8.2 Solução Numérica de um P.V.I de Primeira Ordem

8.2.1 Método de Euler

Na Figura 8.2 a seguir estão representados o gráfico de uma função $y = f(x)$ e uma reta r tangente a ele no ponto $P = (x_0, y_0)$. A inclinação da reta r é dada por $y'(x_0)$ e sua equação é:
$r(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$.

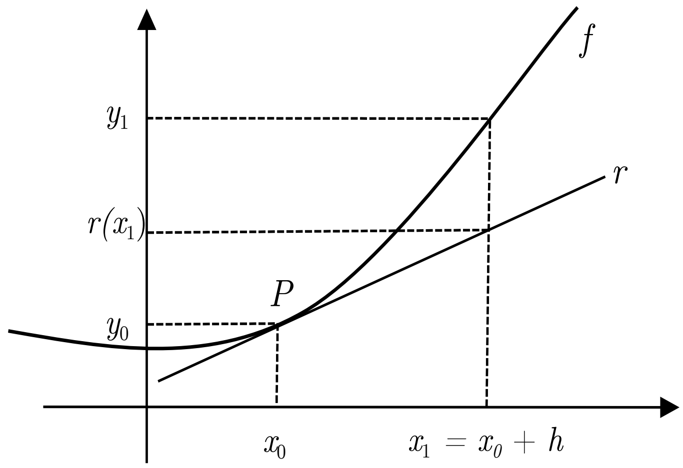

Figura 8.2:

Em particular, para $x = x_1$ tem-se $r(x_1) = y_0 + y'(x_0)(x_1 - x_0) = y_0 + y'(x_0)h$. Assim, como não se conhece o valor verdadeiro de $y_1 = y(x_1)$, o valor $r(x_1)$ pode ser tomado como uma aproximação para y_1. Evidentemente para que tal aproximação seja satisfatória é necessário que a função f seja suave numa vizinhança de x_0 e também que h seja pequeno.
De um modo geral, dado um ponto x_n então
$r(x_{n+1}) = y_n + y'(x_n)h,$ ou simplesmente,
$y_{n+1} = y_n + hy'_n = y_n + hf(x_n, y_n)$, é tomado como uma aproximação para o valor exato de y_{n+1}. Esta é a fórmula de recorrência do método de Euler.
Seja $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ uma sequência de pontos tais que $x_i - x_{i-1} = h, i = 1, 2, \ldots, n$. Se $y_0 = y(x_0)$ for conhecido o método de Euler consiste em realizar n iterações para se obter $y_1 = y(x_1), y_2 = y(x_2), \ldots, y_n = y(x_n)$.

Exemplo 8.5
Dado o PVI $y' = y - x; y(0) = 3$ obter $y(0.4)$ com $h = 0.1$.

Solução

Neste caso

$$f(x, y) = y - x.$$

Assim,

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n) = y_n + 0.1(y_n - x_n) = 1.1y_n - 0.1x_n.$$

Os pontos base são $x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3$ e $x_4 = 0.4$.

Iterações

$n = 0 : y_1 = y(x_1) = 1.1y_0 - 0.1x_0 = 1.1(3) - 0.1(0) = 3.3.$

$n = 1 : y_2 = y(x_2) = 1.1y_1 - 0.1x_1 = 1.1(3.3) - 0.1(0.1) = 3.62.$

$n = 2 : y_3 = y(x_3) = 1.1y_2 - 0.1x_2 = 1.1(3.62) - 0.1(0.2) = 3.962.$

$n = 3 : y_4 = y(x_4) = 1.1y_3 - 0.1x_3 = 1.1(3.962) - 0.1(0.3) = 4.3282.$

A solução procurada é $y_4 = 4.3282$.

Exercício

1) Dado o P.V.I. $y' = x - y + 2; y(0) = 2$ determine $y(0.4)$ com $h = 0.1$.

2) Considerando o PVI $y' = -y, y(0) = 1$ obtenha $y(0.3)$ com $h = 0.1$.

3) Faça um programa para o método de Euler. Use-o para obter

   a) $y(1)$ com $h = 0.01$ nos exercícios 1.

   b) $y(1)$ com $h = 0.05$ nos exercícios 2.

Resp.: 1) 2.0561; 2) 0.7290; 3a)2.3660; 3b) 0.3585