Ciência da Computação

Introdução à Análise de Algoritmos

André Luiz Brun

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Introdução

- Como avaliar um algoritmo?
  - Ele fornece uma solução para o problema?
  - Quão eficiente é o algoritmo?
  - Qual o espaço em memória necessário para a execução?
  - Existem maneiras melhores de se resolver o problema?

Introdução

- Como avaliar um algoritmo?
  - Ele fornece uma solução para o problema?
  - **Quão eficiente é o algoritmo?**
  - Qual o espaço em memória necessário para a execução?
  - Existem maneiras melhores de se resolver o problema?

Introdução

- Como avaliar um algoritmo?
  - Ele fornece uma solução para o problema?
  - **Quão eficiente é o algoritmo?**
  - Qual o espaço em memória necessário para a execução?
  - Existem maneiras melhores de se resolver o problema?

  - Correção
  - Eficiência Temporal
  - Eficiência Espacial
  - Otimalidade

Introdução

- Projeto de Algoritmos *vs* Análise de Algoritmos

- Análise Teórica *vs* Experimental

- Assintótica *vs* Empírica

Análise Assintótica

- Permite estimar o custo para se executar um determinado algoritmo

- Este custo é chamado de custo computacional, custo assintótico ou complexidade assintótica

- A ideia é encontrar uma equação que melhor estime o custo de execução do método em função de algum critério pré-definido

Análise Assintótica

- Critérios comuns:
  - Número de operações básicas
  - Número de indexações
  - Número de comparações
  - Número de acesso a disco
  - Número de swaps
  - Espaço em memória
  - Número de acessos a servidor
  - ...

Análise Assintótica

- A análise de algoritmos ignora os problemas pequenos e intermediários e concentra-se na solução de problemas cujos valores tendem a ser extremamente grandes

- Dessa forma, assume-se que o fator de impacto do custo de um algoritmo está relacionado à variável de crescimento do custo e não de valores fixos

Análise Assintótica

- Exemplo: todas as funções a seguir crescem com a mesma velocidade (são ditas equivalentes).
- Dizemos que todas as funções têm a mesma ordem de complexidade

$$n^2 \qquad \frac{3n^2}{2} \qquad 9999n^2 \qquad \frac{n^2}{1000}$$

Análise Assintótica

- Exemplo: todas as funções a seguir crescem com a mesma velocidade (são ditos equivalentes).
- Dizemos que todas as funções têm a mesma ordem de complexidade

$$\boldsymbol{n^2} \qquad \frac{3\boldsymbol{n^2}}{2} \qquad 9999\boldsymbol{n^2} \qquad \frac{\boldsymbol{n^2}}{1000}$$

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Análise Assintótica – Ordem O

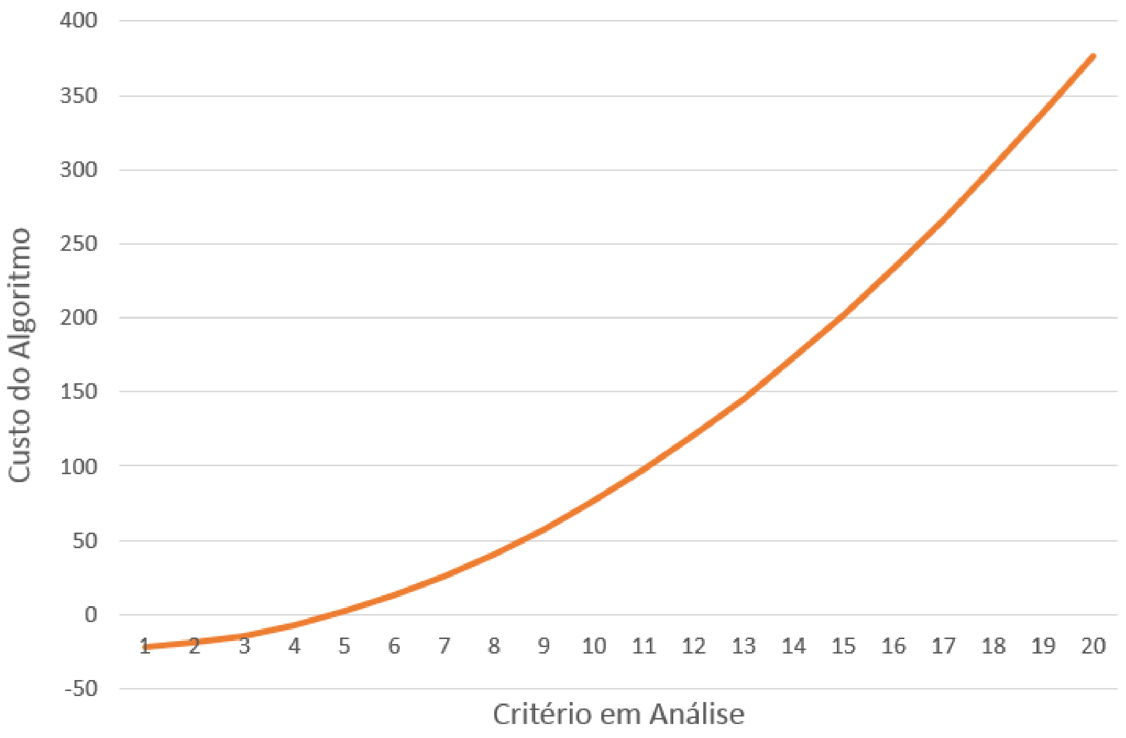
- Também chamada Big O ou O grande

- Trata de funções assintoticamente não negativas, ou seja, funções f tais que $f(n) \geq 0$ para todo n suficientemente grande

- Explicitamente: f é assintoticamente não negativa se existe um inteiro n_0 tal que $f(n) \geq 0$ para todo $\mathrm{n} \geq n_0$

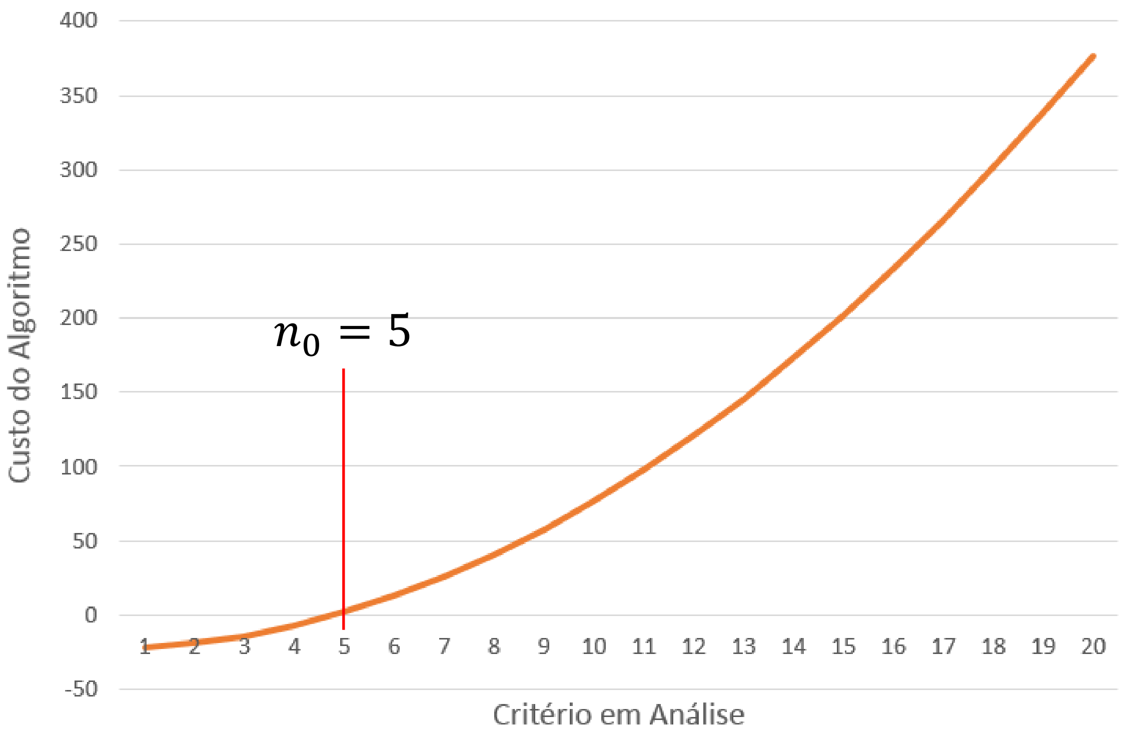
Análise Assintótica – Ordem O

- Exemplo: $f(x) = n^2 - 23$



Análise Assintótica – Ordem O

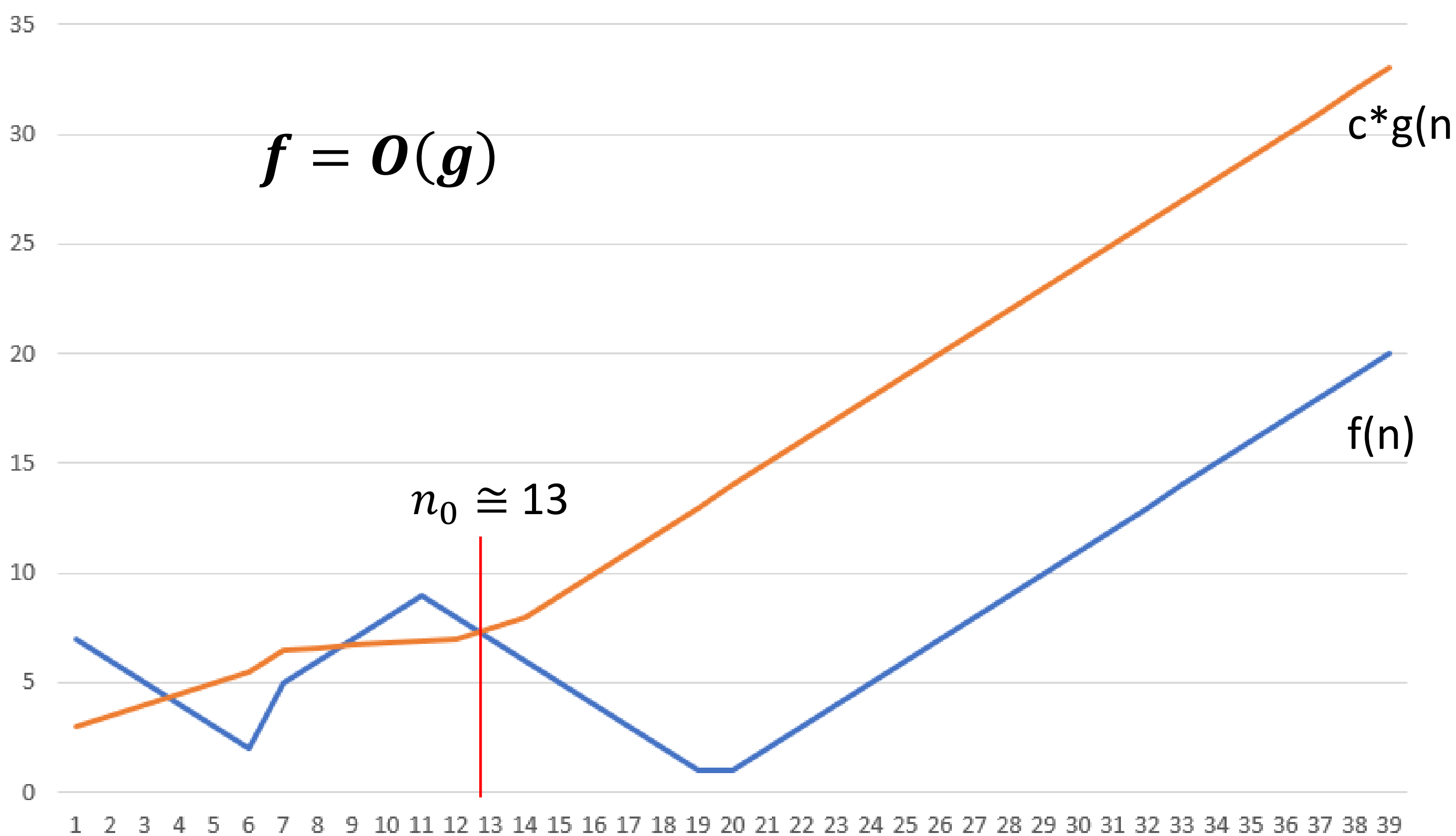
- Exemplo: $f(x) = n^2 - 23$



Análise Assintótica – Ordem O

- Definição: dadas duas funções assintoticamente não negativas *f* e *g*, dizemos que *f* está na ordem O de *g*, e escrevemos $f = O(g)$ ou $f \in O(g)$, se $f(n) \leq c * g(n)$ para alguma constante *c* positiva e para um *n* suficientemente grande
- Em outras palavras, existem um positivo real *c* e um número inteiro positivo n_0 tais que $f(n) \leq c * g(n)$ para todo $n \geq n_0$
- Neste caso, dizemos que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$ ou que $g(n)$ é um limite assintótico superior para $f(n)$

Análise Assintótica – Ordem O



Análise Assintótica – Ordem O

- Quando falamos de complexidade assintótica, nosso interesse é no termo do polinômio com maior índice
- Exemplo:

$$n^{12} - 10n^{11} - 3n^8 + 327n^7 \rightarrow O(n^{12})$$

$$\frac{n^4}{356} - 10n^3 - 3n^2 - 327n \rightarrow O(n^4)$$

Análise Assintótica – Ordem O

- Quando falamos de complexidade assintótica, nosso interesse é no termo do polinômio com maior índice
- Exemplo:

$$n^{12} - 10n^{11} - 3n^8 + 327n^7 \rightarrow O(n^{12})$$

$$\frac{n^4}{356} - 10n^3 - 3n^2 - 327n \rightarrow O(n^4)$$

Importante destacar que o maior termo sempre será positivo

Análise Assintótica – Ordem O

- Exemplos:
  - $\frac{7n-2}{375}$ é $O(n)$
  - $9999n^2$ é $O\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{n^2}{1000}$ é $O\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $1275n$ é $O\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{3n^2}{2}$ é $O\left(\frac{3n^3}{123}\right)$

Análise Assintótica – Ordem O

- Exemplos:
  - $\frac{7n-2}{375}$ é $O(n)$
  - $9999n^2$ é $O\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{n^2}{1000}$ é $O\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $1275n$ é $O\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{3n^2}{2}$ é $O\left(\frac{3n^3}{123}\right)$

Análise Assintótica – Ordem O

- Dizer que:

$$f = O(g)$$

$$f \in O(g)$$

$$f \text{ é } O(g)$$

Significa que a função $g(n)$ é o limite superior (pior caso, ou teto) da função $f(n)$, ou seja, $f(n)$ sempre será melhor ou igual a $g(n)$

Análise Assintótica – Ordem O

<u>Propriedades da função O</u>

- $f(n) = O\big(f(n)\big)$
- $c * O\big(f(n)\big) = O\big(f(n)\big)$, c constante
- $O\big(f(n)\big) + O\big(f(n)\big) = O\big(f(n)\big)$
- $O(O\big(f(n)\big)) = O\big(f(n)\big)$
- $O\big(f(n)\big) + O\big(g(n)\big) = O\big(Max(O\big(f(n)\big), O\big(g(n)\big))\big)$
- $O\big(f(n)\big) * O\big(g(n)\big) = O(f(n) * g(n))$
- $O\big(f(n) * g(n)\big) = f(n) * O\big(g(n)\big)$

Análise Assintótica – Ordem o

- Também chamada de Ordem o pequeno (ômicron)

- Segue o mesmo princípio da Ordem O, no entanto, a partir de n_0 não permite que as duas funções “se toquem”

- Definição: dadas duas funções assintoticamente não negativas f e g, dizemos que f está na ordem o de g, e escrevemos $f = o(g)$ ou $f \in o(g)$, se $f(n) < c * g(n)$ para alguma constante c positiva e para um n suficientemente grande

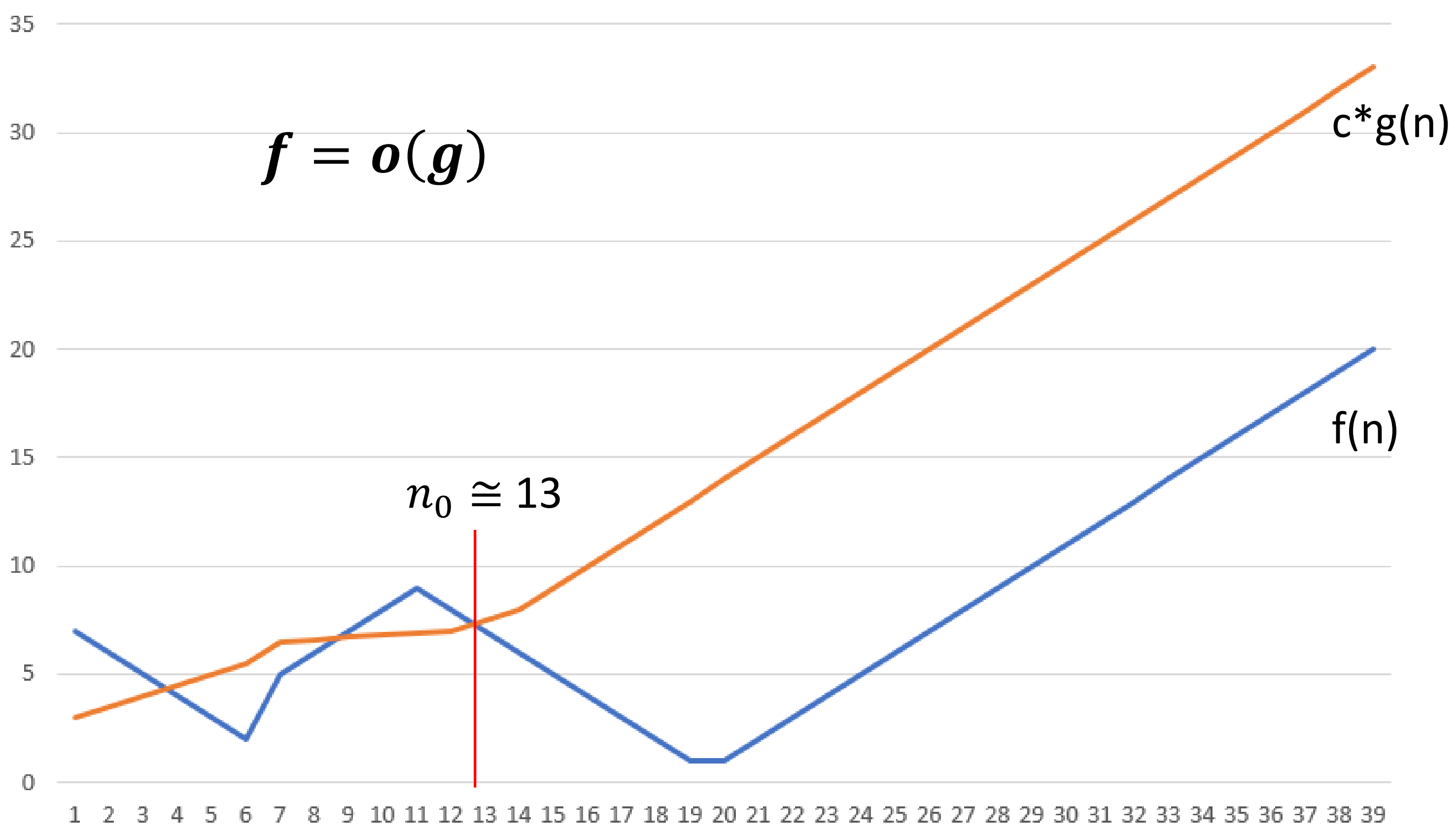
Análise Assintótica – Ordem o

- Em outras palavras, existem um positivo real c e um número inteiro positivo n_0 tais que $f(n) < c * g(n)$ para todo $n \geq n_0$

- Neste caso, dizemos que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$ ou que $g(n)$ é um limite assintótico superior para $f(n)$

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Análise Assintótica – Ordem o

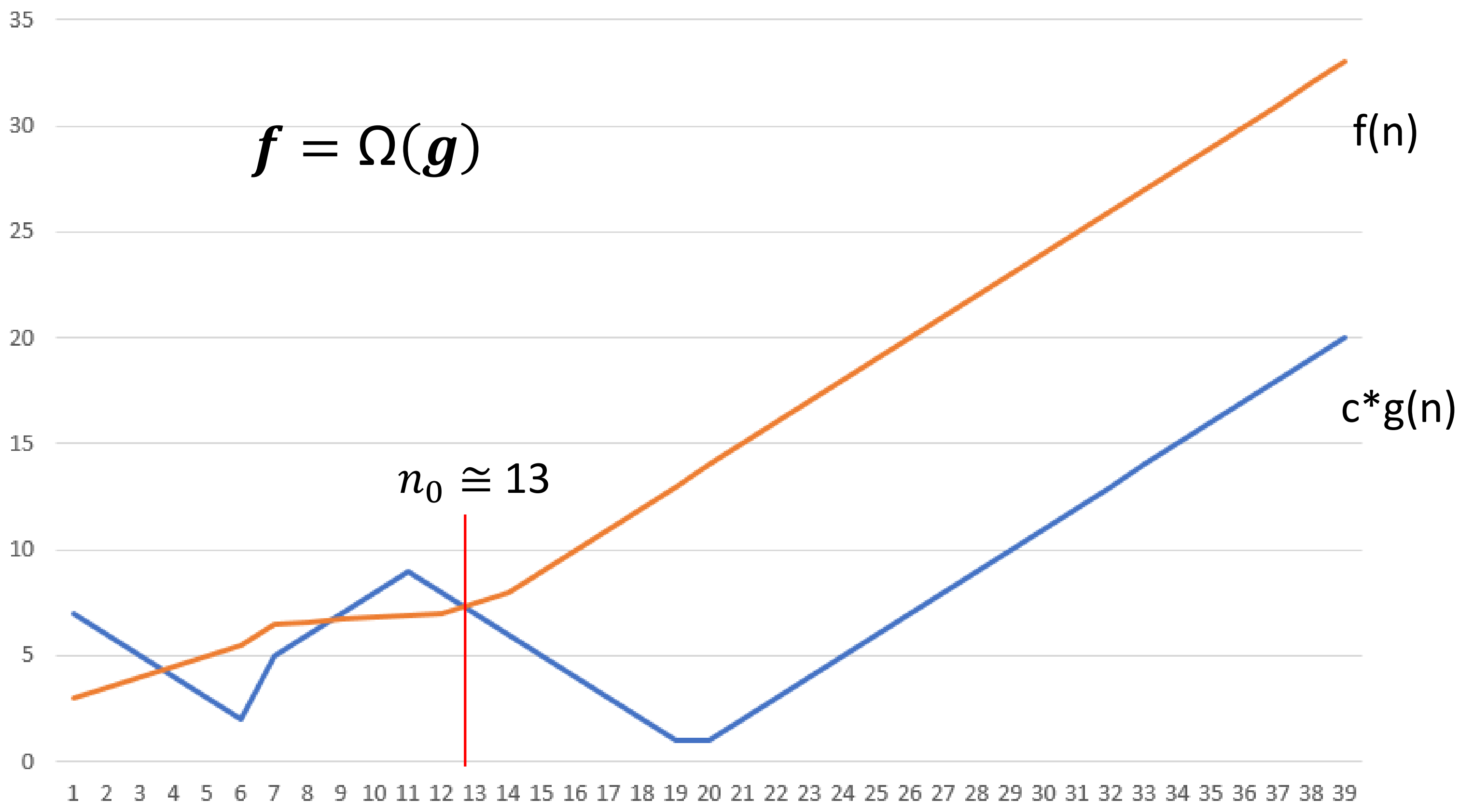


Análise Assintótica – Ordem Ω

- Definição: dadas duas funções assintoticamente não negativas *f* e *g*, dizemos que *f* está na ordem Ω de *g*, e escrevemos $f = \Omega(g)$ ou $f \in \Omega(g)$, se $f(n) \geq c * g(n)$ para alguma constante *c* positiva e para um *n* suficientemente grande
- Em outras palavras, existem um positivo real *c* e um número positivo n_0 tais que $f(n) \geq c * g(n)$ para todo $n \geq n_0$
- Neste caso, dizemos que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$ ou que $g(n)$ é um limite assintótico inferior para $f(n)$

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Análise Assintótica – Ordem Ω



Análise Assintótica – Ordem Ω

- Exemplos:
  - $\frac{7n^2-2}{375}$ é $\Omega(n)$
  - $9999n^2$ é $\Omega\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{n^2}{1000}$ é $\Omega\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{3n^2}{2}$ é $\Omega\ (1275n)$
  - $\frac{3n^3}{123}$ é $\Omega\left(\frac{14n^2}{9}\right)$

Análise Assintótica – Ordem Ω

- Exemplos:
  - $\frac{7n^2-2}{375}$ é $\Omega(n)$
  - $9999n^2$ é $\Omega\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{n^2}{1000}$ é $\Omega\left(\frac{3n^2}{2}\right)$
  - $\frac{3n^2}{2}$ é $\Omega\,(1275n)$
  - $\frac{3n^3}{123}$ é $\Omega\left(\frac{14n^2}{9}\right)$

Análise Assintótica – Ordem Ω

- Dizer que:

$$f = \Omega(g)$$

$$f \in \Omega(g)$$

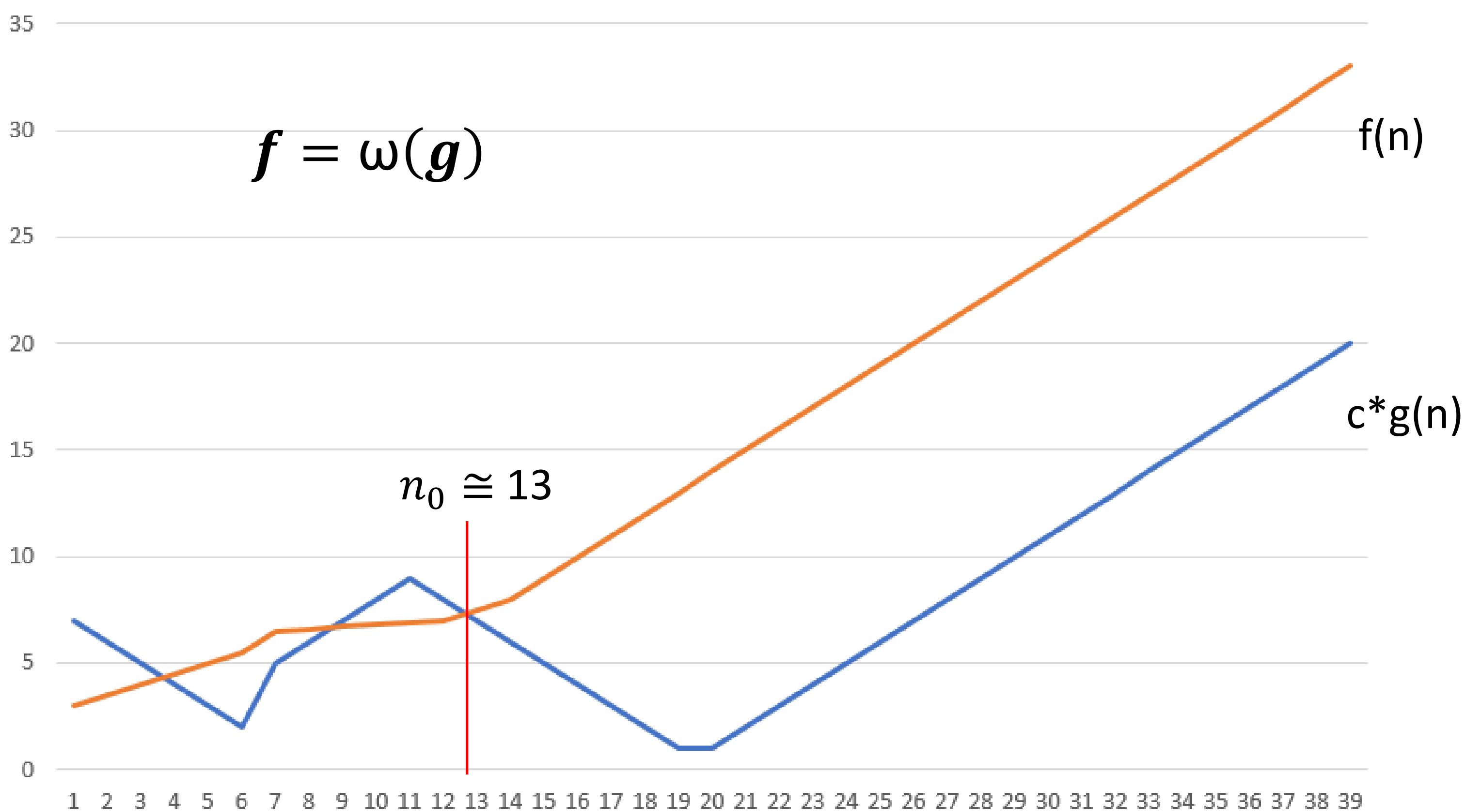
$$f \text{ é } \Omega(g)$$

Significa que a função $g(n)$ é o limite inferior (melhor caso, ou piso) da função $f(n)$, ou seja, $f(n)$ sempre será pior ou igual a $g(n)$

Análise Assintótica – Ordem ω

- Definição: dadas duas funções assintoticamente não negativas *f* e *g*, dizemos que *f* está na ordem ω de *g*, e escrevemos $f = \omega(g)$ ou $f \in \omega(g)$, se $f(n) > c * g(n)$ para alguma constante *c* positiva e para um *n* suficientemente grande
- Em outras palavras, existem um positivo real *c* e um número positivo n_0 tais que $f(n) > c * g(n)$ para todo $n \geq n_0$
- Neste caso, dizemos que $g(n)$ domina assintoticamente $f(n)$ ou que $g(n)$ é um limite assintótico inferior para $f(n)$

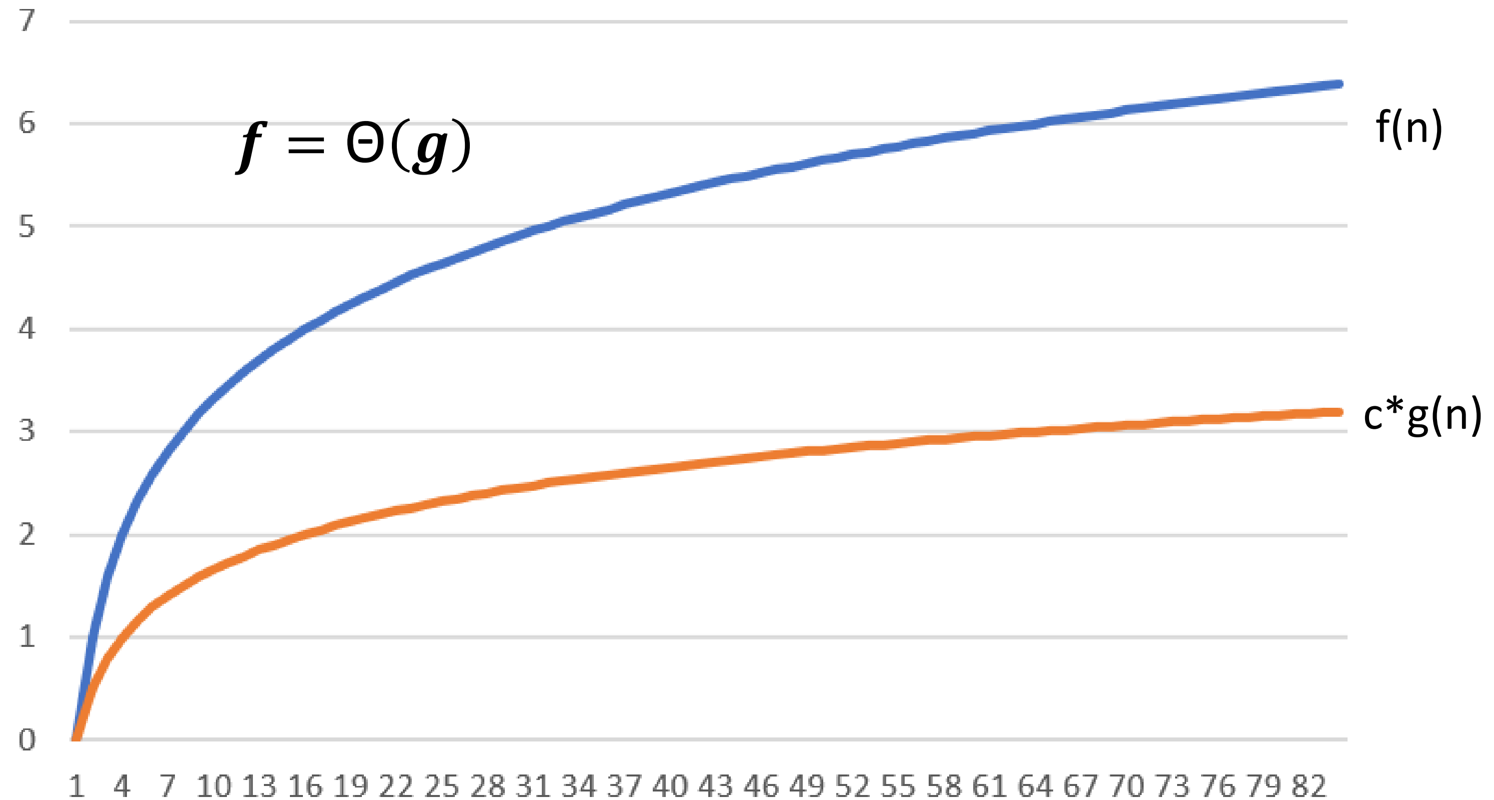
Análise Assintótica – Ordem ω



Análise Assintótica – Ordem Θ

- Definição: dadas duas funções assintoticamente não negativas *f* e *g*, dizemos que *f* está na ordem ω de *g*, e escrevemos $f = \Theta(g)$ ou $f \in \Theta(g)$, se $f(n) = c * g(n)$ para alguma constante *c* positiva e para um *n* suficientemente grande
- Em outras palavras, existem um positivo real *c* e um número positivo n_0 tais que $f(n) = c * g(n)$ para todo $n \geq n_0$
- Neste caso, dizemos que $g(n)$ são semelhantes assintoticamente $f(n)$ ou que $g(n)$ é uma função equivalente de $f(n)$

Análise Assintótica – Ordem Θ



Relação entre as Ordens

- $f(n) = O\big(f(n)\big), f(n) = \Omega\big(f(n)\big)\ e\ f(n) = \Theta(f(n))$

- Se $f(n) = O\big(g(n)\big)$ e $g(n) = O\big(h(n)\big)$, então $f(n) = O\big(h(n)\big)$

- Se $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ e $g(n) = \Omega\big(h(n)\big)$, então $f(n) = \Omega\big(h(n)\big)$

- Se $f(n) = \Theta\big(g(n)\big)$ e $g(n) = \Theta\big(h(n)\big)$, então $f(n) = \Theta\big(h(n)\big)$

Relação entre as Ordens

- $f(n) = O\big(g(n)\big)$ se e somente se $\mathrm{g}(n) = \Omega\big(f(n)\big)$
- $f(n) = \Omega\big(g(n)\big)$ se e somente se $\mathrm{g}(n) = O\big(f(n)\big)$

A relação entre as ordens deve ser feita apenas entre duas funções

Relação entre as Ordens

$$f = O(g) \quad \rightarrow \quad a \leq b$$

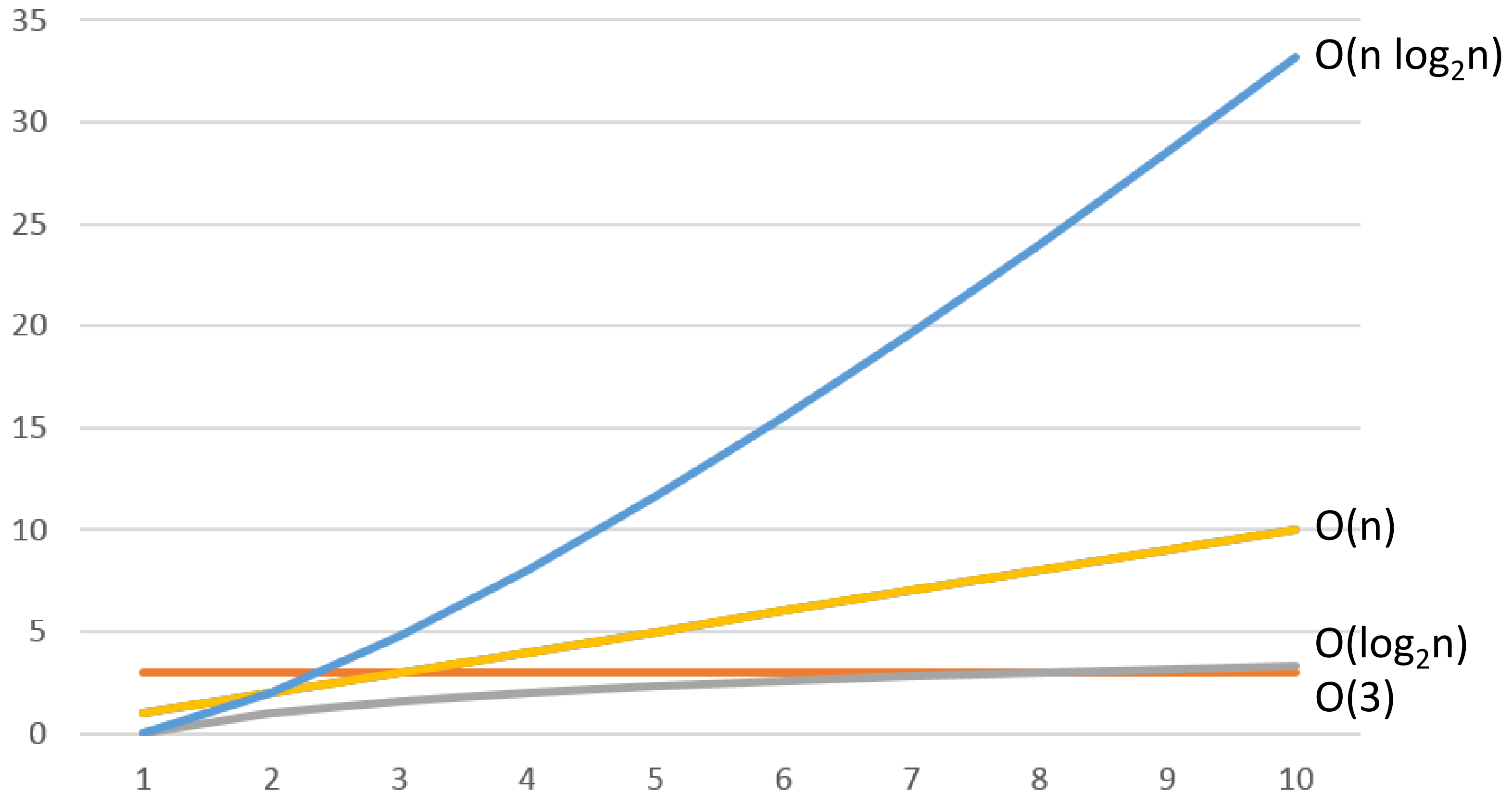
$$f = o(g) \quad \rightarrow \quad a < b$$

$$f = \Omega(g) \quad \rightarrow \quad a \geq b$$

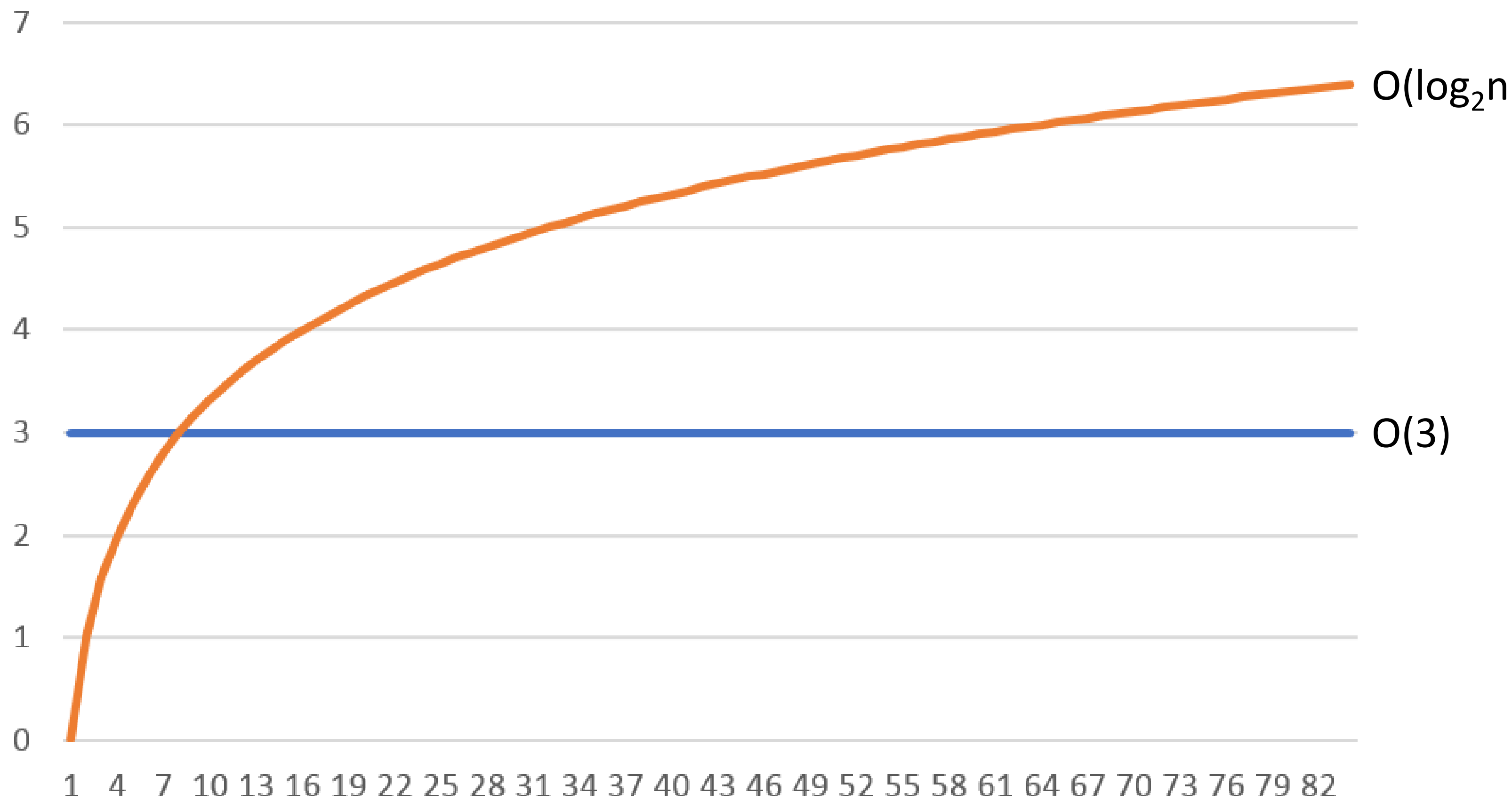
$$f = \omega(g) \quad \rightarrow \quad a > b$$

$$f = \Theta(g) \quad \rightarrow \quad a = b$$

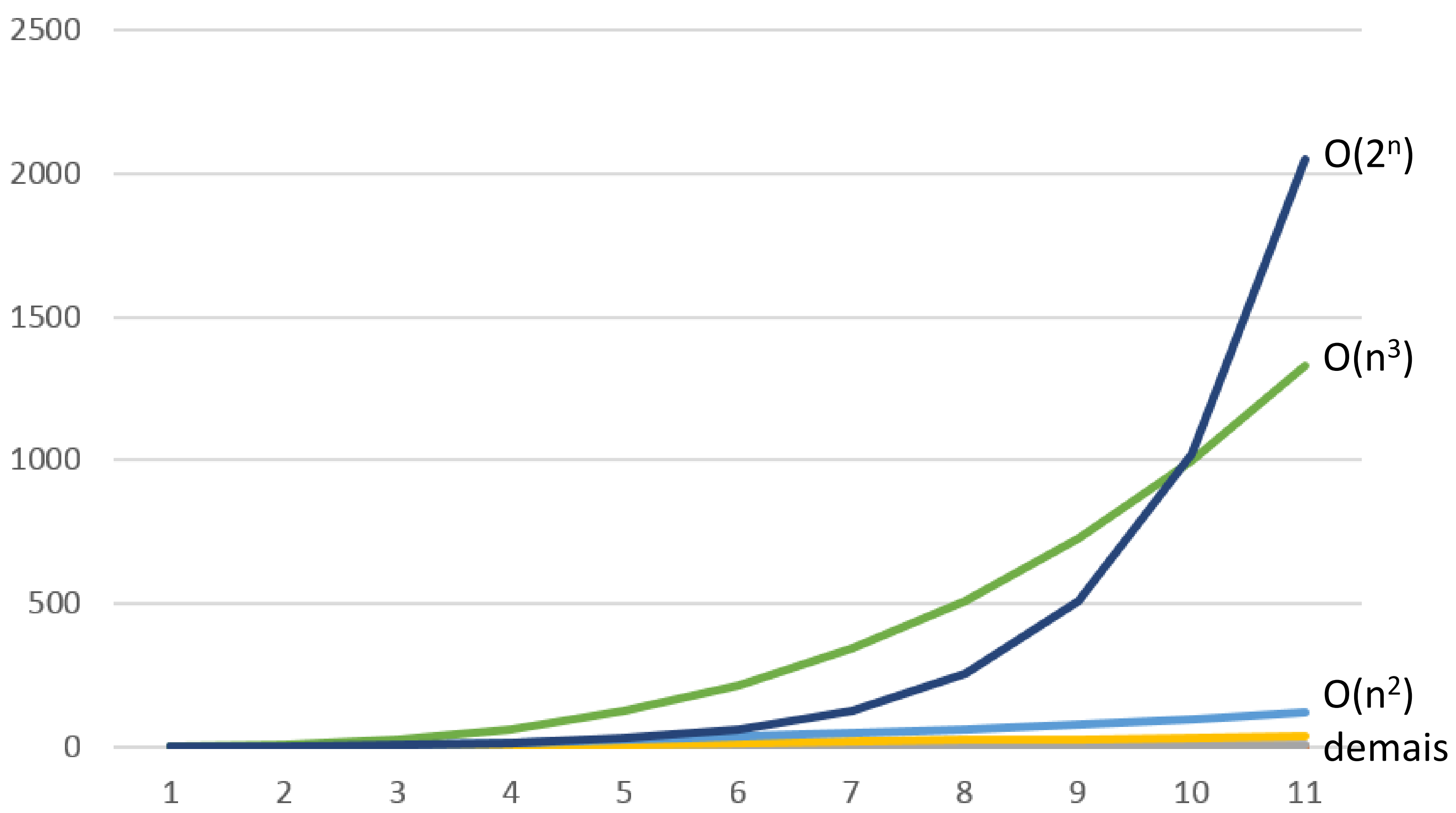
Classes de Crescimento Assintótico



Classes de Crescimento Assintótico



Classes de Crescimento Assintótico



Classes de Crescimento Assintótico

Tamanho da Entrada	O(3)	$O(\log_2 n)$	O(n)	$O(n\log_2 n)$	$O(n^2)$	$O(n^3)$	$O(2^n)$
1	3	0	1	0	1	1	2
2	3	1	2	2	4	8	4
4	3	2	4	8	16	64	16
8	3	3	8	24	64	512	256
16	3	4	16	64	256	4096	65536
32	3	5	32	160	1024	32768	4,3E+09
64	3	6	64	384	4096	262144	1,8E+19
128	3	7	128	896	16384	2097152	3,4E+38

Análise Assintótica

Tamanho da Entrada	n^2	$\frac{3n^2}{2}$	$9999n^2$	$\frac{n^2}{1000}$
1	1	1,5	9999	0,001
2	4	6	39996	0,004
3	9	13,5	89991	0,009
4	16	24	159984	0,016
5	25	37,5	249975	0,025
6	36	54	359964	0,036
7	49	73,5	489951	0,049
8	64	96	639936	0,064
9	81	121,5	809919	0,081
10	100	150	999900	0,1
11	121	181,5	1209879	0,121
12	144	216	1439856	0,144
13	169	253,5	1689831	0,169
14	196	294	1959804	0,196
15	225	337,5	2249775	0,225

unioeste
Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Análise Assintótica

Tamanho da Entrada	n^2	$\frac{3n^2}{2}$	$9999n^2$	$\frac{n^2}{1000}$
1	1	1,5	9999	0,001
2	4	6	39996	0,004
3	9	13,5	89991	0,009
4	16	24	159984	0,016
7	49	73,5	489951	0,049
8	64	96	639936	0,064
9	81	121,5	809919	0,081
10	100	150	999900	0,1
11	121	181,5	1209879	0,121
12	144	216	1439856	0,144
13	169	253,5	1689831	0,169
14	196	294	1959804	0,196
15	225	337,5	2249775	0,225

Apesar de equivalentes assintoticamente, o custo real de execução dos algoritmos é bastante diferente

Análise Assintótica

- Provê apenas uma aproximação do real custo de execução do algoritmo

- No entanto, não é necessário implementar e rodar o algoritmo para inúmeras entradas e avaliar seu custo

- Se a análise for feita de forma precisa e a equação de complexidade refletir o comportamento real, é uma ótima ferramenta para se escolher entre diferentes soluções

Análise Empírica

- É preciso definir o critério a ser avaliado
  - Memória, Acesso a disco, Swaps...

- É necessário Implementar todas as soluções em análise

- É preciso executar todos os algoritmos implementados para todas as entradas definidas

- Na análise então compara-se os valores obtidos durante as execuções

Análise Empírica

- Conjunto de Entrada
  - Variação em tamanho
  - Cenários
- Definição dos Critérios de análise