A derivada com Taxa de Variação Instantânea

Ao tratar de aplicações de equações diferenciais é necessário que esteja muito claro o significado de Taxa de Variação Instantânea (TVI) de uma função $y = f(x)$ em um ponto x_0 e que, a derivada de f neste ponto, pode ser interpretada como a TVI de f em x_0.

Para ilustrar, seja y uma função de t. Primeiramente, afirmar que a Taxa de Variação Média (TVM) de y em relação a t em um intervalo $I = [t_0, t_0+\Delta t]$ vale k significa dizer que, em média, y varia k unidades para cada unidade de variação de t.

$$TVM(t_0, \Delta t) = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \tag{8.7}$$

Por exemplo, seja $f(t) = 0.25t^2$. Quando t varia de 2 para 6 (4 unidades), y varia de 1 para 9 (8 unidades). Portanto, de $t_0 = 2$ a $t_0+\Delta t = 6$, para cada unidade de de variação de t y variou, em média, 2 unidades ($TMV = 2$). De modo similar, no intervalo $2 \leq t \leq 4$ observa-se que $TVM = 1.5$.

Quando fazemos Δt ficar bem pequeno nos aproximamos do que chamamos de TVI de f em t_0. Por exemplo, para a mesma função anterior, se t varia de 2 para 2.2 (0.2 unidade), y varia de 1 para 1.21 (0.21 unidade). Neste caso, para cada unidade de de variação de t y variou, em média, 1.05 unidade ($TVI = 1.05$)

Quando fazemos o limite de 8.7 com $\Delta t \to 0$ obtemos a chamada Taxa de Variação Instantânea (TVI) em t_0.

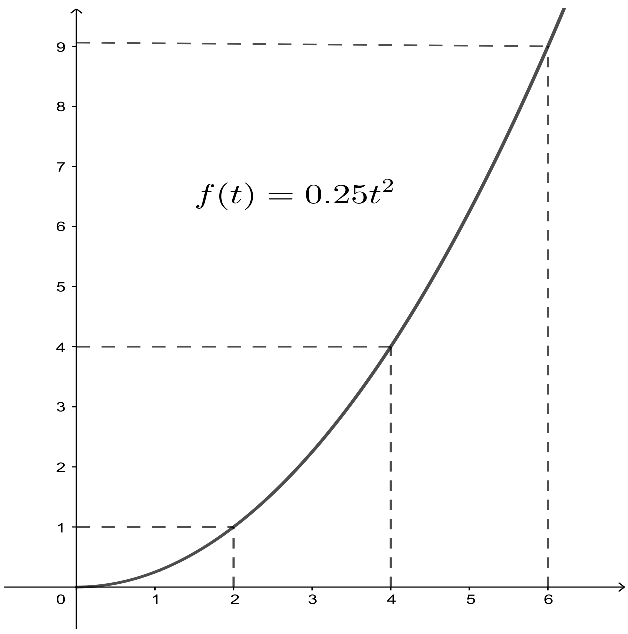

Figura 8.3:

$$TVI(t_0) = lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t} \text{ se este limite existir} \tag{8.8}$$

Claramente, $TVI(t_0) = f'(t_0)$.
Para o exemplo anterior em que $f(t) = 0.25t^2$ e $t_0 = 2$ tem-se $TVI(t_0) = TVI(2) = f'(2) = 1$

Modelos de EDO
A seguir serão apresentados alguns problemas que podem ocorrer e como eles são modelados por meio de equações diferenciais.

Ilustração 1 - Problema de crescimento e de decrescimento
Seja $y(t)$ a quantidade de substância ou população sujeita a um processo de crescimento ou decrescimento. Vamos admitir que a taxa de variação instantânea desta quantidade, dy/dt, seja proporcional à quantidade presente. Matematicamente esta frase pode ser modelada por

$dy/dt = ky$ ou $y' = ky$,

onde k é uma constante de proporcionalidade.
Esta constante k é chamada de taxa de crescimento ou de decrescimento relativa pois ela é obtida dividindo-se a TVI da população pelo seu tamanho, isto é, $k = \frac{dy/dt}{y}$. Quando $k > 0$ há um aumento da população ou

substância e quando $k < 0$ há uma diminuição.
Se k for conhecida ou se tivermos informações iniciais para determiná-la podemos aplicar um método numérico para encontrar a solução aproximada da última EDO.

Exemplo 8.6
Suponha que crescimento da população de um país seja proporcional à quantidade presente e que a taxa de crescimento relativa seja de 2% ao ano ($k = 0.02$). Sabendo-se que em 1950 havia 2560 milhões de pessoas estime o total de habitantes em 1960. Use o método de Euler com $h = 1$.

De acordo com o exposto o modelo em questão é
$\frac{dy}{dt} = 0.02y$
Podemos interpretar o ano 1950 como o instante $t_0 = 0$, 1951 como $t_1 = 1$ e assim por diante. Assim teremos $t_0 = 0, t_1 = 1, t_2 = 2, \ldots, t_{10} = 10$ e $y_0 = 2560$.
A fórmula de recorrência para o método de Euler será
$y_{n+1} = y_n + 0.02y_n = 1.02y_n, n = 0, 1, \ldots, 9.$
Fazendo-se os cálculos chega-se a $y_{10} = 3121.63$, ou seja, em 1960 a expectativa era de uma população com 3121 milhões de pessoas.

Exercício
Uma substância radioativa decresce de forma proporcional à quantidade presente, sendo $k = -0.001$ a taxa de decrescimento relativa. Se uma amostra dessa substância possuir 2 gramas qual será a quantidade restante depois de 10 anos? Utilize o método de Euler com $h = 0.5$.

Ilustração 2 - Modelo de diluição
Considere um tanque contendo uma quantidade inicial de V_0 litros de salmoura com a gramas sal. Despeja-se no tanque outra solução de salmoura com uma concentração de b gramas de sal por litro a uma razão de e litros por minuto. De modo simultâneo a solução resultante, bem misturada, se escoa do tanque a uma razão de s litros por minuto. Deseja-se saber qual é a quantidade de sal presente no tanque em um instante t qualquer.

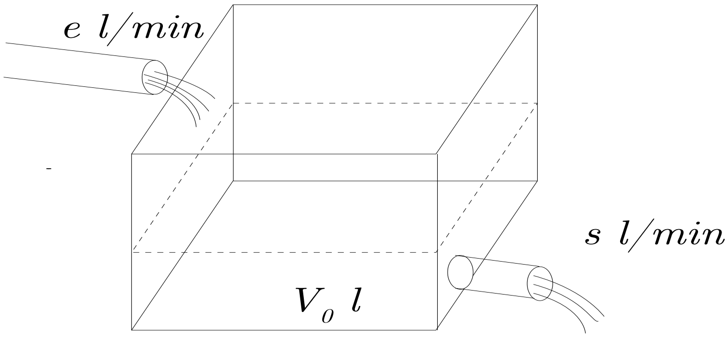

Figura 8.4:

Seja $y = y(t)$ a quantidade de sal presente no tanque no instante t. A taxa de variação de sal dentro do tanque, dy/dt, é dada pela diferença entre a taxa de entrada pela taxa de saída.
- Taxa de entrada: be gramas/litro.
- Taxa de saída: O total de salmoura no tanque em um instante t é dado pelo volume inicial, V_0, mais o volume que entrou até este momento, que é et, menos o volume que saiu, st. A concentração de sal no tanque em um instante t é dada pela razão entre o total de sal no tanque, que está sendo chamado de y, e o volume de salmoura presente no tanque, dado por $V_0 + et - st$, ou seja, a concentração de sal no tanque em gramas/litro em um instante t é

$$\frac{y}{V_0 + et - st}$$

Assim a taxa de saída é dada por

$$s\frac{y}{V_0 + et - st},$$

de modo que a taxa de variação de sal no tanque é

$$\frac{dy}{dt} = be - \frac{s}{V_0 + et - st}y = be - \frac{s}{V_0 + t(e - s)}y$$

Exemplo 8.7
Um tanque contém uma mistura de água com 5 kg de sal, totalizando 1000 L. Água pura entra no tanque a uma taxa de 10 L/min. A solução é mantida bem misturada e escoa do tanque na mesma taxa. Quantos quilos deste produto haverá no tanque após 10 minutos?
Encontre a solução aproximada empregando o método de Euler. Tome h=0.5 e trabalhe com quatro casas decimais.

De acordo com o problema temos
$a = 5, b = 0, e = 10, s = 10, V_0 = 1000$
Substituindo no modelo obtemos
$\dfrac{dy}{dt} = 10 * 0 - \dfrac{10}{1000 + t(10 - 10)} y = -0.01y$
Resolvendo-se a EDO conforme solicitado encontra-se $y(10) = 4.525$. Assim, após 10 minutos haverá aproximadamente 4.245 kg de sal no tanque.

Exercício
Resolva o problema anterior supondo que a água entra no tanque a uma razão de 12 L/min. e que contém 1 grama de sal por litro. Suponha ainda que o tanque não estará completamente cheio após 10 min.