8.2.4 Métodos de Runge-Kutta

A essência dos métodos de Runge Kutta, que são classificados de acordo com a ordem, é a não utilização de derivadas de $f(x, y)$, que são necessárias no método da série de Taylor para os casos de ordem 2 em diante. A derivação dos métodos de Runge-Kutta são bastante trabalhosas e requerem conhecimento de cálculo avançado. Por isso serão apresentadas aqui apenas os métodos sem suas deduções.

Estes métodos são classificados por ordem. Sendo $y' = f(x, y)$ com $y(x_0) = y_0$ então os métodos de Runge-Kutta até ordem 4 são:

Ordem 1
$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$ (Coincide com o método de Euler)

Ordem 2
$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hy_n)]$ (Coincide com o método de Heun)
Outra forma de escrever a fórmula anterior é
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$ onde
$k_1 = hf(x_n, y_n)$ e
$k_2 = hf(x_n + h, y_n + k_1)$

Ordem 3
$y_{n+1} = y_n + \frac{2}{9}k_1 + \frac{1}{3}k_2 + \frac{4}{9}k_3$, onde
$k_1 = hf(x_n, y_n)$,
$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$ e
$k_3 = hf(x_n + \frac{3}{4}h, y_n + \frac{3}{4}k_2)$

Ordem 4 - Esta é a fórmula mais utilizada.
$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, onde
$k_1 = hf(x_n, y_n)$,
$k_2 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_1}{2})$
$k_3 = hf(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{k_2}{2})$ e
$k_4 = hf(x_n + h, y_n + k_3)$

Exemplo 8.11
Dado o PVI $y' = x - y + 2, y(0) = 2$ determine $y(0.3)$ pelo método de Runge-Kutta de terceira ordem $h = 0.1$.

Solução:
Neste caso $f(x_n, y_n) = x_n - y_n + 2$
$x_0 = 0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$ e $x_3 = 0.3$
Iterações:
$n = 0$
$k_1 = hf(x_0, y_0) = h(x_0 - y_0 + 2) = 0.1(0 - 2 + 2) = 0$
$k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) = h(x_0 + \frac{h}{2} - (y_0 + \frac{k_1}{2}) + 2)$
$\quad = 0.1(0 + 0.05 - (2 + 0) + 2) = 0.005$
$k_3 = h(f(x_0 + \frac{3}{4}h, y_0 + \frac{3}{4}k_2)) = h(x_0 + \frac{3}{4}h - (y_0 + \frac{3}{4}k_2) + 2)$
$\quad = 0.1(0 + \frac{3}{4}(0.1) - (2 + \frac{3}{4}(0.005)) + 2) = 0.0071$
$y_1 = y(x_1) = y_0 + \frac{2}{9}(0) + \frac{1}{3}(0.005) + \frac{4}{9}(0.0071) = 2.0048$
Continuado os cálculos obtemos
$y_2 = y(x_2) = 2.0187$
$y_3 = y(x_3) = 2.0408$

Exercício:
Dado o PVI , $y' = x + y, y(0) = 1$ faça um programa para encontrar y(0.6) pelo método de Runge-Kutta de ordem 4 com h = 0.2.