INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL

Adriana Postal
André Luiz Brun

8. Conjuntos Nebulosos e Lógica Nebulosa

No cotidiano...

O dia está “parcialmente nublado”

No cotidiano...

Preciso perder “alguns” quilos para ficar “bem”.

No cotidiano...

- Siga em frente “alguns metros”
- Estamos com uma moeda “estável”

Ou ainda...

- A classificação de certos objetos:

Ou ainda...

- A classificação de pessoas pela idade:

jovem

velho

Ou ainda...

- A descrição de características humanas:

BONITA

Cabeludo

saudável

alto

“

Quando as leis da matemática se referem à realidade elas não são exatas, e quando elas são exatas elas não se referem à realidade”

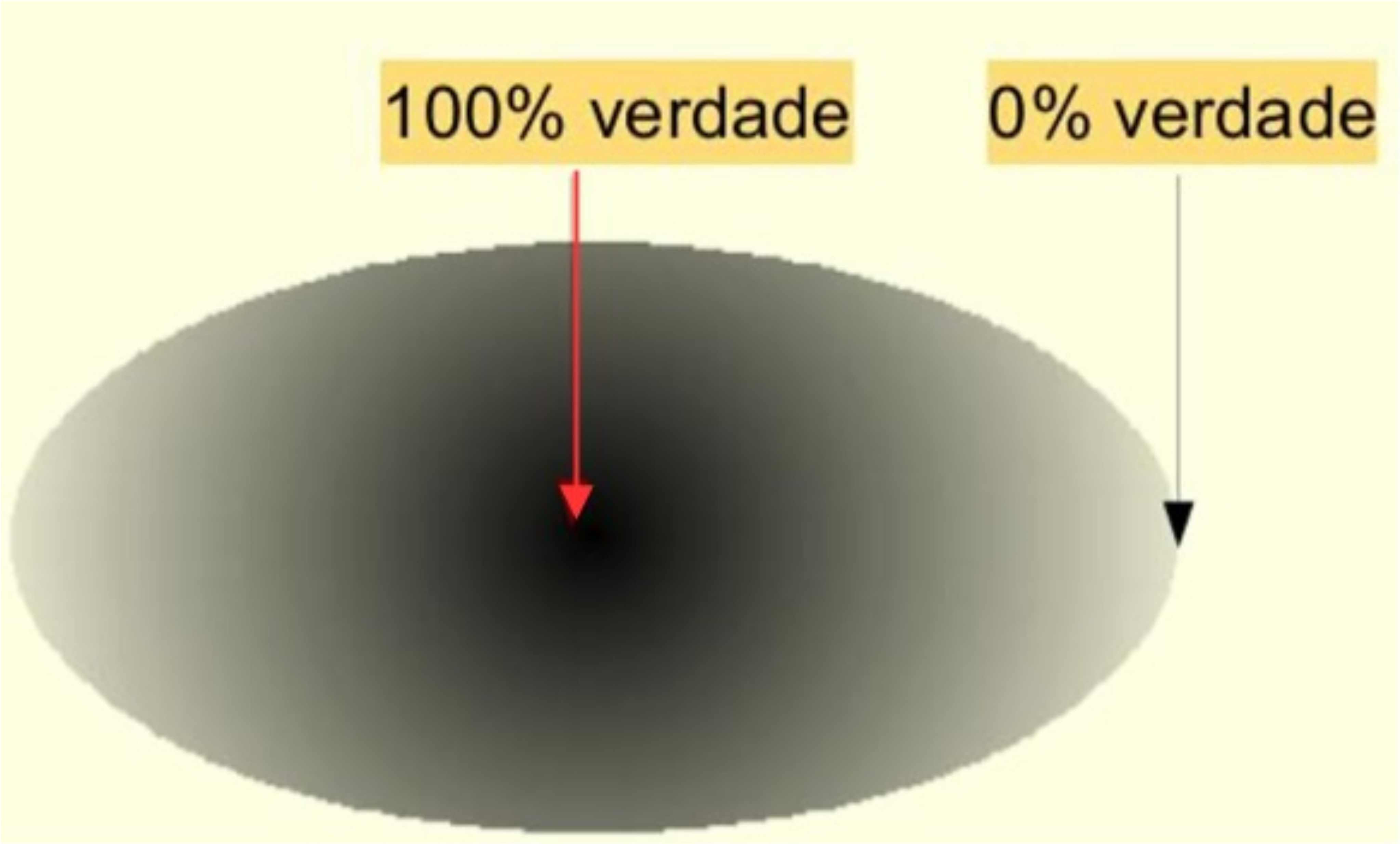
Albert Einstein

8.1. Introdução

- Lógica:
  - *Fuzzy*
  - Difusa
  - Nebulosa.
- A lógica *fuzzy* é uma extensão da lógica booleana.
- Surgiu em 1965 em Berkeley, através de Lofti Zadeh, para tratar do aspecto vago da informação.

8.1. Introdução

- Permite que estados imprecisos possam ser tratados por dispositivos de controle:
  - Avaliar temperatura (quente, morno, frio, etc).
  - Avaliar o conceito de felicidade (radiante, feliz, apático, triste, ...)
- *Fuzzy* é baseada em graus de pertinência (graus de verdade):
  - Inclui vários graus de verdade entre 0 e 1.


100% verdade
0% verdade

Conceituação

- É uma lógica multivalorada capaz de capturar informações vagas e convertê-las para um formato numérico.
- Uma lógica que suporta modos de raciocínio aproximados, ao invés de exatos.
- Mas como a incerteza é tratada na lógica tradicional?

A Incerteza

VISÃO TRADICIONAL

A incerteza é uma característica indesejável e deve ser evitada por todos os meios possíveis.

VISÃO *FUZZY*

A ciência deve ser tolerante com a incerteza, já que não é possível evitá-la.

A Incerteza

- Na visão tradicional, a ciência deve tentar obter a certeza em todas as suas manifestações:
  - Precisão
  - Especificidade
  - Exatidão
  - Consistência
  - Etc.

Princípios da lógica *fuzzy*

- Baseia-se em palavras e não em números:
  - Baixo, médio, alto, quente, frio, ...
- Possui vários modificadores de predicados:
  - Muito, mais ou menos, pouco, bastante, ...
- Possui um amplo conjunto de quantificadores:
  - Poucos, vários, em torno de, usualmente, ...

Lógica Clássica X Lógica *Fuzzy*

CLÁSSICA

- Predicados exigem definição exata
- Não existe resposta diferente de V e F.

FUZZY

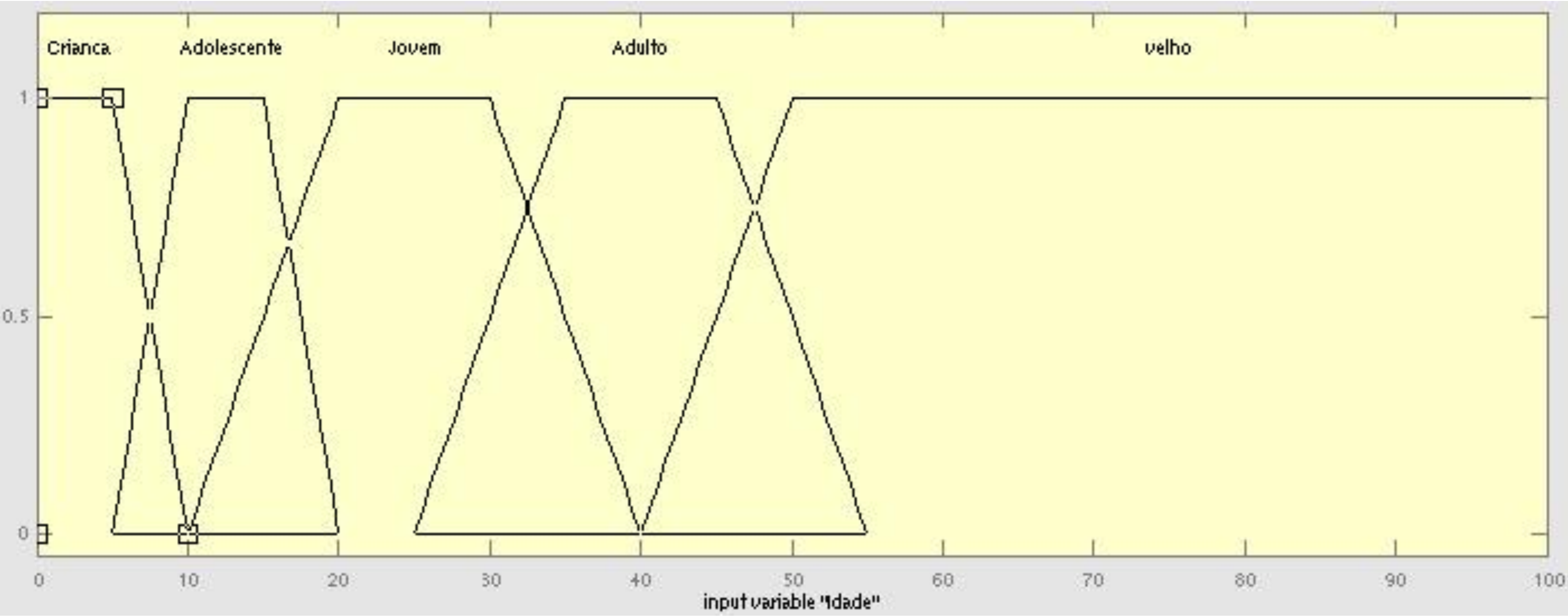
- Predicados não possuem definição exata
- As respostas possuem um grau de veracidade que variam entre “totalmente falso (0)” e “totalmente verdadeiro (1)”.

8.2. Histórico

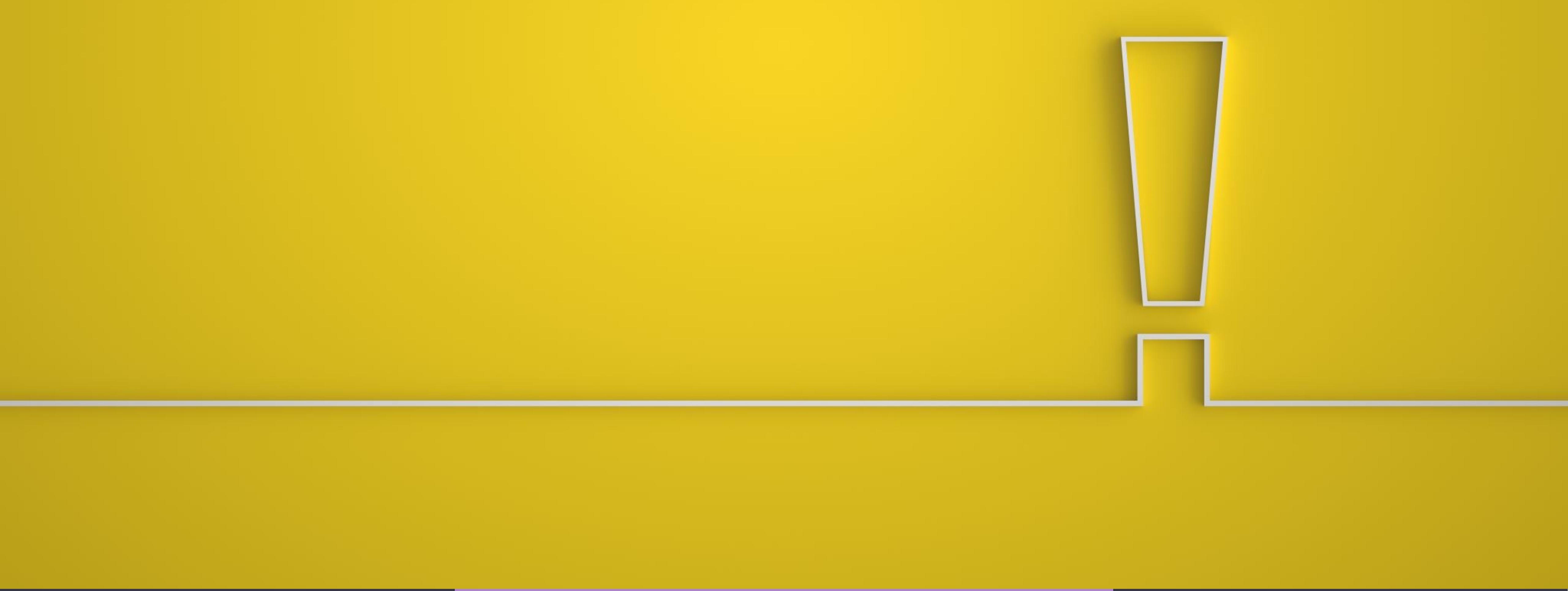
- **1º estágio de transição**:
  - Século XIX: os físicos começam a estudar processos físicos a nível molecular.
  - As precisas leis Newtonianas mostraram-se inaplicáveis devido à enorme quantidade de entidades envolvidas (moléculas).
  - Os métodos Newtonianos (baseados no cálculo) que não consideram a incerteza, são substituídos pela teoria das probabilidades.
  - A teoria das probabilidades surge com a finalidade de capturar incertezas do tipo aleatoriedade.

8.2. Histórico

- **2º estágio de transição**:
  - Surgimento da lógica *fuzzy* e dos conjuntos nebulosos.
  - Em 1965, Lofti Zadeh publicou um artigo onde introduziu a ideia dos conjuntos nebulosos (*Fuzzy Sets*), que são conjuntos com fronteiras imprecisas.
  - Exemplo: idade.



Crianca
Adolescente
Jovem
Adulto
velho
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
input variable "Idade"



8.3. Conceitos Básicos

a) Conjuntos *crisp* × Conjuntos *fuzzy*

- *Crisp*: é o conjunto clássico, que nós conhecemos.
  - O conjunto de todos os inteiros:

    $\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$
  - O conjunto de todos os inteiros positivos ou números naturais:

    $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$
  - O conjunto de todos os inteiros não-negativos:

    $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, ...\}$

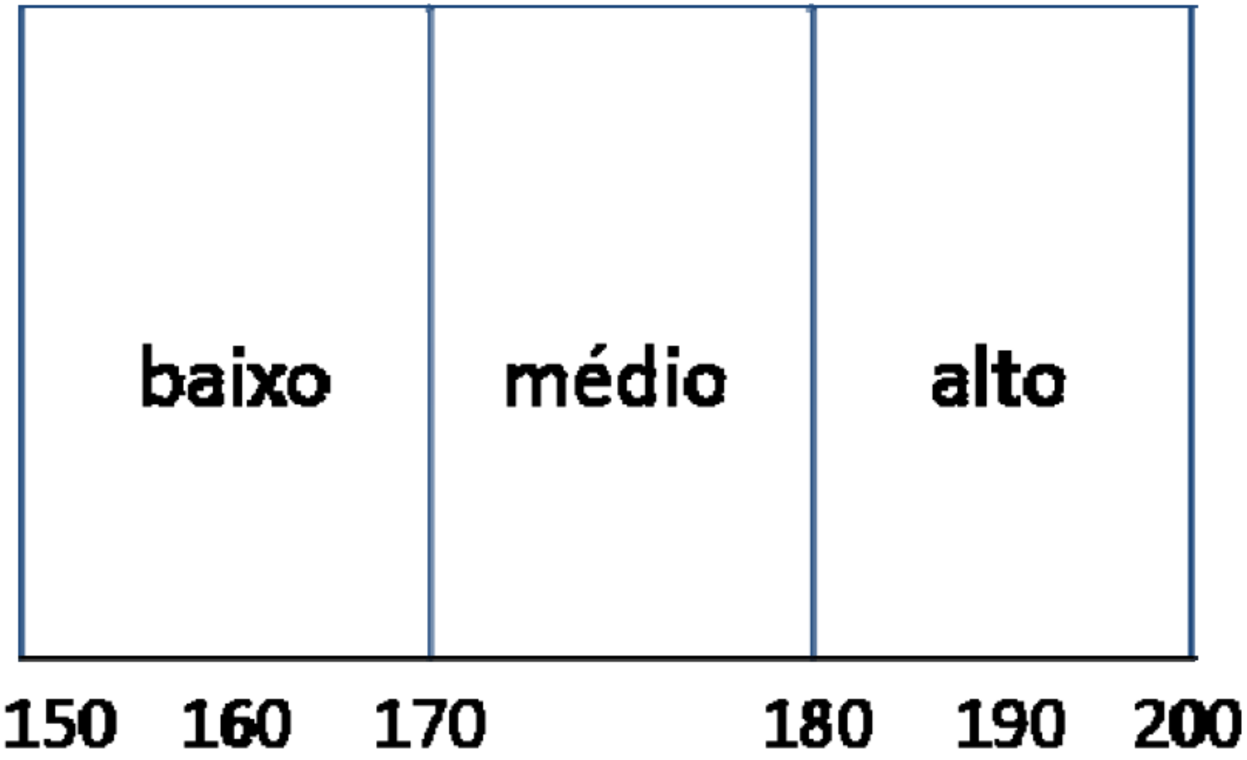
a) Conjuntos *crisp* × Conjuntos *fuzzy*

- O conjunto de todos os números reais ($\mathbb{R}$)
- O conjunto de todos os números reais não-negativos ($\mathbb{R}^+$)
- Intervalos entre dois números reais, a e b:
  - [a, b] = fechado
  - (a, b] = aberto à esquerda
  - [a, b) = aberto à direita
  - (a, b) = aberto

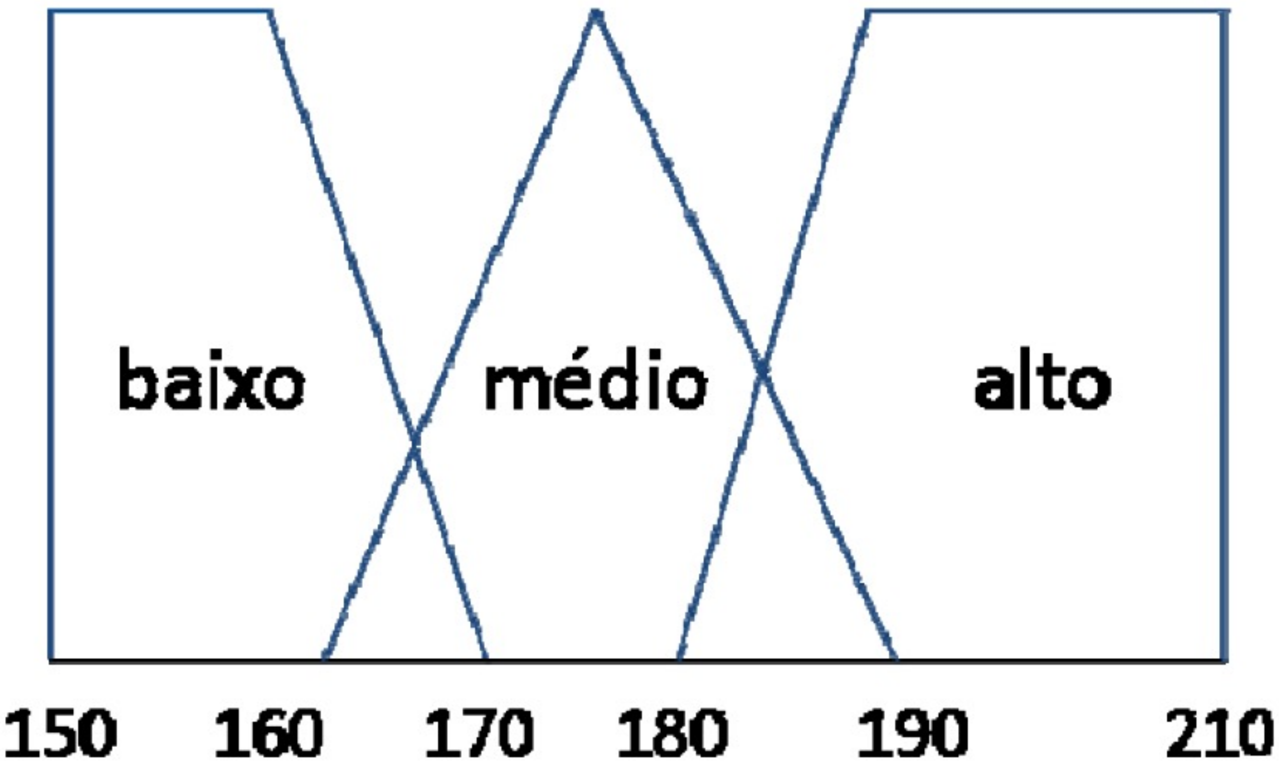
a) Conjuntos *crisp* × Conjuntos *fuzzy*

- *Fuzzy*: aqui, um elemento pertence a um conjunto com um certo grau de pertinência:
  - Uma sentença pode ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa.
  - Um mesmo elemento pode ter graus de pertinência diferentes de 0 para mais de um conjunto *fuzzy*.
- Exemplo: representação na forma de conjuntos da altura de uma pessoa.

Altura *crisp*



Altura *fuzzy*



Formalmente

Crisp

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se, e somente se, } x \in A \\ 0 & \text{se, e somente se, } x \notin A \end{cases}$$

Fuzzy

$$\mu(x) = \begin{cases} 1 & \text{se, e somente se, } x \in A \\ 0 & \text{se, e somente se, } x \notin A \\ 0 \le \mu(x) \le 1 & \text{se } x \text{ pertence parcialmente a } A \end{cases}$$

b) Função de Pertinência

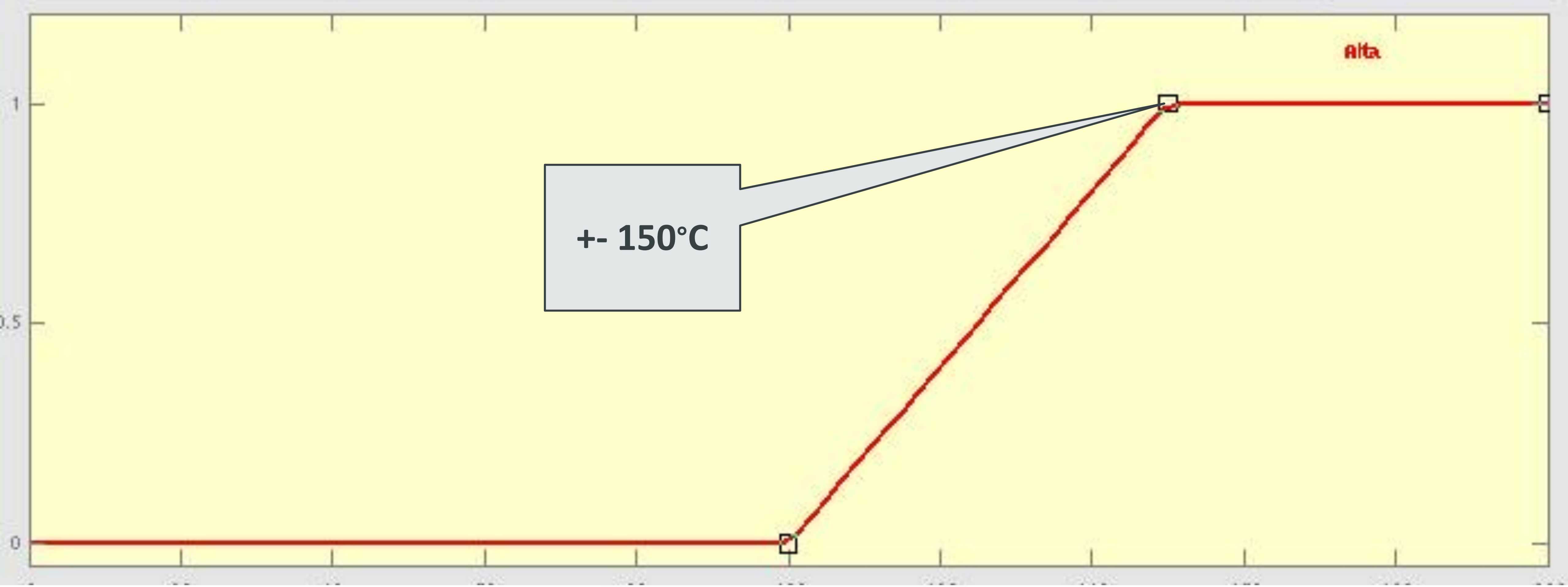
- Reflete o conhecimento que se tem em relação à intensidade com que o objeto pertence ao conjunto *fuzzy.*
- **Notação:**

$$\mu_A : x \rightarrow [0, 1]$$

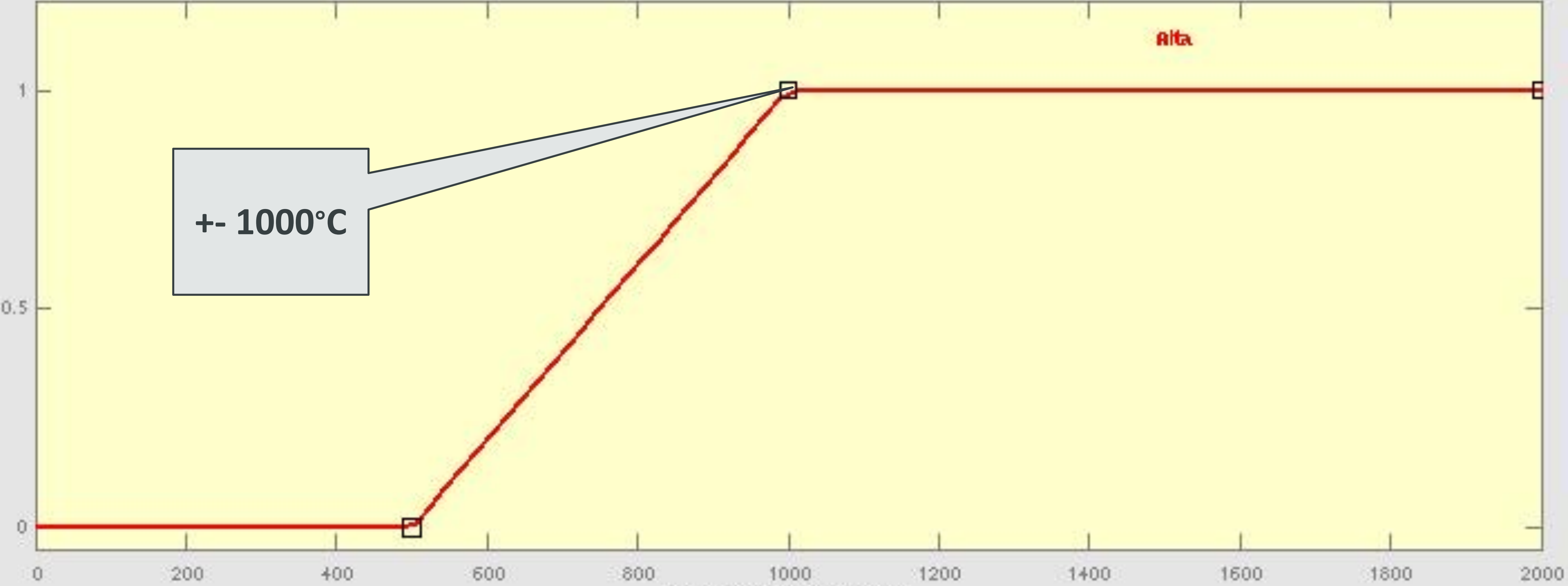
$\mu_A(x)$ = pertinência do elemento x no conjunto nebuloso A.

b) Função de Pertinência

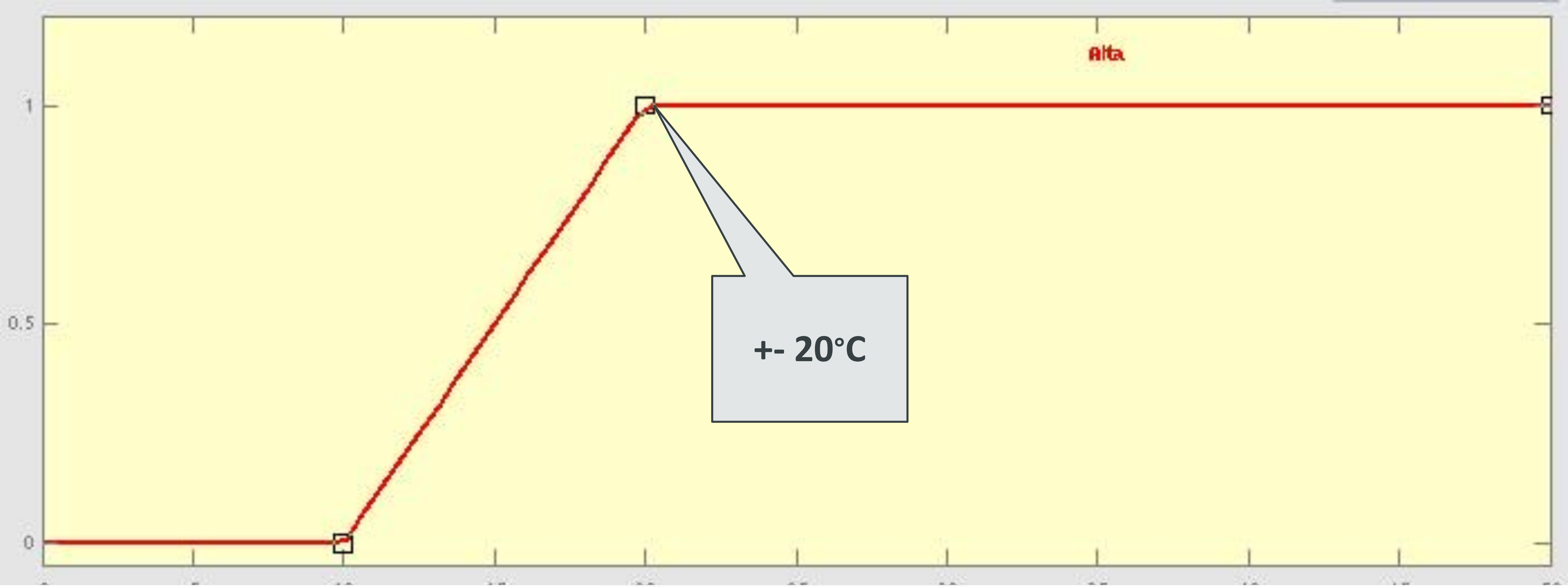
- Conjuntos nebulosos permitem-nos representar conceitos vagos expressos em linguagem natural
- A representação depende não apenas do conceito, mas também do contexto no qual ela é utilizada
- Exemplo: conceito de “alta temperatura” em diversos contextos:



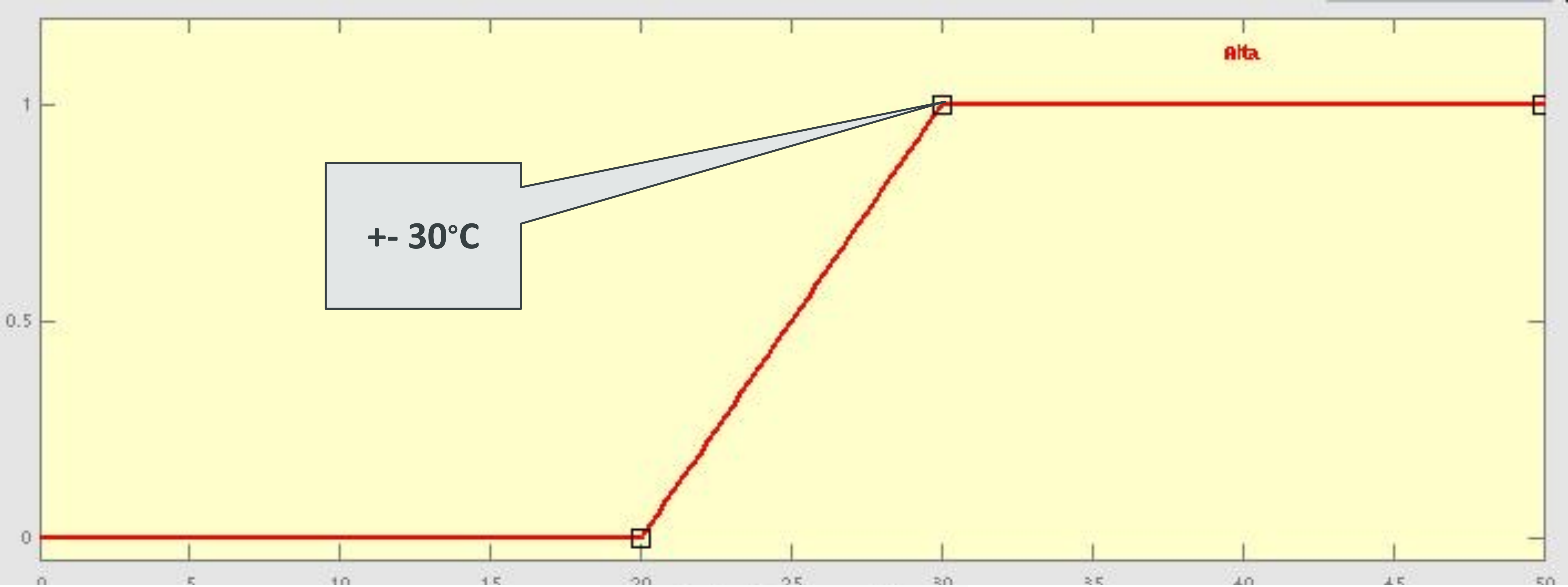
CONTEXTO: COZINHA



CONTEXTO: CALDEIRA



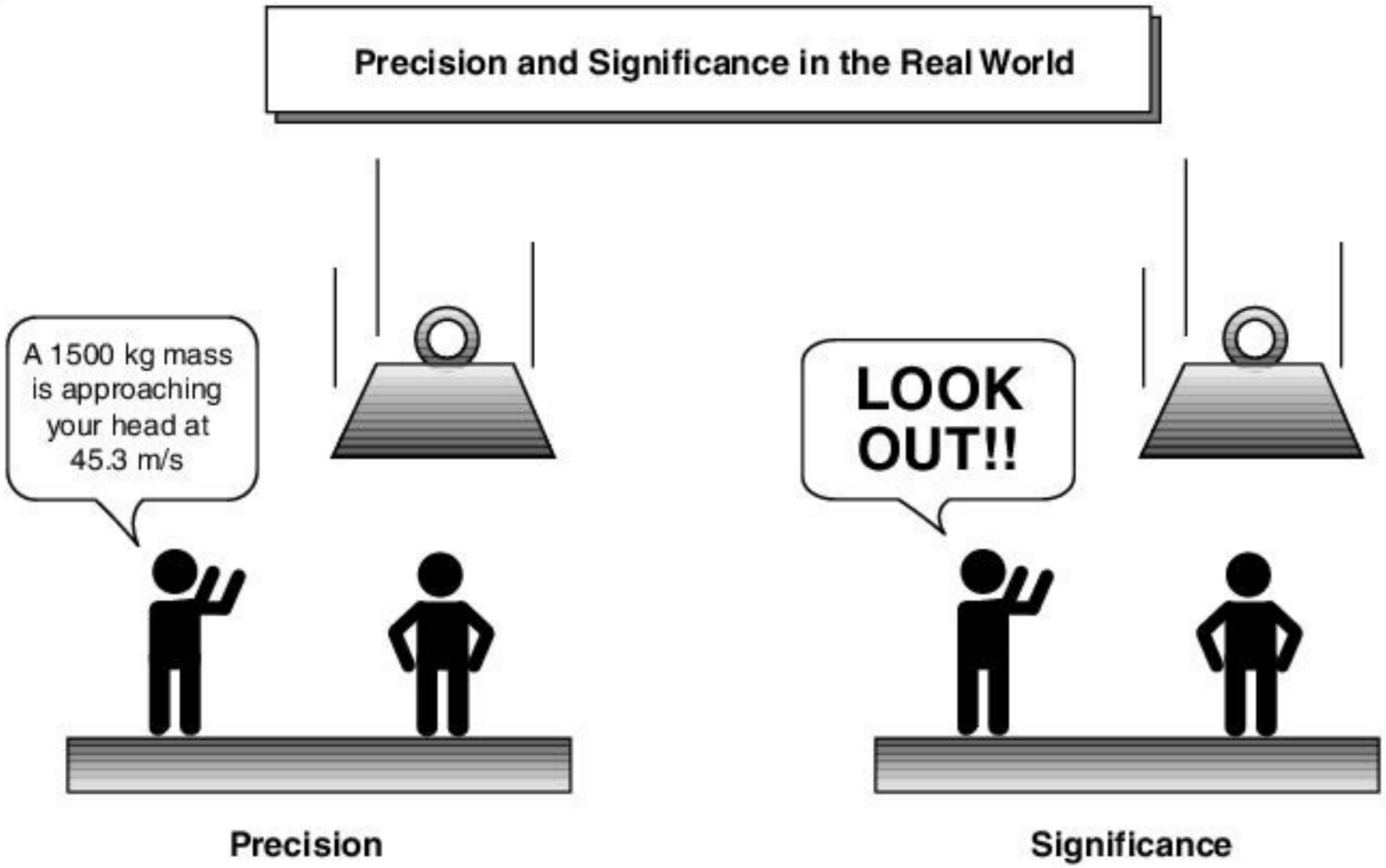
CONTEXTO: SENSAÇÃO TÉRMICA – INDIVÍDUO A



CONTEXTO: SENSAÇÃO TÉRMICA – INDIVÍDUO B

Precisão × Significado

- Na lógica *fuzzy* é mais importante o significado de certos termos imprecisos do que valores exatos.



b) Função de Pertinência

- Utilizar funções de pertinência para representar variáveis nebulosas facilita transições graduais entre estados.
- Também possuem uma capacidade natural para expressar e lidar com observações e medidas incertas ou imprecisas.

Principais Funções de Pertinência

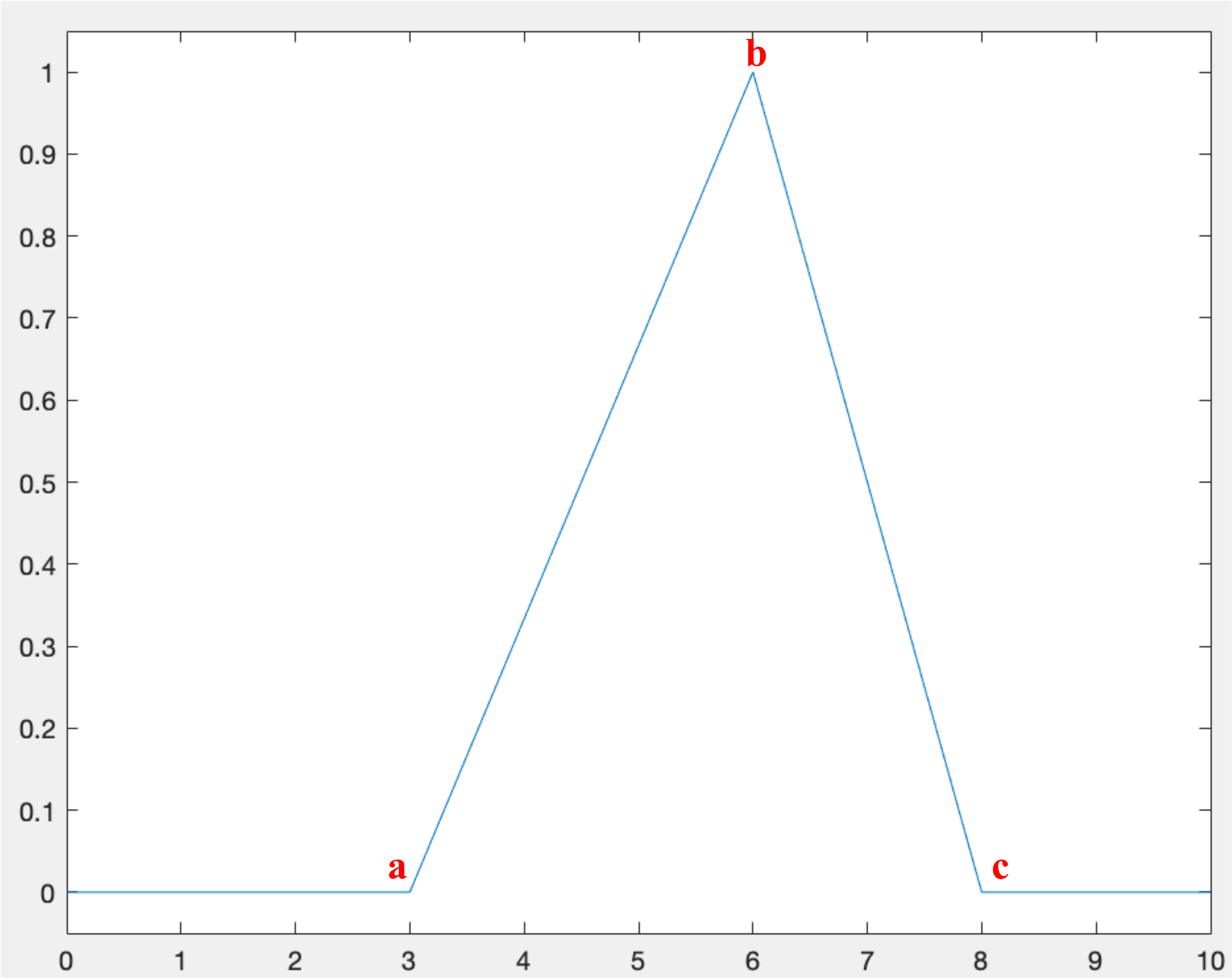
Função Triangular

- A função triangular utiliza um vetor *x* de valores reais e 3 parâmetros (a, b, c), onde:

  a e **c** são os “pés” do triângulo

  b é o “pico” do triângulo (valor onde a pertinência é 1).

$$f(x;a,b,c) = \begin{cases} 0, & \text{se } x < a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{se } b \leq x < c \\ 0, & \text{se } x \geq c \end{cases}$$



a
b
c
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

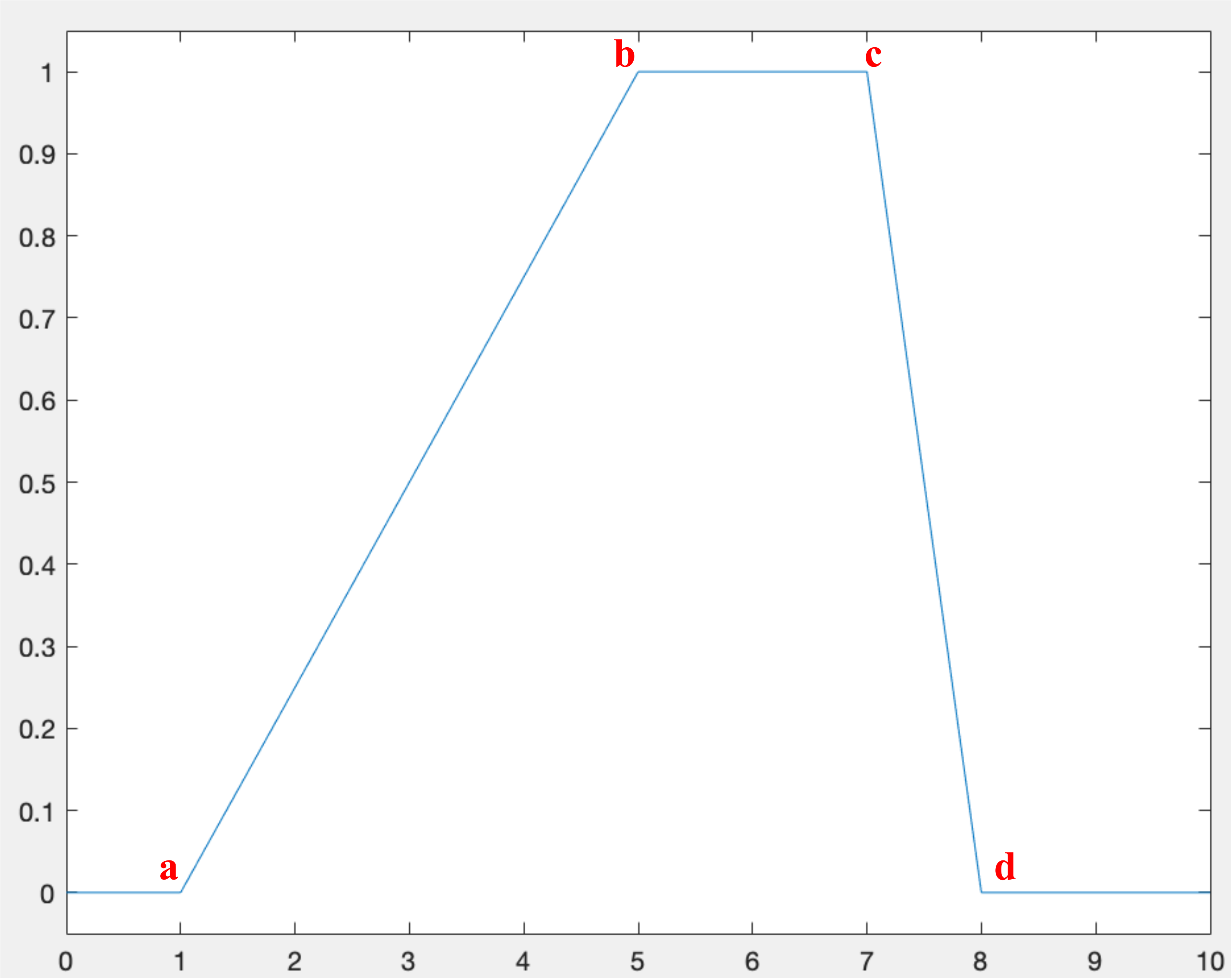
Função Trapezoidal

- A função trapezoidal utiliza um vetor *x* de valores reais e 4 parâmetros (a, b, c, d), onde:

  a e **d** são os "pés" do trapézio

  b e **c** são os "ombros" do trapézio (os valores onde a pertinência é 1).

$$f(x;a,b,c,d) = \begin{cases} \frac{x-a}{b-a}, & \text{se } a \leq x < b \\ 1, & \text{se } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{se } c < x \leq d \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$



a
b
c
d
1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

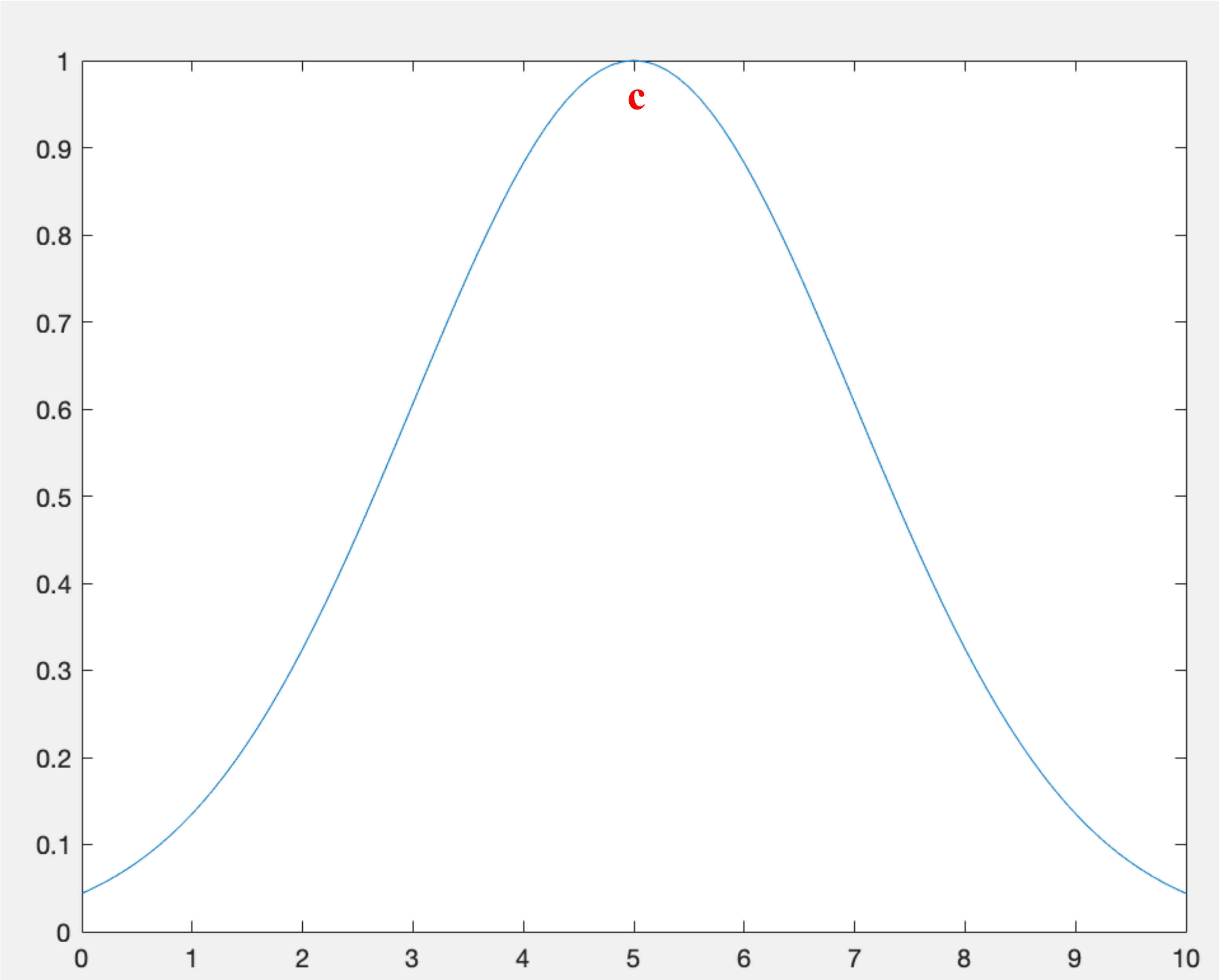
Função Gaussiana

- Seu gráfico tem uma forma característica em forma de sino simétrico
- A função gaussiana utiliza um vetor x de valores reais e 2 parâmetros (σ, c), onde:

  σ controla a largura do sino

  c posição do centro do pico
- Além disso, utiliza também o número de Euler (2,71828...)

$$f(x;\sigma,c) = e^{\frac{-(x-c)^2}{2\sigma^2}}$$



c
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Função Gaussiana - Bell

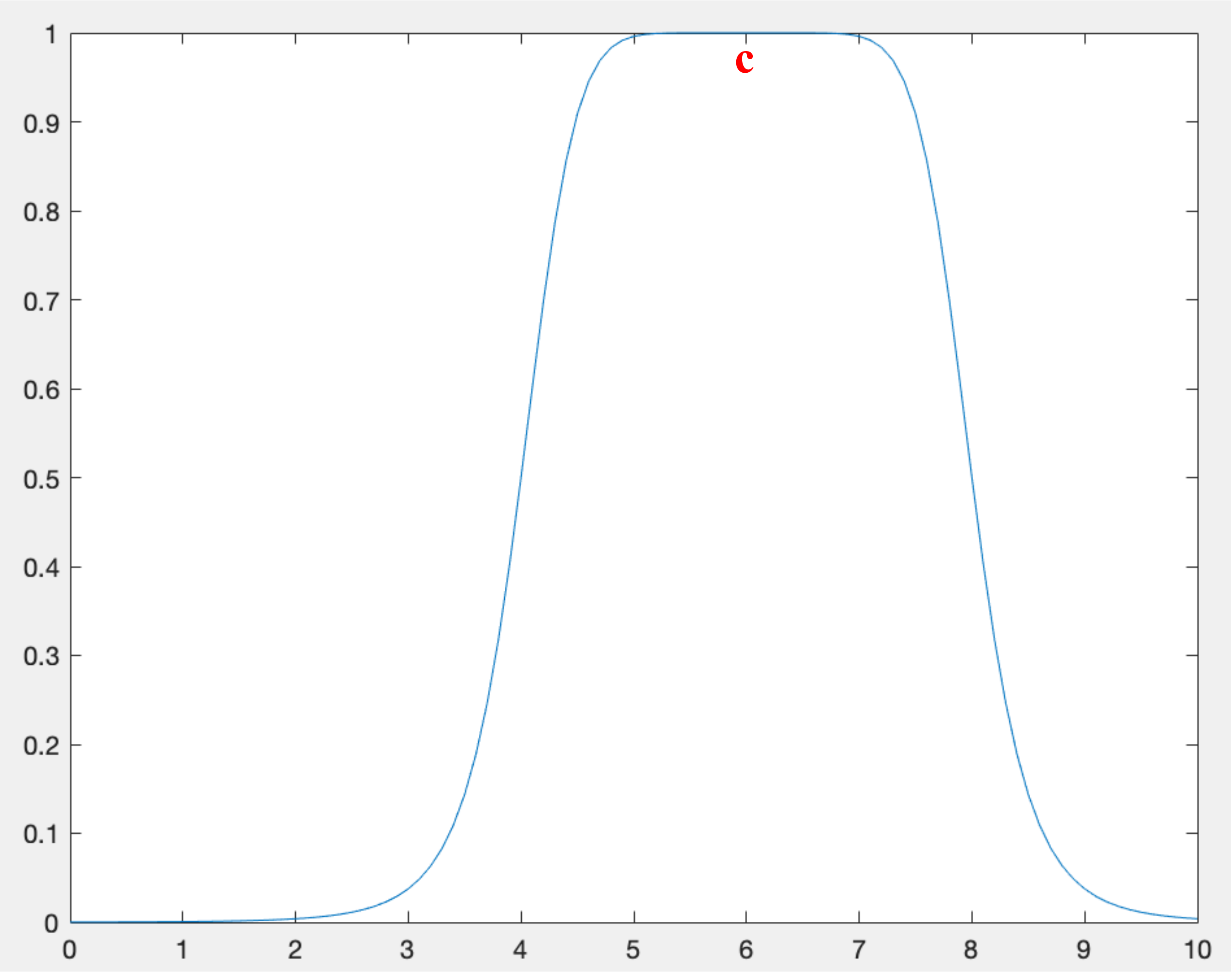
- É a função de sino generalizada, que utiliza um vetor *x* de valores reais e 3 parâmetros (a, b, c), onde:

  a controla a largura do sino

  b é geralmente positivo

  c é o centro da curva

$$f(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left|\frac{x - c}{a}\right|^{2b}}$$



c
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

Função Sigmoide

- Esta função tem a característica de ser assimétrica, e utiliza um vetor *x* de valores reais e 2 parâmetros (a, c), onde:

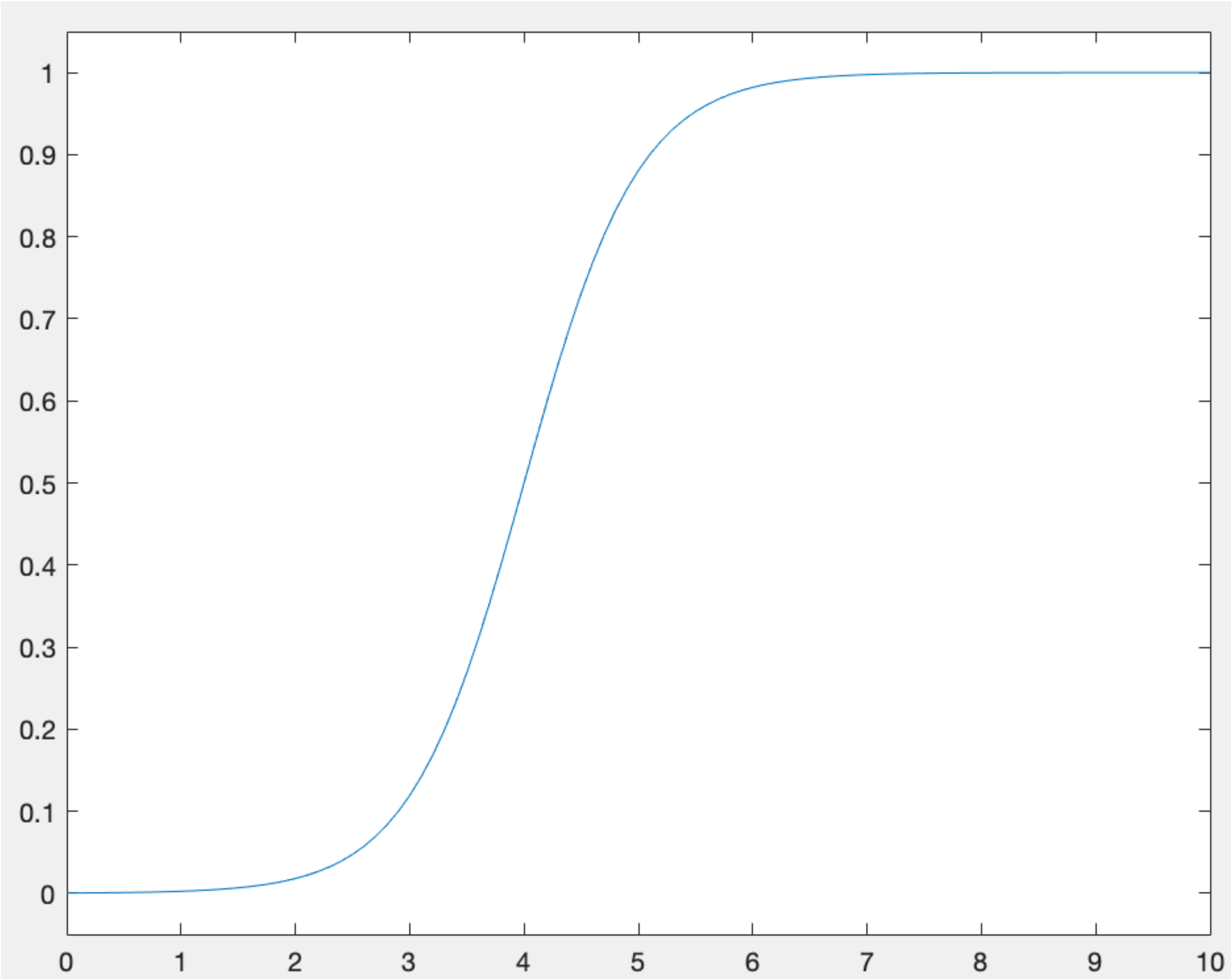
  a grau de inclinação da curva:

  - Se **+**, a curva será aberta à direita → "muito grande"
  - Se **-**, a curva será aberta à esquerda → "muito negativo"

  c indica o ponto médio da curva (qual valor de *x* a função irá assumir o valor 0.5 no eixo *y*).

- Também utiliza o número de Euler.

$$f(x, a, c) = \frac{1}{1 + e^{-a(x-c)}}$$



1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

c) Aproximações Discretas

- Formas de representar com valores discretos (*crisp*) as funções de pertinência
- Exemplo: sejam as seguintes definições dos conjuntos nebulosos para a variável nebulosa <u>Idade</u>:
  - Jovem
  - Meia-idade
  - Velho

Jovem

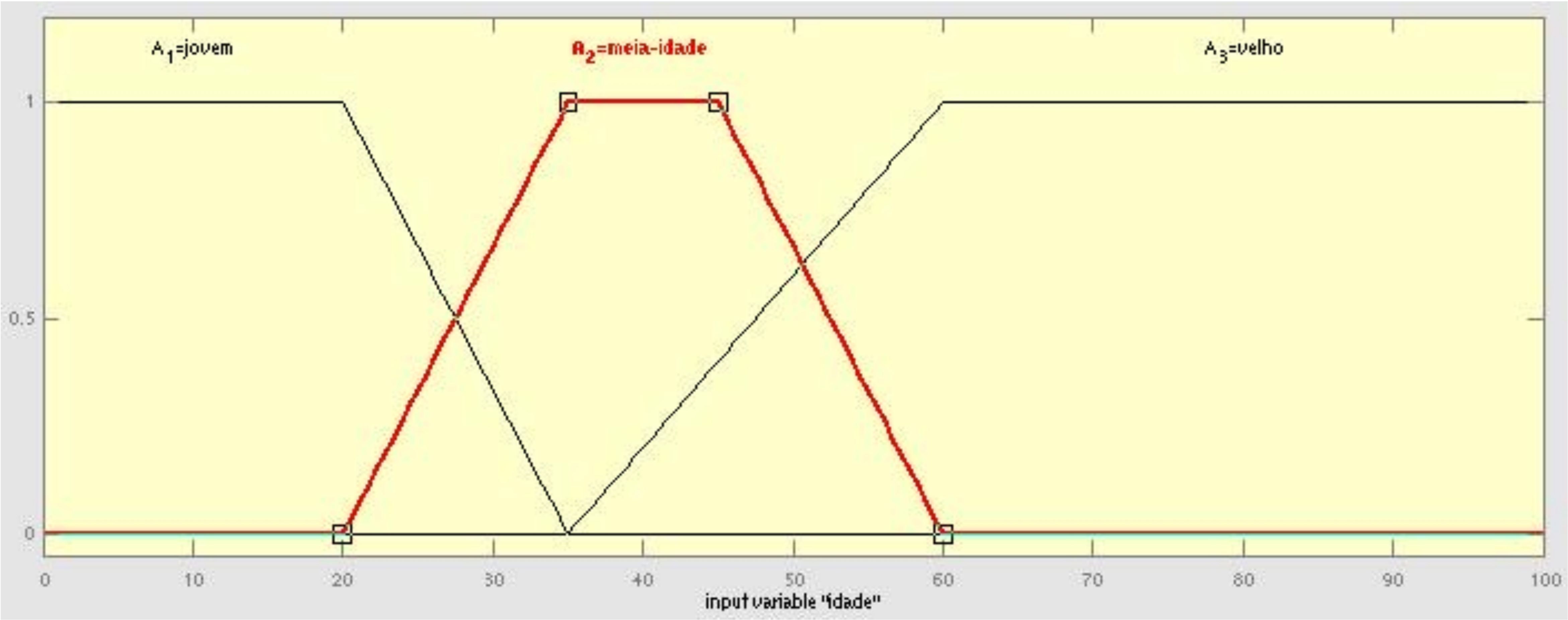
$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 20 \\ (35 - x)/15 & 20 < x < 35 \\ 0 & x \geq 35 \end{cases}$$

Meia-idade

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 20 \text{ ou } x \geq 60 \\ (x-20)/15 & 20 < x < 35 \\ (60-x)/15 & 45 < x < 60 \\ 1 & 35 \leq x \leq 45 \end{cases}$$

Velho

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 45 \\ (x - 45)/15 & 45 < x < 60 \\ 1 & x \geq 60 \end{cases}$$



A1=jovem
A2=meia-idade
A3=velho
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
input variable "idade"

c) Aproximações Discretas

- Um mesmo valor poderá ter pertinências em mais de um conjunto, mas com valores diferentes.
- Exemplo: para a variável nebulosa Idade:

x	A_1	A_2	A_3
19	1	0	0
10	1	0	0
30	0,3333	0,6666	0
45	0	1	0
61	0	0	1
50	0	0,6666	0,3333

d) Cortes-α

- É um dos principais conceitos da teoria *fuzzy*, juntamente com sua variante, os cortes-α fortes:
  - É o conjunto *crisp* que contém todos os elementos do conjunto universo X, cujos graus de pertinência em A são maiores ou iguais (ou apenas maiores) que o valor especificado por α.

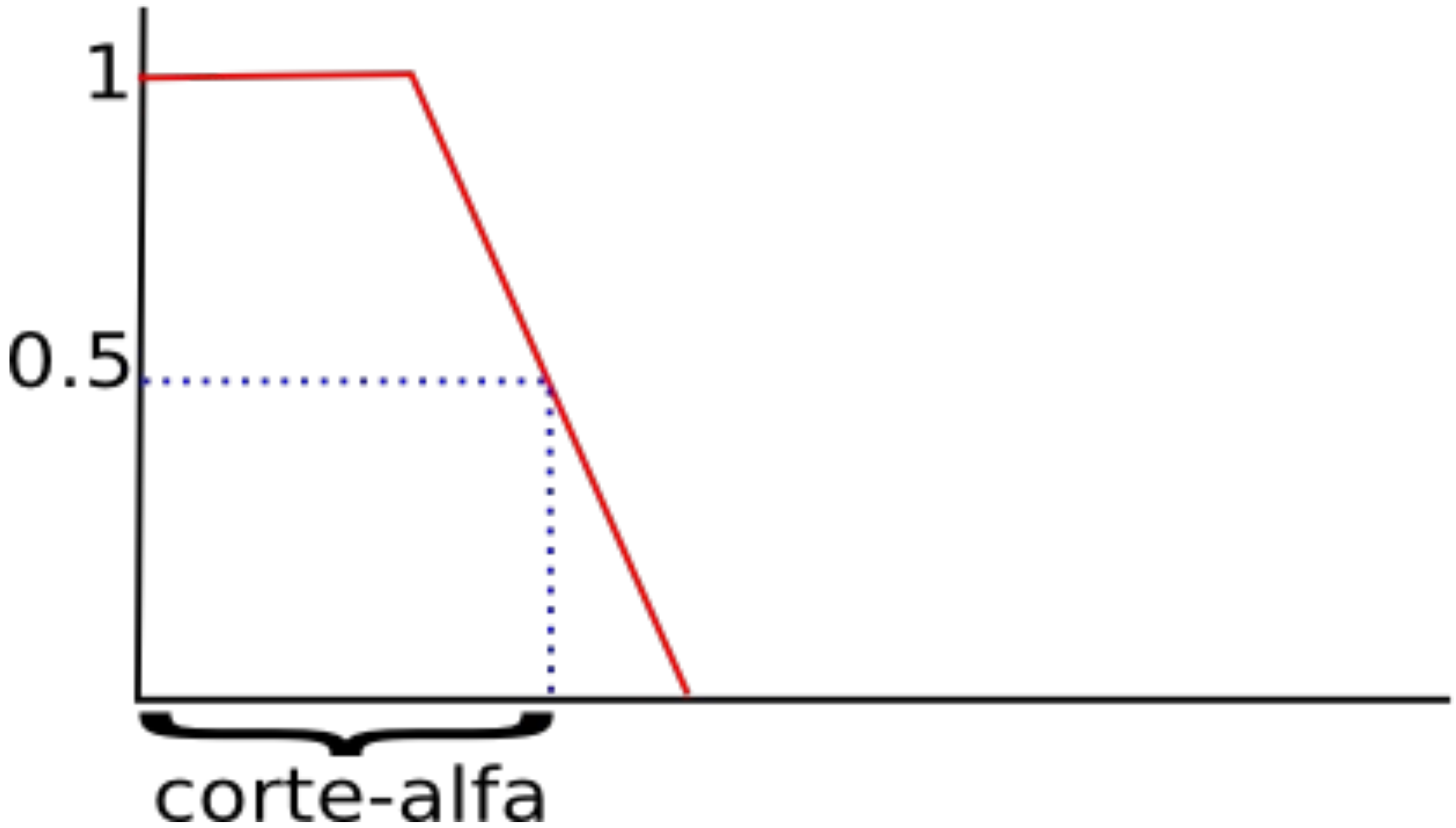
Definição formal

- Dado um conjunto A definido sobre um conjunto universo X, e qualquer número $\alpha \in [0, 1]$, o corte-α (${}^{\alpha}A$) e o corte-α forte (${}^{\alpha+}A$) são os seguintes conjuntos *crisp*:

  $${}^{\alpha}A = \{x \mid A(x) \geq \alpha\}$$

  $${}^{\alpha+}A = \{x \mid A(x) > \alpha\}$$

- Exemplo: para $\alpha = 0{,}5$, teremos:


1
0.5
corte-alfa

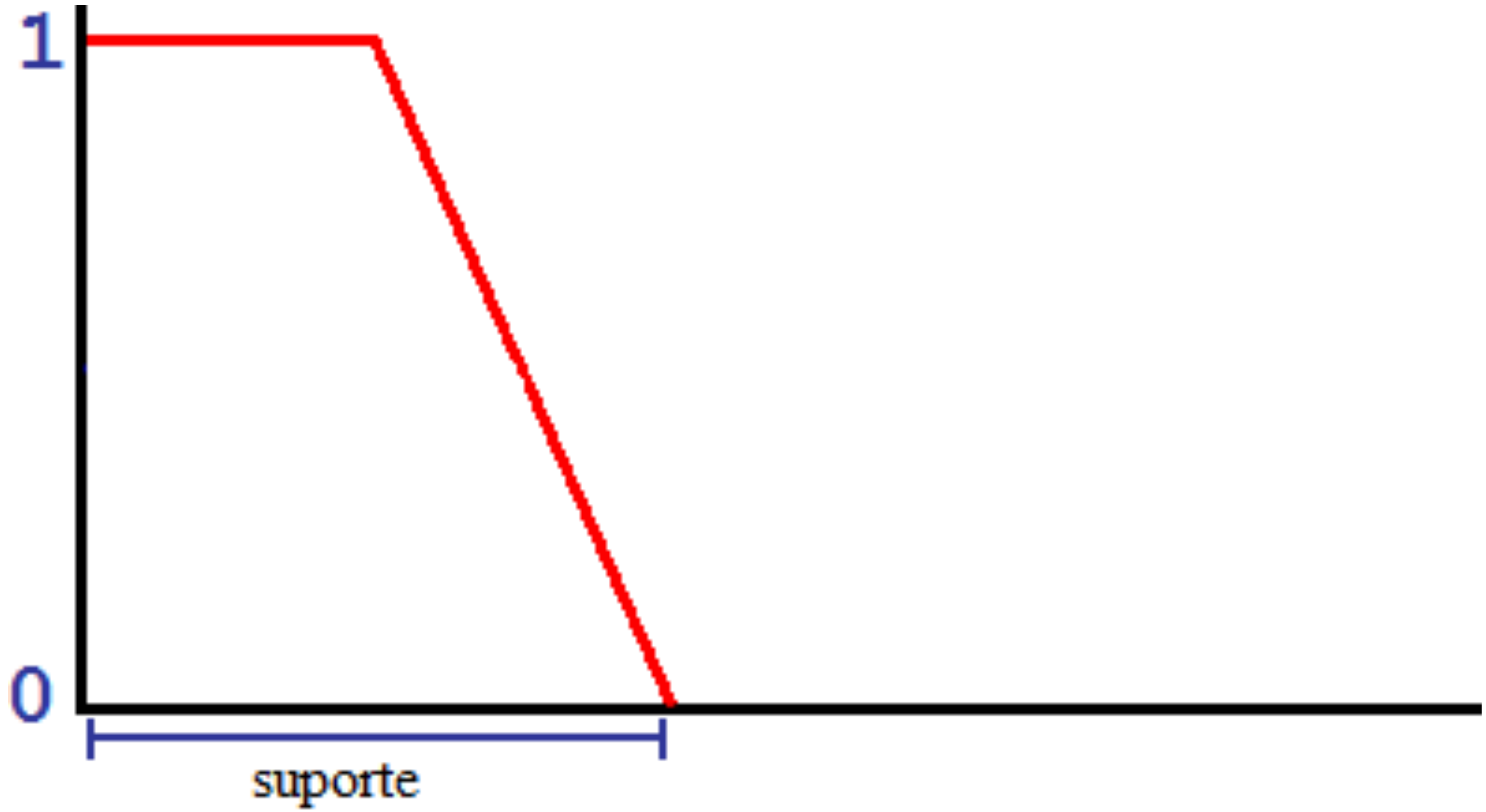
e) Suporte, Supremo e Núcleo

i) O <u>suporte</u> de um conjunto nebuloso A dentro de um universo de discurso X é o conjunto de todos os elementos de X que tem pertinência em A ($\mu_A(x) > 0$).

<u>Formalmente</u>:

$$\text{supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\}$$ **OU**

$$\text{supp}(A) = {}^{0+}A$$


1
0
suporte

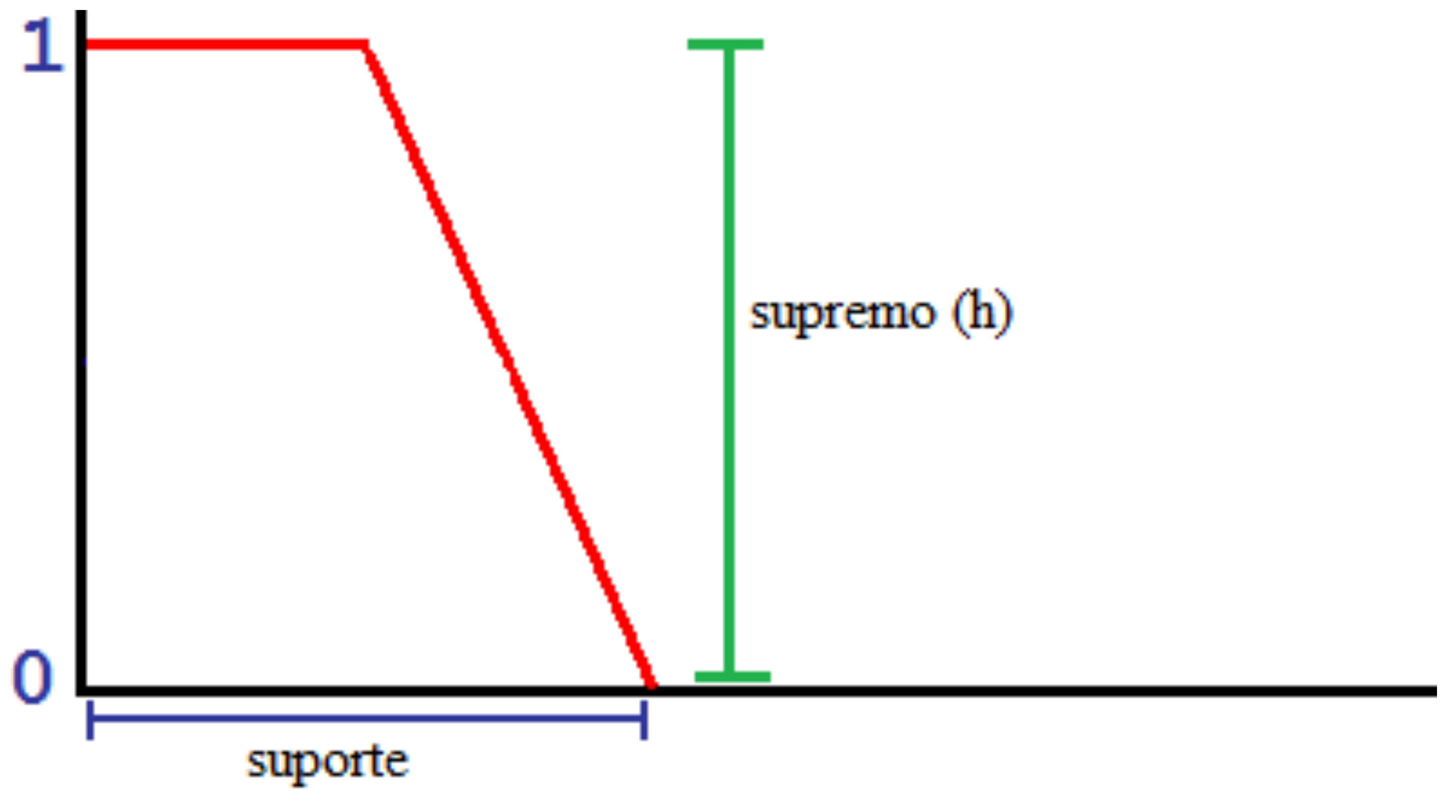
e) Suporte, Supremo e Núcleo

ii) O supremo (ou altura) de um conjunto nebuloso é o maior grau de pertinência que o conjunto pode assumir.

Formalmente:

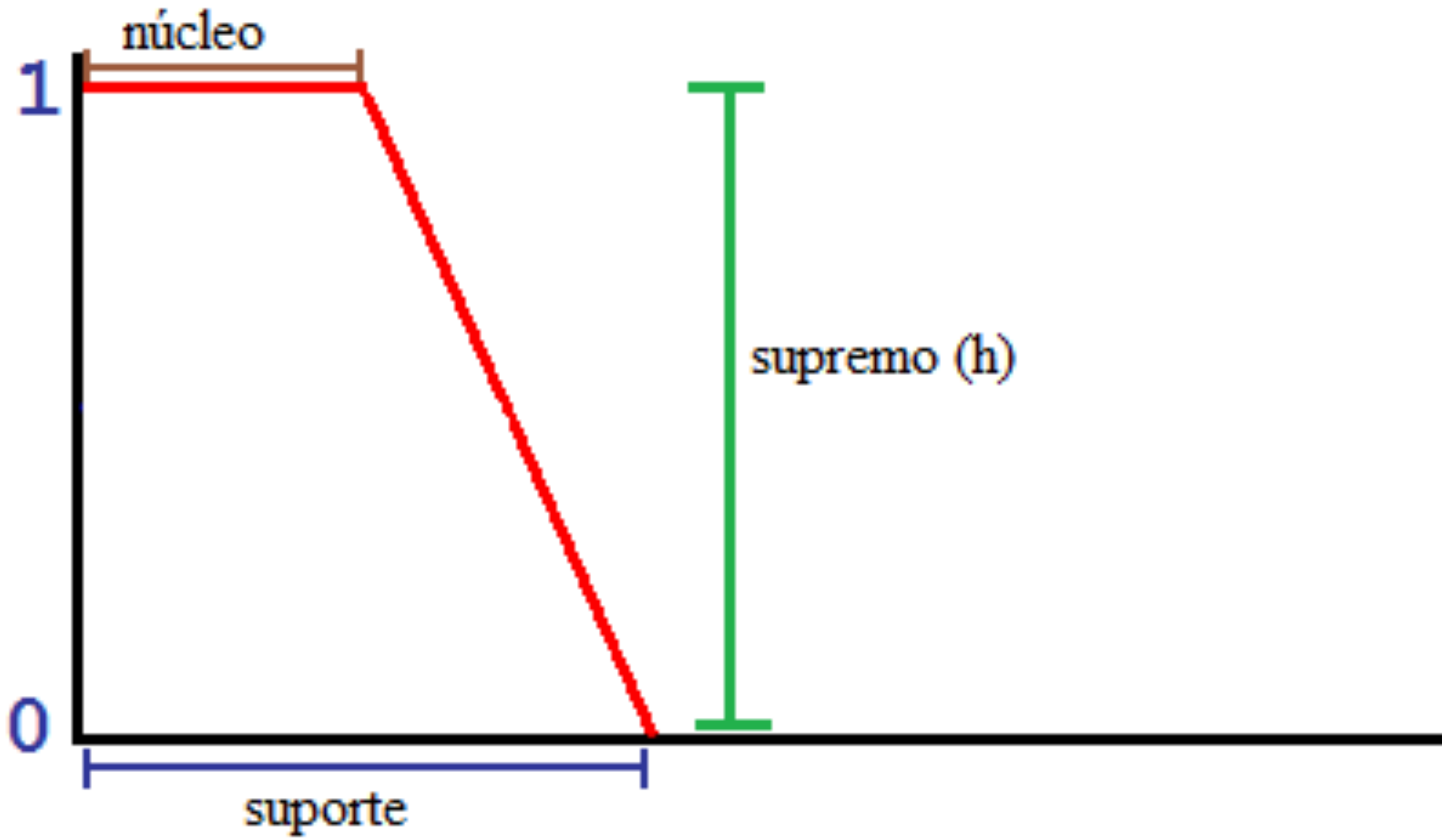
$$\sup(A) = \max(\mu_A(x)),\ x \in X$$

$$h(A) = \sup(A)$$


1
0
supremo (h)
suporte

e) Suporte, Supremo e Núcleo

iii) O <u>núcleo</u> é o conjunto *crisp* constituído de todos os elementos de X que tem pertinência $\mu_A(x) = 1$



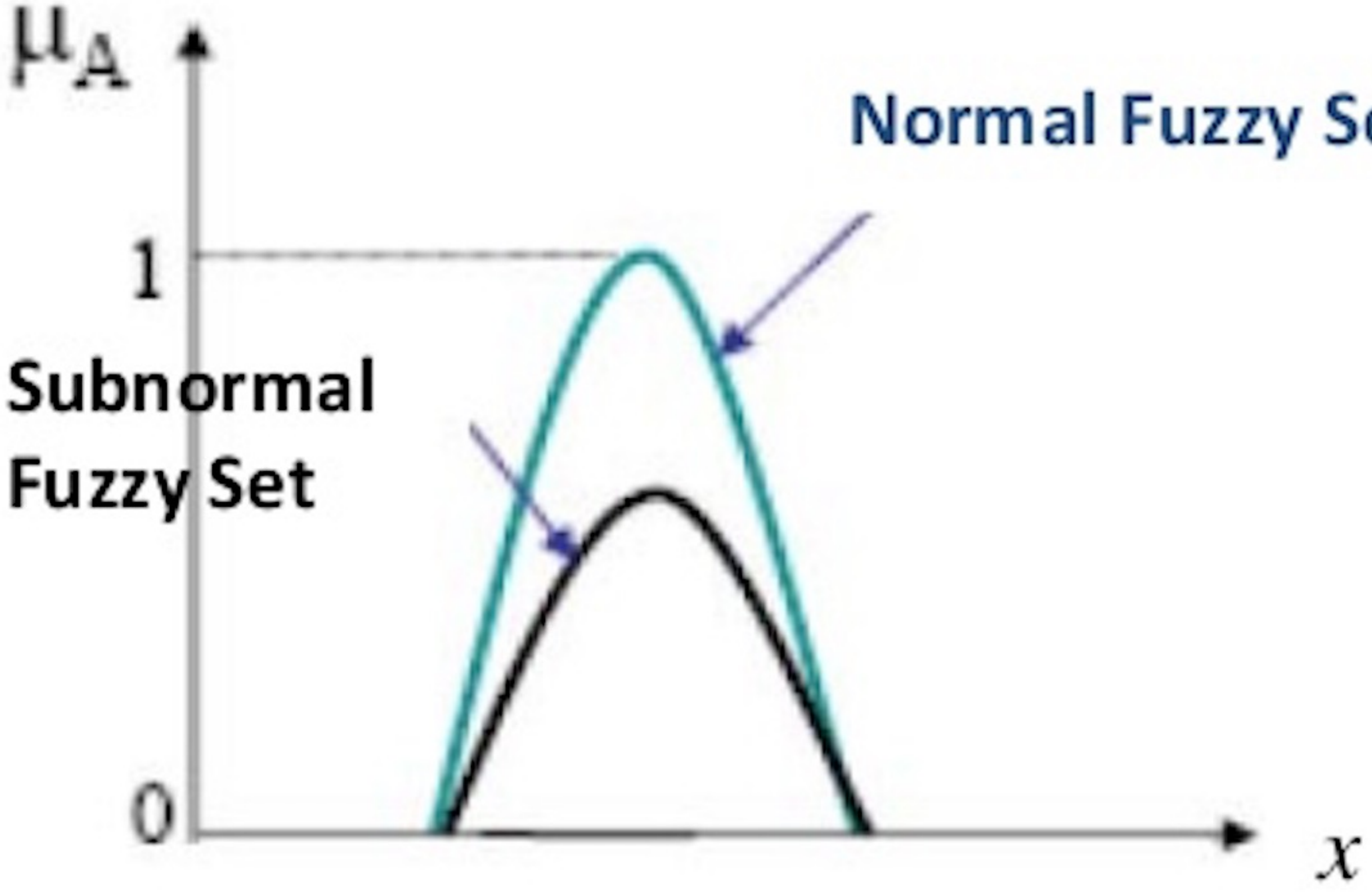
f) Normalidade e Convexidade

- Um conjunto é dito <u>normal</u> quando seu supremo é igual a 1: $h(A) = 1$.

<u>Formalmente</u>:

$$\exists\ x \in X,\ \mu_A(x) = 1$$

- Caso contrário, o conjunto é chamado de <u>anormal</u>.
- Em resumo:
  - Conjunto normal: $h(A) = 1$
  - Conjunto subnormal: $h(A) < 1$


μ_A
Normal Fuzzy Set
1
Subnormal
Fuzzy Set
0
x

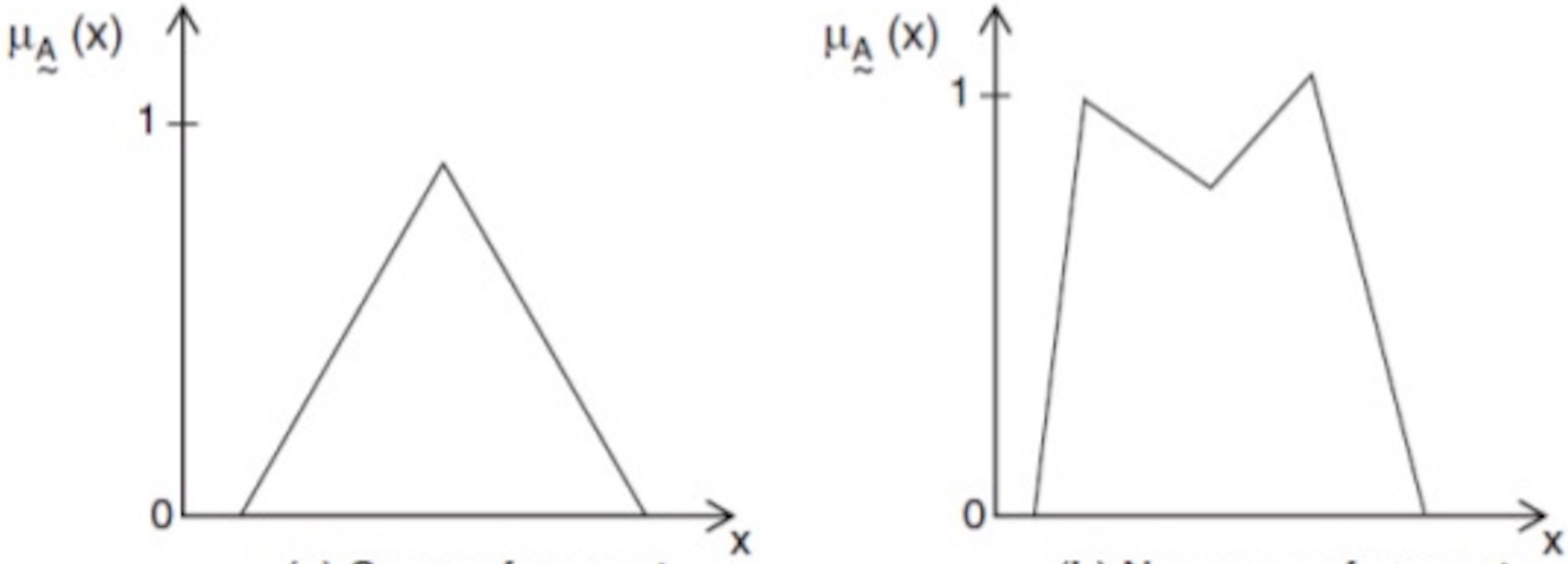
f) Normalidade e Convexidade

- Um conjunto nebuloso A é <u>convexo</u> se e somente se:

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min(A(x_1), A(x_2))$$

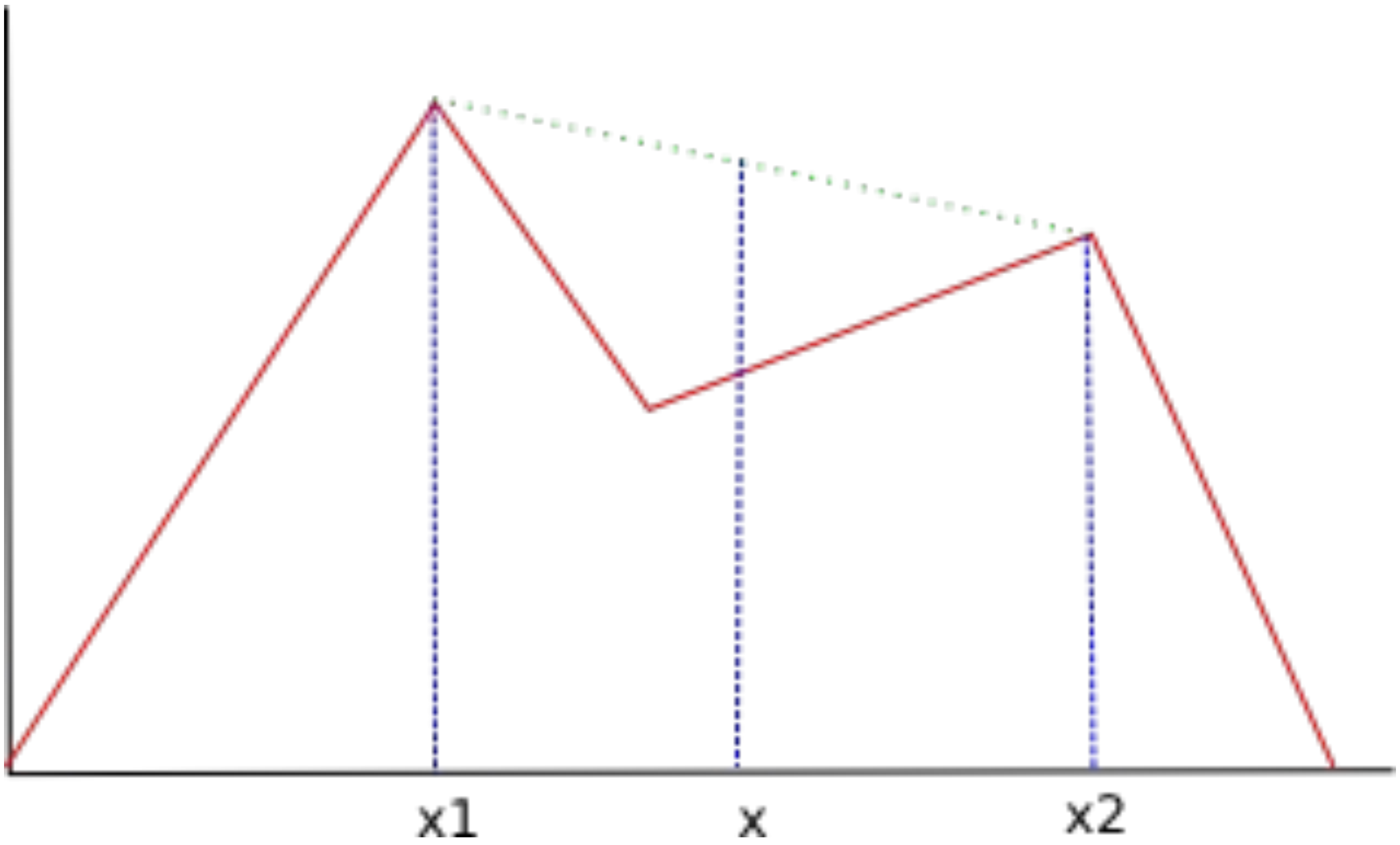
$$\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \forall\, \lambda \in [0, 1]$$

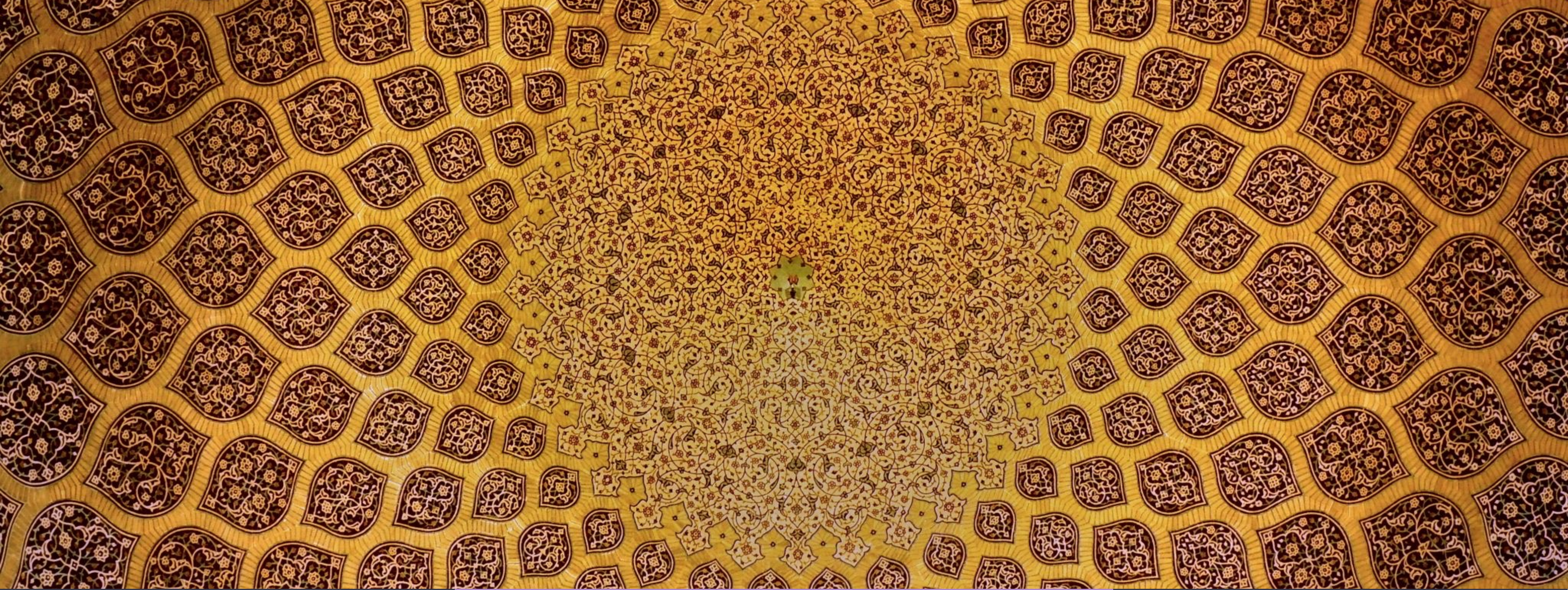
A pertinência entre dois elementos de um conjunto *fuzzy* deve ser maior ou igual que a menor pertinência entre estes dois elementos



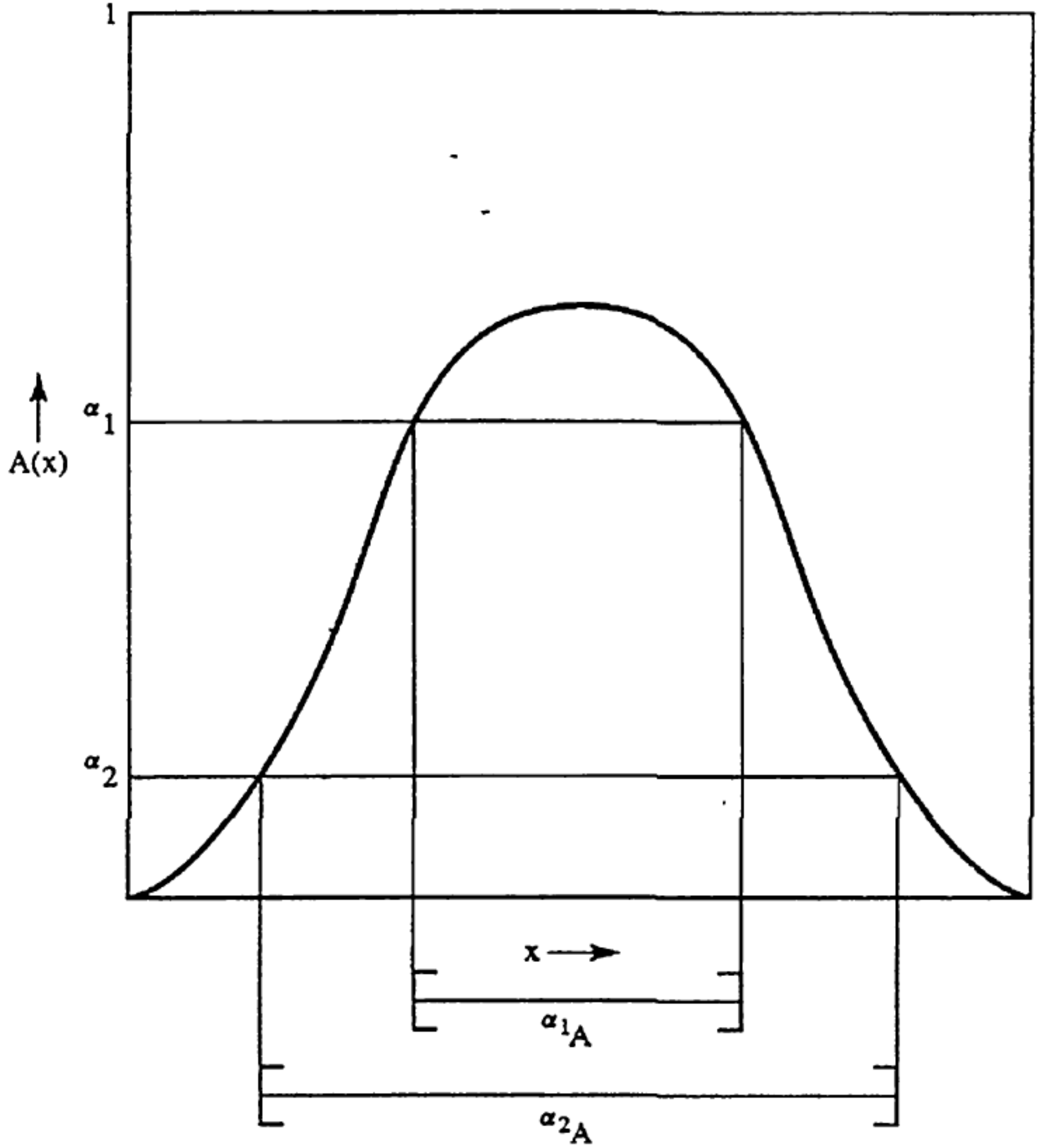
(a) Convex fuzzy set

(b) Nonconvex fuzzy set

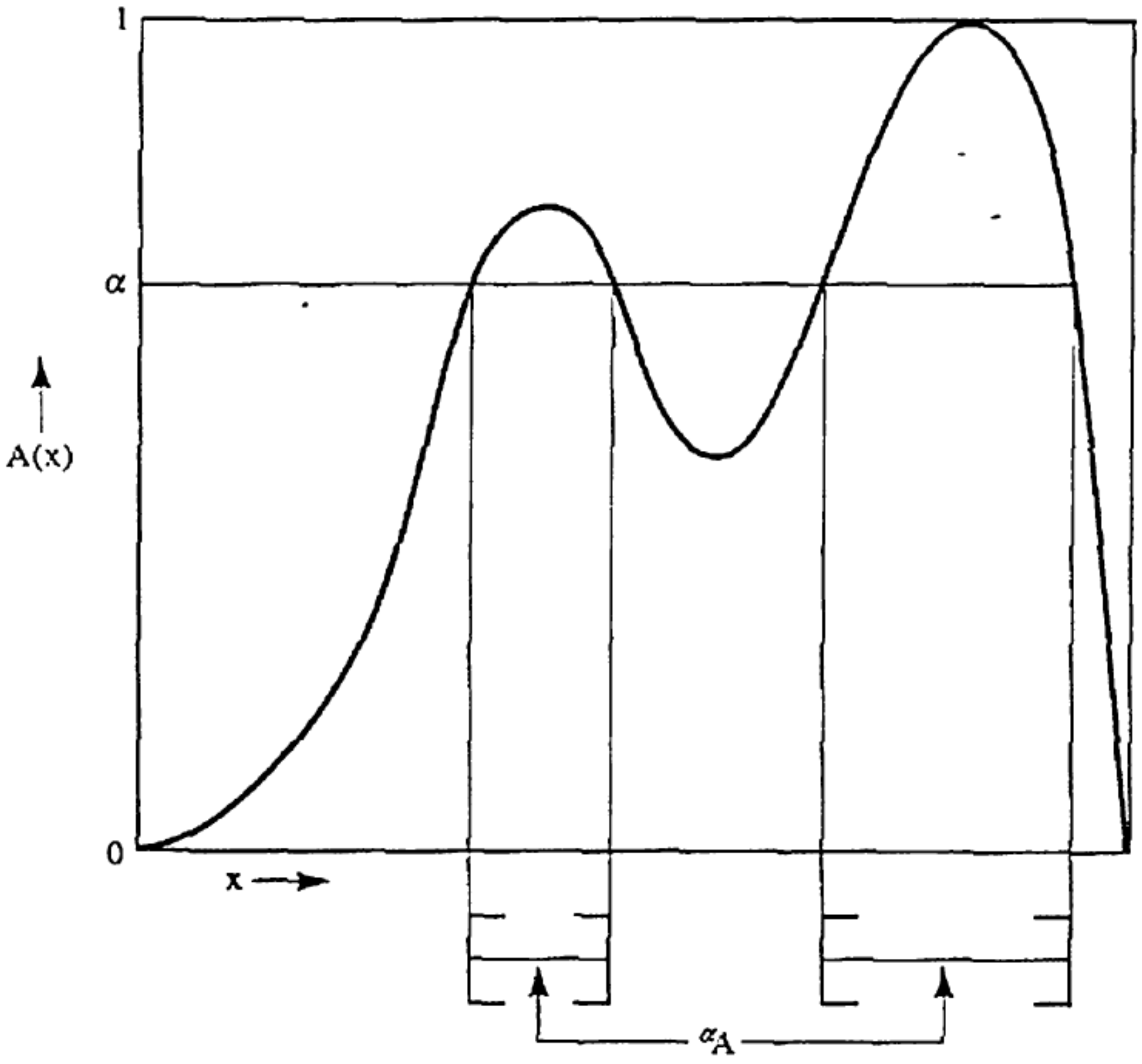

x1
x
x2



Outros exemplos de normalidade e convexidade



- Conjunto fuzzy subnormal, convexo



- Conjunto *fuzzy* normal, não-convexo

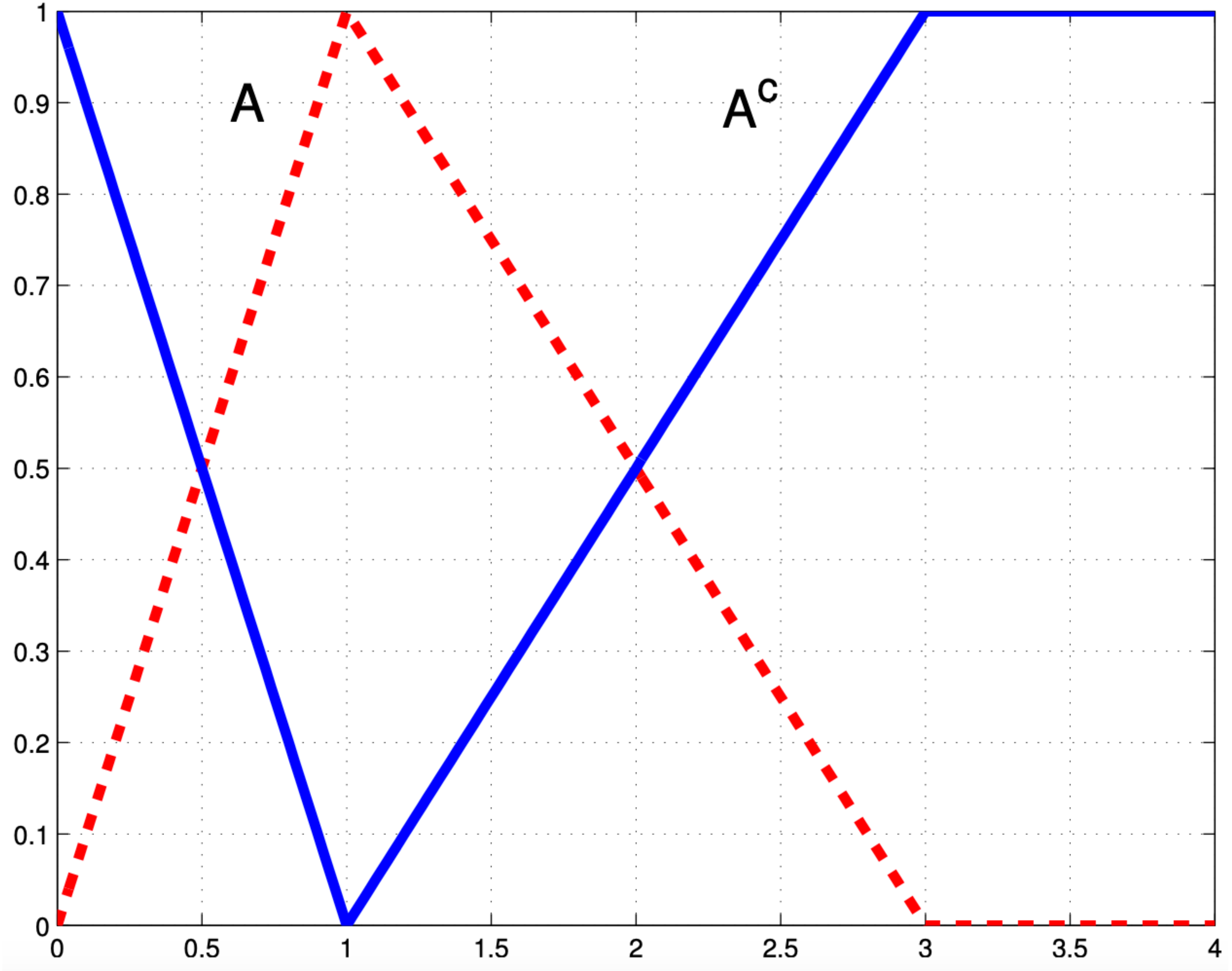
8.4. Operações

- As seguintes operações são generalizações das operações sobre os conjuntos *crisp*:
  - Complemento padrão
  - Interseção padrão
  - União padrão

a) Complemento Padrão

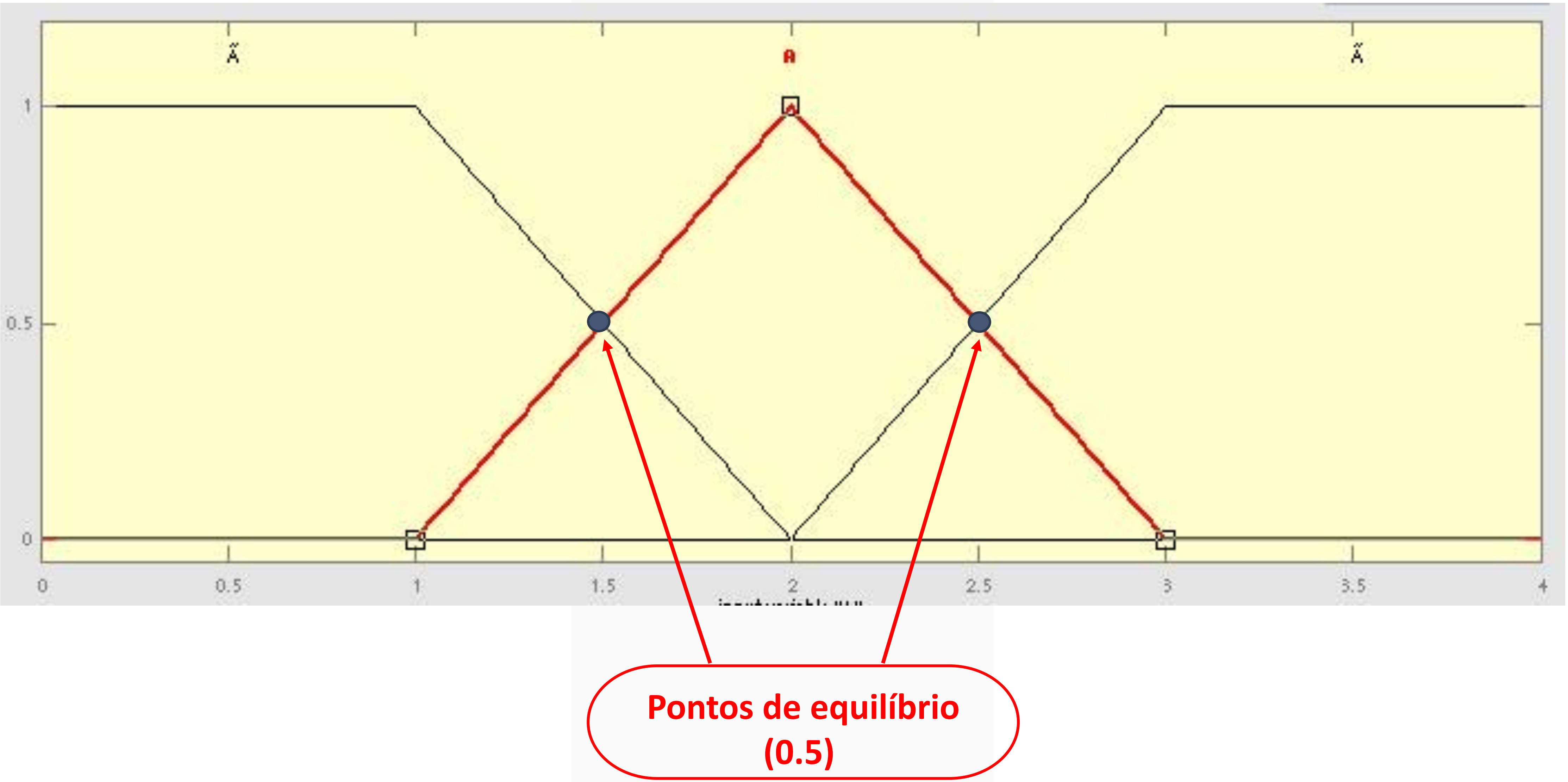
- O complemento padrão $\overline{A}$ de um conjunto nebuloso A, com respeito a um conjunto universo X é definido por:

$$\overline{A}(x) = 1 - A(x), \forall\ x \in X$$


A
A^c
0
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4

a) Complemento Padrão

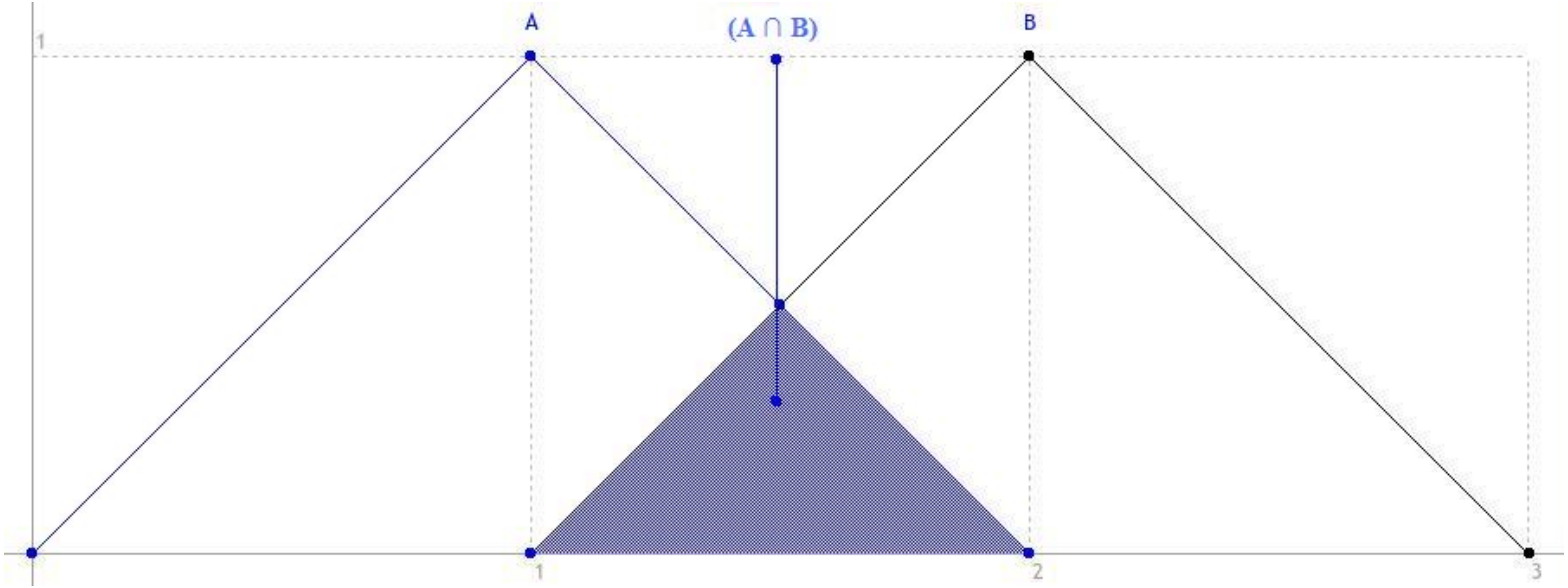
- Quando A(x) = $\overline{A}$(x), x é chamado de ponto de equilíbrio.
- Em geral, o ponto de equilíbrio para o complemento padrão tem grau de pertinência igual a 0.5.


Ã
A
Ã
1
0.5
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
Pontos de equilíbrio
(0.5)

b) Interseção Padrão

- Ou T-normas.
- Dados 2 conjuntos nebulosos A e B, sua interseção padrão $(A \cap B)(x)$ é definida para $x \in X$ pela equação:

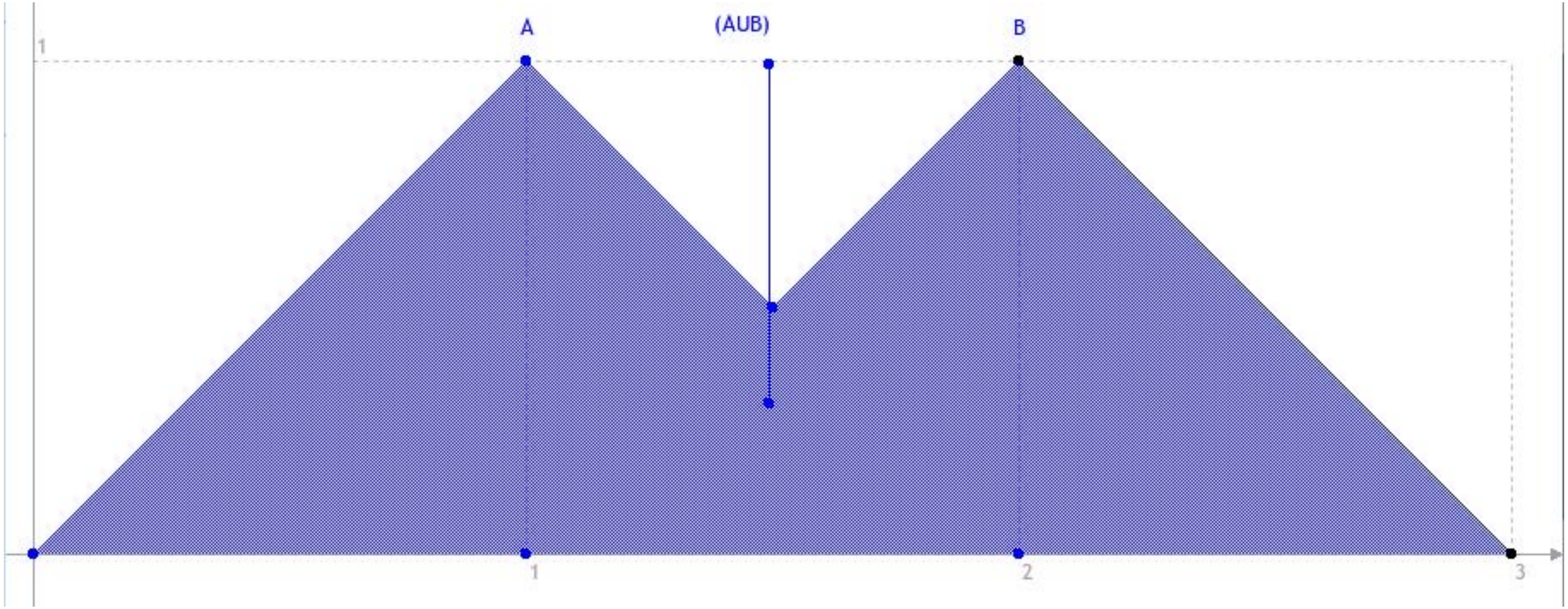
$$(A \cap B)(x) = \min(A(x), B(x))$$


A
(A ∩ B)
B
1
1
2
3

c) União Padrão

- Ou T-conorma.
- É definida como:

$$(A \cup B)(x) = \max(A(x), B(x))$$


A
(AUB)
B
1
1
2
3

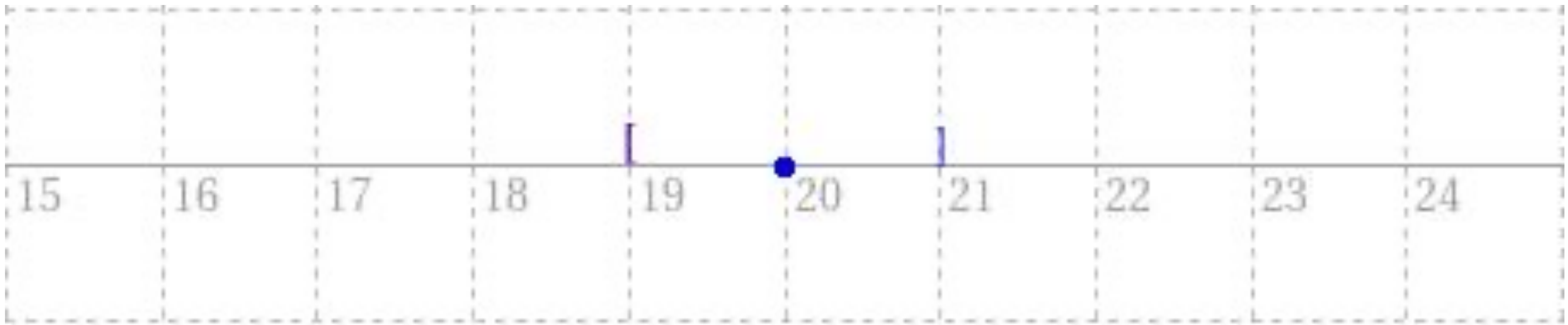
Material

- Mais detalhes sobre essas e outras operações *fuzzy*:
  - `Classical Sets and Fuzzy Sets - Sivanandam et al.pdf`

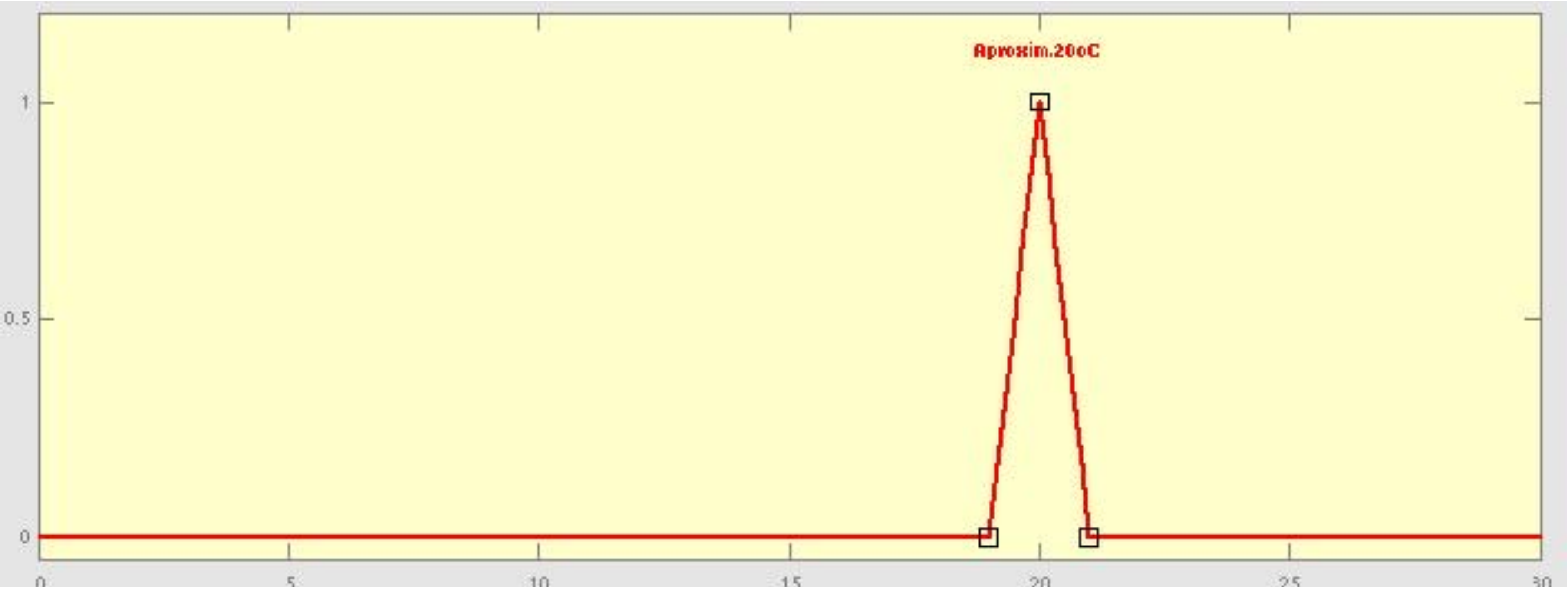
8.5. Números e intervalos nebulosos

- Números nebulosos são extensões nebulosas para o conceito de números.
- São utilizados para quantificar atributos do mundo real.
- Exemplo: “Qual a temperatura ambiente atual?”
  - “Em torno de 20°C”
- Representação *crisp*:

Número 20 - *Crisp*



Número 20 – *Crisp*
Com erro ± 1°C



Número 20 - *Fuzzy*

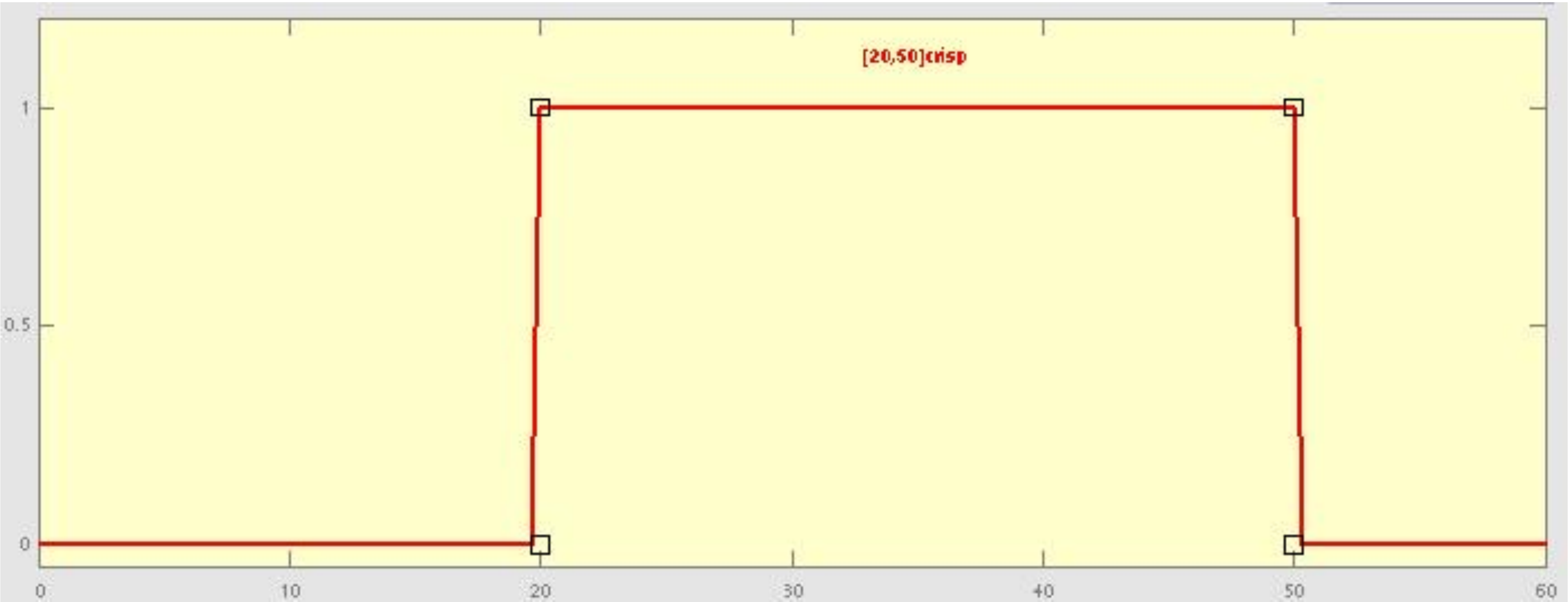
8.5. Números e intervalos nebulosos

- Cada número *fuzzy* é representado por um triângulo, com o vértice acima do próprio número e a base se estendendo pela faixa “nebulosa”.
- “Aproximadamente 20°C” → (19; 20; 21)

8.5. Números e intervalos nebulosos

- Intervalos *crisp* [a, b] também podem ser representados por funções de pertinência do tipo

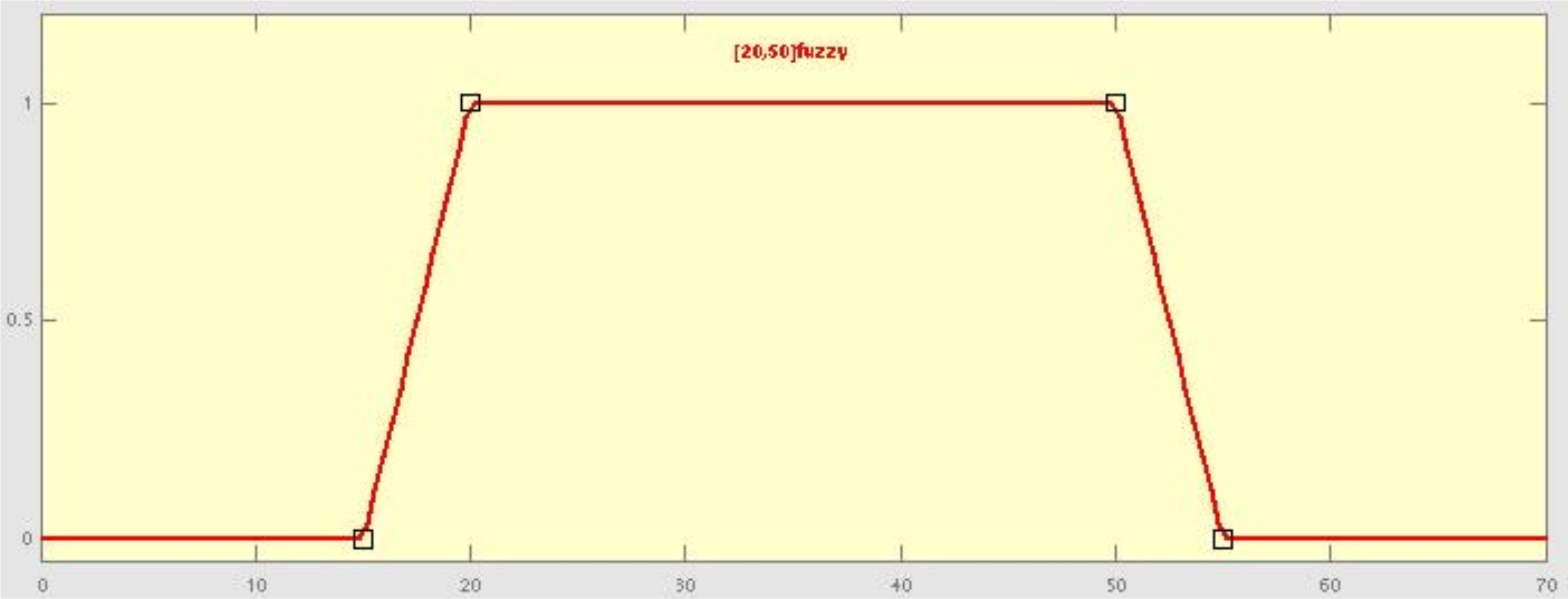
$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x \in [a, b] \\ 0 \text{ se } x \notin [a, b] \end{cases}$$



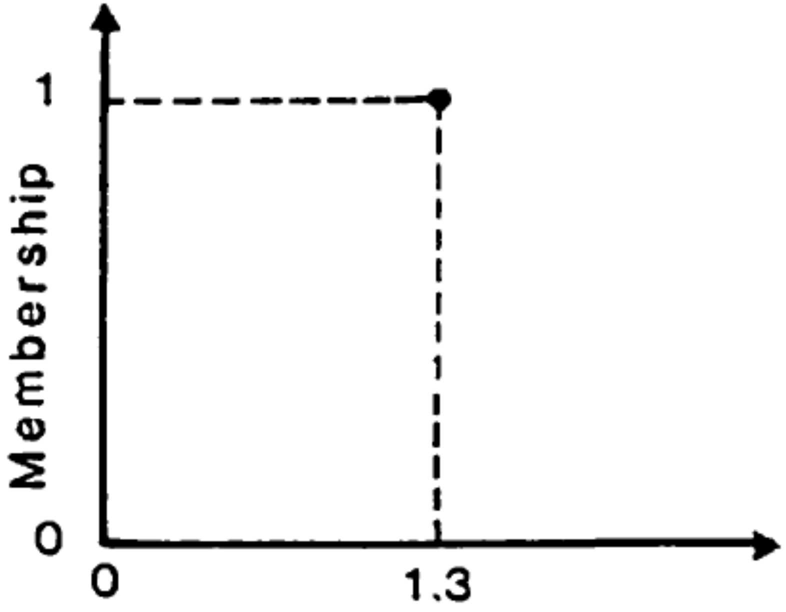
[20,50]crisp
1
0.5
0
0
10
20
30
40
50
60

8.5. Números e intervalos nebulosos

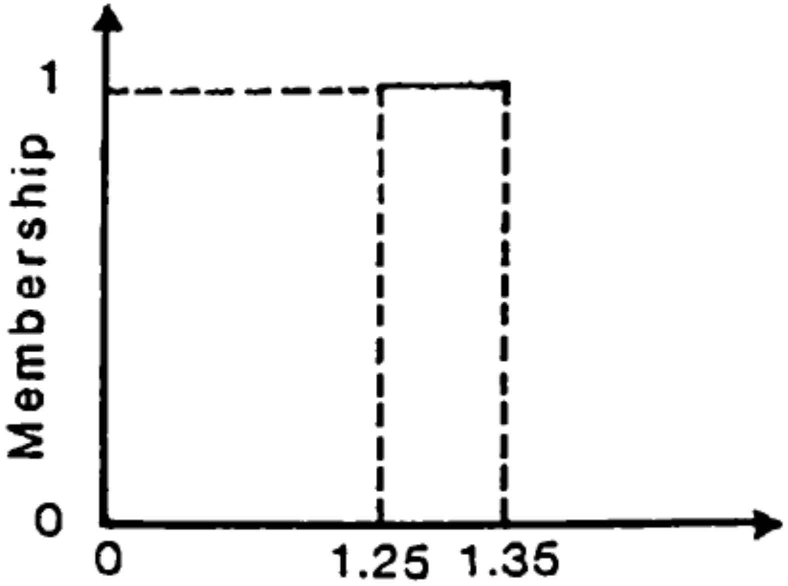
- Essa notação de intervalo *crisp* pode ser estendida para a teoria nebulosa:



Número *Crisp*
×
Intervalo *Crisp*

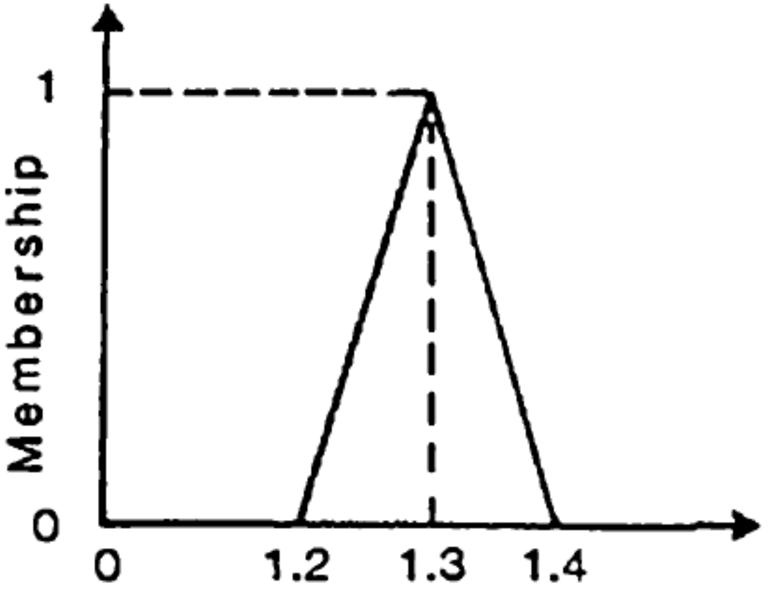


(a)

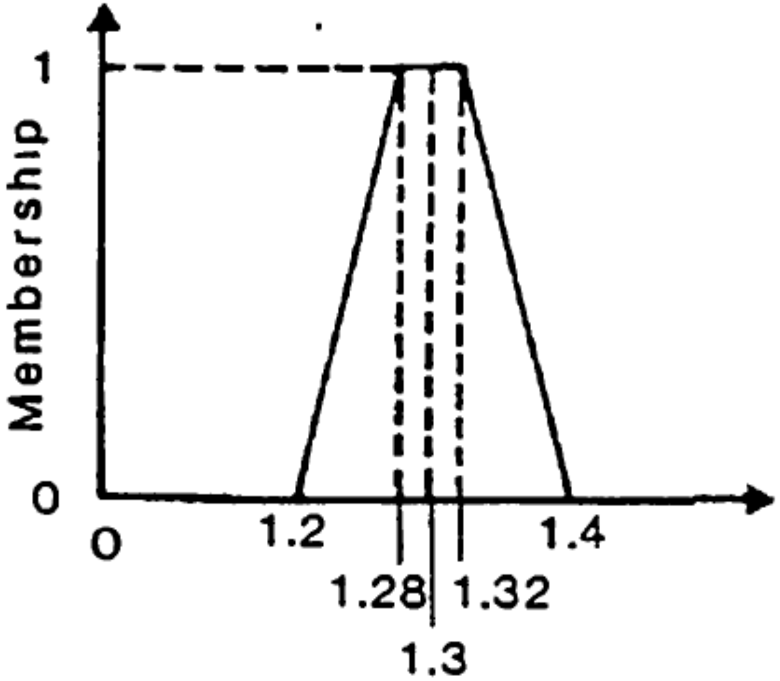


(b)

Número *Fuzzy*
×
Intervalo *Fuzzy*



(c)



(d)

8.6. Aritmética Nebulosa

- É possível aplicar as 4 operações (+, -, /, *) da aritmética *crisp* em números nebulosos.
- Dois métodos:
  - Operações em intervalos.
  - Princípio da extensão:
    - Material no Teams: `Fuzzy Numbers and Their Arithmetic - Syropoulos and Grammenos.pdf`

a) Aritmética intervalar

- Se I = [a, b] e J = [c, d] são dois intervalos fechados e ⊛ denota qualquer uma das 4 operações aritméticas, então:

$$I \circledast J = \{x \circledast y \mid x \in I \text{ e } y \in J\}$$

- Exemplo:
  - Se I = [1, 4], J = [2, 3] e ⊛ denotar a adição:

$$[1, 4] + [2, 3] = \{x + y \mid x \in [1, 4] \text{ e } y \in [2, 3]\}$$

a) Aritmética intervalar

- As 4 operações aritmética em intervalos fechados são definidas como segue:

$[a, b] + [d, e] = [a + d, b + e]$

$[a, b] - [d, e] = [a - e, b - d]$

$[a, b] * [d, e] = [\text{min. } P_1, \text{máx. } P_1]$, onde:

$$P_1 = \{a*d, a*e, b*d, b*e\}$$

a) Aritmética intervalar

E, desde que $0 \notin [d, e]$,

$[a, b] / [d, e] = [a, b] * [1/e, 1/d]$

$= [\text{min. } P_2, \text{máx. } P_2]$, onde:

$P_2 = \{a/d, a/e, b/d, b/e\}$

Exemplo

- Seja A = [-1, 2] e B = [5, 6], as 4 operações serão:

[-1, 2] + [5, 6] = [a + d, b + e]

[-1, 2] - [5, 6] = [a - e, b - d]

[-1, 2] * [5, 6] = [min. P_1, máx. P_1]

P_1 = {a*d, a*e, b*d, b*e}

[-1, 2] / [5, 6] = [min. P_2, máx. P_2]

P_2 = {a/d, a/e, b/d, b/e}

b) Aritmética intervalar e cortes-α

- Todos os cortes-α de um número *fuzzy* são intervalos fechados e limitados.
- Podemos definir as operações aritméticas de números *fuzzy* utilizando seus cortes-α.
- Usaremos um número *fuzzy* triangular para exemplificar, mas é possível utilizar outros tipos de número.

b) Aritmética intervalar e cortes-α

- Um número *fuzzy* triangular é representado por:
  - Uma base, formada pelo intervalo fechado [a, b]
  - Um único vértice, o ponto (u, 1)
  - (a; u; b)
- Função de pertinência de um número *fuzzy* triangular:

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ \\ (\dfrac{x-a}{u-a}) & \text{se } a < x \leq u \\ \\ (\dfrac{x-b}{u-b}) & \text{se } u < x \leq b \\ \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

b) Aritmética intervalar e cortes-α

- Esse número pode ser escrito em termos dos cortes-α como segue:

${}^{\alpha}A = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$

e

$a_1^{\alpha} = (u - a)\alpha + a$

$a_2^{\alpha} = (u - b)\alpha + b$

para todo $\alpha \in [0, 1]$

Exemplo (SILVA, 2020)

- O termo linguístico “em torno de 5” pode ser modelado matematicamente pelo número *fuzzy* triangular simétrico A = (4.8; 5; 5.2).


1
4,8
5
5,2
ℝ

Função de pertinência para A

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq a \\ (\dfrac{x-a}{u-a}) & \text{se } a < x \leq u \\ (\dfrac{x-b}{u-b}) & \text{se } u < x \leq b \\ 0 & \text{se } x > b \end{cases}$$

$a = 4.8$

$b = 5.2$

$u = 5$

Função de pertinência para A

$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 4.8 \\ (\dfrac{x-4.8}{0.2}) & \text{se } 4.8 < x \leq 5 \\ (\dfrac{x-5.2}{0.2}) & \text{se } 5 < x \leq 5.2 \\ 0 & \text{se } x > 5.2 \end{cases}$$

Cortes-α para A

${}^{\alpha}A = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$

$$a_1^{\alpha} = (u - a)\alpha + a$$

$$= (5 - 4.8)\alpha + 4.8$$

$$= 0.2\alpha + 4.8$$

$$a_2^{\alpha} = (u - b)\alpha + b$$

$$= (5 - 5.2)\alpha + 5.2$$

$$= -0.2\alpha + 5.2$$

${}^{\alpha}A = [0.2\alpha + 4.8, -0.2\alpha + 5.2]$

Para α = 0.5, teremos

$^{0.5}A = [0.2\alpha + 4.8, -0.2\alpha + 5.2]$

$= [0.2*0.5 + 4.8, -0.2*0.5 + 5.2]$

$= [0.1 + 4.8, -0.1 + 5.2]$

$= [4.9, 5.1]$

c) Operações aritméticas básicas para cortes-α (SILVA, 2020)

- Sejam A e B dois números *fuzzy* com cortes-α, dados como:

  $^{\alpha}\mathrm{A} = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$

  $^{\alpha}\mathrm{B} = [b_1^{\alpha}, b_2^{\alpha}]$

- Podemos enunciar as 4 operações básicas como:

c) Operações aritméticas básicas para cortes-α

${}^{\alpha}(A + B) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B = [a_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} + b_2^{\alpha}]$

${}^{\alpha}(A - B) = {}^{\alpha}A - {}^{\alpha}B = [a_1^{\alpha} - b_2^{\alpha}, a_2^{\alpha} - b_1^{\alpha}]$

${}^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B = [\text{min. } P_1, \text{máx. } P_1]$, onde:

$$P_1 = \{a_1^{\alpha} * b_1^{\alpha}, a_1^{\alpha} * b_2^{\alpha}, a_2^{\alpha} * b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} * b_2^{\alpha}\}$$

c) Operações aritméticas básicas para cortes-α

e se $0 \notin \text{supp}(B)$

${}^{\alpha}(A / B) = {}^{\alpha}A / {}^{\alpha}B = [a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}] * [1/b_2^{\alpha}, 1/b_1^{\alpha}]$

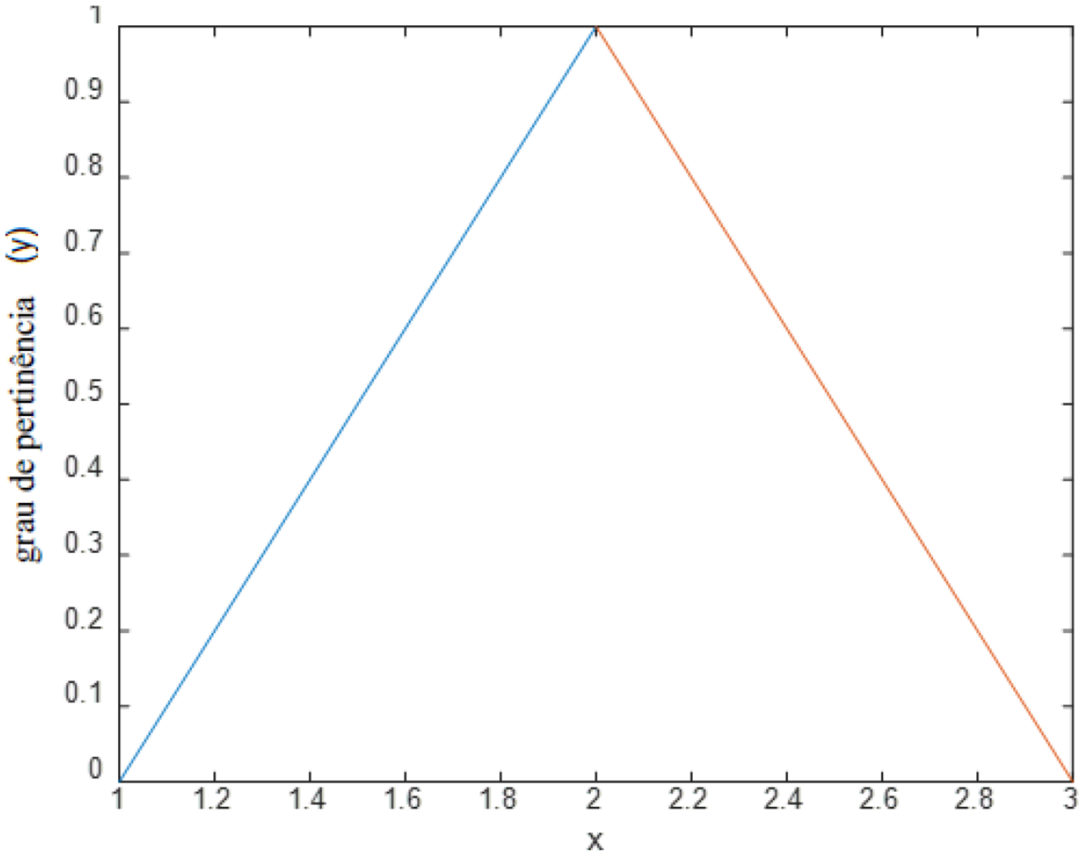
$= [\text{min. } P_2, \text{máx. } P_2]$, onde:

$P_2 = \{a_1^{\alpha}/b_2^{\alpha}, a_1^{\alpha}/b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}/b_2^{\alpha}, a_2^{\alpha}/b_1^{\alpha}\}$

Exemplo

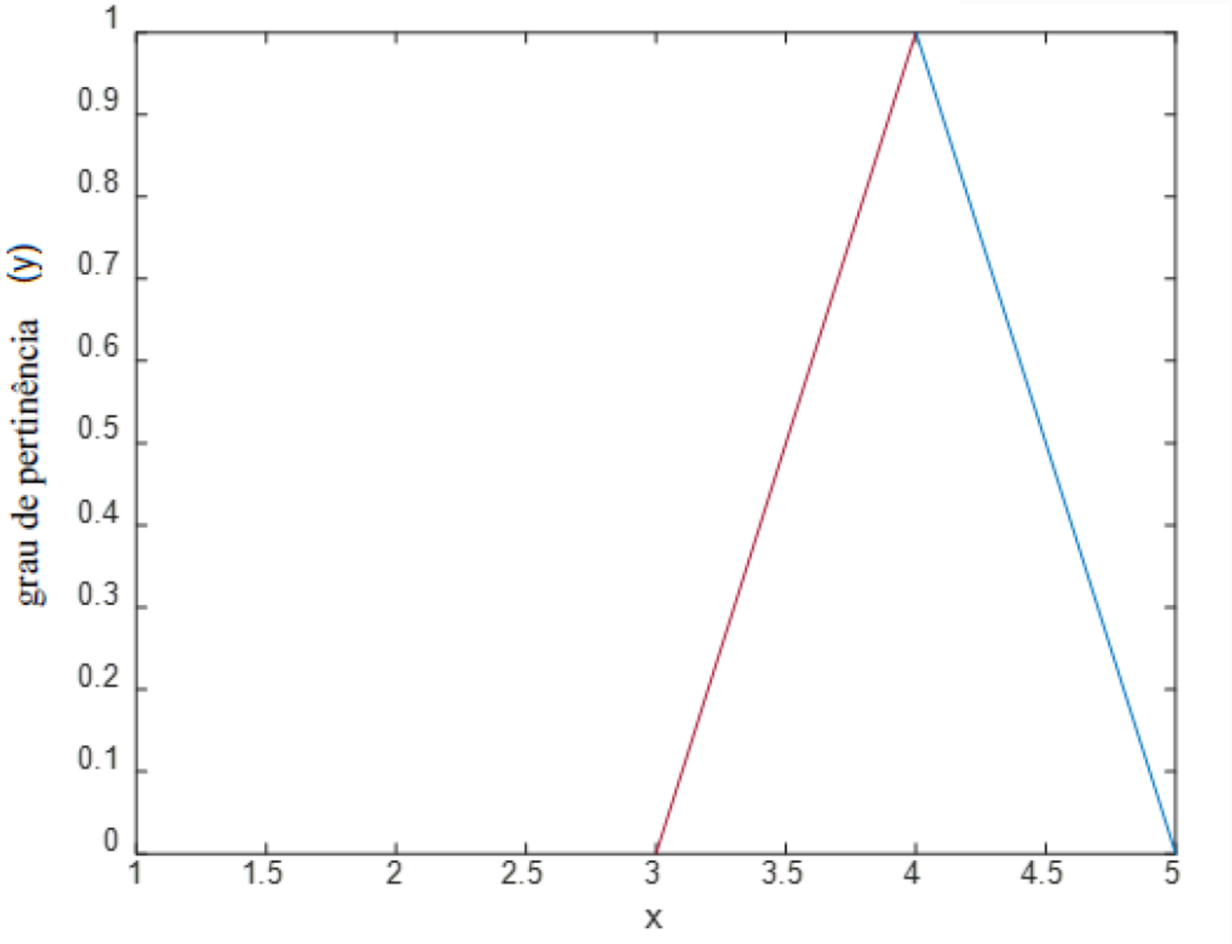
- Sejam os números *fuzzy* triangulares “aproximadamente 2” e “aproximadamente 4”, denotados, respectivamente, por:
  - A = (1; 2; 3)
  - B = (3; 4; 5)
- E mostradas nas figuras e funções de pertinência que seguem:

Aproximadamente 2



$$\varphi_A(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq 1 \\ (x-1) & \text{se } 1 < x \leq 2 \\ (3-x) & \text{se } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Aproximadamente 4



$$\varphi_B(y) = \begin{cases} 0 & \text{se } y \leq 3 \\ (y-3) & \text{se } 3 < y \leq 4 \\ (5-y) & \text{se } 4 < y \leq 5 \\ 0 & \text{se } y > 5 \end{cases}$$

Cortes-α de A e B

A = (1; 2; 3) → (a; u; b)

${}^{\alpha}$A = $[a_1^{\alpha}, a_2^{\alpha}]$

a_1^{α} = (u – a)α + a

= (2 – 1)α + 1

= α + 1

a_2^{α} = (u – b)α + b

= (2 – 3)α + 3

= -α + 3

${}^{\alpha}$A = [1 + α, 3 - α]

Cortes-α de A e B

B = (3; 4; 5) → (a; u; b)

${}^{\alpha}$B = $[b_1^{\alpha}, b_2^{\alpha}]$

b_1^{α} = (u – a)α + a

= (4 – 3)α + 3

= α + 3

b_2^{α} = (u – b)α + b

= (4 – 5)α + 5

= -α + 5

${}^{\alpha}$B = [3 + α, 5 - α]

Operações básicas com A e B

$^{\alpha}(A + B) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B = [a_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} + b_2^{\alpha}]$

$= [(1 + \alpha) + (3 + \alpha), (3 - \alpha) + (5 - \alpha)]$

$= [4 + 2\alpha, 8 - 2\alpha]$

Operações básicas com A e B

$^{\alpha}(A + B) = {}^{\alpha}A + {}^{\alpha}B = [a_1^{\alpha} + b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} + b_2^{\alpha}]$

$= [(1 + \alpha) + (3 + \alpha), (3 - \alpha) + (5 - \alpha)]$

$= [4 + 2\alpha, 8 - 2\alpha]$

Para $\alpha = 0$, temos:

$^{0}(A + B) = [4 + 2\alpha, 8 - 2\alpha]$

$= [4 + 2*0, 8 - 2*0]$

$= [4, 8]$

Base

Para $\alpha = 1$, temos:

$^{1}(A + B) = [4 + 2\alpha, 8 - 2\alpha]$

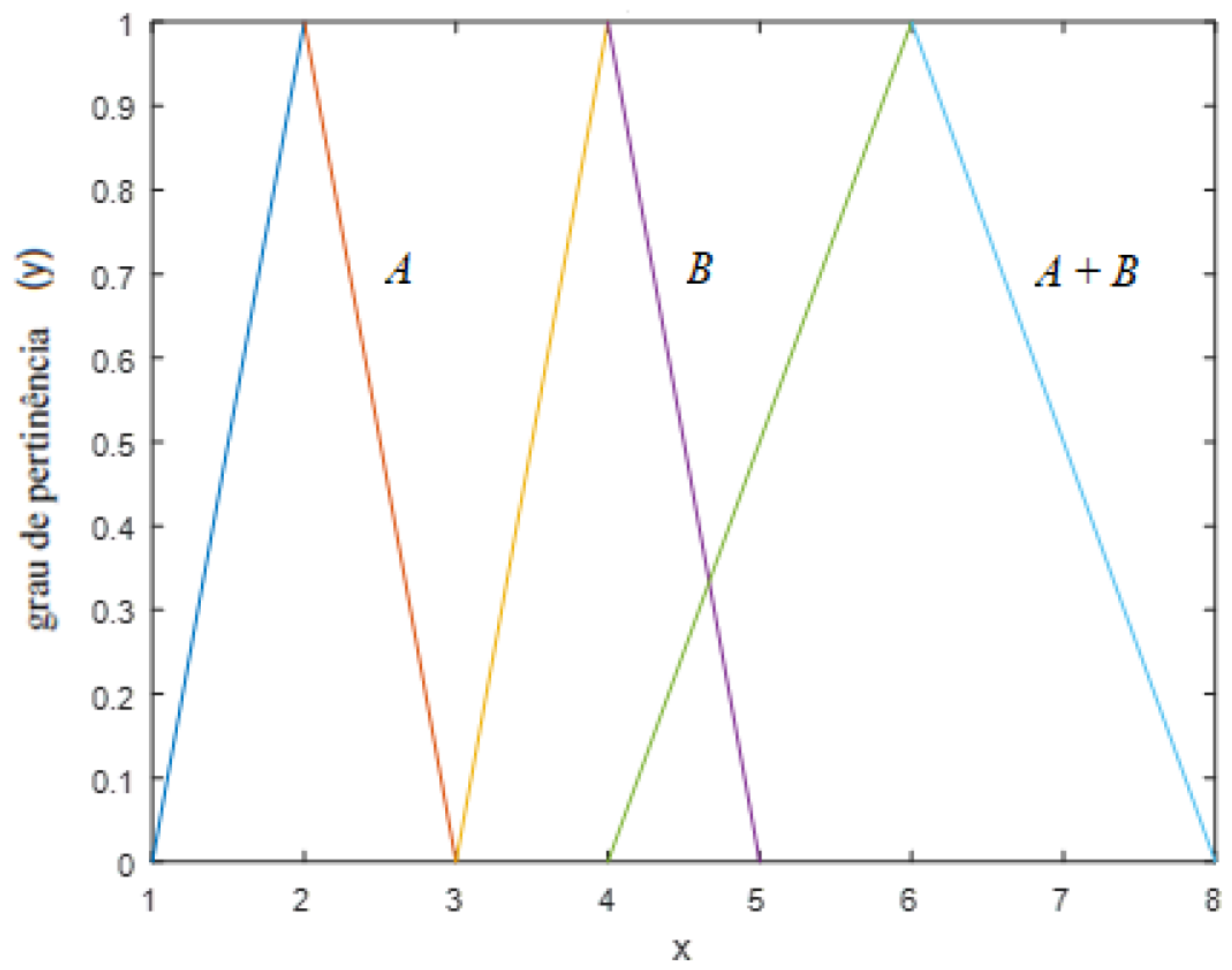
$= [4 + 2*1, 8 - 2*1]$

$= [6, 6] \rightarrow$ **6**

Vértice

Operações básicas com A e B

- Então
  - A + B = (4; 6; 8)



Operações básicas com A e B

${}^{\alpha}(A - B) = {}^{\alpha}A - {}^{\alpha}B = [a_1^{\alpha} - b_2^{\alpha}, a_2^{\alpha} - b_1^{\alpha}]$

$= [(1 + \alpha) - (5 - \alpha), (3 - \alpha) - (3 + \alpha)]$

$= [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$

Para $\alpha = 0$, temos:

${}^{0}(A - B) = [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$

$= [-4 + 2*0, -2*0]$

$= [-4, 0]$

Para $\alpha = 1$, temos:

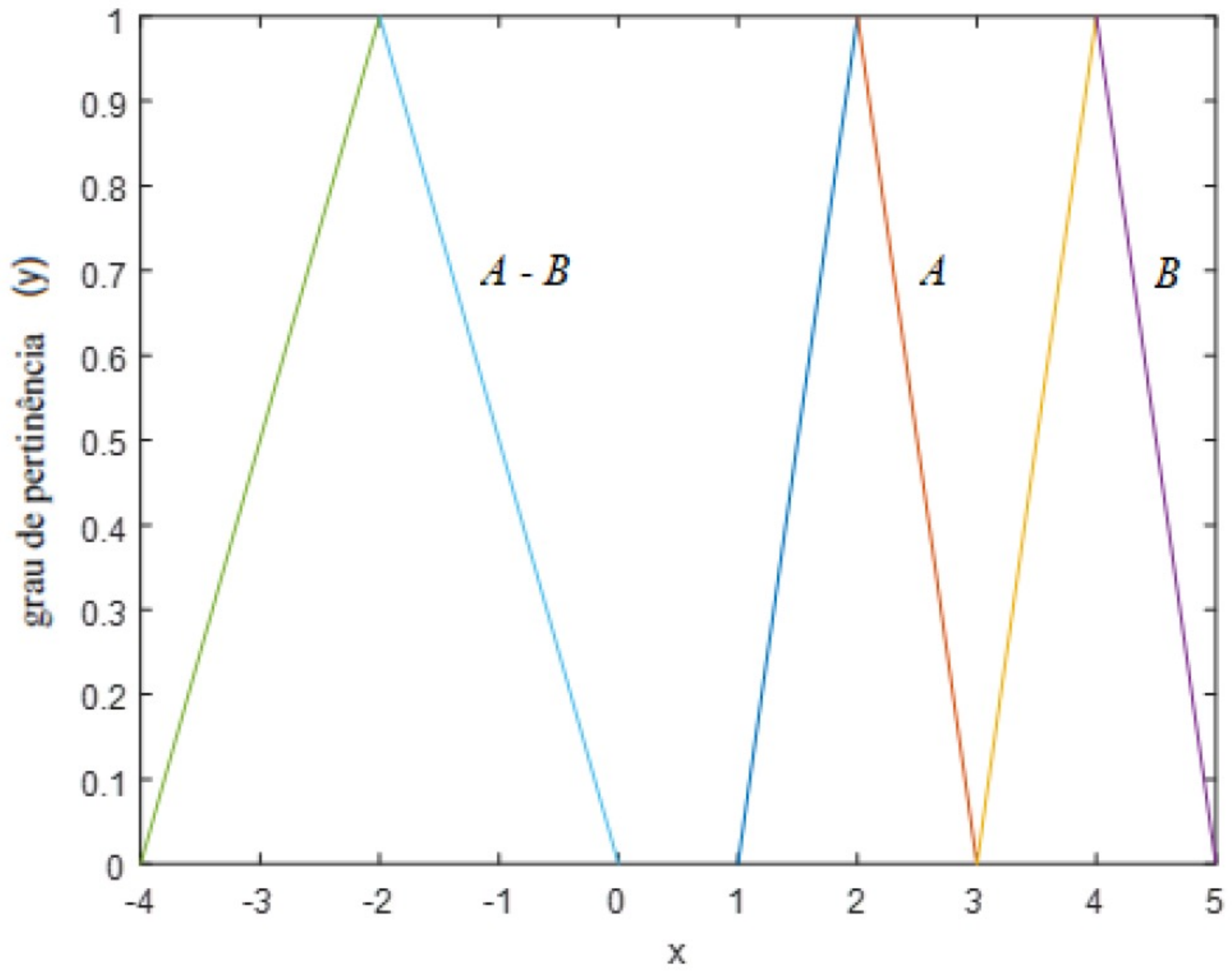
${}^{1}(A - B) = [-4 + 2\alpha, -2\alpha]$

$= [-4 + 2*1, -2*1]$

$= [-2, -2] \rightarrow$ **-2**

Operações básicas com A e B

- Então
  - A - B = (-4; -2; 0)



Operações básicas com A e B

${}^{\alpha}(A * B) = {}^{\alpha}A * {}^{\alpha}B$ = [min. P_1, máx. P_1], onde:

$P_1 = \{a_1^{\alpha} * b_1^{\alpha}, a_1^{\alpha} * b_2^{\alpha}, a_2^{\alpha} * b_1^{\alpha}, a_2^{\alpha} * b_2^{\alpha}\}$

$= \{(1+\alpha)*(3+\alpha), (1+\alpha)*(5-\alpha), (3-\alpha)*(3+\alpha), (3-\alpha)*(5-\alpha)\}$

$= \{3+\alpha+3\alpha+\alpha^2, 5-\alpha+5\alpha-\alpha^2, 9+3\alpha-3\alpha-\alpha^2, 15-3\alpha-5\alpha+\alpha^2\}$

$= \{\alpha^2+4\alpha+3, -\alpha^2+4\alpha+5, -\alpha^2+9, \alpha^2-8\alpha+15\}$

Operações básicas com A e B

Para $\alpha = 0$, temos:

$P_1 = \{\alpha^2+4\alpha+3, -\alpha^2+4\alpha+5, -\alpha^2+9, \alpha^2-8\alpha+15\}$

$= \{0^2+4*0+3, -(0)^2+4*0+5, -(0)^2+9, 0^2-8*0+15\}$

$= \{3, 5, 9, 15\}$

${}^0(A * B) = [\text{min. } P_1, \text{máx. } P_1]$

$= [3, 15]$

Operações básicas com A e B

Para $\alpha = 1$, temos:

$P_1 = \{\alpha^2+4\alpha+3, -\alpha^2+4\alpha+5, -\alpha^2+9, \alpha^2-8\alpha+15\}$

$= \{1^2+4*1+3, -(1)^2+4*1+5, -(1)^2+9, 1^2-8*1+15\}$

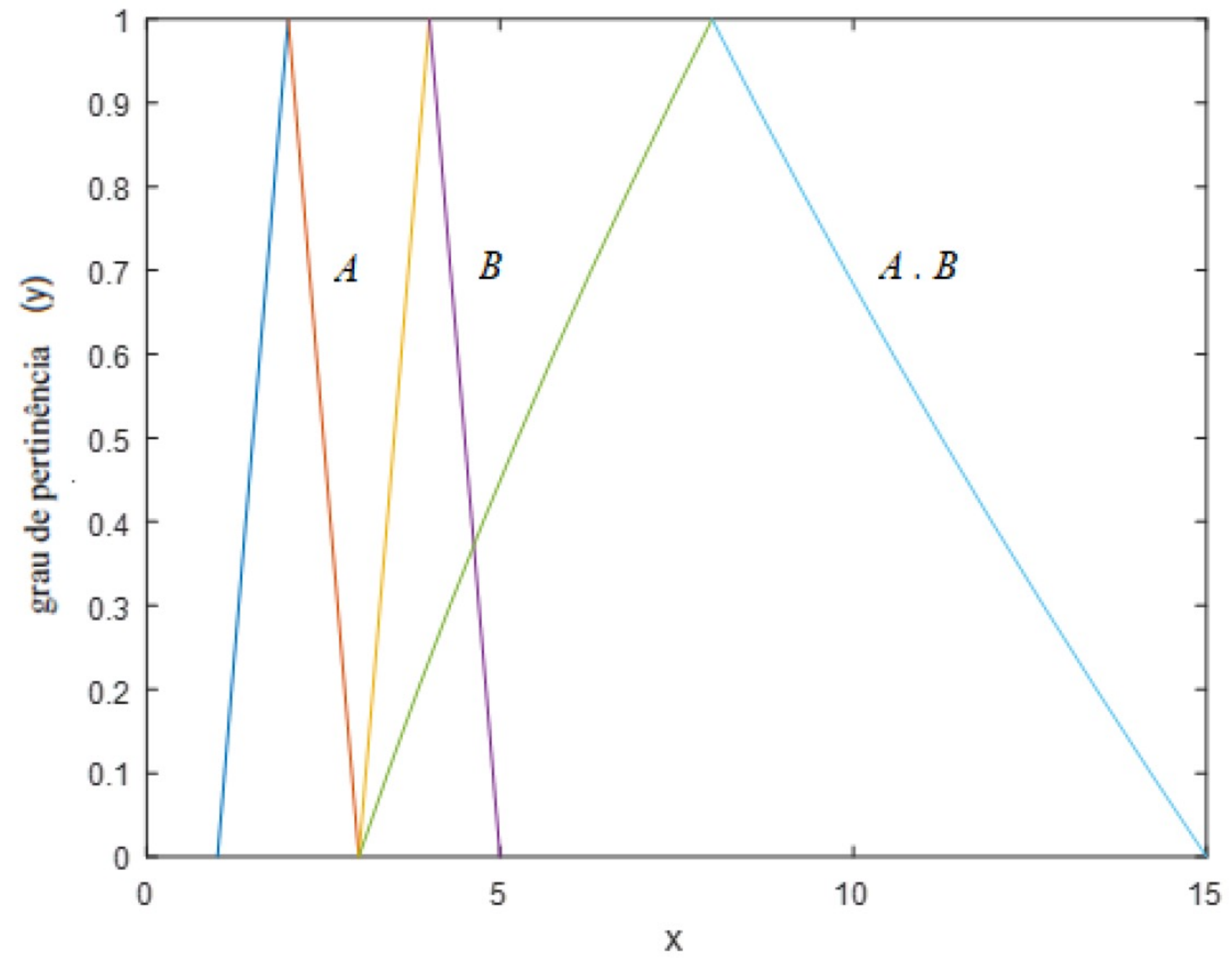
$= \{8, 8, 8, 8\}$

${}^1(A * B) = [\text{min. } P_1, \text{máx. } P_1]$

$= [8, 8] \rightarrow$ **8**

Operações básicas com A e B

- Então
  - A * B = (3; 8; 15)



Operações básicas com A e B

${}^{\alpha}(A / B) = {}^{\alpha}A / {}^{\alpha}B$ = [min. P_2, máx. P_2], onde:

$P_2 = \{a_1^{\alpha}/b_2^{\alpha},\ a_1^{\alpha}/b_1^{\alpha},\ a_2^{\alpha}/b_2^{\alpha},\ a_2^{\alpha}/b_1^{\alpha}\}$

$= \{(1+\alpha)/(5-\alpha),\ (1+\alpha)/(3+\alpha),\ (3-\alpha)/(5-\alpha),\ (3-\alpha)/(3+\alpha)\}$

Operações básicas com A e B

Para α = 0, temos:

$P_2 = \{(1+\alpha)/(5-\alpha), (1+\alpha)/(3+\alpha), (3-\alpha)/(5-\alpha), (3-\alpha)/(3+\alpha)\}$

$= \{(1+0)/(5-0), (1+0)/(3+0), (3-0)/(5-0), (3-0)/(3+0)\}$

$= \{1/5, 1/3, 3/5, 3/3\} \rightarrow \{0.2, 0.26, 0.6, 1\}$

${}^{0}(A / B) = [\text{min. } P_2, \text{máx. } P_2]$

$= [0.2, 1]$

Operações básicas com A e B

Para α = 1, temos:

$P_2 = \{(1+\alpha)/(5-\alpha), (1+\alpha)/(3+\alpha), (3-\alpha)/(5-\alpha), (3-\alpha)/(3+\alpha)\}$

$= \{(1+1)/(5-1), (1+1)/(3+1), (3-1)/(5-1), (3-1)/(3+1)\}$

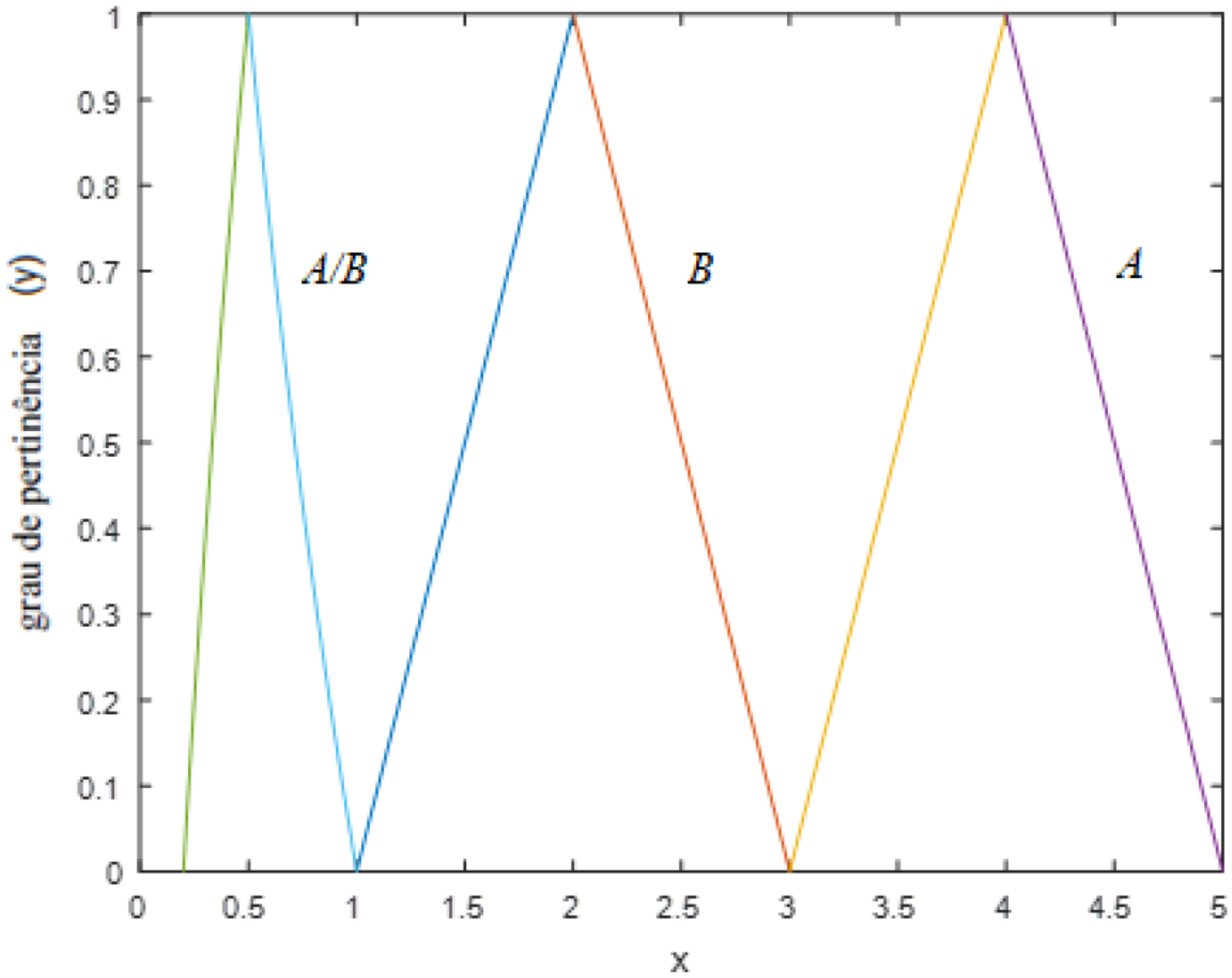
$= \{2/4, 2/4, 2/4, 2/4\} \rightarrow \{0.5, 0.5, 0.5, 0.5\}$

$^{1}(A / B) = [\text{min. } P_2, \text{máx. } P_2]$

$= [0.5, 0.5]$

Operações básicas com A e B

- Então
  - A / B = (0.2; 0.5; 1)

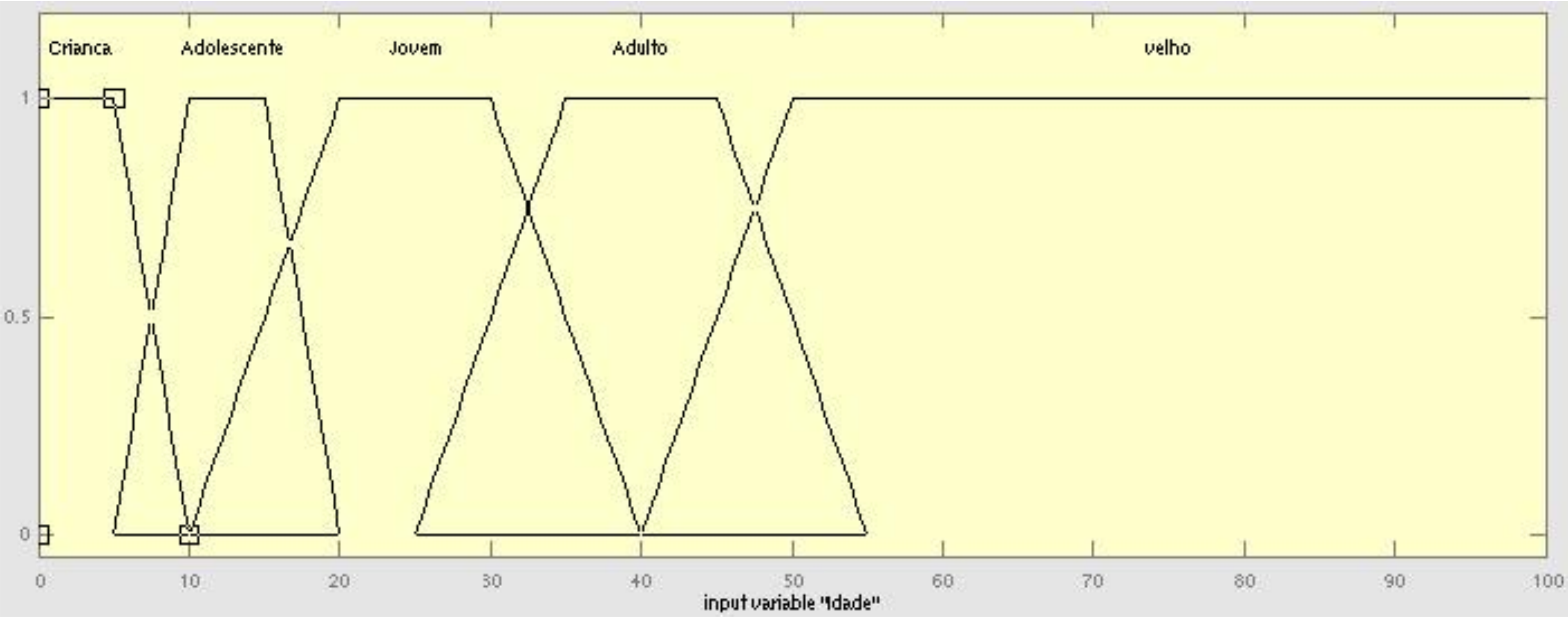


Exercícios

ExerciciosFuzzy.pdf

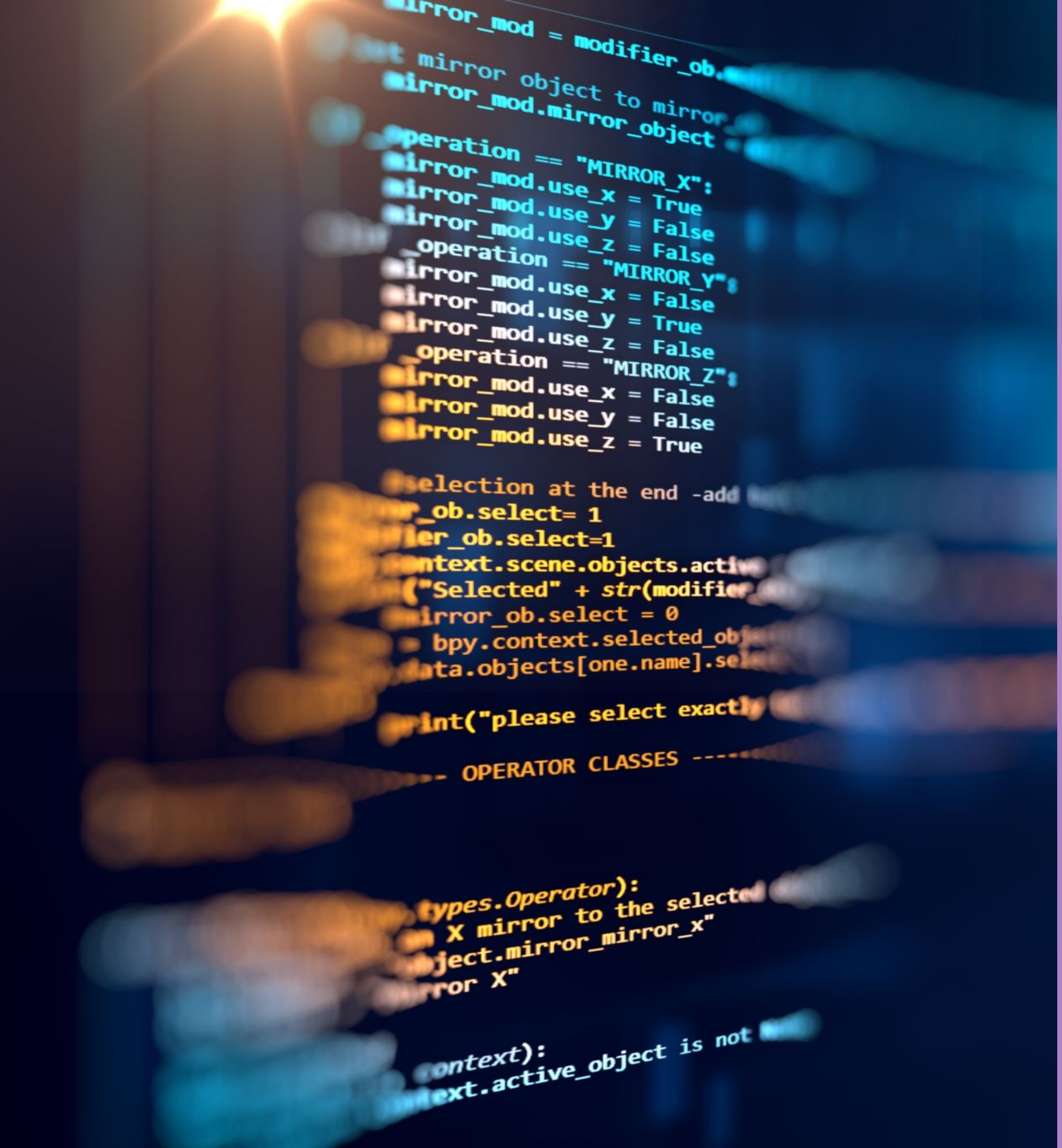
8.7. Variáveis e termos linguísticos

- É o nome dado à variáveis cujo domínio, ou valores, são termos da linguagem natural referentes a um certo contexto.
- Os valores assumidos por uma variável linguística são chamados de termos linguísticos.
- Exemplo:



Variável linguística: Idade

Termos linguísticos: criança, adolescente, jovem, adulto e velho



8.8. Aplicações

Domínios

- Sistemas Especialistas
- Sistemas Multiagentes
- Reconhecimento de Padrões
- Robótica
- Sistemas de Controle Inteligentes
- Sistemas de Apoio à Tomada de Decisão
- Algoritmos Genéticos
- *Data Mining*.

Indústria Aeroespacial

- Controle de altitude da nave espacial.
- Controle de altitude por satélite.
- Regulação de fluxo e mistura em veículos de degelo.

Setor Automotivo

- Controle de velocidade de marcha lenta.
- Troca de marchas na transmissão automática.
- Sistemas inteligentes de rodovias.
- Controle de tráfego.

Negócios

- Sistemas de apoio à tomada de decisão.
- Avaliação de pessoal (recursos humanos).

Defesa

- Reconhecimento de alvo subaquático.
- Reconhecimento automático de imagens infravermelhas/térmicas.
- Apoio à decisão naval.
- Controle de um interceptador de hipervelocidade.
- Tomada de decisão da OTAN.

Eletrônica

- Controle de exposição automática em câmeras de vídeo.
- Controle de unidade em ambientes.
- Sistemas de ar-condicionado.
- Máquinas de lavar.
- Fornos de micro-ondas.
- Aspiradores de pó.

Campo Financeiro

- Controle de transferência de documentos bancários.
- Gestão de fundos.
- Previsão do mercado de ações.

Setor Industrial

- Forno de cimento com controle de troca de calor.
- Controle de processo de tratamento de águas.
- Controle de instalações de purificação de água.
- Análise quantitativa de qualidade industrial.
- Controle de problemas de restrições nos projetos estruturais.

Indústria de Transformação

- Otimização da produção de queijo.
- Otimização da produção de leite.

Campo Marítimo

- Piloto automático para navios.
- Controle de veículos subaquáticos autônomos.
- Direção de navios.

Medicina

- Sistema de apoio para diagnóstico médico.
- Controle da pressão arterial durante anestesia.
- Controle multivariável da anestesia.
- Modelagem de achados neuropatológicos em pacientes com Alzheimer.
- Diagnósticos de radiologia.
- Diagnóstico de diabetes e câncer de próstata.

Área de Seguros

- Sistemas de decisão para negociação de valores mobiliários.
- Aparelhos de segurança.

Transporte

- Operação automática de trem subterrâneo.
- Controle de horários de trens.
- Aceleração ferroviária.
- Travagem e paragem de trens.

Reconhecimento e Classificação de Padrões

- Reconhecimento de fala.
- Reconhecimento de caligrafia.
- Análise de características faciais.
- Pesquisa de imagens.

Psicologia

- Análise do comportamento humano.
- Investigação e prevenção criminal.

Aplicações Comerciais

- Freios ABS (Nissan): controle dos freios em casos perigosos, levando em consideração a velocidade do carro, a aceleração, a velocidade da roda, entre outros fatores.
- Transmissão automática (NOK/Nissan): controla a injeção e a ignição de combustível, com base na configuração do acelerador, temperatura da água de resfriamento, RPM, etc.

Aplicações Comerciais

- <u>Câmbio automático (Honda, Nissan):</u> seleciona a marcha com base na carga do motor, estilo de direção e condições da estrada.
- <u>Copiadora (Canon):</u> ajusta a tensão do tambor com base na densidade, umidade e temperatura da imagem.
- <u>Controle de forno (Nippon Steel):</u> mistura de cimento.

Aplicações Comerciais

- Piloto automático (Nissan, Isuzu, Mitsubishi): ajusta a configuração do acelerador para definir a velocidade e a aceleração do carro.
- Lava-louças (Matsushita): ajusta o ciclo de limpeza, estratégias de enxágue e lavagem, considerando o número de pratos e da quantidade de comida (restos).

Aplicações Comerciais

- <u>Controle de elevador (Fujitec, Mitsubishi Electric, Toshiba):</u> usada para reduzir o tempo de espera com base no tráfego de passageiros.
- <u>Sistema de diagnóstico de golfe (Maruman Golf):</u> seleciona o taco de golfe com base no balanço e no corpo do jogador.

Aplicações Comerciais

- Palmtop (Hitachi, Sharp, Sanyo, Toshiba): reconhece caracteres Kanji manuscritos.
- Gravura de plasma (Mitsubishi Electric): define tempo e estratégia de gravação.
- Aspirador de pó (Matsushita): ajusta o poder de sucção.
- Forno de micro-ondas (Mitsubishi Chemical): define a potência e a estratégia de cozimento.

Aplicações Comerciais

- Máquinas de lavar (Hitachi): define os ciclos de lavagem baseado no peso, tipo de tecido e sensores de sujeira, otimizando a potência, água e detergente.
- Ar-condicionado industrial (Mitsubishi): usa 25 regras para resfriamento e 25 para aquecimento para aquecer mais rápido e reduzir o consumo em 24%, usando menos sensores.

Quando usar?

- Características dos sistemas que se beneficiam da lógica *fuzzy*:
  - Sistemas complexos que são difíceis ou impossíveis de modelar.
  - Sistemas controlados por especialistas (humanos).
  - Sistemas com entradas e saídas complexas e contínuas.
  - Sistemas que se utilizam da observação humana como entradas ou como base de regras.
  - Sistemas que são naturalmente “vagos”, como os que envolvem ciências sociais e comportamentais, cuja descrição é extremamente complexa.

8.9. Sistemas *Fuzzy*

(KLIR; YUAN, 1995)

8.9. Sistemas *Fuzzy*

- Sistemas especialistas *Fuzzy*:
  - Seu mecanismo de inferência opera em uma série de regras de produção nebulosas e faz inferências nebulosas.
- SEs *fuzzy* também são chamados de <u>controladores *fuzzy*</u>.
- Diferença entre regras de produção *crisp* e as *fuzzy*:

Regras *Crisp*

Se velocidade > 100 então

dpp é 30 metros

Se velocidade < 40 então

dpp é 10 metros

Regras *Fuzzy*

Se velocidade é alta então

dpp é longa

Se velocidade é baixo então

dpp é curta

8.9. Sistemas *Fuzzy*

- São capazes de utilizar o conhecimento obtido de operadores humanos:
  - Crucial em problemas de controle para os quais:
    - É difícil/impossível construir modelos matemáticos precisos; OU
    - Os modelos adquiridos são difíceis ou caros de usar.
- O conhecimento de um operador humano experiente pode ser usado como alternativa a um modelo preciso do processo controlado.

Exemplo de regra

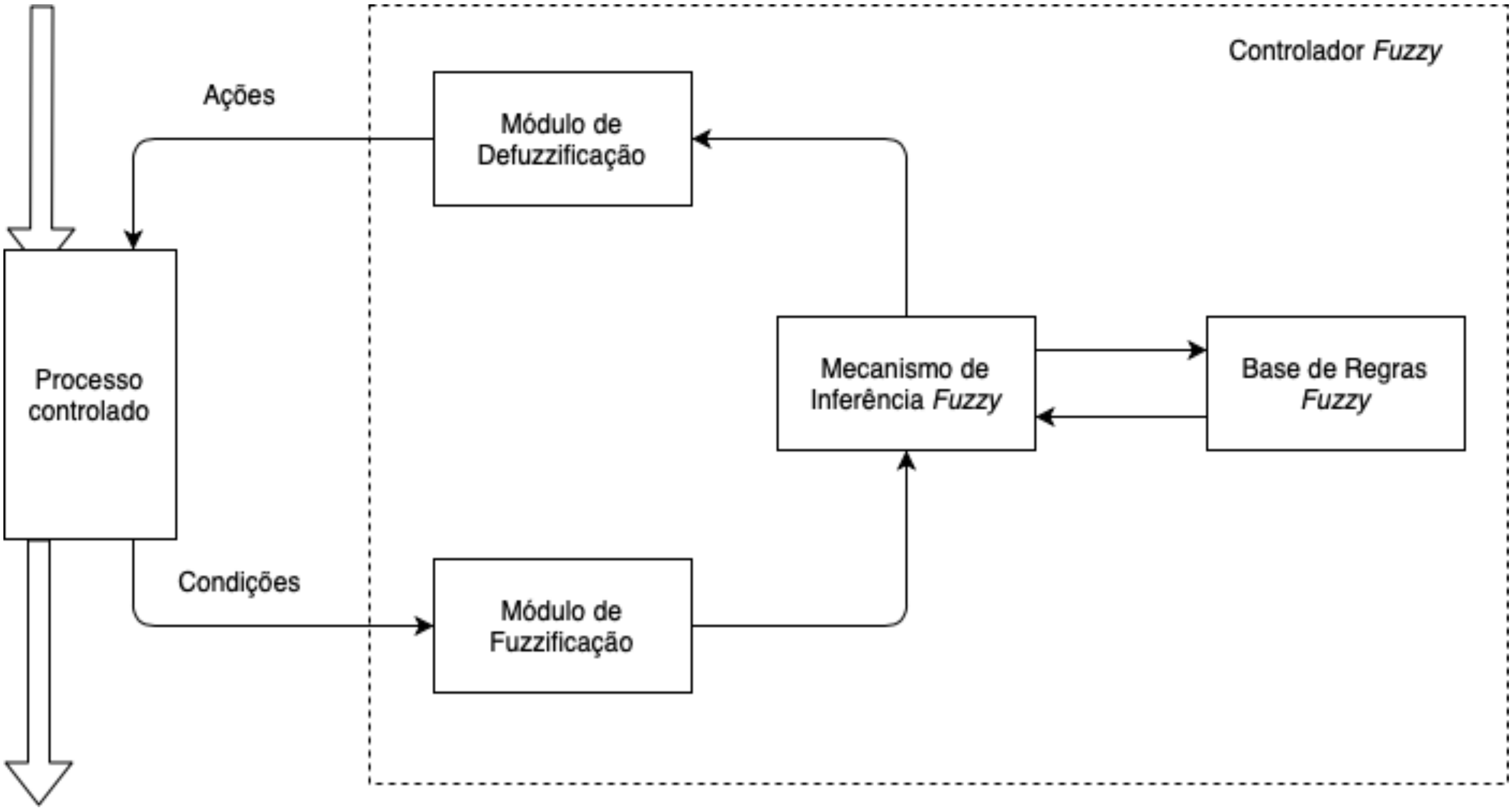
SE a temperatura estiver muito alta

E a pressão está ligeiramente baixa

ENTÃO a mudança de calor deve ser ligeiramente negativa

8.9. Sistemas *Fuzzy*

- Um controlador *fuzzy* geral possui 4 módulos:
  - Uma base de regras *fuzzy*.
  - Um mecanismo de inferência *fuzzy*.
  - Módulos de fuzzificação e defuzzificação.


Controlador *Fuzzy*
Ações
Módulo de Defuzzificação
Processo controlado
Mecanismo de Inferência *Fuzzy*
Base de Regras *Fuzzy*
Condições
Módulo de Fuzzificação

Ciclo de operação

1º - Medir todas as variáveis que representam as condições relevantes do processo controlado.

2º - As medidas são convertidas para conjuntos *fuzzy* apropriadas → Fuzzificação.

Ciclo de operação

3º - O mecanismo de inferência utiliza medidas da 2ª etapa para avaliar as regras de controle que estão na base de regras *fuzzy*:

- Um conjunto *fuzzy* definido no universo de ações possíveis.

4º - O resultado da etapa 3 é convertido em um único valor (*crisp*) que representa, de certa forma, o conjunto *fuzzy* → Defuzzificação.

a) Fuzzificação

- É o processo de converter as quantidades *crisp* para *fuzzy*.
- Utilizamos as funções de pertinência para representar a imprecisão.

a) Fuzzificação

- Como atribuir os valores para as funções de pertinência?
  - Intuição
  - Inferência
  - Ordem de classificação (votação)
  - Conjuntos *fuzzy* angulares
  - Redes neurais
  - Algoritmos genéticos
  - Raciocínio indutivo.
- Material: `AtribuicaoValoresFuncoesPertinencia - Sivanandam et al.pdf`

b) Defuzzificação

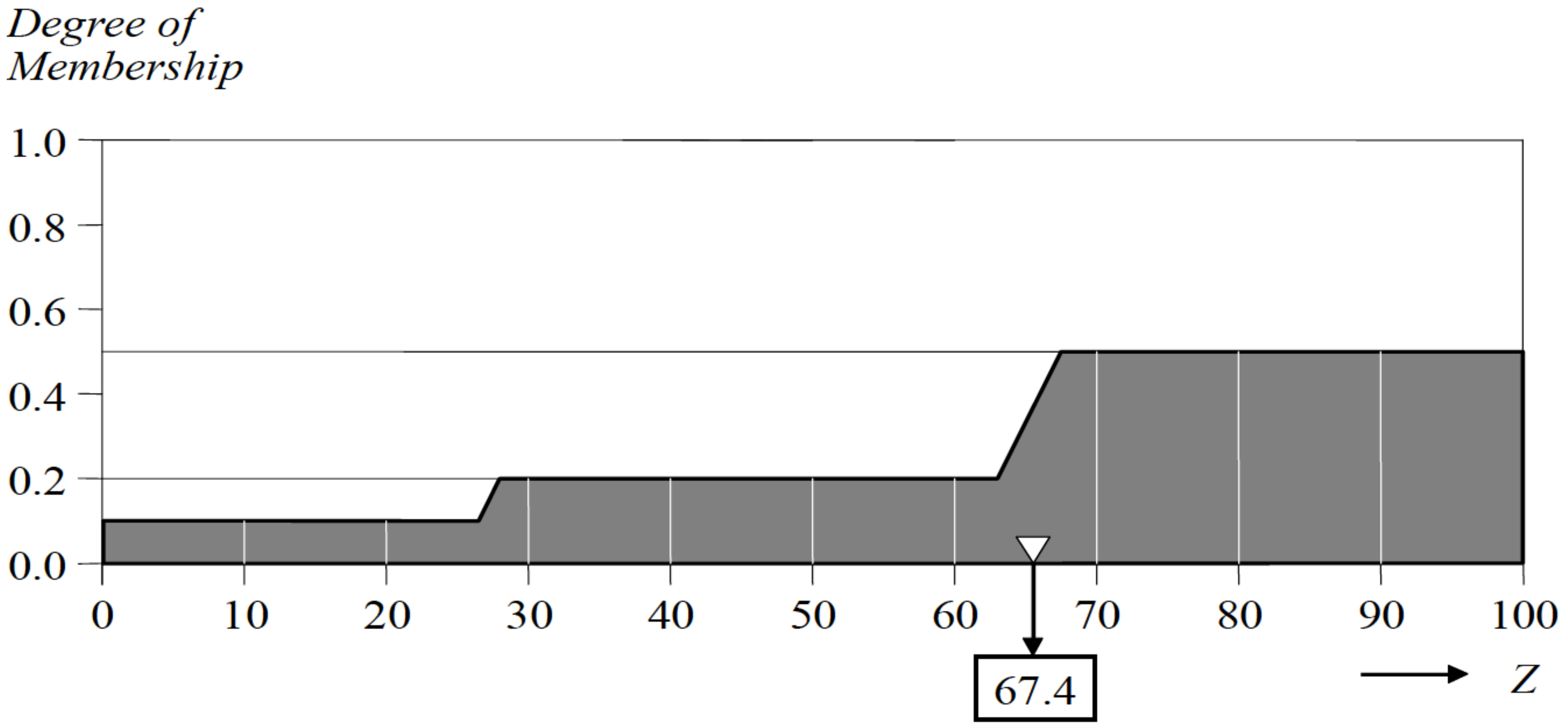
- O objetivo é converter cada conclusão obtida pela máquina de inferência, que é expressa em termos de um conjunto *fuzzy*, em um único número real.
- Os resultados *fuzzy* gerados não podem ser usados como tais nas aplicações.
- Existem vários métodos para a defuzzificação:

i) Centroide

- Ou centro de gravidade (CG).
- É a média aritmética ponderada pelas pertinências de cada elemento do conjunto *fuzzy*.

$$z^* = \frac{\int z \times \mu_c(z)dz}{\int \mu_c(z)dz}$$

- Exemplo:

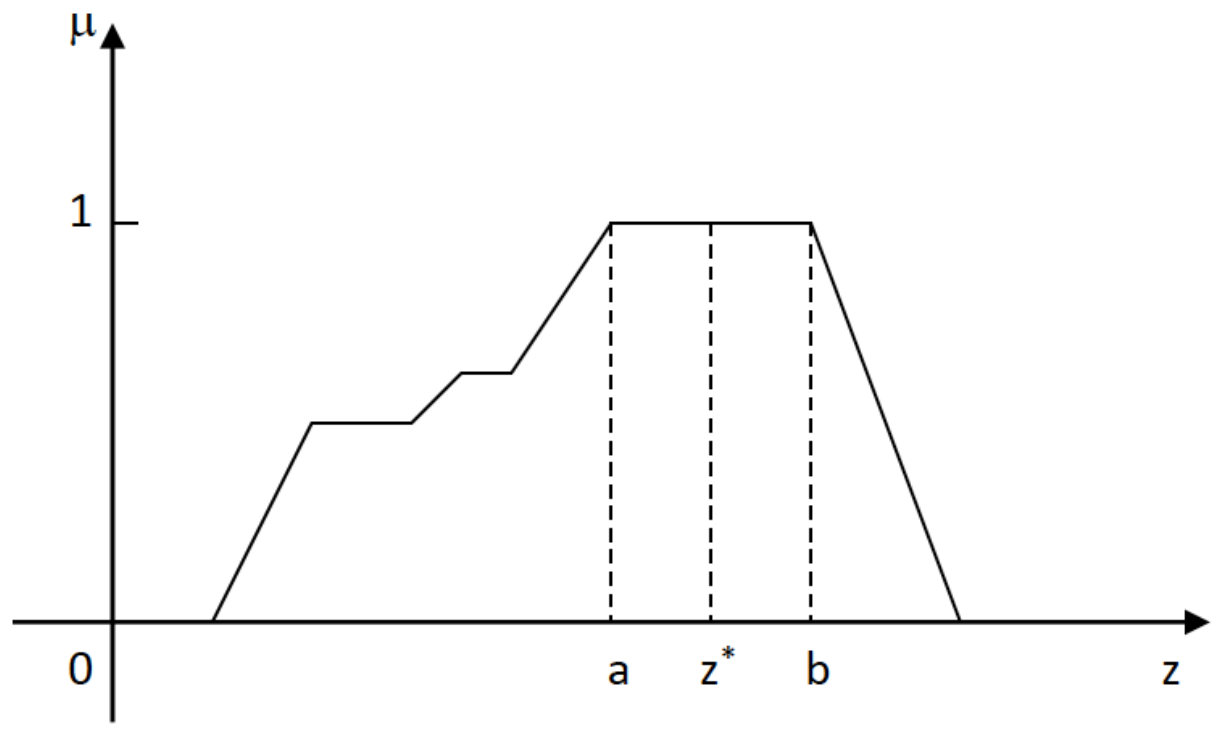


$$CG = \frac{(0+10+20)\times 0.1+(30+40+50+60)\times 0.2+(70+80+90+100)\times 0.5}{0.1+0.1+0.1+0.2+0.2+0.2+0.2+0.5+0.5+0.5+0.5}=67.4$$

ii) Média dos máximos (MOM)

- Média dos valores máximos de pertinência do conjunto a ser defuzzificado.

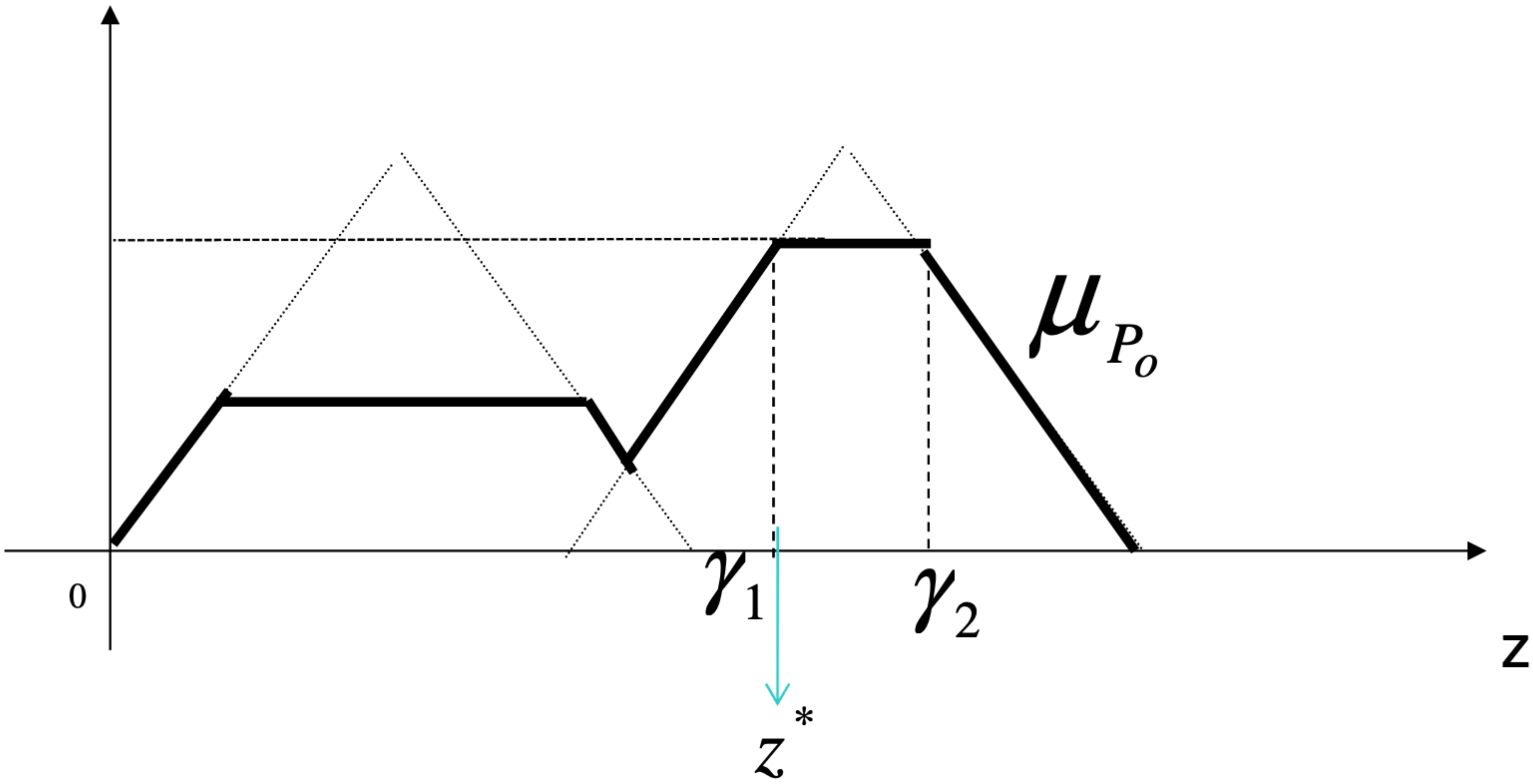
$$z^* = \frac{a+b}{2}$$



iii) Menor dos máximos (SOM ou FOM)

- Ou mínimo dos máximos.
- Os valores relativos ao máximo da função são selecionados e é tomada <u>o menor</u>.

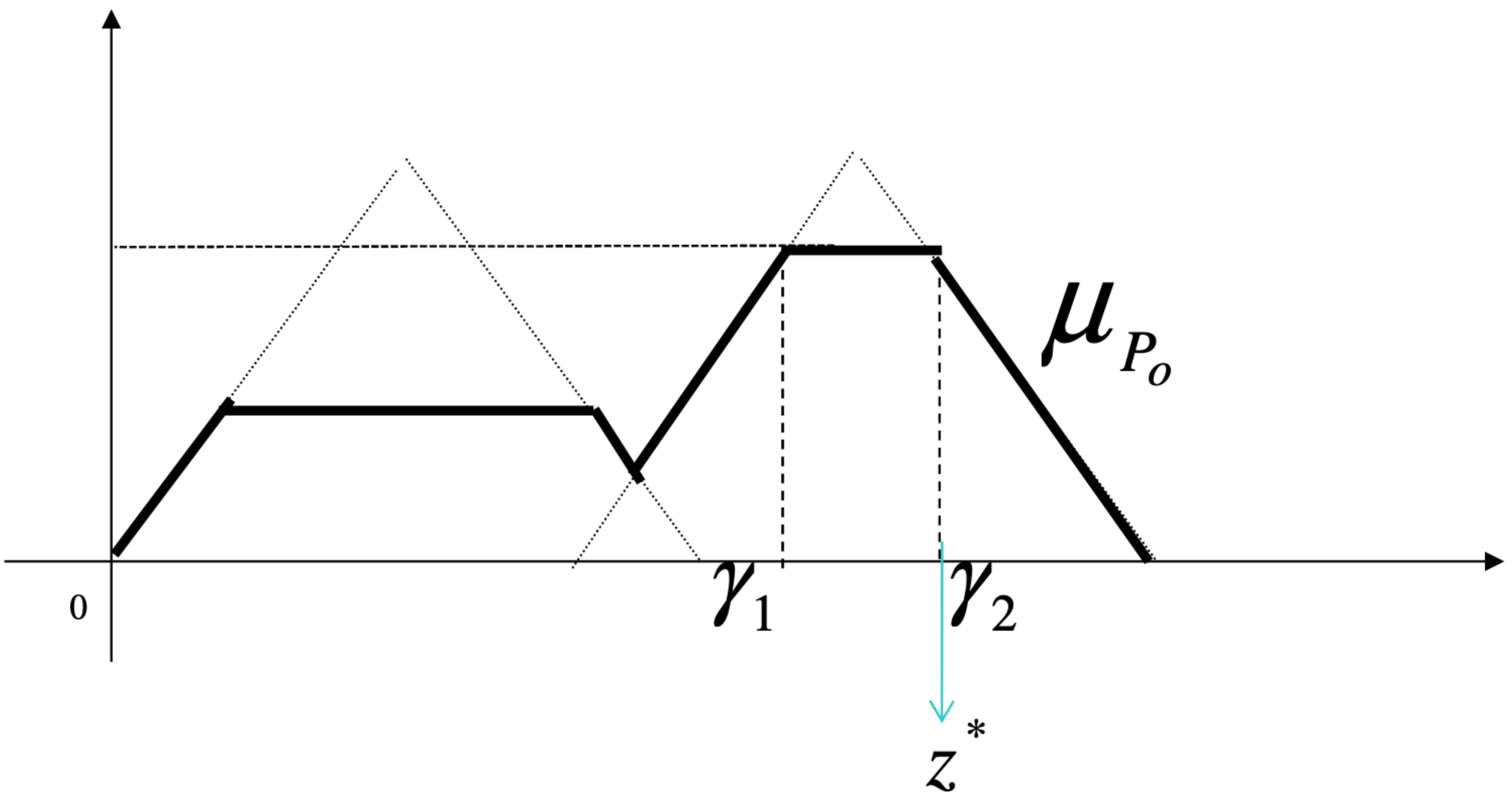
$$z^* = \gamma_1$$



iv) Maior dos máximos (LOM)

- Ou máximo dos máximos.
- Os valores relativos ao máximo da função são selecionados e é tomada o maior.

$$z^* = \gamma_2$$

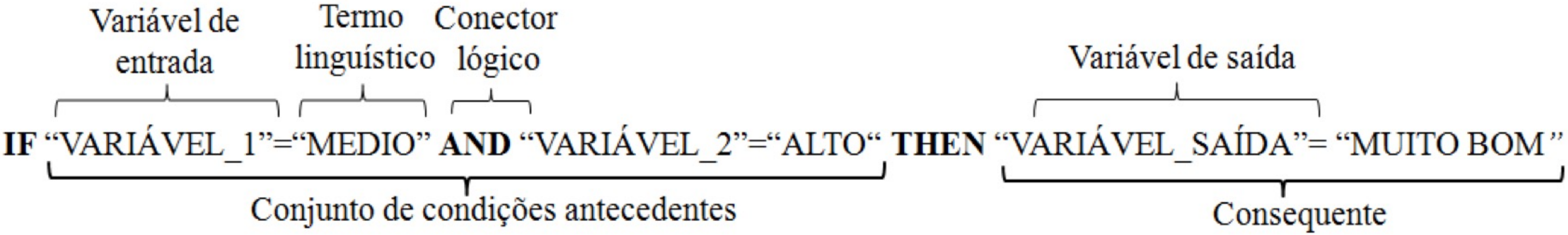


c) Inferência *fuzzy*

- A inferência *fuzzy* pode utilizar um dos seguintes métodos para tomada de decisão:
  - Mamdani
  - Sugeno

i) Mamdani

- Os consequentes das regras são representados por termos linguísticos.
- Adequado para problemas de tomada de decisão.



Principais características

- Função de associação de saída está presente.
- Resultado nítido é obtido através da defuzzificação das consequentes das regras.
- A superfície de saída é não contínua.
- Grande poder expressivo.
- Menor flexibilidade no projeto do sistema.

Vantagens

- Intuitivo
- Adequado à contribuição humana
- Base de regras mais interpretável
- Tem ampla aceitação.

ii) Sugeno

- Também chamado de inferência Takagi-Sugeno-Kang.
- Os consequentes são definidos como funções polinomiais:
  - Os valores dos coeficientes (`a`, `b` e `c`) são ajustados pelo algoritmo dos mínimos quadrados.
- Adequado para lidar com problemas de aproximação funcional.

$$\textbf{IF}\ \underbrace{\overbrace{\text{“VARIÁVEL\_1”}}^{\text{Variável de entrada}}=\overbrace{\text{“MEDIO”}}^{\text{Termo linguístico}}\ \overbrace{\textbf{AND}}^{\text{Conector lógico}}\ \text{“VARIÁVEL\_2”}=\text{“ALTO“}}_{\text{Conjunto de condições antecedentes}}\ \textbf{THEN}\ \underbrace{\text{“}\overbrace{\text{VARIÁVEL\_SAÍDA”}= f}^{\text{Variável de saída}} = a\,x + b\,y + c}_{\text{Consequente}}$$

Principais características

- Nenhuma função de associação de saída está presente.
- O resultado é obtido usando a média ponderada das consequências das regras.
- A superfície de saída é contínua.
- Perde interpretações.
- Mais flexibilidade no projeto do sistema.

Vantagens

- Computacionalmente eficiente
- Trabalha bem com técnicas lineares, como controle PID
- Trabalha bem com otimização e técnicas adaptativas
- Garante continuidade da superfície de saída
- Adequado para análise matemática.

Material

- `Inferência fuzzy.pdf` → um texto sobre como os 2 métodos fazem a inferência nas regras.
- `Mamdani e Sugeno.pdf` → um artigo que compara os 2 métodos para controle de tráfego.

8.10. Exemplo de sistema *fuzzy*

Previsão de consumo de refrigerante

- Determinar o consumo esperado de um certo refrigerante em dada região, em função da temperatura ambiente e de seu preço unitário.
- Entradas:
  - Temperatura ambiente (em °C)
  - Preço unitário (em R$)
- Saída:
  - Consumo esperado (em L)

Entradas

Temperatura (em °C):

- Faixa: [0 50]
- Termos:

```
baixa [0 10]
média [20 30]
alta [40 50]
```

Preço (em R$):

- Faixa: [0 10]
- Termos:

```
baixo [0 2]
médio [4 6]
alto [8 10]
```

Saída

Consumo (em L):

- Faixa: [0 1000]
- Termos:

```
baixo [0 200]
médio [400 600]
alto [800 1000]
```

Temperatura	Preço	Consumo
Baixa	Baixo	Baixo
Baixa	Médio	Baixo
Baixa	Alto	Baixo
Média	Baixo	Médio
Média	Médio	Médio
Média	Alto	Baixo
Alta	Baixo	Alto
Alta	Médio	Médio
Alta	Alto	Baixo

Usando o sistema

- No próprio `.fis`
- Via arquivo `.m`

Referências Bibliográficas

DE PONTES SARAIVA, Gerardo José. LÓGICA FUZZY. **Revista da Escola Superior de Guerra**, v. 21, n. 45, 2006.

KLIR, George; YUAN, Bo. **Fuzzy sets and fuzzy logic**. New Jersey: Prentice Hall, 1995.

MCNEILL, F. Martin; THRO, Ellen. **Fuzzy logic: a practical approach**. Academic Press, 2014.

SILER, William; BUCKLEY, James J. **Fuzzy expert systems and fuzzy reasoning**. Hoboken, NJ: Wiley, 2005.

SILVA, Marcelo Batista da. **Um Estudo sobre Operações Aritméticas com Números *Fuzzy***. 2020. 110 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Matemática, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, Sorocaba, 2020. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/handle/ufscar/12849. Acesso em: 24 maio 2021.

SIVANANDAM, S. N. et al. **Introduction to fuzzy logic using MATLAB**. Berlin: Springer, 2007.

SYROPOULOS, Apostolos; GRAMMENOS, Theophanes. **A Modern Introduction to Fuzzy Mathematics**. John Wiley & Sons, 2020.

ZADEH, L.A.. Fuzzy sets. **Information And Control**, [S.L.], v. 8, n. 3, p. 338-353, jun. 1965. Elsevier BV. http://dx.doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x.