8.2.2 Método de Heun

Considere um PVI $y' = f(x, y), y(x_0) = y_0$. Na Figura 8.5 a seguir estão representados o gráfico da suposta função $y = f(x)$ e da reta r_0 tangente a ele no ponto $P = (x_0, y_0)$. Além desta reta também estão representados os gráficos de outras quatro retas, denominadas r_0, r_1, r_2 e t. A inclinação da reta r_0 é dada por $m_0 = y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ e sua equação é:

$r_0(x) = y_0 + y'(x_0)(x - x_0)$.

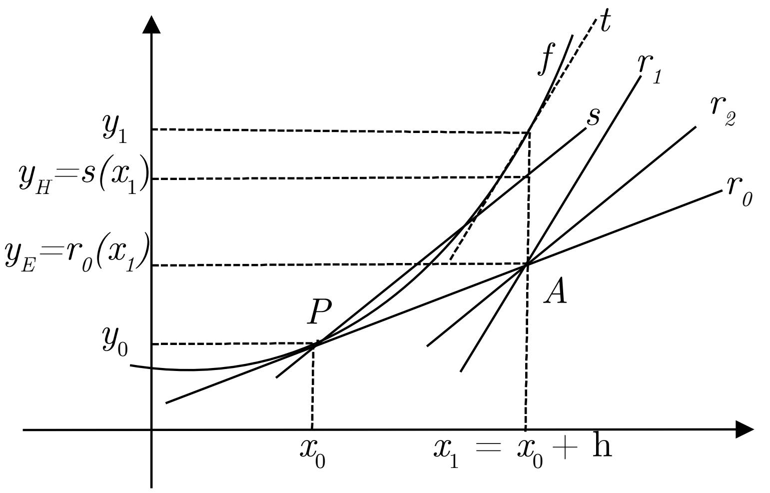

Figura 8.5:

O valor $y_E = r_0(x_1)$ é aquele usando como aproximação para $y_1 = y(x_1)$ no método de Euler, ou seja, $y_E = y_0 + hy'(x_0) = y_0 + hf(x_0, y_0)$. A reta t é tangente ao gráfico de f no ponto (x_1, y_1), de modo que sua inclinação é $m = y'(x_1)$. Por construção, a reta r_1 passa por $A = (x_1, y_E)$ e tem inclinação $m_1 = m = y'(x_1)$, ou seja, r_1 é paralela a t. A reta r_2 também passa por $A = (x_1, y_E)$ e sua inclinação é $m_2 = (m_0 + m_1)/2 = [y'(x_0) + y'(x_1)]/2$. Por fim, a reta s passa por P e é paralela a r_2, de modo que sua inclinação é m_2. Portanto, a equação de s é dada por

$$s(x) = y_0 + \frac{1}{2}[y'(x_0) + y'(x_1)](x - x_0)$$

Para $x = x_1$ tem-se

$$\begin{aligned} s(x_1) &= y_0 + \frac{1}{2}[y'(x_0) + y'(x_1)](x_1 - x_0) \\ &= y_0 + \frac{1}{2}[y'(x_0) + y'(x_1)]h \end{aligned}$$

A ideia do método de Heun é utilizar $y_H = s(x_1)$ como uma aproximação para y_1.

Temos que $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$, valor que é dado no PVI. Mas $y'(x_1) =$

$f(x_1, y_1)$ não é conhecido. Muito embora seja fácil obter $x_1 = x_0 + h$, o valor de y_1 não tem como ser calculado já que não conchemos a função $y = f(x)$. Assim, para efetuar o cálculo de $f(x_1, y_1)$ vamos usar $y_E = y_0 + hf(x_0, y_0)$ como uma aproximação para y_1. Portanto,

$$\begin{aligned} y_H &= y_0 + \tfrac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_1, y_1)] \\ &= y_0 + \tfrac{h}{2}[f(x_0, y_0) + f(x_0 + h, y_0 + hf(x_0, y_0))] \end{aligned}$$

De uma maneira geral, para um ponto arbitrário x_n a aproximação para y_{n+1} para $y(x_{n+1})$ é dada por

$$y_{n+1} = y_n + \tfrac{h}{2}[f(x_n, y_n) + f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n)], n = 0, 1, \ldots$$

Esta é a fórmula do método de Heun, também conhecida como método de Euler aperfeiçoado.

A fim de facilitar a visualização pode-se fazer

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)$ onde

$k_1 = f(x_n, y_n)$

$k_2 = f(x_n + h, y_n + hf(x_n, y_n))$

Exemplo 8.8

Dado o PVI $y' = -x + y; y(0) = 3$ obter $y(0.4)$ com $h = 0.1$.

Solução

Neste caso

$f(x, y) = -x + y.$

Assim,

$k_1 = -x_n + y_n$

$k_2 = -(x_n + h) + y_n + h(-x_n + y_n) = (1 + h)(y_n - x_n) - h$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[k_1 + k_2]$

Os pontos base são $x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3$ e $x_4 = 0.4$.

Iterações

$n = 0 : k_1 = 3, k_2 = 3.2, y_1 = y(x_1) = 3.31$

$n = 1 : k_1 = 3.21, k_2 = 3.431, y_2 = y(x_2) = 3.6421$

$n = 2 : k_1 = 3.4421, k_2 = 3.6863, y_3 = y(x_3) = 3.9985$

$n = 3 : k_1 = 3.6985, k_2 = 3.9683, y_4 = y(x_4) = 4.3818$

A solução procurada é $y_4 = 4.3818$.

Exercícios

1. Dado o PVI. $y' = x - y + 2; y(0) = 2$ determine $y(0.4)$ com $h = 0.2$.
2. Resolva o PVI anterior pelo método de Euler e compare a diferença

entre as soluções. 3 . Utilizando um programa $y(1.5)$ com $h = 0.1$ tanto pelo método de Euler quanto pelo método de Heun. Plote os ponto (x_n, y_n) para os dois métodos em um mesmo sistema cartesiano.