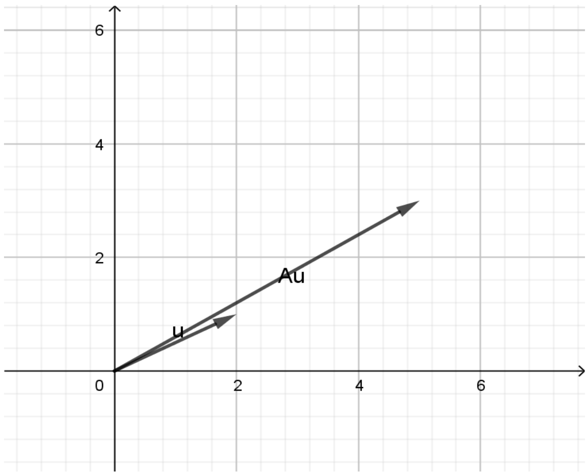
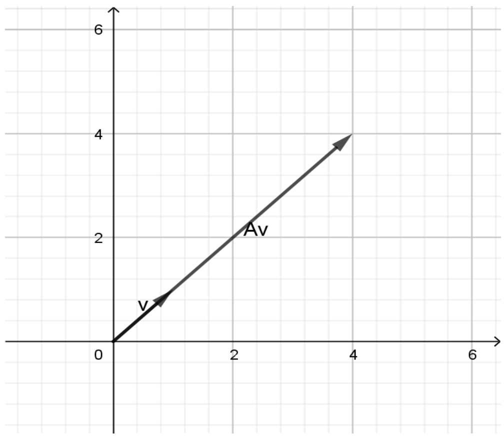
Autovalores e Autovetores

Recordando

Ilustração 1

Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ e os vetores $u=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Notemos que $Au=\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $Av=\begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}$. O que se se observa é que Au é u são vetores LI (não paralelos), enquanto Av é v são LD (paralelos). No caso, Av = 4v.





A característica do vetor v conduz ao concito de autovetor. O número 4 neste caso é chamado de autovalor. Em suma, v é um autovetor de uma matriz quadrada A se existir um número real não nulo λ tal que Av = λv. A fim de obter os autovalores de A resolve-se a equação

$\det(A - \lambda I) = 0$.

O polinômio $P(\lambda)$ resultante deste determinante é chamado de polinômio característico. Uma vez obtido um autovalor λ, raiz do polinômio P, a fim de obter os autovetores associados a tal autovalor resolve-se o sistema homogêneo

$(A-\lambda I)v=0$.

Exemplo 1

Obter os autovalores e os autovetores da matriz $A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$

Resolução

A - λI= $\begin{bmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 5 & -1-\lambda \end{bmatrix}$

Det(A - λI) = 0 => $(2-\lambda)(-1-\lambda)-10 = 0$ => $\lambda^2 - \lambda - 12 = 0$.

Resolvendo-se esta equação se chega a $\lambda_1 = 4$ e $\lambda_2 = -3$.

O autovalor λ_1 é chamado de autovalor dominante, por ter o maior valor em módulo ($|\lambda_1| > |\lambda_2|$).

Mesmo que fosse $\lambda_1 = -4$ ainda assim ele seria dominante já que $|-4| > |-3|$.

Para obter os autovetores associados a λ1 resolve-se o sistema

$\begin{bmatrix} 2-4 & 2 \\ 5 & -1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ou seja $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Uma forma de expressar a solução v_1 neste caso é $v_1=\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exercícios

1) Encontre os autovetores associados a $\lambda_2 = -3$ do Exercício 1

2) Encontre os autovalores e os autovetores da matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

Resposta

2) 4 , 2; x(3,1), x(1,1)

Produto interno

Dados dois vetores $u=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ o produto interno de u por v, denotado por u.v é o número dado por $u.v = x_1y_1 + x_2y_2$.

Exemplo 2

Sendo $u=\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix}$ então u.v = 2(-3) + 3(4) = 6

Quando u.v = 0 dizemos que u e v são ortogonais.

Exemplo 3

$u=\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ e $v=\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ são ortogonais já que u.v = 2(-3) -3(2) = 0

Cálculo autovalor dominante- Método da Potência

Considere a matriz $A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ que tem $\lambda_1 =4$ e $\lambda_2 = 2$ como autovalores e v_1 = (3, 1) e v_2 (1, 1) como autovetores associados, respectivamente. Neste caso λ_1 é o autovalor dominante.

Note que v_1 e v_2 são LI (não paralelos), de modo que qualquer outro vetor v_0= (x,y) do R^2 pode ser escrito combinação linear de v_1 e v_2, isto é, existem escalares α_1 e α_2 tais que

$v_0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$.

Suponhamos então que λ_1 e λ_2 são autovalores da matriz A com $|\lambda_1| > |\lambda_2|$. Sejam v_1 e v_2 os autovetores associados. Então

$Av_0 = A(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 Av_1 + \alpha_2 Av_2 = \alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2$

$A^2v_0 = AAv_0 = A(\alpha_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2 v_2) = \alpha_1\lambda_1 Av_1 + \alpha_2\lambda_2 Av_2 = \alpha_1\lambda_1\lambda_1 v_1 + \alpha_2\lambda_2\lambda_2 v_2 = \alpha_1\lambda_1^2 v_1 + \alpha_2\lambda_2^2 v_2$

$A^3v_0 = AA^2v_0 = A(\alpha_1\lambda_1^2 v_1 + \alpha_2\lambda_2^2 v_2) = \alpha_1\lambda_1^2 Av_1 + \alpha_2\lambda_2^2 Av_2 = \alpha_1\lambda_1^3 v_1 + \alpha_2\lambda_2^3 v_2$

Seguindo desta forma teremos

$A^m v_0 = \alpha_1\lambda_1^m v_1 + \alpha_2\lambda_2^m v_2$

Dividindo-se ambos os membros por λ_1^m obtemos

$$\frac{A^m v_0}{\lambda_1^m} = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \frac{\lambda_2^m}{\lambda_1^m} \quad => \quad \frac{A^m v_0}{\lambda_1^m} = \alpha_1 v_1 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m \alpha_2 v_2$$

Uma vez que $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ então, para m grande, $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m$ tende a zero, de forma que $\frac{A^m v_0}{\lambda_1^m}$ tende a $\alpha_1 v_1$. Obviamente, se $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^m$ tende a zero $\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^{m+1}$ também tenderá a zero, de modo que

$\dfrac{A^{m+1}v_0}{\lambda_1^{m+1}}$ tenderá, de forma análoga, a $\alpha_1 v_1$.

Considere então as equações que seguem

(01) $\dfrac{A^m v_0}{\lambda_1^m}=\alpha_1 v_1$

(02) $\dfrac{A^{m+1}v_0}{\lambda_1^{m+1}}=\alpha_1 v_1$

Escolhendo-se um vetor $y=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ que não seja ortogonal a v_0 e multiplicando internamente os membros de (01) e (02) à direita por y teremos.

(03) $\dfrac{A^m v_0 . y}{\lambda_1^m}=\alpha_1 v_1 . y$

(04) $\dfrac{A^{m+1}v_0 . y}{\lambda_1^{m+1}}=\alpha_1 v_1 . y$

De (03) e (04) obtemos

$$\frac{A^m v_0 . y}{\lambda_1^m}=\frac{A^{m+1}v_0 . y}{\lambda_1^{m+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{\lambda_1^{m+1}}{\lambda_1^m}=\frac{A^{m+1}v_0 . y}{A^m v_0 . y} \quad \Rightarrow$$

(05) $\lambda_1=\dfrac{A^{m+1}v_0 . y}{A^m v_0 . y}$

Exemplo 4

Seja $A=\begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

Tomemos como vetor inicial $v_0=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Então

$$Av_0=\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$A^2 v_0=A\begin{bmatrix} -7 \\ 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 65 \\ -64 \end{bmatrix}$$

$$A^3 v_0=A\begin{bmatrix} 65 \\ -64 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -583 \\ 584 \end{bmatrix}$$

$$A^4 v_0=A\begin{bmatrix} -583 \\ 584 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 5249 \\ -5248 \end{bmatrix}$$

Pode-se notar que o último vetor parece múltiplo de $v=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Então podemo encerrar o processo a fim de obter o autovalor λ_1 dado por $\lambda_1=\dfrac{A^{m+1}v_0 . y}{A^m v_0 . y}$. Escolhendo-se arbitrariamente $y=\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ teremos

$$\lambda_1=\frac{\begin{bmatrix} 5249 \\ -5248 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -583 \\ 584 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}}=\frac{-5248}{584}=-8.99$$

O valor exato é $\lambda_1 = -9$.

Note que $\begin{bmatrix} 5249 \\ -5248 \end{bmatrix} \approx 5249 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, de modo que os autovetores associados λ_1 são da forma

$$v_1 = \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} = x \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

1) Refaça o Exemplo 4 empregando $v_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

2) Utilizando o método da potência encontre o autovalor λ_1 dominante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$ bem como os autovetores associados.

No exemplo 4 o processo foi encerrado no quarto passo e, de acordo com a fórum ula (05) m+1 = 4, de modo que m = 3. Note que $A^m v_0$ é um vetor quase paralelo ao autovetor $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ associado a λ_1.

Observemos que se v é um autovetor associado a um autovalor λ teremos

$$Av = \lambda v$$

Multiplicando internamente os membros desta equação por v teremos

$$Av.v = \lambda v.v \Rightarrow$$

(06) $$\lambda = \frac{Av.v}{v.v}$$

Esta fórmula é idêntica à fórmula (05) com Av no lugar de Av_0 e v no lugar de y.
Na fórmula (05) tomamos y de forma arbitrárias. Se escolhermos $y = A^m v_0$ teremos

(07) $$\lambda_1 = \frac{A^{m+1} v_0 . A^m v_0}{A^m v_0 . A^m v_0}.$$

Esta fórmula está de acordo com a fórmula (06) com $v = A^m v_0$.

Exemplo 5.

Considere a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$. Escolhendo-se $v_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ como vetor inicial teremos

$$Av_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$A^2 v_0 = A \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 \\ 22 \end{bmatrix}$$

$$A^3 v_0 = A \begin{bmatrix} 18 \\ 22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 84 \\ 92 \end{bmatrix}$$

$$A^4 v_0 = A \begin{bmatrix} 84 \\ 92 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 360 \\ 376 \end{bmatrix}$$

…

$$A^8 v_0 = A \begin{bmatrix} 24384 \\ 24512 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 97920 \\ 98176 \end{bmatrix}$$

$$A^9 v_0 = A \begin{bmatrix} 97920 \\ 98176 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 392448 \\ 392960 \end{bmatrix}$$

Usando (07) com m = 8 (e m+1=9) obtemos

$$\lambda_1=\frac{\begin{bmatrix}392448\\392960\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}97920\\98176\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}97920\\98176\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}97920\\98176\end{bmatrix}}=4.0052$$

Conforme pode ser observado nos Exemplos 4 e 5, à medida que m aumenta as coordenadas do vetor $A^m v_0$ tendem a ficar grandes. Pode também ocorrer o contrário, ou seja, ficarem muito pequenas tendendo a zero. A fim de contornar este problema usa-se o procedimento conhecido como escalonamento. Tal procedimento consiste em substituir em cada passo k, exceto no último, o vetor $A^k v_0$ pelo seu versor (vetor unitário com o mesmo sentido e direção de $A^k v_0$). Para isso basta usar, no lugar de $A^k v_0$, o vetor $w_k = A^k v_0/||A^k v_0||$. A sequência de cálculos fica como segue:

Av_0, $w_1 = Av_0/||Av_0||$

Aw_1, $w_2 = Aw_1/||Aw_1||$

Aw_2, $w_3 = Aw_2/||Aw_2||$

…

Aw_{m+1}

$$\lambda=\frac{Aw_{(m+1)}\cdot w_m}{w_m\cdot w_m}$$

Pode-se empregar a norma euclidiana mas em geral usa-se a norma do máximo a fim de reduzir os cálculos.

Exemplo 6

Considere a matriz do exemplo 4, $A=\begin{bmatrix}-7 & 2\\ 8 & -1\end{bmatrix}$ e o vetor $v_0=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$. Seguindo o exposto anteriormente teremos

$$Av_0=\begin{bmatrix}-7\\8\end{bmatrix}\quad w_1=\frac{1}{8}\begin{bmatrix}-7\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.875\\1\end{bmatrix}$$

$$Aw_1=A\begin{bmatrix}-0.875\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.125\\-8\end{bmatrix}\quad w_2=\frac{1}{8.125}\begin{bmatrix}8.125\\-8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-0.9846\end{bmatrix}$$

$$Aw_2=A\begin{bmatrix}1\\-0.9846\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8.9642\\8.9846\end{bmatrix}\quad w_3=\frac{1}{8.9846}\begin{bmatrix}-8.9642\\8.9846\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.9977\\1\end{bmatrix}$$

$$Aw_3=A\begin{bmatrix}-0.9977\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8.9839\\-8.9816\end{bmatrix}$$

$$\lambda=\frac{Aw_3\cdot w_3}{w_3\cdot w_3}=\frac{\begin{bmatrix}8.9839\\-8.9816\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0.9977\\1\end{bmatrix}}{\begin{bmatrix}-0.9977\\1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-0.9977\\1\end{bmatrix}}=\frac{-17.9448}{1.9954}=-8.9931$$

Critério de parada

Se a sequência de vetores $w_1, w_2, \ldots, w_m$ convergir para um autovetor de A então podemos encerrar o processo quando o erro relativo E em relação λ_k e λ_{k-1} for menor que um certo $\varepsilon > 0$ estipulado, isto é, quando $\left|\frac{\lambda_k-\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right|<\varepsilon$, k = 2, 3, ...

Para o exemplo 6 foram calculados w_1, w_2 e w_3.

Então

$$\lambda_2=\frac{Aw_2\cdot w_1}{w_1\cdot w_1}=-9.0436$$

$$\lambda_3 = \frac{Aw_3 . w_2}{w_2 . w_2} = -8.9931$$

Então, $E = \left| \frac{-8.9931 + 9.0436}{-8.9931} \right| = 0.0056$

Em termos percentuais esse erro corresponde a 0.56%.

Algoritmo 1 - Método da Potência

Muito embora o vetor inicial v_0 tenha sido tomado de forma aleatória, a literatura sugere que $v_0 = [1, 1, \ldots, 1]^t$ é uma boa escolha.

Dados de entrada: Matriz A nxn, vetor inicial v, valor de n, precisão $\varepsilon > 0$ e Npassos > 2 (número máximo de passos).

1. Faça Erro $=\infty$ e k = 1
2. Enquanto (Erro > ε e k < Npassos) faça
3. Faça u = Av
4. Se $k \geq 2$
5. $\lambda_k = u.v/v.v$
6 $\lambda = \lambda_k$
7. Se $k \geq 3$ então
8. erro $= |\lambda_k - \lambda_{k-1}|/|\lambda_k|$
9. $w = u/||u||_\infty$ (norma do máximo)
10. v=w
11 k=k+1
12. Fim de enquanto

Saídas: autovetor não normalizado u, autovetor normalizado w e autovalor λ.

Método da potência inversa

O método da potência descrito anteriormente serve para calcular apenas o autovalor dominante e os autovetores a ele associados. O método da potência inversa consiste em trocar a matriz A pela sua inversa A^{-1} a fim de obter o autovetor de menor magnitude em módulo. Como exemplo, se você tomar a matriz $A = \begin{bmatrix} -7 & 2 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$, que tem autovalores -9 e 1, e aplicar o método da potência a sua inversa A^{-1} obterá como resposta o autovalor $\lambda = 1$. Experimente fazer isso. Este resultado se deve ao fato de os autovalores de A^{-1} serem -1/9 e 1 (ver Teorema 1 a seguir), de forma que o autovalor dominante é 1.

Uma adaptação do método da potência pode ser feita para obter qualquer um dos autovalores de A. Para isso são necessário conhecer alguns resultados sobre autovalores e autovetores envolvendo uma matriz A e sua inversa.

Teorema 1

Se v é um autovetor de A associado a um autovalor não nulo λ então $1/\lambda$ é autovalor de A^{-1} associado ao mesmo autovetor v.

De fato, sendo $Av = \lambda v$ então $A^{-1}Av = A^{-1}\lambda v \Rightarrow Iv = \lambda A^{-1}v \Rightarrow v = \lambda A^{-1}v \Rightarrow A^{-1}v = (1/\lambda)v$.

Exemplo 7

Seja $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$.

$$P(\lambda)=\mathrm{Det}(A-\lambda I)=\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 0 & 8-\lambda \end{bmatrix}=(2-\lambda)(8-\lambda)$$

As raízes de *P* claramente são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$, que são os autovalores de *A*.

A inversa de *A* é $A^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & -1/4 \\ 0 & 1/8 \end{bmatrix}$.

Agora,

$$P(\lambda)=\mathrm{Det}(A^{-1}-\lambda I)=\mathrm{Det}\begin{bmatrix} 1/2-\lambda & -1/4 \\ 0 & 1/8-\lambda \end{bmatrix}=(1/2-\lambda)(1/8-\lambda)$$

Os autovalores de A^{-1} são as raízes de *P*, no caso $1/\lambda_1 = 1/2$ e $1/\lambda_2 = 1/8$.

Teorema 2

Sejam v é um autovetor de A nxn associado a um autovalor não nulo λ e q é um número diferente de λ. Se A – qI é não singular (det(A-qI) $\neq$ 0) então λ – q é autovalor de A- qI associado ao mesmo autovetor v.

De fato, sendo (A-qI)v = Av -qIv $=\lambda$v – qv = (λ – q)v.

Exemplo 8

Do Exemplo anterior sabemos os autovalores de $A=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$. Tomando-se q = 4 então

$$(A-qI)=\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}-4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz tem-se

$$P(\lambda)=\mathrm{Det}\begin{bmatrix} -2-\lambda & 4 \\ 0 & 4-\lambda \end{bmatrix}=(-2-\lambda)(4-\lambda)$$

As raízes de *P* claramente são $\lambda' = -2$ e $\lambda'' = 4$.

Note que

$\lambda' = \lambda_1 - q = 2 - 4 = -2$

$\lambda'' = \lambda_2 - q = 8 - 4 = 4$

Levando-se em conta os Teoremas 1 e 2 conclui-se também que 1/(λ – q) é autovalor de $(A-qI)^{-1}$ associado ao autovetor v.

De um modo geral pode-se enunciar o seguinte teorema:

Teorema 3

Se A é uma matriz nxn contendo os autovalores λ_1, λ_2, …, λ_n com vetores associados v_1, v_2, …, v_n linearmente independentes então os autovalores de $(A - qI)^{-1}$ são

$$\frac{1}{\lambda_1-q},\ \frac{1}{\lambda_2-q},\ \ldots,\ \frac{1}{\lambda_n-q},\quad q\neq\lambda_i.$$

De acordo com o resultado do Teorema 3, podemos escolher um valor de *q* próximo a um dos λ_k de tal modo que $\dfrac{1}{\lambda_k-q}$ seja o autovalor dominante de $(A-qI)^{-1}$.

Isto significa que podemos aplicar o método da potência inversa para obter o valor $\mu_k = \dfrac{1}{\lambda_k - q}$.

Desta igualdade obtemos

(08) $\mu_k(\lambda_k - q) = 1 \Rightarrow \lambda_k - q = \dfrac{1}{\mu_k} \Rightarrow \lambda_k = \dfrac{1}{\mu_k} + q$

Exemplo 8

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ a matriz do Exemlo 7 e $q = 4$. Vimos que os autovalores de A são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$.

Temos que $A - qI = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 8 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

A inversa de *A-4I* é $(A - 4\mathrm{I})^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 \\ 0 & 1/4 \end{bmatrix}$.

Para esta matriz,

$P(\lambda) = \mathrm{Det}\begin{bmatrix} -1/2-\lambda & -1/2 \\ 0 & 1/4-\lambda \end{bmatrix} = (-1/2-\lambda)(1/4-\lambda)$, cujas raízes são $\mu_1 = -1/2$ e $\mu_2 = 1/4$.

Note então que

$$\mu_1 = \frac{1}{\lambda_1 - 4} = \frac{1}{2-4} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

$$\mu_2 = \frac{1}{\lambda_2 - 4} = \frac{1}{8-4} = \frac{1}{4}$$

Veja também que, a partir da equação (08) tem-se

$$\lambda_1 = \frac{1}{\mu_1} + q = \frac{1}{-1/2} + 4 = -2 + 4 = 2$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\mu_2} + q = \frac{1}{1/4} + 4 = 4 + 4 = 8$$

Para localizar um valor *q* próximo a um dos autovalores de A pode-se empregar o teorema a seguir.

Teorema 4

Suponha que A seja uma matriz nxn cujos autovalores são números reais e que R_i indique intervalo com centro em a_{ii} e raio $\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|$, ou seja

$$R_i = \{ x \in R : \; |x - a_{ii}| \le \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \}$$

Os autovalores de A estão contidos em $R = \cup R_i$, i = 1, …, n.

Em forma de intervalo $R_i = [\sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| - a_{ii}, \; \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| + a_{ii}]$

Exemplo

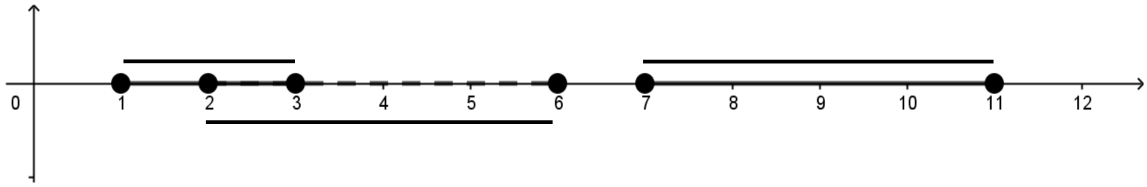
Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$.

Neste caso

R_1 =[-(|0| + |-2|) + 4, (|0| + |-2|) + 4] =[2, 6]

R_2 =[-(|1| + |0|) + 2, (|1| + |0|) + 2] =[1, 3]

R_3 =[-(|1| + |1|) + 9, (|1| + |1|) + 9] =[7, 11]



Os resultados indicam que há um autovalor em [2, 6], outro em [1, 3] e mais um em [7, 11]. Note a interseção entre R_1 e R_2. Isto significa que há dois autovalores em $R_1 \cup R_2$ = [1, 6].

Algoritmo 2 - Método da Potência Inversa

Dados de entrada: Matriz A nxn, vetor inicial v, valor de n, precisão $\varepsilon > 0$ e Npassos > 2 (número máximo de passos).

1. Faça Erro $=\infty$ e k = 1
2. Escolha um número q próximo a um autovalor de λ de A ($q \neq \lambda$)
3. Encontre a matriz B = $(A-qI)^{-1}$
4. Enquanto (Erro > ε e k < Npassos) faça
5. Faça u = Bv
6. Se $k \geq 2$
7. $\lambda_k = u.v/v.v$
8 $\mu = \lambda_k$
9. Se $k \geq 3$ então
10. erro $=|\lambda_k - \lambda_{k-1}|/|\lambda_k|$
11. $w = u/\|u\|_\infty$ (norma do máximo)
12. v=w
13 k=k+1
14. Fim de enquanto

Saídas: autovetor não normalizado u, autovetor normalizado w e autovalor $\lambda = 1/\mu + q$

Exercícios

Utilize o Algoritmo 2 para obter os autovalores das matrizes dadas.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} 4 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

Resposta

a) -3.8711, 8.8211, 2.0499 b) 4, 2, -5