

Ciência da Computação

Aula 16

Algoritmos para Árvores Parte 4 – Árvore B

André Luiz Brun



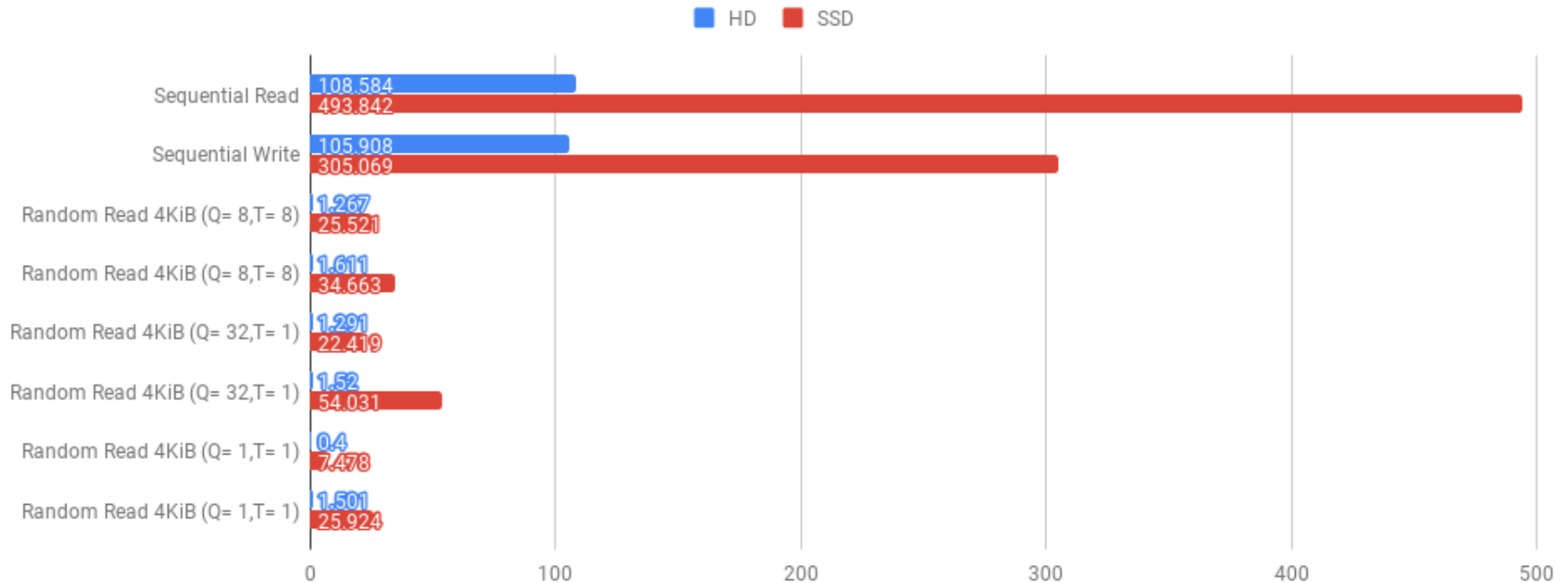
Introdução

- Muito indicado para funcionar em discos e fitas
- Usado em sistemas de banco de dados
- Memória secundária vs Memória primária
 - Tempo (2009)
 - Uma rotação HD 7200 RPM leva 8,33 milissegundos (10^{-3})
 - 50 nanosegundos (10^{-9})
 - Custo
 - Espaço
- Cada página tende a ser o maior possível (geralmente o tamanho de uma página de disco)



Adendo

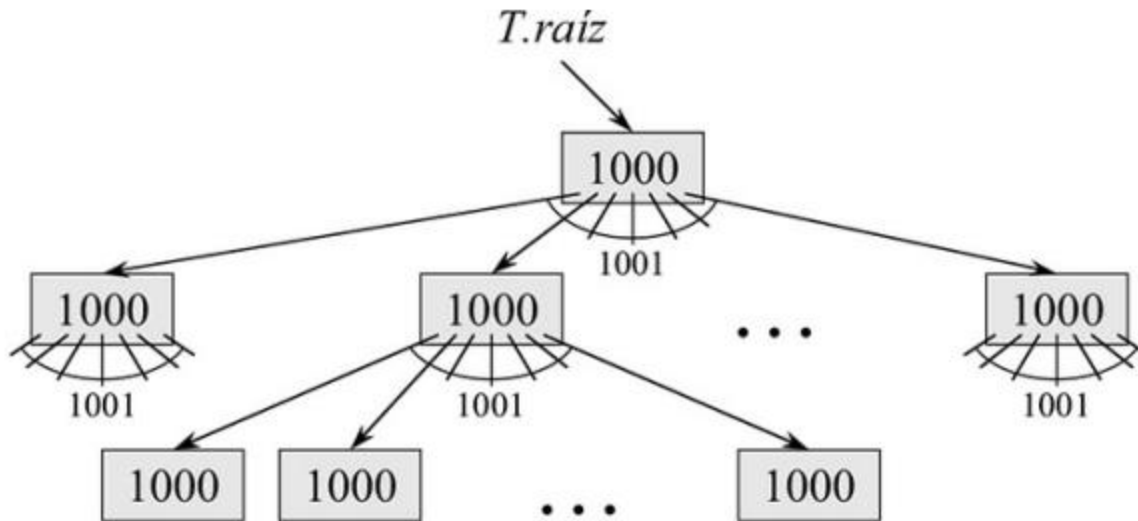
Comparativo HD vs SSD M.2 (em MB/S)



Fonte: <https://meiobit.com/395818/resenha-wd-green-sata-ssd-m-2-2280-o-nome-e-maior-que-o-bicho/>



Introdução



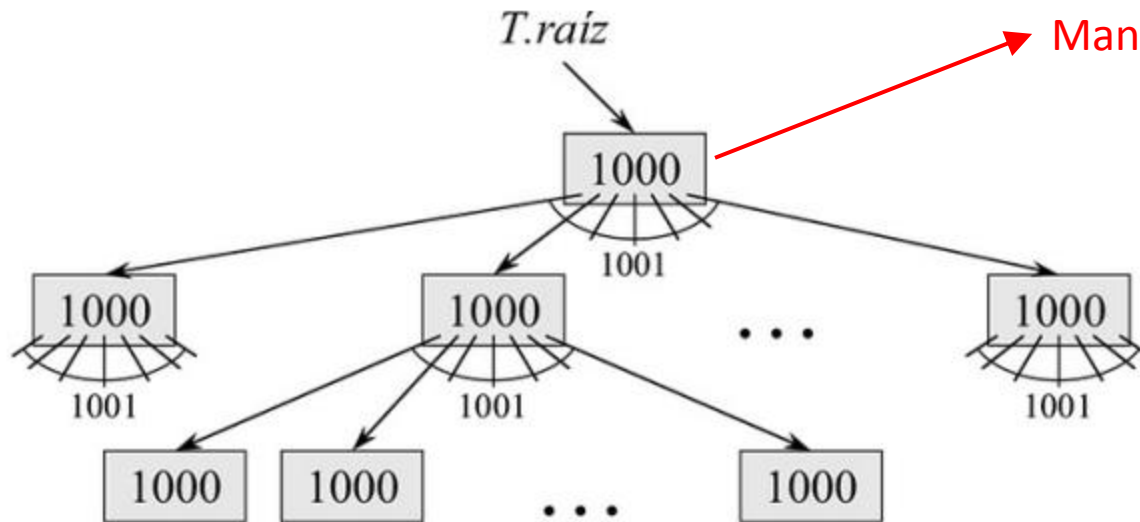
1 nó,
1000 chaves

1001 nós,
1.001.000 chaves

1.002.001 nós,
1.002.001.000 chaves



Introdução



Mantida em memória

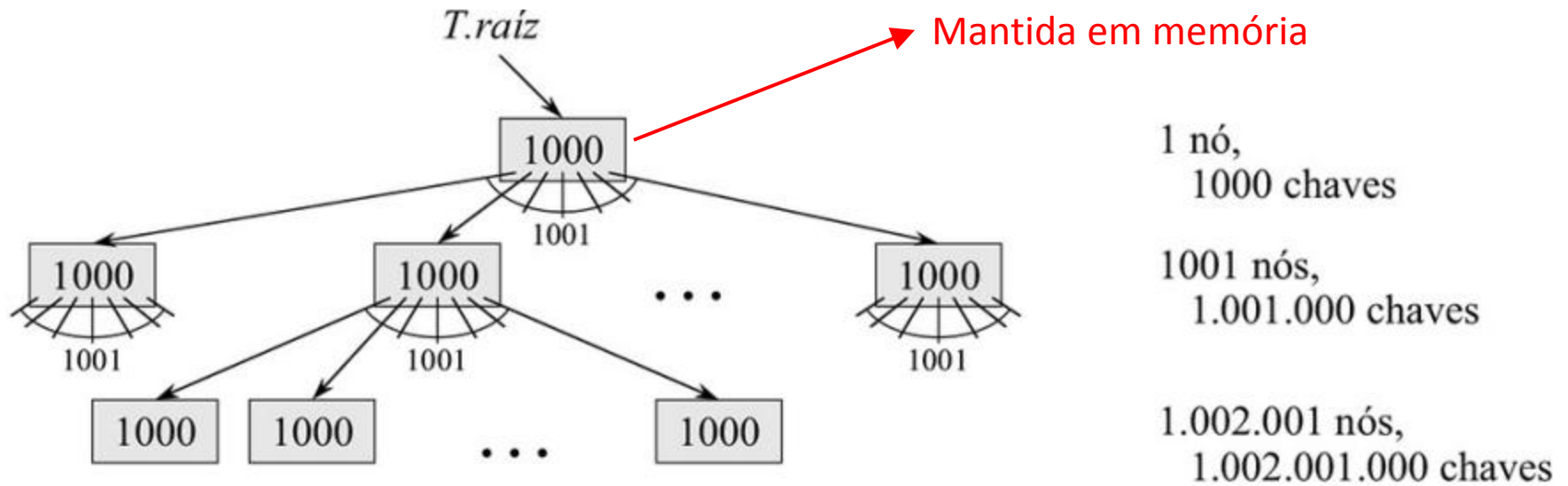
1 nó,
1000 chaves

1001 nós,
1.001.000 chaves

1.002.001 nós,
1.002.001.000 chaves



Introdução



Consegue recuperar mais de 1 bilhão de chaves com dois acessos a disco



Introdução

- 1) Todo nó x tem os seguintes atributos:
 - a) $x.n$, o número de chaves atualmente armazenadas no nó x
 - b) as próprias $x.n$ chaves, $x.chave_1, x.chave_2, \dots, x.chave_{x.n}$, armazenadas em ordem não decrescente, de modo que $x.chave_1 \leq x.chave_2 \leq \dots \leq x.chave_{x.n}$
 - c) $x.folha$, um valor booleano que é VERDADEIRO se x é uma folha e FALSO se x é um nó interno
- 2) Cada nó interno x também contém $x.n + 1$ ponteiros $x.c_1, x.c_2, \dots, x.c_{x.n+1}$ para seus filhos. Os nós de folhas não têm filhos e, assim, seus atributos c_i são indefinidos.



Introdução

3) As chaves $x.chave_i$ separam as faixas de chaves armazenadas em cada subárvore: se k_i é qualquer chave armazenada na subárvore com raiz $c_i x$, então

$$k_1 \leq x.chave_1 \leq k_2 \leq x.chave_2 \leq \dots \leq x.chave_{n[x]} \leq k_{x.n+1}.$$

4) Todas as folhas têm a mesma profundidade, que é a altura h da árvore.

5) Os nós têm limites inferiores e superiores para o número de chaves que podem conter. Esses limites são expressos em termos de um inteiro fixo $t \geq 2$ denominado grau mínimo da B-árvore

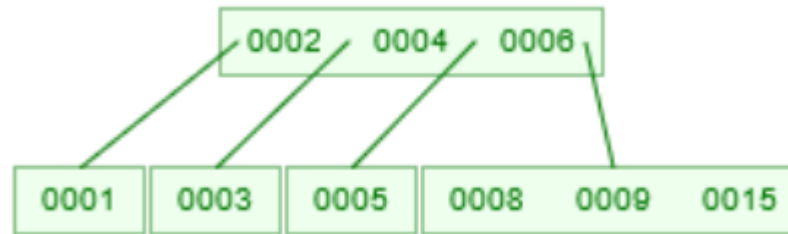


Introdução

- a) Todo nó, exceto a raiz, deve ter no mínimo $t - 1$ chaves. Assim, todo nó interno, exceto a raiz, tem no mínimo t filhos. Se a árvore é não vazia, a raiz deve ter no mínimo uma chave.
- b) Todo nó pode conter no máximo $2t - 1$ chaves. Portanto, um nó interno pode ter no máximo $2t$ filhos. Dizemos que um nó está cheio se contém exatamente $2t - 1$ chaves.



Introdução



Ordem 4 segundo Knuth
Ordem 2 segundo Bayer & McCreight

$t = 2$

Máximo por página: $2t - 1 = 3$

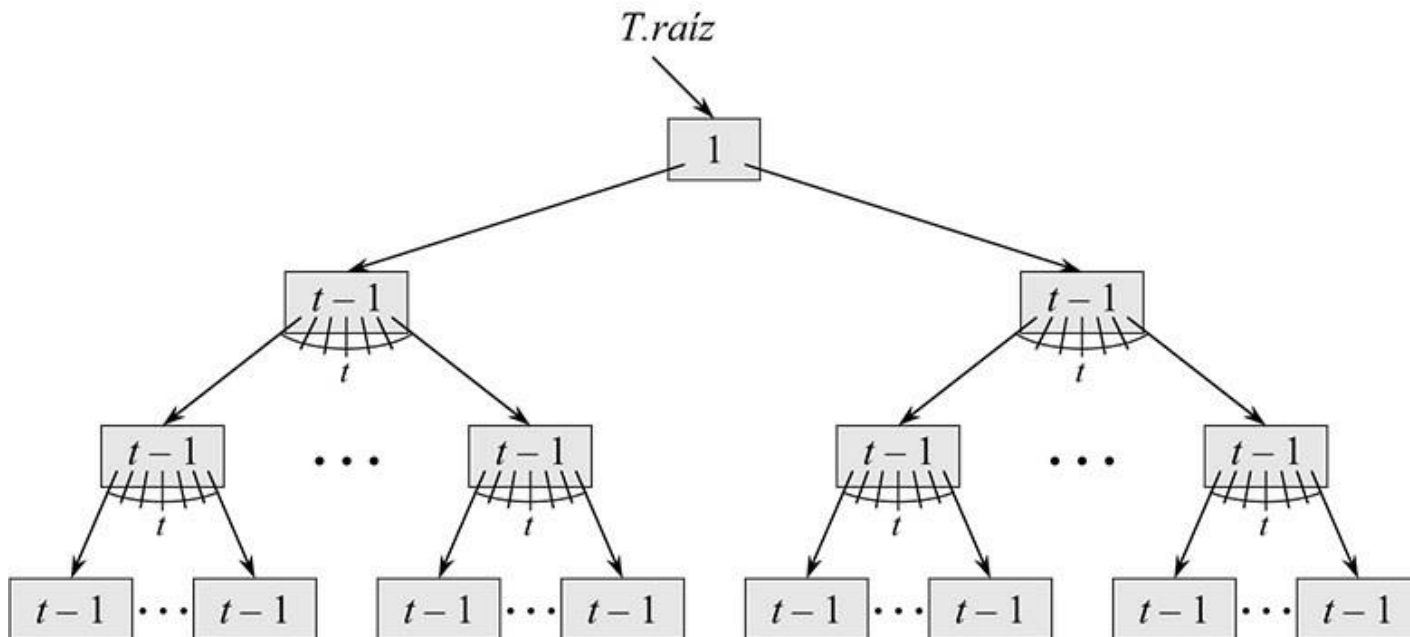
Mínimo por página: $t - 1 = 1$

Máximo de Filhos: $2t = 4$



Altura da Árvore B

$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}.$$



profundidade	número de nós
0	1
1	2
2	$2t$
3	$2t^2$



Altura da Árvore B

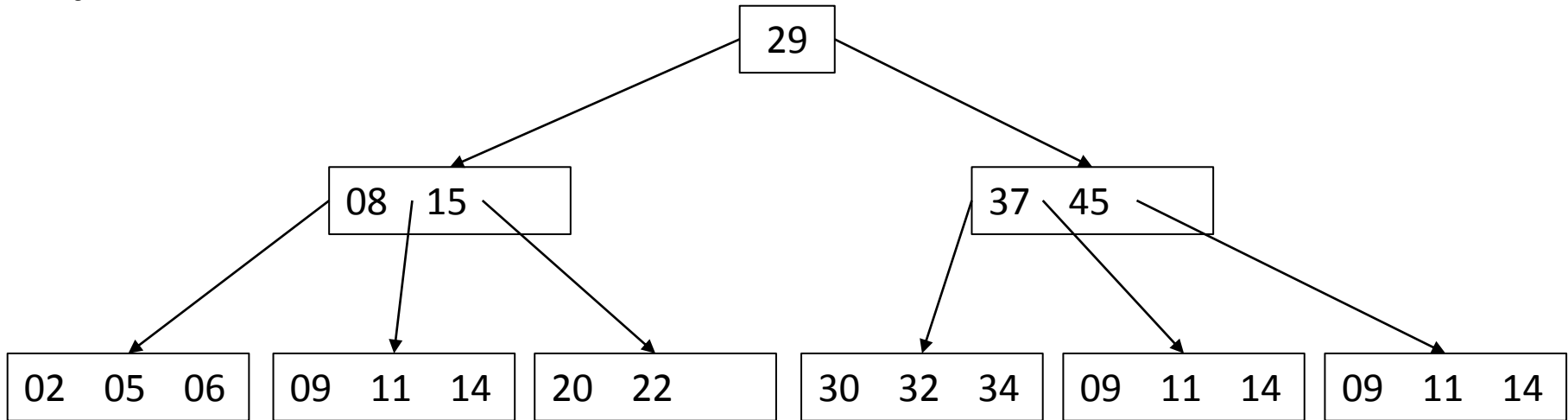
$$h \leq \log_t \frac{n+1}{2}.$$

$t = 2$
 $n = 15$



Consulta

t=2



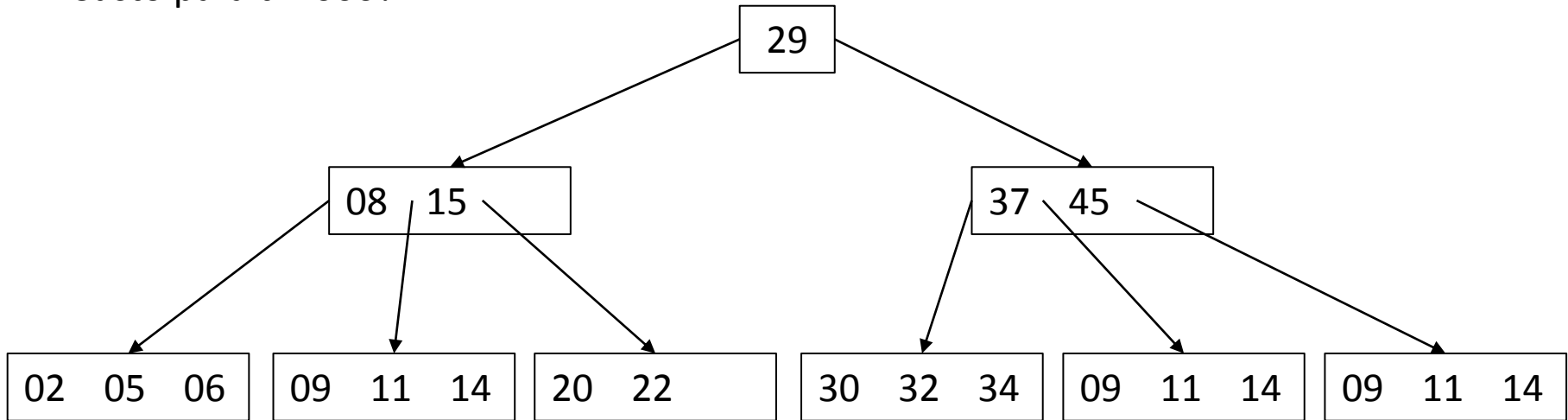
Custo de acesso a disco

Custo de processamento (busca)

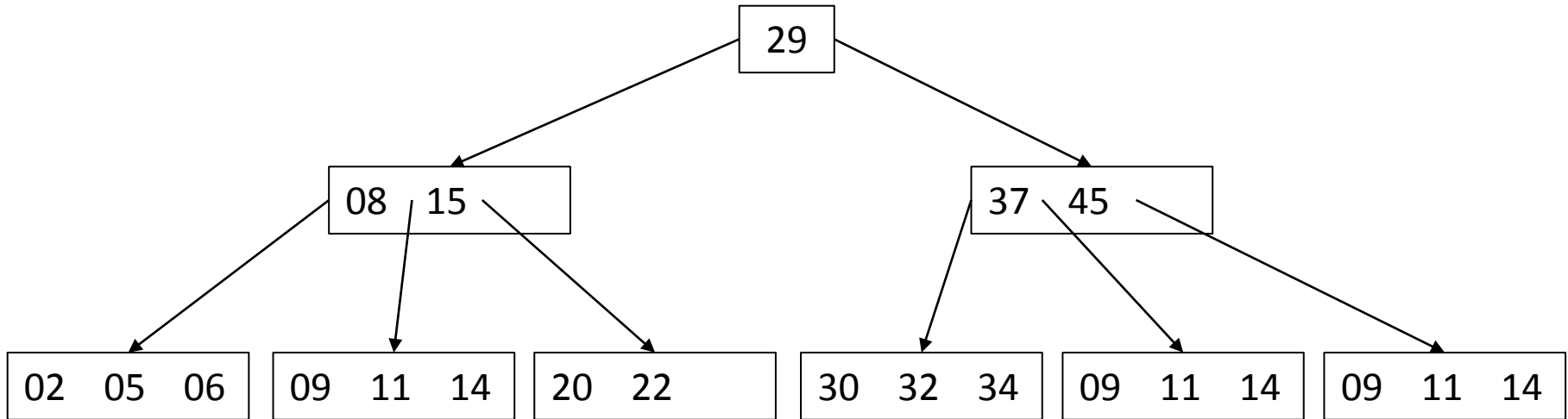


Consulta

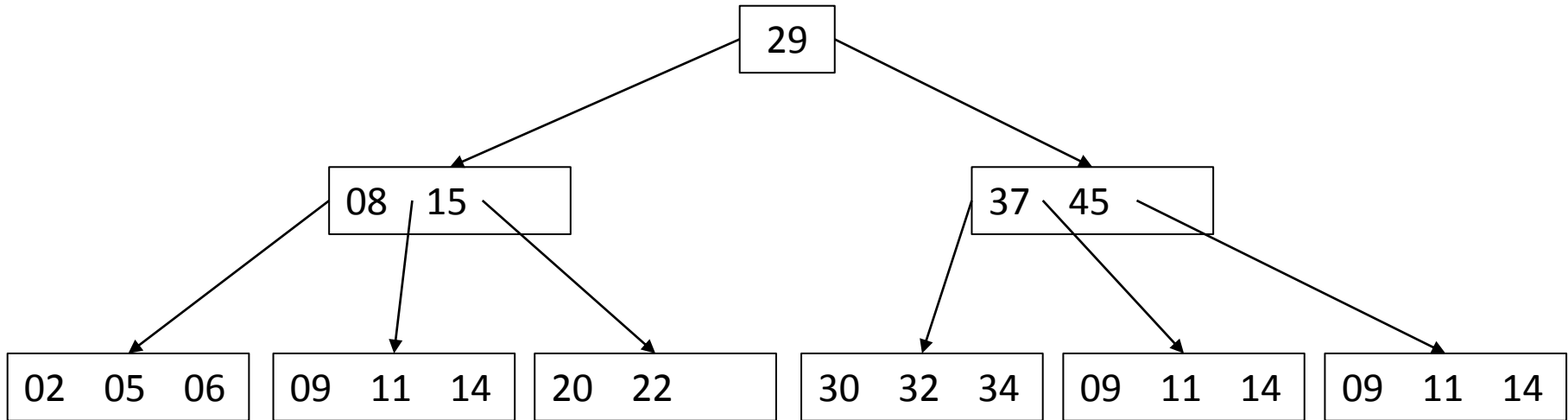
Custo para $t=1000$?



Consulta



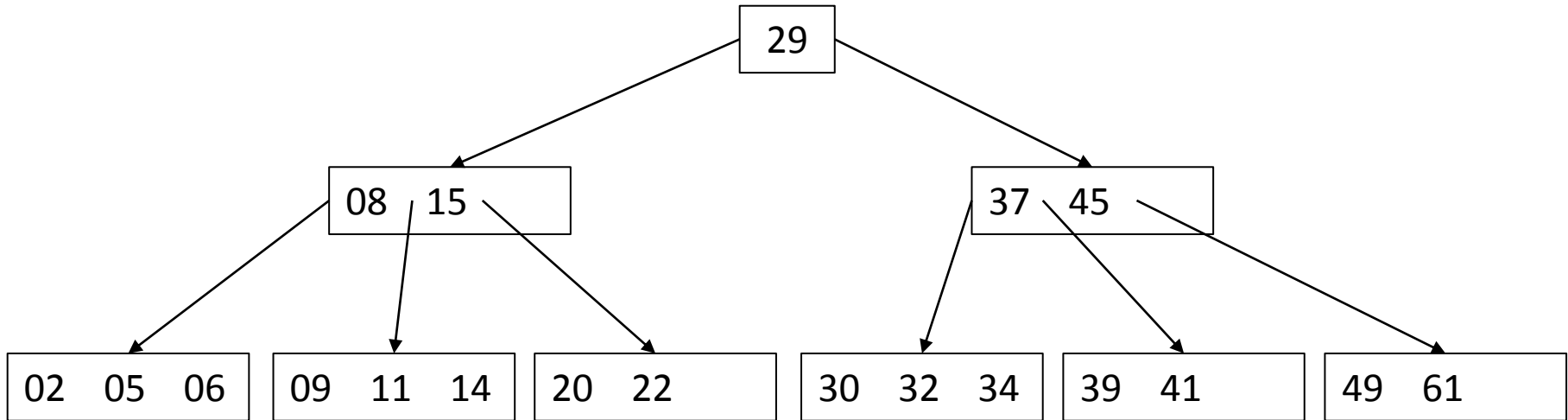
Inserção



Paga-se primeiro uma operação de consulta para descobrir onde o elemento deve ser inserido



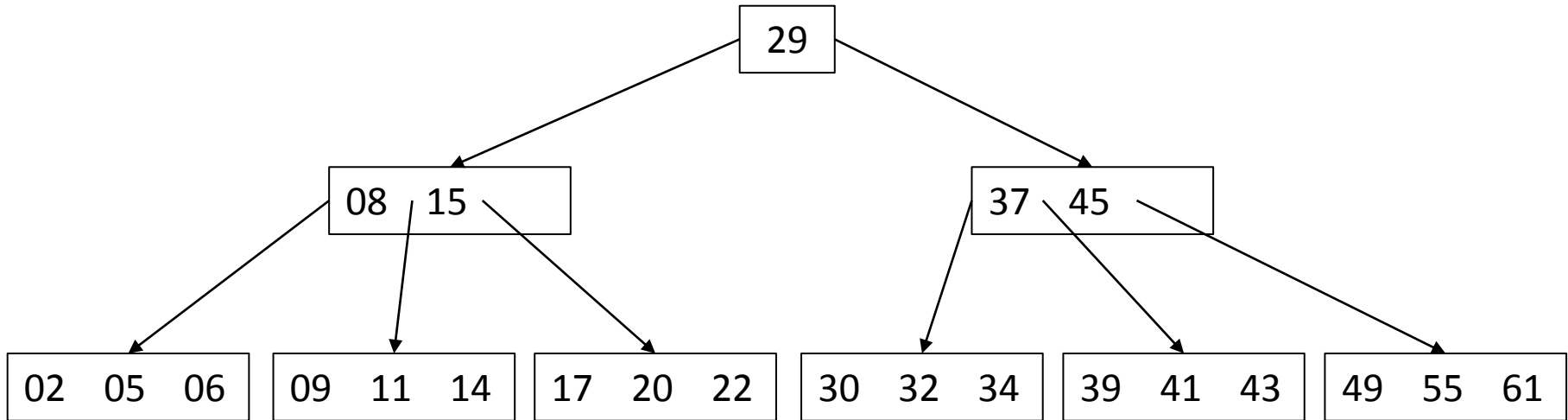
Inserção



Se o elemento couber na página, basta incluí-lo de forma ordenada. Exemplos: 17, 43, 55



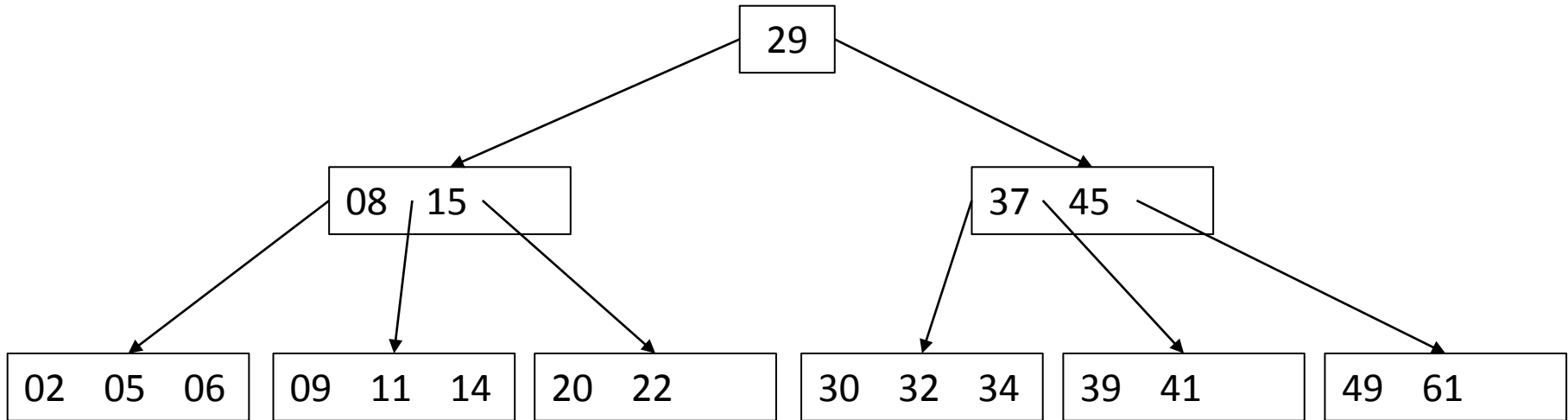
Inserção



Se o elemento não couber, a página deve ser dividida em duas e o elemento mediano deve ser promovido à página pai. Exemplos: 28, 36, 46



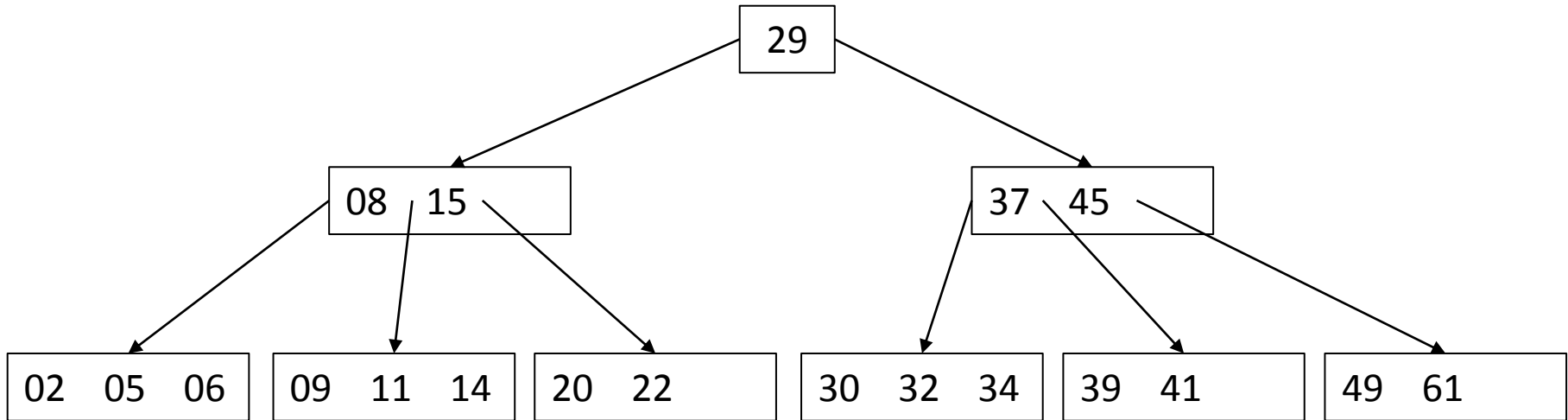
Exclusão



Caso 1: tenta remover um elemento que está em uma folha que continua com a ocupação mínima após a exclusão. Exemplos: 5, 14, 49



Exclusão



Caso 2: o elemento a ser excluído não está numa folha, então busca-se seu antecessor para ocupar seu lugar. Exemplos: 15, 37, 8



Exclusão

Caso 3: Após a exclusão a folha fica com menos do que a ocupação mínima. No entanto, uma página irmã pode ceder uma chave para atender ao mínimo necessário.



Exclusão

Caso 3: Após a exclusão a folha fica com menos do que a ocupação mínima. No entanto, uma página irmã pode ceder uma chave para atender ao mínimo necessário.



Exclusão

Caso 4: Após a exclusão a folha fica com menos do que a ocupação mínima. Além disso, nenhuma página irmã pode ceder uma chave para atender ao mínimo necessário.

Neste caso é preciso juntar a página com uma das irmãs.

Neste processo, desce o elemento que está entre as duas páginas e junta-se as duas



Exclusão

Caso 4: Após a exclusão a folha fica com menos do que a ocupação mínima. Além disso, nenhuma página irmã pode ceder uma chave para atender ao mínimo necessário.



Árvore B*

Propriedades

- Cada página apresenta no máximo m páginas filhas ($m = 2t$)
- Uma página folha contém pelo menos $\lfloor (2m-1)/3 \rfloor - 1$ chaves e no máximo $m-1$
- Todas as páginas folha estão no mesmo nível
- Toda página, exceto a raiz e as folhas possuem no mínimo $\lfloor (2m-1)/3 \rfloor$ descendentes
- Uma página não folha com k páginas filhas possui $k-1$ chaves



Árvore B*

Split do tipo dois para três (ao invés do um para dois)



Árvore B*

Consulta



Árvore B*

Inserção

Similar à
B tradicional



Árvore B*

Remoção

Similar to
B⁺ traditional

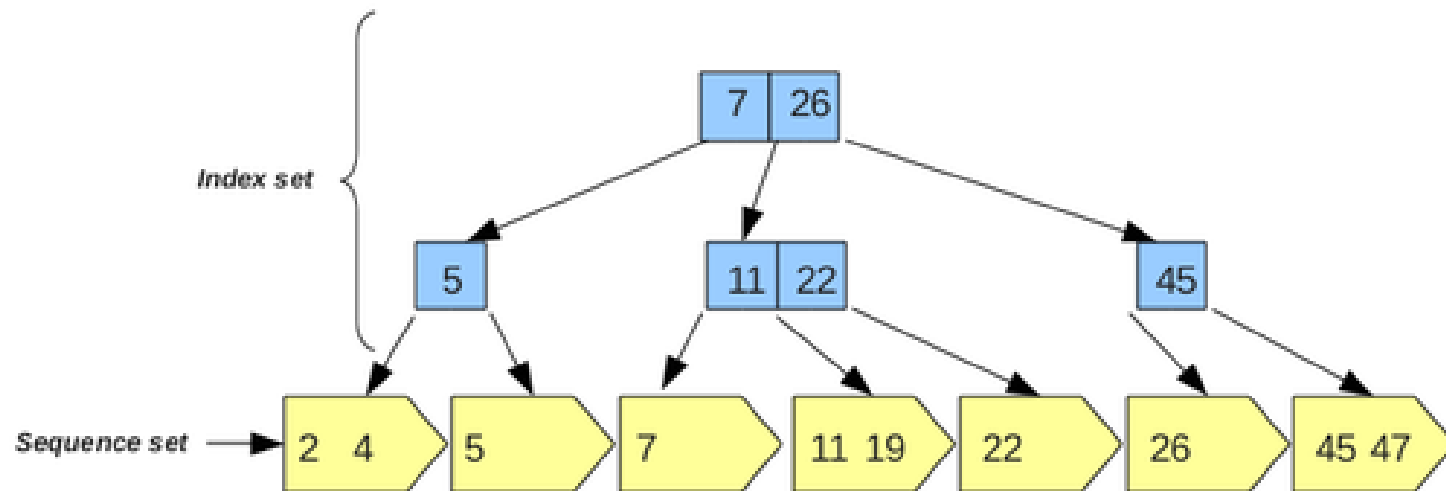


Árvore B+

- Estrutura similar à das Árvores B e B*
- No entanto, os elementos nos nós internos representam apenas apontadores para onde os dados realmente estão armazenados
- As informações são armazenadas apenas nas folhas
- As folhas são ligadas através de listas



Árvores B+

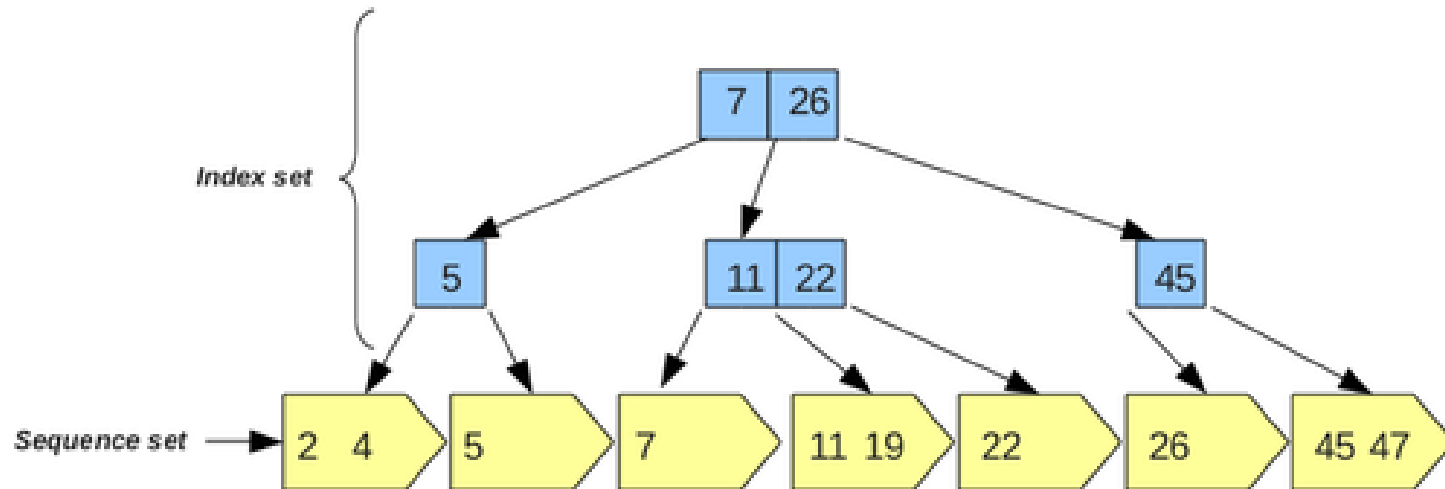


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Consulta

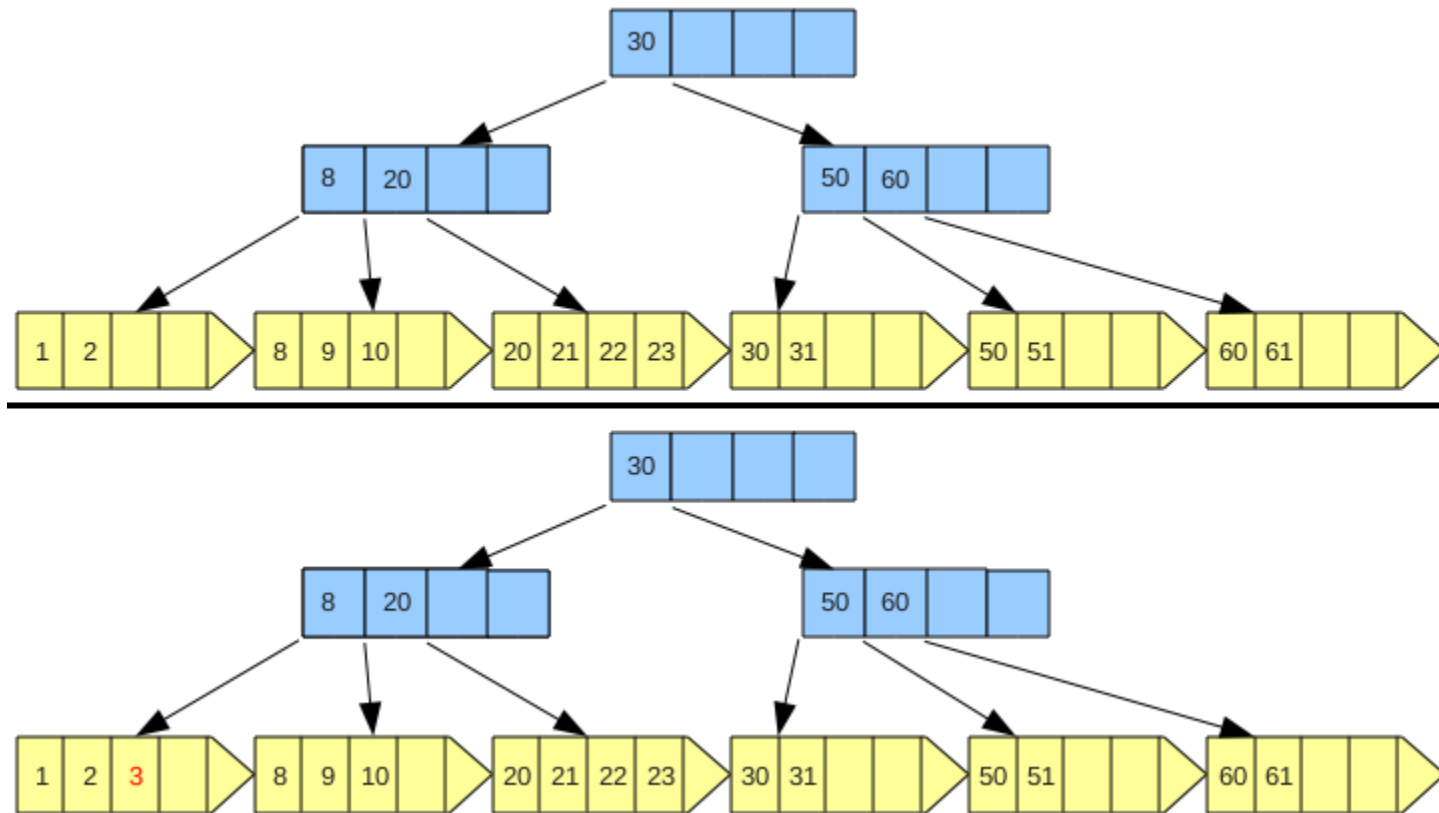


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Inserção (ainda há espaço na folha)

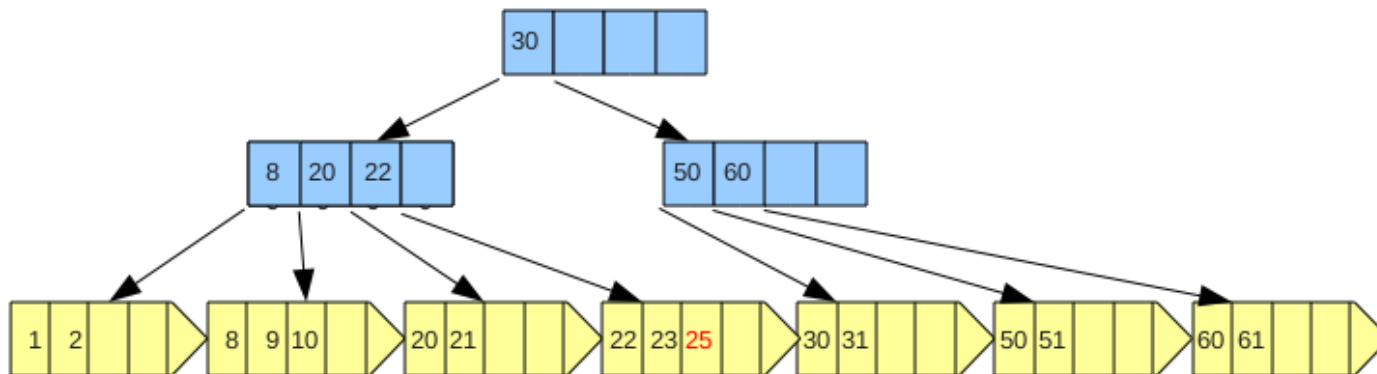
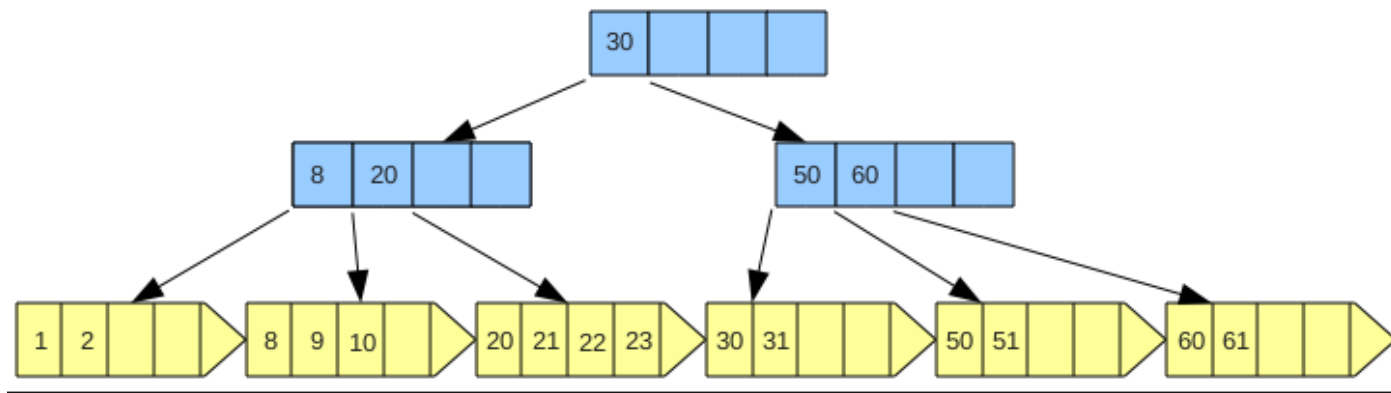


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Inserção (não há espaço na folha)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



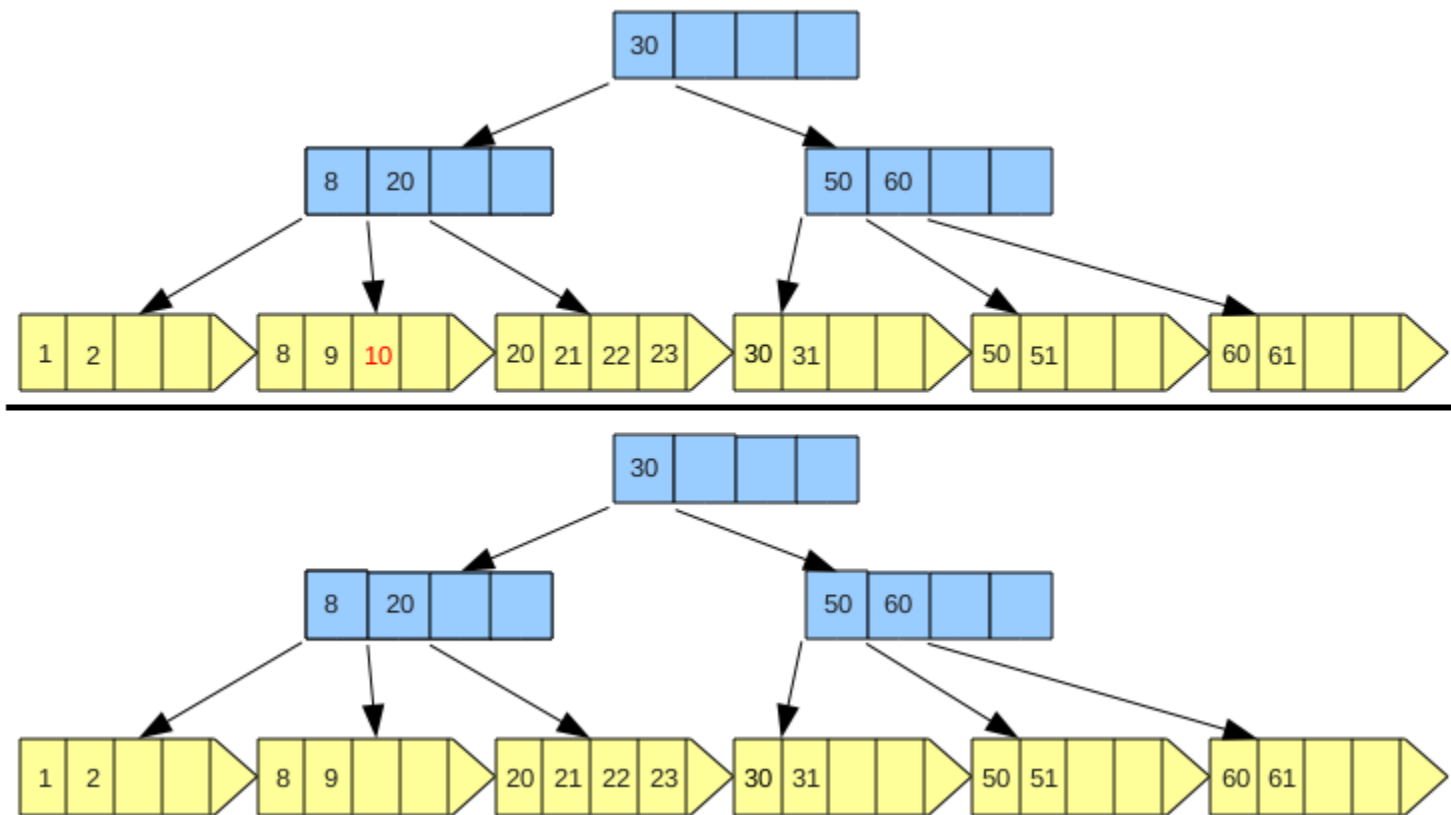
Árvores B+

Inserção (não há espaço na folha)



Árvores B+

Remoção (limite mínimo ainda é respeitado)

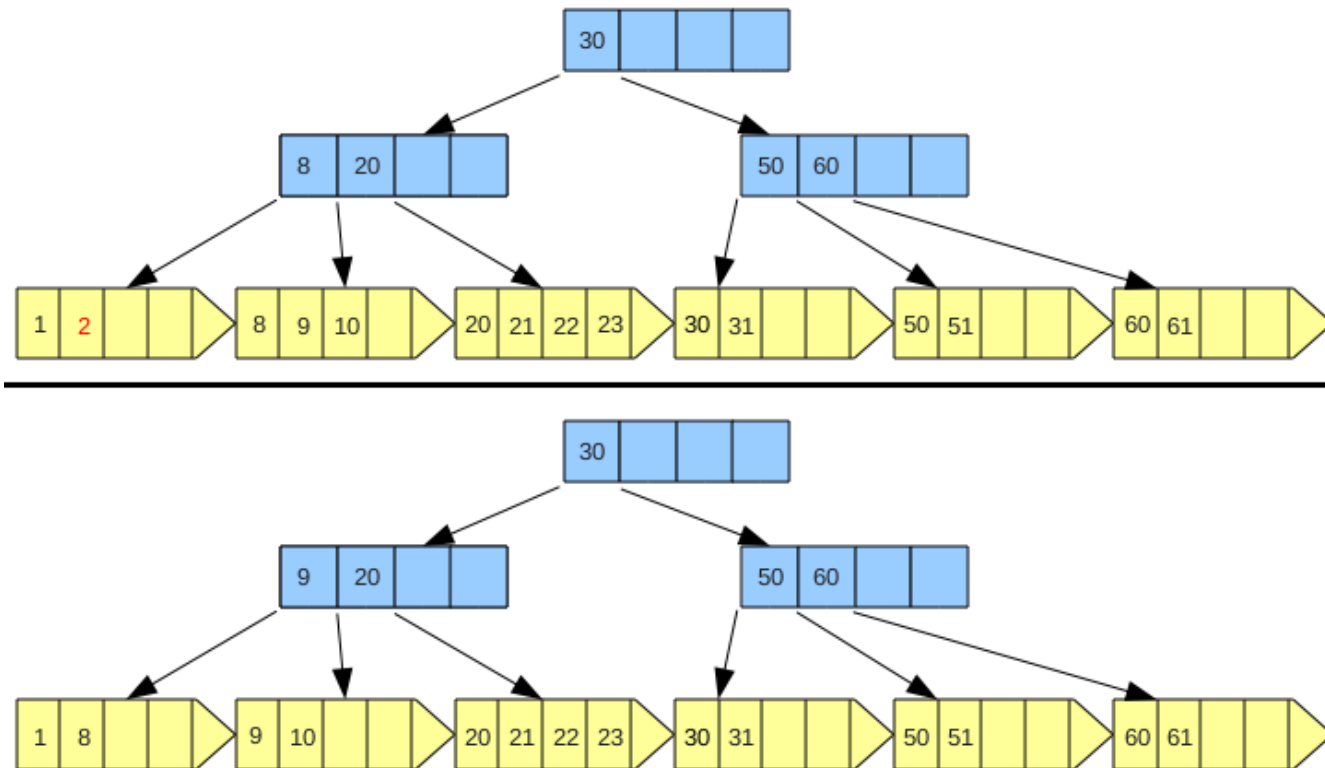


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Exclusão (limite mínimo é ultrapassado, mas irmã pode emprestar)

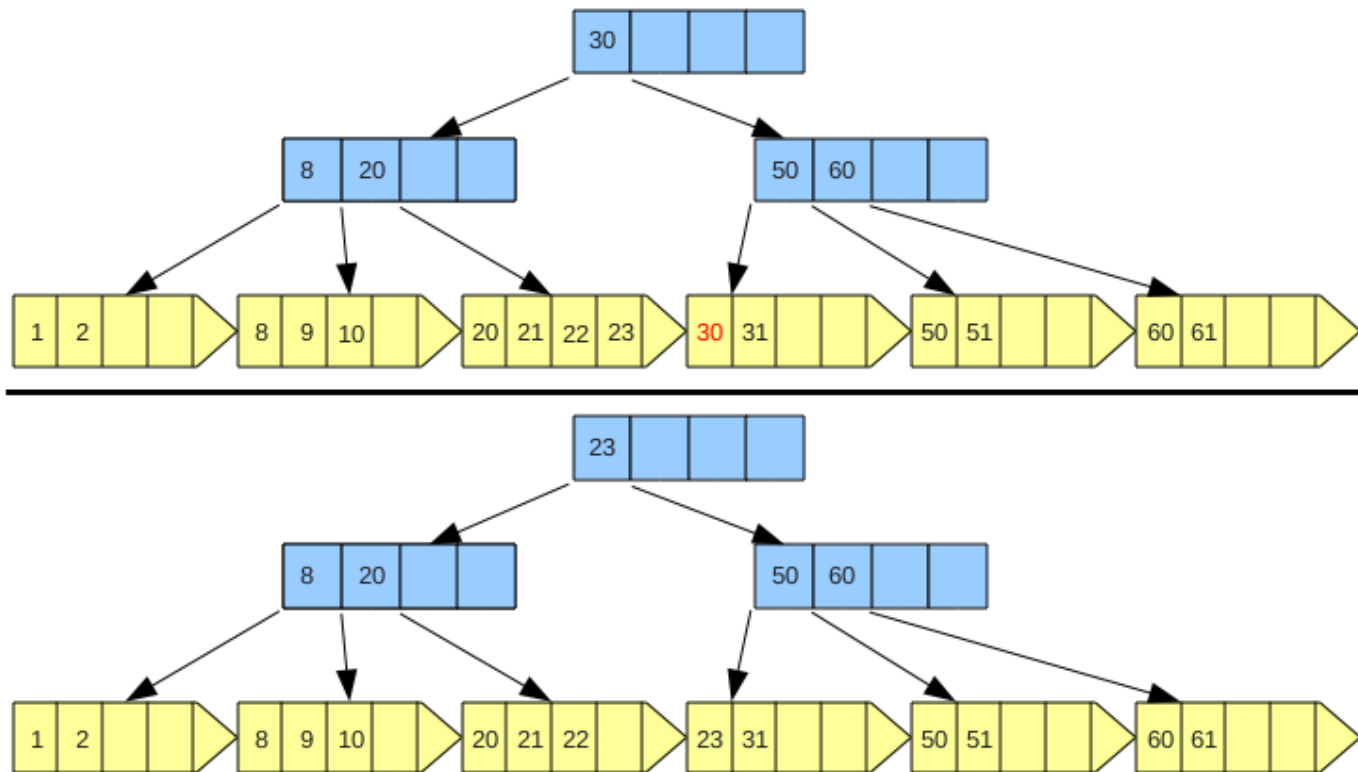


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Exclusão (limite mínimo é ultrapassado, mas irmã pode emprestar)

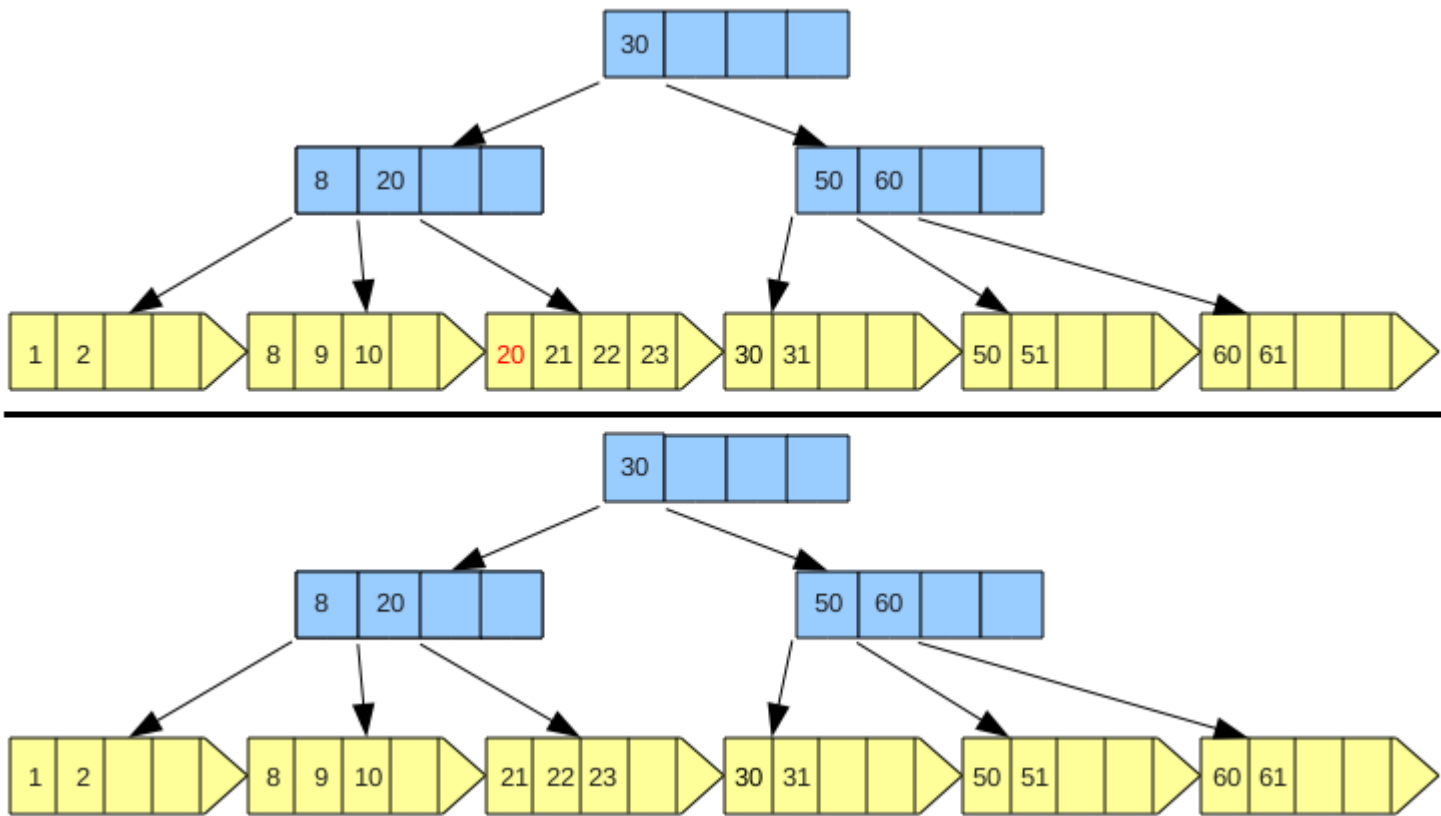


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Exclusão (quando remove o elemento apontador)

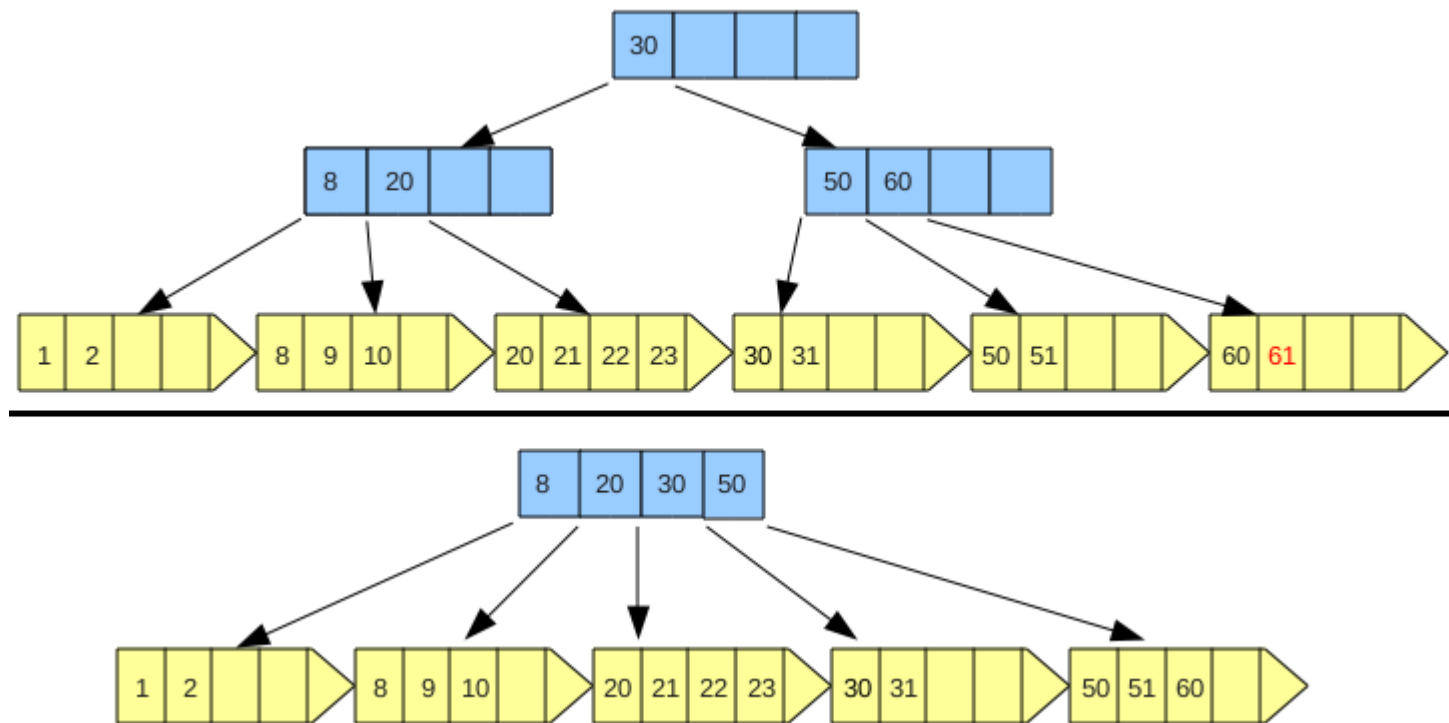


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B



Árvores B+

Exclusão (quando não há como emprestar)



Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%81rvore_B%2B

