8.2.3 Método da Série de Taylor

Sejam as aproximações $y_1, y_2, \ldots, y_n$ para $y(x)$ nos pontos $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Consideremos o desenvolvimento em Série de Taylor de $y(x)$ em torno do ponto x_n. Então,

$$y(x) = y(x_n) + y'(x_n)(x - x_n) + \frac{y''(x_n)(x-x_n)^2}{2!} + \frac{y'''(x_n)(x-x_n)^3}{3!} + \ldots$$

Assim,

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{y''(x_n)(x_{n+1}-x_n)^2}{2!} + \frac{y'''(x_n)(x_{n+1}-x_n)^3}{3!} + \ldots$$

Sendo $x_{n+1} - x_n = h$ então

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + y'(x_n)h + \frac{y''(x_n)h^2}{2!} + \frac{y'''(x_n)h^3}{3!} + \ldots$$

Desta expressão se obtém o método da Série de Taylor de ordem 1, dado por

$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n)$ (coincide com o método de Euler).

De modo similar se obtém o método da Série de Taylor de ordem 2, dado por

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2}y''(x_n)$$

Seguindo deste modo se obtém o método da Série de Taylor de ordem k dado por

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + hy'(x_n) + \frac{h^2}{2!}y''(x_n) + \ldots + \frac{h^k}{k!}y^k(x_n)$$

Abreviadamente,

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2!}y''_n + \ldots + \frac{h^k}{k!}y^k_n$$

Exemplo 8.9

Dado o PVI $y' = y - x; y(0) = 3$ obter $y(0.4)$ pelo método da Série de Taylor de ordem 2 com $h = 0.1$.

Solução:

A fórmula de recorrência é

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n + \frac{h^2}{2}y''_n.$$

Temos que

$$y' = y - x \Rightarrow y'' = y' - 1 = y - x - 1.$$

Assim,

$$y_{n+1} = y_n + h(y_n - x_n) + \frac{h^2}{2}(y_n - x_n - 1)$$
$$= y_n + 0.1(y_n - x_n) + \frac{0.01}{2}(y_n - x_n - 1)$$
$$= 1.105y_n - 0.105x_n - 0.005.$$

Os pontos base são $x_0 = 0, x_1 = 0.1, x_2 = 0.2, x_3 = 0.3$ e $x_4 = 0.4$.

Iterações

$n = 0 : y_1 = y(x_1) = 1.105y_0 - 0.105x_0 - 0.005 = 1.105(3) - 0.105(0) -$

$0.005 = 3.31$.
$n = 1 : y_2 = y(x_2) = 1.105y_1 - 0.105x_1 - 0.005 = 1.105(3.31) - 0.105(0.1) - 0.005 = 3.6421$
$n = 2 : y_3 = y(x_3) = 1.105y_2 - 0.105x_2 - 0.005 = 1.105(3.6476) - 0.105(0.2) - 0.005 = 3.9985$.
$n = 3 : y_4 = y(x_4) = 1.105y_1 - 0.105x_1 - 0,005 = 1.105(4.0155) - 0.105(0.3) - 0.005 = 4.3818$.

A solução procurada é $y_4 = 4.3818$.

Exercício
Dado o PVI $y' = x - y + 2; y(0) = 2$ determine $y(0.6)$ pelo método da série de Taylor de ordem 2 com $h = 0.2$.

Modelo de variação de temperatura
A Lei de variação de temperatura de Newton a firma que "*a taxa de variação de temperatura de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e o meio ambiente*". Esta afirmação pode ser modelada por meio de uma EDO como segue.

Seja $y = y(t)$ a temperatura do corpo em um instante $t = t_0$ e Tm a temperatura do meio ambiente. Então a taxa de variação da temperatura do corpo é dy/dt e, de acordo com a lei de Newton,

$$dy/dt = k(y - T_m),$$

sendo $k > 0$ uma constante de proporcionalidade.
O sinal negativo do lado direito é necessário para indicar que a taxa é negativa em um processo de resfriamento e positiva em processo de aquecimento. No primeiro caso $y > Tm$, de modo que $y - Tm > 0 \Rightarrow -k(y - Tm) < 0$ (taxa negativa). Se o problema for de aquecimento então $y < Tm$ de modo que $y - Tm < 0 \Rightarrow -k(y - Tm) > 0$ (taxa positiva).

Modelo de radiação
Neste modelo parte-se do princípio que a taxa segundo a qual um material radioativo se decompõe é proporcional à quantidade existente em um instante t. É precisamente o mesmo modelo para decrescimento populacional. Assim, se $y(t)$ é a quantidade de substância existente em um instante t então o modelo que representa a hipótese feita tem a forma

$$dy/dt = ky,$$

onde k é uma constante negativa.

Exemplo 8.10

Coloca-se uma barra de metal, à temperatura de 100 ^oC em um ambiente com temperatura constante de 0 ^oC. Encontre a temperatura da barra após 10 minutos sabendo-se que a taxa constante de proporcionalidade é $k = 0.03$. Empregue o método da série de Taylor de ordem 1 com h = 0.5.

De acordo com o exposto o modelo terá a forma
$y' = -0.03(y - 0) = -0.03 * y$
Para o método citado a equação de recorrência fica
$y_{n+1} = y_n + 0.5(-0.03yn) = 0.985y_n$

Iterações
$n = 0$
$y_1 = y(t_1) = y(0.5) = 0.985y_0 = 0.985 * 100 = 98.5$

$n = 1$
$y_2 = y(t_2) = y(1) = 0.985y_1 = 0.985 * 98.5 = 97.02$

Continuando os cálculos chega-se a $y_{20}y(t_{20}) = y(9.5) = 73.91$

Exercícios

1) Uma amostra de um material radioativo contém 50 mg. Sabendo-se que sua taxa de decrescimento relativa é $k = -0.053$ avalie a quantidade restante depois de 10 anos. Use o método de Heun com h = 0.5.

2) Nos restos de uma planta foram detectados 80% do carbono-14 em relação ao total existente quando a planta era viva. Sabendo-se que a taxa de decrescimento do carbono-14 é $k = -1.244x10^{-4}$ estime, por tentativas, há quanto tempo a planta morreu. Empregue o método de Heun com h = 0.5.
Dica: Suponha que o total de carbono-14 existente na planta viva era de 1 unidade.