Ciência da Computação

Aula 3

Análise Assintótica de Algoritmos Recursivos (Método Iterativo)

Substituição

André Luiz Brun

Interência

Exemplo 1

2^1

a^n $\quad 2^4 = (2^2)^2 \quad 2^{32} \quad (2^{16})^2$

$2^5 = (2^2)^2 * 2 \quad 2^{16} \quad (2^8)^2$

$2^8 \quad (2^4)^2$

```
int Pow2 (int a, int n)
{
      if (n==1)
            return a;
      if (n%2==0)
            return Pow2(a,n/2)^2;
      else
            return Pow2(a,(n-1)/2)^2*a;
}
```

$2^4 \quad (2^2)^2$

$2^2 \quad (2^1)^2$

$2^1 = 2$

1

1

2

3

5

$2^3 \quad a = 2 \quad n = 3$

$Pow(2, 1)^2 * 2$

$2^{321} \quad a = 2 \quad n = 321$

$Pow(2, 160)^2 * 2$

2^{5347}

Exemplo 1

- Caso base

Pow (2, 1)

linha 1 : 1

linha 2 : 1

2

$\boxed{T(n) = 2 \qquad n = 1}$

Exemplo 1

- Caso Recursivo

linha 1 : 1 constante

linha 2 : 2

linha 6 : 5

8

Exemplo 1

- Caso Recursivo

$2^{16} \rightarrow 2^{8} \rightarrow 2^{4} \rightarrow 2^{2} \rightarrow 2^{1}$

$n = 16$ $n = 8$ $n = 4$ $n = 2$ $n = 1$

n

$n/2$

$n/4$

$n/8$

$4x$

$n/16$

Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- o termo *a* corresponde ao número de chamadas recursivas executadas a cada iteração, ou seja, o número de novos subproblemas chamados para a próxima iteração.

- $\frac{n}{b}$ corresponde ao tamanho do novo subproblema, ou seja, o termo *b* indica em que fator o tamanho do subproblema será diminuído. Quanto maior o tamanho de b, mais rapidamente o problema diminui.

Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n)$$

- o termo $f(n)$ corresponde ao custo necessário para executar cada chamada recursiva do algoritmo e o custo gasto depois que o retorno da recursão ocorre.

Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$
\begin{cases} T(n) = ? & se\ n = 1 \\ T(n) = aT\left(\dfrac{n}{b}\right) + f(n) & se\ n > 1 \end{cases}
$$

2

base

recursivo

a = ? 1

b = ? 2

f(n) = ? 8

$\frac{n}{2}$

Exemplo 1

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = ? & se\ n = 1 \\ T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 8 & se\ n > 1 \end{cases}$$

a = 1

b = 2

f(n) = 8

$n + 8$

$n/2 + 8$

$n/4 + 8$

$n/8 + 8$

$\vdots$

$n/n = 1 + 2$

Exemplo 1

$\frac{n/2}{2} = \frac{n}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{4}$

- Custo Assintótico

c^n

$$\begin{cases} T(n) = 2 & se\ n = 1 \\ T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 8 & se\ n > 1 \end{cases}$$

$K = 1$ $\quad T(n) = 1\underbrace{T\left(\frac{n}{2}\right)} + 8$

$T\left(\frac{n}{2}\right) = 1T\left(\frac{n/2}{2}\right) + 8$

$T(n/2) = \underbrace{T\left(n/4\right) + 8}$

$T\left(n/4\right) + 8 + 8$

$K = 2$ $\quad T(n) = 1\underbrace{T\left(\frac{n}{4}\right)} + \underbrace{16}$

$T\left(\frac{n}{4}\right) = 1T\left(\frac{n/4}{2}\right) + 8$

$T\left(\frac{n}{4}\right) = \underbrace{T\left(n/8\right) + 8}$

Exemplo 1

- Custo Assintótico

$$T\left(\frac{n}{8}\right) = T\left(\frac{n/8}{2}\right) + 8$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{8}\right) + 8 + 16$$

$$T\left(n/8\right) = T\left(\frac{n}{16}\right) + 8$$

$k = 3$ $\quad T(n) = 1\,\underbrace{T\left(n/8\right)} + 24$

$$T(n/16) + 8 + 24$$

$a = 1$

$b = 2^k$

$k = 4$ $\quad T(n) = 1T\left(\frac{n}{16}\right) + 32$

$f(n) = 8k$

Exemplo 1

- Custo Assintótico

$$T(n) = 1\,T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 8k$$

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$$n = 2^k$$

$$\boxed{k = \log_2 n}$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 8k$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + 8\log_2 n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{n^{\log_2 2}}\right) + 8\log_2 n$$

$$T(n) = T\left(\frac{n}{n}\right) + 8\log_2 n$$

Exemplo 1

- Custo Assintótico

$n = 16$ $\quad a = 3$

$$T(n) = T(1) + 8 \log_2 n$$

$$T(n) = 2 + 8 \log_2 n$$

$$T(n) = 8 \log_2 n + 2$$

$$O(\log_2 n)$$

$n/2 + 8$

$n/4 + 8$

$n/8 + 8$

$n/16 + 8$

2

$T(n) = 34$

$T(n) = 8 \log_2 n + 2$

$T(n) = 8 \log_2 16 + 2$

$T(n) = 8 \cdot 4 + 2$

Exemplo 2

16
8
4
2
1

```
int Pow1 (int a, int n)
{
    if (n==1)                 1
        return a;             1
    if (n%2==0)               2
        return Pow1(a, n/2)*Pow1(a, n/2);            2 div + 2 cham + 1 mult + return   6
    else
        return Pow1(a, (n-1)/2)*Pow1(a, (n-1)/2)*a;
}
```

2 sub + 2 div + 2 cham + 2 mult + return

9

Pow1(2,5)

Pow1(2,2) * Pow1(2,2) * 2

Exemplo 2

- Caso base

$T(n) = 2 \quad n = 1$

linha 1 : 1

linha 2 : 1

$\overline{\quad 2 \quad}$

Exemplo 2

- Caso Recursivo

$f(n) = 12$

Linha 1 : 1

Linha 3 : 2

Linha 6 : 9

12

Exemplo 2

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = ? & se\ n = 1 \\ T(n) = aT\left(\frac{n}{b}\right) + f(n) & se\ n > 1 \end{cases}$$

a = ?

b = ?

f(n) = ?

a = 2

b = 2

f(n) = 12

Exemplo 2

- Custo Assintótico

$$\begin{cases} T(n) = 2 & se\ n = 1 \\ T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 12 & se\ n > 1 \end{cases}$$

$k = 1 \quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 12$

$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + 12\right) + 12$

$k = 2 \quad T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 36$

$T(n/2) = 2T\left(\frac{n/2}{2}\right) + 12$

$T(n/2) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 12$

$T(n/4) = 2T\left(\frac{n/4}{2}\right) + 12$

$T(n/4) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + 12$

Exemplo 2

- Custo Assintótico

$$T(n) = 4\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + 12\right) + 36$$

$$T(n/8) = 2T\left(\frac{n/8}{2}\right) + 12$$

$$T\left(\frac{n}{8}\right) = 2T\left(\frac{n}{16}\right) + 12$$

$k = 3 \quad T(n) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 84$

$$T(n) = 8\left(2T\left(n/16\right) + 12\right) + 84$$

$k = 4 \quad T(n) = \underbrace{16}_{a}T\left(n/\underbrace{16}_{b}\right) + \underbrace{180}_{f(n)}$

Exemplo 2

- Custo Assintótico

$a = 2^k$

$b = 2^k$

$k = 4$

$f(n) = 12 + 24 + 48 + 96$

$f(n) = 12(1 + 2 + 4 + 8)$

$f(n) = 12(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)$

$f(n) = 12 \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$

Exemplo 2

- Custo Assintótico

$$T(n) = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 12 \cdot \sum_{i=0}^{k-1} 2^i$$

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$$n = 2^k$$

$$k = \log_2 n$$

$$T(n) = 2^{\log_2 n} T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + 12 \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i$$

$$T(n) = n^{\log_2 2} T\left(\frac{n}{n^{\log_2 2}}\right) + 12 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i$$

Exemplo 2

- Custo Assintótico

$$T(n) = n \cdot T\left(\frac{n}{n}\right) + 12 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i$$

$$\sum_{i=0}^{n} x^i = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

$$T(n) = 2n + 12(n-1)$$

$$\sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i = \frac{2^{\log_2 n - \cancel{1} + \cancel{1}} - 1}{2 - 1}$$

$$T(n) = 2n + 12n - 12$$

$$= 2^{\log_2 n} - 1$$

$$T(n) = 14n - 12$$

$$= n^{\log_2 2} - 1$$

$$O(n)$$

$$= n - 1$$

Exemplo 2

- Custo Assintótico $T(n) = 14(16) - 12$

$n = 16$

$T(n) = 224 - 12$

$T(n) = 212$

$n/\cancel{2} + 12$ $n/\cancel{2} + 12$

$n/4 + 12$ $n/4 + 12$ $n/4 + 12$ $n/4 + 12$

$n/8 + 12$ ... $n/8 + 12$

$n/16 + 12$ ... $n/16 + 12$

$16 \cdot (2) = 32$

1	12	12
2	2 (12)	24
4	4 (12)	48
8	8 (12)	96
16	16 (2)	32
		212

Exemplo 2

- Custo Assintótico

$$f(n) = 12 \cdot \underbrace{(2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3)}_{n-1}$$

$$k = \log_2 n$$

$$a_1 = 1$$

n: de elementos $= k$

$$q = 2$$

$$S_n = \frac{a_1 (q^n - 1)}{q - 1}$$

$$S_n = \frac{1 (2^k - 1)}{2 - 1}$$

$$S_n = \frac{1 (2^{\log_2 n} - 1)}{1}$$

$$S_n = 2^{\log_2 n} - 1$$

$$S_n = n - 1$$

Exemplo 3

16

15

14

```
int Pow3 (int a, int n)
{
	if (n == 1)                         1
		return a;                       1
	else
		return Pow3(a, n-1)*a;                  4
}
```

Exemplo 3

- Caso base

linha 1 : 1
linha 2 : 1

2

$T(n) = 2$ $n = 1$

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Exemplo 3

- Caso Recursivo

linha 1 : 1

linha 4 : 4

5

Exemplo 3

- Equação de Recorrência

$$\begin{cases} T(n) = \cancel{?} \quad 2 & se\ n = 1 \\ T(n) = aT(n-b) + \cancel{f(n)} & se\ n > 1 \end{cases}$$

5

a = $\cancel{?}$ 1

b = ? 1

f(n) = $\cancel{?}$ 5

$\frac{n}{b}$

$n - b$

Exemplo 3

- Custo Assintótico

$$\begin{cases} T(n) = 2 & se\ n = 1 \\ T(n) = T(n-1) + 5 & se\ n > 1 \end{cases}$$

$k=1$ $\quad T(n) = T(n-1) + 5$

$T(n) = T(n-2) + 5 + 5$

$k=2$ $\quad T(n) = T(n-2) + 10$

$T(n) = T(n-3) + 5 + 10$

$T(n-1) = T(n-1-1) + 5$

$T(n-1) = T(n-2) + 5$

$T(n-2) = T(n-2-1) + 5$

$T(n-2) = T(n-3) + 5$

Exemplo 3

- Custo Assintótico

$n - k = 1$

$k = n - 1$

$k = 3 \quad T(n) = T(n-3) + 15$

$a = 1$

$b = k$

$f(n) = 5k$

$T(n) = 1T(\underline{n-k}) + 5k$

$T(n) = T(n-(n-1)) + 5(n-1)$

$T(n) = T(1) + 5n - 5$

$T(n) = 2 + 5n - 5$

$T(n) = 5n - 3$

$O(n)$

Exemplo 3

- Custo Assintótico

$15 \cdot 5 + 2 = 77$

$n = 16$

1ª	5	$n = 16$
2ª	5	$n = 15$
3ª	5	$n = 14$
4ª	5	$n = 13$
15ª	5	$n = 2$
16ª	2	$n = 1$

$T(n) = 5n - 3$

$T(n) = 5(16) - 3$

$T(n) = 77$

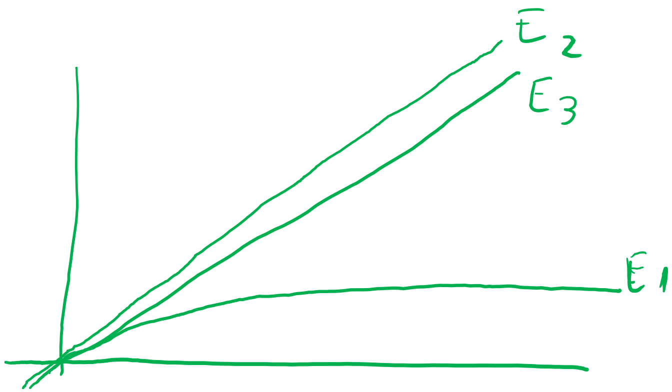
Exemplo 3

- Custo Assintótico

Exemplo 1 $T(n) = 8 \log_2 n + 2$ $O(\log_2 n)$

Exemplo 2 $T(n) = 14n - 12$ $O(n)$

Exemplo 3 $T(n) = 5n - 3$ $O(n)$



Exemplo 4

`float Media (float *V, int N)`	
`{`	
`int i;`	
`float Acm;`	
`Acm = 0;`	1
`for(i=0;i<n;i++)`	2n + 2
`Acm = Acm + V[i];`	3n
`return (Acm / n);`	2
`}`	

n

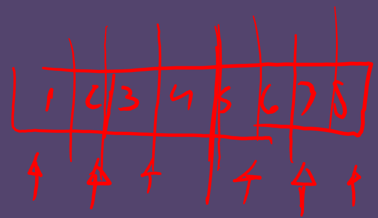
Σ

$T(n) = 1 + 2n + 2 + 3n + 2$

$O(n)$

$T(n) = 5n + 5$

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná



Exemplo 5

```
float MediaR (float *V, int comeco, int fim)
{
    int meio;
    if (comeco == fim)                n=1        1
        return V[comeco];                        2
    else
    {
        meio = (comeco+fim)/2;                   3
        return (MediaR(V,comeco,meio)+MediaR(V,meio+1,fim))/2;     5
    }
}
```

Exemplo 5

Caso base

linha 4 : 1

linha 5 : 2

3

$T(n) = 3$ $\quad n = 1$

Exemplo 5

Caso Recursivo:

Linha 4 : 1
Linha 8 : 3
Linha 9 : 5

9

$a = ?$
$b = ?$
$f(n) = ?$

$a = 2$
$b = 2$
$f(n) = 9$

Exemplo 5

$$\begin{cases} T(n) = 3 & n = 1 \\ T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 9 & n > 1 \end{cases}$$

$k=1$ $\quad T(n) = 2T\left(\frac{n}{2}\right) + 9$

$T(n) = 2\left(2T\left(\frac{n}{4}\right) + 9\right) + 9$

$k=2$ $\quad T(n) = 4T\left(\frac{n}{4}\right) + 27$

$T(n/2) = 2T\left(\frac{n/2}{2}\right) + 9$

$T(n/2) = 2T\left(\frac{n}{4}\right) + 9$

$T(n/4) = 2T\left(\frac{n/4}{2}\right) + 9$

$T\left(\frac{n}{4}\right) = 2T\left(\frac{n}{8}\right) + 9$

Exemplo 5

$$T(n) = 4\left(2T\left(\frac{n}{8}\right) + 9\right) + 27$$

$K=1 \quad 2^0 \cdot 9 = 9$

$K=2 \quad 2^1 \cdot 9 = 18$

$K=3 \quad 2^2 \cdot 9 = 36$

$K=3 \quad T(n) = 8T\left(\frac{n}{8}\right) + 63$

$$T(n) = 2^k T\left(\frac{n}{2^k}\right) + \sum_{i=0}^{k-1} 2^i \cdot 9$$

$1 \cdot 9$

$2 \cdot 9$

$4 \cdot 9$

$8 \cdot 9$

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$n = 2^k$

$k = \log_2 n$

Exemplo 5

$$T(n) = 2^{\log_2 n}\, T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + 9 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i$$

$$T(n) = n^{\log_2 2}\, T\left(\frac{n}{n^{\log_2 2}}\right) + 9 \cdot \sum_{i=0}^{\log_2 n - 1} 2^i$$

$$T(n) = n \cdot T(1) + 9 \cdot \frac{1\left(2^{\log_2 n} - 1\right)}{2-1}$$

$$T(n) = 3n + 9(n-1)$$

$$T(n) = 3n + 9n - 9$$

$$T(n) = 12n - 9$$

$$O(n)$$

Exemplo 6

```
int busca(int vet[], int i, int f, int v)
{                                                        T(1)
    int k;
    if (i > f)                    1                      (n)
        return -1;                1
    else
    {
        k = (i + f)/2;              3
        if (vet[k] == v)            2
            return k;               1
        else
            if (v < vet[k])            2
                return busca(vet,i,k-1, v);        3
            else
                return busca(vet,k+1,f, v);        3
    }
}
```

Exemplo 6

Caso base

$T(n) = 11 \quad n = 1$

linha 2 : 1

linha 6 : 3

linha 7 : 2

linha 10 : 2

linha 11/13 : 3

11

Exemplo 6

Caso Recursivo

mesmo custo do base

$f(n) = 1$

$a = ?$

$b = ?$

$f(n) = ?$

$a = 1$

$b = 2$

Exemplo 6

$$\begin{cases} T(n) = 11 & n = 1 \\ T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 11 \end{cases}$$

$$T(n/2) = T\left(\frac{n/2}{2}\right) + 11$$

$$T(n/2) = T(n/4) + 11$$

$k = 1 \quad T(n) = 1T\left(\frac{n}{2}\right) + 11$

$k = 2 \quad T(n) = 1T\left(\frac{n}{4}\right) + 11 + 11$

$k = 3 \quad T(n) = 1T\left(\frac{n}{8}\right) + 11 + 11 + 11$

Exemplo 6

$$T(n) = 1T\left(\frac{n}{2^k}\right) + 11k$$

$$\frac{n}{2^k} = 1$$

$$n = 2^k$$

$$k = \log_2 n$$

$$T(n) = 1T\left(\frac{n}{2^{\log_2 n}}\right) + 11\log_2 n$$

$$T(n) = T(1) + 11\log_2 n$$

$$T(n) = 11\log_2 n + 11$$

$$O(\log_2 n)$$

Melhor $O(7)$

Pior $O(11\log_2 n + 11)$