

Ciência da Computação

Aula 3

Análise Assintótica de Algoritmos Recursivos (Método Iterativo)

André Luiz Brun



Exemplo 1

```
int Pow2 (int a, int n)
{
1   if (n==1)
2       return a;
3   if (n%2==0)
4       return Pow2(a,  $\frac{n}{2}$ )2;
5   else
6       return Pow2(a,  $\frac{n-1}{2}$ )2*a;
}
```



Exemplo 1

- Caso base

Refere-se ao cenário em que a recursão deixa de ser realizada: é o critério de parada

Para tanto, computa-se o custo para executar este cenário



Exemplo 1

- Caso Recursivo

Representa o comportamento do algoritmo ao realizar as chamadas recursivas

Para tanto, é preciso computar o custo necessário para realizar as chamadas e também os custos pagos após o retorno da função chamada

Unindo os dois casos podemos construir a equação de recorrência



Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- o termo a corresponde ao número de chamadas recursivas executadas a cada iteração, ou seja, o número de novos subproblemas chamados para a próxima iteração.
- $\frac{n}{b}$ corresponde ao tamanho do novo subproblema, ou seja, o termo b indica em que fator o tamanho do subproblema será diminuído. Quanto maior o tamanho de b , mais rapidamente o problema diminui.



Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- o termo $f(n)$ corresponde ao custo necessário para executar cada chamada recursiva do algoritmo e o custo gasto depois que o retorno da recursão ocorre.



Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = ? & \text{se } n = 1 \\ T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$a = ?$

$b = ?$

$f(n) = ?$



Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = ? & \text{se } n = 1 \\ T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 8 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$$a = 1$$

$$b = 2$$

$$f(n) = 8$$



Exemplo 1

- Custo Assintótico

$$\begin{cases} T(n) = 2 & \text{se } n = 1 \\ T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 8 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$



Exemplo 1

$$k = 1 \quad 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 8$$

$$1T\left(\frac{n}{4}\right) + 8 + 8$$

$$k = 2 \quad 1T\left(\frac{n}{4}\right) + 16$$

$$1T\left(\frac{n}{8}\right) + 8 + 16$$

$$k = 3 \quad 1T\left(\frac{n}{8}\right) + 24$$

$$1T\left(\frac{n}{16}\right) + 8 + 24$$

$$k = 4 \quad 1T\left(\frac{n}{16}\right) + 32$$

...

$$T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 8$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 1T\left(\frac{(n/2)}{2}\right) + 8$$

$$T\left(\frac{n}{2}\right) = 1T\left(\frac{n}{4}\right) + 8$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) = 1T\left(\frac{(n/4)}{2}\right) + 8$$

$$T\left(\frac{n}{4}\right) = 1T\left(\frac{n}{8}\right) + 8$$

$$T\left(\frac{n}{8}\right) = 1T\left(\frac{(n/8)}{2}\right) + 8$$

$$T\left(\frac{n}{8}\right) = 1T\left(\frac{n}{16}\right) + 8$$

...



Exemplo 1

- Custo Assintótico

$$T(n) = 1T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 8k$$

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$$n = 2^k$$

$$k = \log_2 n$$



Exemplo 1

- Custo Assintótico

$$T(n) = 1T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + 8 \log_2 n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{n^{\log_2 2}}\right) + 8 \log_2 n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{n^1}\right) + 8 \log_2 n$$

$$T(n) = T(1) + 8 \log_2 n$$

$$T(n) = 2 + 8 \log_2 n$$

$$O(\log_2 n)$$



Exemplo 2

```
int Pow2 (int a, int n)
{
1   if (n==1)
2       return a;
3   if (n%2==0)
4       return Pow1(a,  $\frac{n}{2}$ )*Pow1(a,  $\frac{n}{2}$ );
5   else
6       return Pow1(a,  $\frac{n-1}{2}$ )*Pow1(a,  $\frac{n-1}{2}$ )*a;
}
```



Exemplo 2

- Caso base



Exemplo 2

- Caso Recursivo



Exemplo 2

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = ? & \text{se } n = 1 \\ T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$a = ?$

$b = ?$

$f(n) = ?$



Exemplo 2

- Custo Assintótico

$$\begin{cases} T(n) = 2 & \text{se } n = 1 \\ T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 12 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$



Exemplo 2

- Custo Assintótico



Exemplo 2

- Custo Assintótico



Exemplo 2

- Custo Assintótico



Exemplo 2

- Custo Assintótico



Exemplo 2

- Custo Assintótico



Exemplo 2

- Custo Assintótico



Exemplo 3

```
int Pow3 (int a, int n)
{
1   if (n == 1)
2       return a;
3   else
4       return Pow3(a,n-1)*a;
}
```



Exemplo 3

- Caso base



Exemplo 3

- Caso Recursivo



Exemplo 3

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = ? & \text{se } n = 1 \\ T(n) = aT(n - b) + f(n) & \text{se } n > 1 \end{cases}$$

$a = ?$

$b = ?$

$f(n) = ?$



Exemplo 3

- Custo Assintótico

$$\begin{cases} T(n) = 2 & \text{se } n = 1 \\ T(n) = T(n - 1) + 5 & \text{se } n > 1 \end{cases}$$



Exemplo 3

- Custo Assintótico



Exemplo 3

- Custo Assintótico



Exemplo 3

- Custo Assintótico



Exemplo 4

1	float Media (float *V, int N)
2	{
3	int i;
4	float Acum;
5	Acum = 0;
6	for(i=0;i<n;i++)
7	Acum = Acum + V[i];
8	return (Acum / n);
9	}



Exemplo 5

1	float MediaR (float *V, int comeco, int fim)
2	{
3	int meio;
4	if (comeco == fim)
5	return V[comeco];
6	else
7	{
8	meio = (comeco+fim)/2;
9	return (MediaR(V,comeco,meio)+MediaR(V,meio+1,fim))/2;
10	}
11	}



Exemplo 5



Exemplo 5



Exemplo 5



Exemplo 5



Exemplo 5



Exemplo 6

```
int busca(int vet[], int i, int f, int v)
{
1   int k;
2   if (i > f)
3       return -1;
4   else
5   {
6       k = (i + f)/2;
7       if (vet[k] == v)
8           return k;
9       else
10          if (v < vet[k])
11              return busca(vet,i,k-1, v);
12          else
13              return busca(vet,k+1,f, v);
    }
}
```



Exemplo 6



Exemplo 6



Exemplo 6



Exemplo 6

