2z=1 & L_2 - L_1 \mapsto L_2 \\ -2y=2 & L_3 - L_1 \mapsto L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ -2y-2z=1 & L_2 \\ y=-1 & L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x+y+z=1 & L_1 \\ z=\dfrac{1}{2} & L_2 \\ y=-1 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{3}{2} & L_1 \\ y=-1 & L_3 \\ z=\dfrac{1}{2} & L_2 \end{cases}$$

2. Ce système s'écrit aussi sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Saisir dans les variables `S` et `C` la matrice du système et le vecteur colonne du second membre. Pour résoudre le système avec `sage` il suffit de saisir `S.solve_right(C)`. Vérifier vos calculs.

```
S=matrix([[1,1,1],[1,-1,-1],[1,-1,1]])
C=matrix([[1],[2],[3]])
S.solve_right(C)

OUTPUT:
[3/2]
[ -1]
[1/2]
```

3. On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-y-z) \end{array}$$

(a) Calculer une base du noyau de f. Vérifier vos calculs avec `sage`.

D'abord, il nous faut résoudre le système $f(x,y,z)=(0,0)$.

$$\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=-z & L_1 \\ x-y=z & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=-z & L_1 \\ \quad -2y=2z & L_2-L_1 \end{cases} \iff \begin{cases} x=0 \\ y=-z \end{cases}$$

Donc $ker\, f = \{(0,-z,z) : z \in \mathbb{R}\} = \{z(0,-1,1) : z \in \mathbb{R}\} = Vect((0,-1,1))$. On a montré que cette famille est libre et sa dimension est la même que l'ensemble de départ, elle est donc aussi génératrice. Donc la famille $((0,-1,1))$ est une base de $kar\, f$.

(b) Résoudre à la main le système $f(x,y,z)=(1,2)$.

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y-z=2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1-z & L_1 \\ x-y=2+z & L_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=1-z & L_1 \\ \quad 2x=3 & L_1+L_2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} y=1-z-x \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} y=-\dfrac{1}{2}-z \\ x=\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

$S=\{(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}-z,z), z\in\mathbb{R}\}$

(c) Montrer que la différence de deux solutions de ce système est un élément du noyau de f.

Prenons S_1 avec $z=1$ et S_2 avec $z=2$:

$$S_2-S_1=\left(\frac{3}{2},-\frac{5}{2},2\right)-\left(\frac{3}{2},-\frac{3}{2},1\right)=\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2},\frac{-5}{2}-\frac{-3}{2},2-1\right)=(0,-1,1)$$

Cette solution est bien un élément du noyau de f.

(d) Utiliser `sage` pour résoudre ce système. Que constatez-vous ? Comment feriez-vous en utilisant `sage` pour obtenir toutes les solutions de ce système ?

`sage` me donne la solution pour $z=0$. Puisque $z\in\mathbb{R}$, il est impossible d'avoir l'ensemble des solutions. Mais si nous voulions un certain nombre de solutions, nous pourrions simplement exécuter une boucle qui fait varié z, avec un certain pas.

4. On considère la famille de vecteurs

$$\vec{u}=(1,2,3), \vec{v}=(1,0,1), \vec{w}=(-1,6,5)$$

Est-ce une famille libre ? une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$? une base de $\mathbb{R}^3$? (vérifiez vos calculs avec `sage`)

Soit $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$. Résolvons le système suivant : $\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}+\gamma\vec{w}=\vec{0}$.

$$\alpha(1,2,3)+\beta(1,0,1)+\gamma(-1,6,5)=(0,0,0)$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 & L_1 \\ 2\alpha+6\gamma=0 & L_2 \\ 3\alpha+\beta+5\gamma=0 & L_3 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 & L_1 \\ -2\beta+8\gamma=0 & L_2-2L_1\mapsto L_2 \\ -2\beta+8\gamma=0 & L_3-3L_1\mapsto L_3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \alpha+\beta-\gamma=0 & L_1 \\ -2\beta+8\gamma=0 & L_2 \\ -2\beta+8\gamma=0 & L_3-L_2\mapsto L_3 \end{cases}$$

La solution de ce système n'est pas unique, donc la famille $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ n'est pas libre, elle n'est donc pas une base non plus.

5. On considère les trois sous-espaces vectoriels suivants

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\},\ G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y + z = 0\}$$

et

$$D = \{(t, t, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$$

F et G sont-ils en somme directe ? G et D sont-ils en somme directe ? sont-ils supplémentaires ? Décomposer le vecteur $(1, 2, 3)$ comme somme d'un vecteur de G et d'un vecteur de D. Cette décomposition est-elle unique ?

F et G en somme directe ?

$$F \cap G : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

Donc $S = \{(-z, 0, z) : z \in \mathbb{R}\}$. Puisque $F \cap G \neq \{0, 0, 0\}$, alors F et G ne sont pas en somme directe. F et G ne sont donc pas supplémentaires.

G et D en somme directe ?

$$G \cap D : \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x = y = z \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + z \\ x = y = z \end{cases}$$

Donc $S = \{(0, 0, 0)\}$. Puisque $G \cap D = (0, 0, 0)$, alors G et D sont en somme directe. $dim\, D = 1$, $dim\, G + dim\, D = dim(G \cap D) = 3$. G et D sont donc supplémentaires.

Décomposition de $(1, 2, 3)$ avec G et D
On veut : $(x, y, z)_G + (t, t, t)_D = (1, 2, 3)_{\mathbb{R}^3}$. Donc :

$$\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + t = 1 \\ y + t = 2 \\ z + t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \\ z = 1 \\ t = 2 \end{cases}$$

Donc $(1, 2, 3) = (-1, 0, 1)_G + (2, 2, 2)_D$. Par définition, la décomposition de (1,2,3) avec G et D est unique.

6. On considère une application linéaire $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. On considère une base $\mathcal{E} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ de $\mathbb{R}^n$ et une base $\mathcal{F} = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_m)$ de $\mathbb{R}^m$. La matrice de g dans les bases $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ est définie par

$$mat(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = ([g(\vec{e}_1)]_{\mathcal{F}}, \ldots, [g(\vec{e}_n)]_{\mathcal{F}})\,.$$

On considère l'application linéaire

$$\begin{array}{rccc} g & : & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & & (x, y, z) & \mapsto & (x + y + z, x - y + z) \end{array}$$

On considère la base canonique de $\mathcal{C}_2$ de $\mathbb{R}^2$ et la base canonique $\mathcal{C}_3$ de $\mathbb{R}^3$.
Soit les vecteurs

$$\vec{u} = (1, 0, -1),\ \vec{v} = (1, 2, 0),\ \vec{w} = (0, 1, 2)$$

et

$$\vec{a} = (3, -1), \vec{b} = (3, 0).$$

(a) Montrer que la famille $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ notée $\mathcal{E}$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On pourra utiliser `sage` pour les calculs.

Soit $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ avec $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = (0, 0, 0)$.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

La famille est donc libre. De plus, $dim\,(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 3$ donc la famille est une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) En utilisant `sage` pour résoudre des systèmes linéaires, calculer les composantes suivantes

$$[\vec{u}]_{\mathcal{C}_3},\ [\vec{v}]_{\mathcal{C}_3},\ [\vec{w}]_{\mathcal{C}_3},\ [(1, 0, 0)]_{\mathcal{E}},\ [(0, 1, 0)]_{\mathcal{E}},\ [(0, 0, 1)]_{\mathcal{E}}$$

$$[\vec{u}]_{\mathcal{C}_3} = (1, 0, 0) - 0 - (0, 0, 1) \tag{1}$$
$$[\vec{v}]_{\mathcal{C}_3} = (1, 0, 0) + 2(0, 1, 0) + 0 \tag{2}$$
$$[\vec{w}]_{\mathcal{C}_3} = 0 + (0, 1, 0) + 2(0, 0, 1) \tag{3}$$
$$[(1, 0, 0)]_{\mathcal{E}} = \frac{4}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w} \tag{4}$$
$$[(0, 1, 0)]_{\mathcal{E}} = -\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w} \tag{5}$$
$$[(0, 0, 1)]_{\mathcal{E}} = \frac{1}{3}\vec{u} - \frac{1}{3}\vec{v} + \frac{2}{3}\vec{w} \tag{6}$$

(c) En déduire les matrices de l'identité $id_{\mathbb{R}^3} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

— $mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{C}_3, \mathcal{E}) = ([(1, 0, 0)]_{\mathcal{E}} | [(0, 1, 0)]_{\mathcal{E}} | [(0, 0, 1)]_{\mathcal{E}}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

— $mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}, \mathcal{C}_3) = ([\vec{u}]_{\mathcal{C}_3} | [\vec{v}]_{\mathcal{C}_3} | [\vec{w}]_{\mathcal{C}_3}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

En utilisant sage, effectuez les produits suivants

— $mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{C}_3, \mathcal{E}) \cdot mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}, \mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

— $mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{C}_3, \mathcal{E}) \cdot mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}, \mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

A l'aide du lien entre produit matriciel et composée de fonctions, comment pouvait-on prévoir le résultat ?

...

(d) Montrer que la famille $(\vec{a}, \vec{b})$, notée $\mathcal{F}$, est une base de $\mathbb{R}^2$.

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^3, \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$

$$\begin{cases} 3\alpha + 3\beta = 0 \\ -\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{cases}$$

Donc $(\vec{a}, \vec{b})$ est libre. $dim\,(\vec{a}, \vec{b}) = 2$. Comme $(\vec{a}, \vec{b})$ est libre et est de même dimension que $\mathbb{R}^2$, alors c'est aussi une base de $\mathbb{R}^2$.

(e) En appliquant la méthode ci-dessus déterminer les matrices de l'identité $id_{\mathbb{R}^2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

— $mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{C}_2, \mathcal{F}) = ([(1,0)]_{\mathcal{F}} | [(0,1)]_{\mathcal{F}}) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

— $mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{F}, \mathcal{C}_2) = ([\vec{a}]_{\mathcal{C}_2} | [\vec{b}]_{\mathcal{C}_2}) = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(f) Donner les matrices

— $mat(g, C_3, C_2) = ([g(1,0,0)]_{\mathcal{C}_2} | [g(0,1,0)]_{\mathcal{C}_2} | [g(0,0,1)]_{\mathcal{C}_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

— $mat(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = ([g(1,0,-1)]_{\mathcal{F}} | [g(1,2,0)]_{\mathcal{F}} | [g(0,1,2)]_{\mathcal{F}}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) Avec `sage` effectuer les calculs suivants

— $mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{C}_2, \mathcal{F}) \cdot mat(g, C_3, C_2) \cdot mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}, \mathcal{C}_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

— $mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{F}, \mathcal{C}_2) \cdot mat(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \cdot mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{C}_3, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Que remarquez-vous ? comment peut-on prévoir le résultat en faisant le lien entre le produit matriciel et la composition des applications linéaires ?

Je remarque que :

$$mat(g, C_3, C_2) = mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{F}, \mathcal{C}_2) \cdot mat(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) \cdot mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{C}_3, \mathcal{E})$$
$$mat(g, \mathcal{E}, \mathcal{F}) = mat(id_{\mathbb{R}^2}, \mathcal{C}_2, \mathcal{F}) \cdot mat(g, C_3, C_2) \cdot mat(id_{\mathbb{R}^3}, \mathcal{E}, \mathcal{C}_3)$$