Capítulo 4

Interpolação Polinomial

A interpolação polinomial consiste em aproximar uma função f por meio de um polinômio. Este processo é empregado, por exemplo, quando a função f é conhecida apenas através de uma tabela de valores. Outra situação em que a interpolação é bastante empregada é quando uma função f precisa ser aproximada por um polinômio em um pequeno intervalo, com o propósito de fazer cálculos aproximados usando o polinômio no lugar da função. Isto ocorre, por exemplo, em integração numérica

Exemplo 4.1
Seja $f(x) = ln(x)sen(x)$. Dependendo do objetivo, trabalhar com esta função pode não ser uma tarefa fácil. Nesta situação pode-se empregar a interpolação em um intervalo $[a, b]$ a fim de obter uma aproximação para f.

Exemplo 4.2
Na avaliação de uma espécie de aves observou-se que a relação entre a idade (em semanas) e o peso médio (em kg) é a seguinte:

Tabela 4.1:

Idade em semanas	2	3	4	5
Peso em kg	0.85	1.32	1.85	2.35

Com base nestes dados deseja-se saber qual deve ser o peso de uma ave com 3.5 semanas.

Neste exemplo não se conhece a função cujos dados são tabelados. Assim, pode-se empregar a interpolação a fim de obter um polinômio que dê uma aproximação para f próximo aos pontos tabelados.

4.1 Obtenção do Polinômio Interpolador

Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ pontos distintos do domínio de uma função f. A interpolação desta função nos pontos dados consiste em obter um polinômio P de grau $m \leq n$ tal que

$$\begin{aligned} P(x_0) &= f(x_0), \\ P(x_1) &= f(x_1), \\ &\vdots \\ P(x_n) &= f(x_n) \end{aligned} \tag{4.1}$$

A Figura 4.1 ilustra uma caso típico.

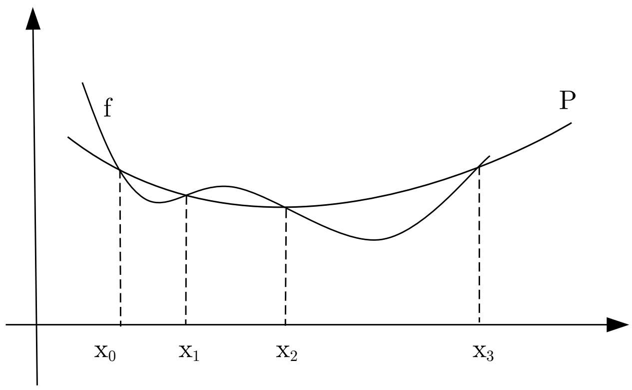

Figura 4.1:

Teorema 4.1
Sejam $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $n+1$ pontos distintos do domínio de uma função f. Então existe um único polinômio P tal que $P(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Outro fato importante é que, conhecidos $n+1$ pontos distintos tabelados $(x_i f(x_i))$, o grau do polinômio interpolador será no máximo n. Por exemplo, se forem conhecidos dois pontos o grau máximo será um; se forem conhecidos três pontos o grau máximo será dois e assim por diante.

A obtenção do polinômio interpolador de f pode ser feita de diversas formas. Em vista do teorema anterior o polinômio resultante será sempre o mesmo.

4.1.1 Obtenção do Polinômio Interpolador Através de Um Sistema Linear

Vamos analisar o procedimento através de um exemplo.

Exemplo 4.3

Consideremos a função tabelada a seguir.

Tabela 4.2:

x	1	2	3
$f(x)$	0	1	4

Como temos três pontos, o polinômio interpolador terá grau $m \leq 2$. A forma de tal polinômio será portanto a seguinte:

$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

De acordo com o exposto deverão ser satisfeitas as seguintes condições:

$P(1) = f(1) \Rightarrow a_0 + a_1 + a_2 = 0$,

$P(2) = f(2) \Rightarrow a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 1$,

$P(3) = f(3) \Rightarrow a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 4$.

Para encontrar o polinômio P precisamos obter os valores de a_0, a_1 e a_2, o que pode ser feito resolvendo-se o sistema linear

$a_0 + a_1 + a_2 = 0$,

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 1$,

$a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 4$.

Feita a resolução obtém-se $a_0 = 1$, $a_1 = -2$ e $a_2 = 1$. Logo o polinômio procurado é:

$P(x) = 1 - 2x + x^2$.

Para os dados do Exemplo 4.2, como há quatro pontos tabelados então o polinômio resultante será um polinômio P de grau $m \leq 3$, dado por $P = a_0 + a_1 x + a_x^2 + a_3 x^3$. O sistema a ser resolvido é

$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 = 0.69$,

$a_0 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 1.1$,

$a_0 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 1.39$,

$a_0 + 5a_1 + 25a_2 + 125a_3 = 1.61$.

Neste caso $P(x) = -0.6900 + 0.9267x - 0.135x^2 + 0.00833x^3$ e $P_3(3.5) = 1.2568$.

Não é difícil perceber que este processo fica bastante trabalhoso se o número de pontos for muito grande. Além disso, como será tratado mais adiante, grande quantidade de pontos não garante qualidade da resposta obtida. Mas por hora vamos nos deter em processos de interpolação.

4.1.2 Forma de Lagrange

Seja P o polinômio que interpola uma função f em $n+1$ pontos distintos $x_0, x_1, \ldots, x_n$ do seu domínio. Sejam $L_0, L_1, \ldots, L_n$ $n+1$ polinômios de grau máximo n tais que

$$L_k(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{se } k = i \\ 0 & \text{se } i \neq k \end{cases} \tag{4.2}$$

Agora seja $P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + ... + f(x_n)L_n(x)$. Evidentemente este polinômio tem grau máximo n já que cada um dos polinômios que o constituem satisfazem esta condição. Além disso ele satisfaz as condições impostas em 4.1, pois,

$P(x_0) = f(x_0)L_0(x_0) + f(x_1)L_1(x_0) + ... + f(x_n)L_n(x_0)$
$= f(x_0)(1) + f(x_1)(0) + ... + f(x_n)(0) = f(x_0)$

De modo similar se verifica que $P(x_1) = f(x_1), \ldots, P(x_n) = f(x_n)$.

A fim de que os polinômios L_k satisfaçam à condição 4.2 pode-se defini-los da seguinte forma:

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)...(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})...(x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)...(x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1})...(x_k - x_n)}$$

Por exemplo,

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)(x - x_3)...(x - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)}.$$

Como pode ser verificado,

$$L_2(x_0) = \frac{(\mathbf{x_0} - \mathbf{x_0})(x_0 - x_1)(x_0 - x_3)...(x_0 - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)} = 0,$$

$$L_2(x_1) = \frac{(x_1 - x_0)(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_1})(x_1 - x_3)...(x_1 - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)} = 0,$$

$$L_2(x_2) = \frac{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)...(x_2 - x_n)} = 1,$$

e assim por diante.

Exemplo 4.4

Usando a forma de Lagrange obtenha o polinômio que interpola a função tabelada do Exemplo 4.3.

Como são dados três pontos, o polinômio terá grau máximo 2 e sua forma será $P(x) = f(x_0)L_0(x) + f(x_1)L_1(x) + f(x_2)L_2(x)$.

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 2)(x - 3)}{(0 - 1)(0 - 2)} = \frac{x^2 - 5x + 6}{2}$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x - 1)(x - 3)}{(2 - 1)(2 - 3)} = \frac{x^2 - 4x + 3}{-1}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x - 1)(x - 2)}{(3 - 1)(3 - 2)} = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}$$

Assim

$$P(x) = 0(\frac{x^2-5x+6}{2}) + 1(\frac{x^2-4x+3}{-1}) + 4(\frac{x^2-3x+2}{2})$$
$$= x^2 - 2x + 1.$$

Note que é a mesma resposta obtida é a mesma do Exemplo 4.3, como realmente deveria ser.

Exercício

Obtenha o polinômio que interpola a função tabelada.

Tabela 4.3:

x	-1	0	2
$f(x)$	5	1	-4

Resposta: $P(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{7x}{2} + 1$

O algoritmo a seguir implementa o polinômio interpolador de Lagrange P com o propósito de encontrar $P(x)$, sendo x um número previdamente especificado.

Algoritmo 4.1

01) Dados iniciais: $X = (x_0, ..., x_n)$, $Y = (y_0, ...y_n)$, valor de x e valor do índice n da última coordenada.
02) Para $k = 0, ..., n$
03) . Para $i = 0, ..., n$
04) . . $P1 = \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^{n} (x - x_i)$
05) . . $P2 = \prod_{\substack{i=0 \\ (i \neq k)}}^{n} (x_k - x_i)$
06) . Fim de i
07) . $L_k = P1/P2$
08) Fim de k
08) $Soma = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$
09) A saída é $P(x) = Soma$

Nota: O software Scilab não aceita o zero como índice de vetor, ou seja, X(0) e Y(0) não são válidos. Neste caso interprete os dados de entrada como $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ...y_n)$. O algoritmo anterior deve ser modificado como segue.

Algoritmo 4.2

01) Dados iniciais: $X = (x_1, ..., x_n)$, $Y = (y_1, ...y_n)$, valor de x e valor do índice n da última coordenada.
02) Para $k = 1, ..., n$
03) . Para $i = 1, ..., n$
04) . . $P1 = \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} (x - x_i)$
05) . . $P2 = \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq k)}}^{n} (x_k - x_i)$
06) . Fim de i
07) . $L_k = P1/P2$
08) Fim de k
08) $Soma = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k$
09) A saída é $P(x) = Soma$

Exercício (Retirado de Burden e Faires(2003, p. 108) e adaptado)

Suspeita-se que as altas quantidades de tanino existente nas folhas maduras de carvalho inibem o crescimento das larvas de mariposa de inverno (*Operophtera bromata L., Geometridae*) que danificam extensivamente essas árvores em certos anos. A tabela a seguir relaciona o peso médio de

Tabela 4.4:

Dias	0	6	10	13	17	20	28
Peso médio da amostra 1 (mg)	6.67	17.33	42.67	37.33	30.10	29.31	28.74
Peso médio da amostra 2 (mg)	6.67	16.11	18.89	15.00	10.56	9.44	8.89

duas amostras de larvas com até 28 dias após o nascimento. A primeira amostra foi cultivada em folhas jovens de carvalho, enquanto a segunda amostra foi cultivada em folhas maduras da mesma árvore.

Empregando a interpolação de Lagrange encontre o peso médio aproximado, em cada amostra, para uma larva com 12 dias.