Bachelier模型与Black—Scholes模型的比较研究

□肖小勇

摘要：本文在简单介绍Bachelier模型和Black—Scholes模型的基础上，对这两个模型作了全面系统的比较工作。当和取值合理时，两模型的期权定价公式差别很小，因此在某种程度上可以认为Bachelier模型和Black—Scholes模型一样优秀。

关键词：Bachelier模型；Black—Scholes模型；期权定价

引言

1900年Bachelier在文[1]中提出的期权定价模型，是数理金融方面第一篇比较系统地介绍金融市场和期权定价理论的文献。然而长期以来，他卓越的工作，并没有得到金融学家的重视。直到1965年，Samuelson意识到了Bachelier工作的难能可贵，然后他在这个金矿中挖掘出了自己的期权定价模型。1973年Black和Scholes在Samuelson模型基础上，提出了著名的Black—Scholes模型，直到现在，该模型仍然被认为是期权定价的标准模型。在Bachelier模型和Black—Scholes模型的比较方面，文[4]已经做了一些工作。由于这两个模型在期权定价方面的地位举足轻重，因此对这两个模型进行全面系统的比较研究，肯定很有意义。

一、Bachelier模型

基本原理　市场上投机者的数学期望为零。

在研究以“息票”为标的资产的欧式期权定价过程中，Bachelier假定：

1. 市场是流动的，并且标的资产价格连续变化；

2. 标的资产价格在其“真实价格”附近波动（如“息票”在其面值附近波动）；

3. 标的资产价格变化相对柔和（Bachelier的数据表明面值100法郎的“息票”价格一年的标准差约为2.4法郎，相当于Black—Scholes模型中的σ为2.4%）。

为了研究整个随机过程$(S_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$，Bachelier假定

$$p_{x,t}dx = P(S_t\in(x, x+dx)\mid S_0=0), \quad x\in(-\infty,\infty); \ 0\leqslant t\leqslant T.$$

于是$p_{x,t}dx$关于坐标轴t对称。因此，他给标的资产取负值这个事件分配了正的概率，这显然是荒谬的。在假定S_t有独立增量的基础上，由“加法概率原理”可以得到：

$$p_{z,t_1+t_2}=\int_{-\infty}^{\infty}p_{x,t_1}p_{z-x,t_2}dx. \tag{1}$$

这就是Chapman—Kolmogoroff方程，Bachelier得到它的解为高斯分布：

$$p_{x,t}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2 t}\right). \tag{2}$$

然后Bachelier用随机游动来近似连续时间的$(S_t)_{t\geqslant 0}$，并且他推出随机游动弱收敛到布朗运动。对它取连续极限，并令$P_{x,t}=\int_{-\infty}^{x}p_{z,t}dz$，就得到下面的热传导方程：

$$\frac{\partial P}{\partial t}=\frac{1}{2}\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}. \tag{3}$$

根据上面的分析，标的资产价格过程可以表示为：

$$S_t=S_0+\sigma W_t \quad (0\leqslant t\leqslant T) \tag{4}$$

这里W_t为标准布朗运动，σ为“标的资产的不稳定系数”(这与Black—Scholes模型中标的资产的波动率不同)。由Bachelier的“基本原理”，可以得到欧式看涨期权价格C满足：

$$-C+E(S_T-K)^+=0, \text{即}\ C=\int_{K-S_0}^{\infty}(x-(K-S_0))f(x)dx \tag{5}$$

这里
$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2 T}} \tag{6}$$

令φ(x)表示标准正态分布密度函数，Φ(x)表示相应的分布函数，由关系$\varphi'(x)=-x\varphi(x)$，直接计算(5)式，就可以得到C的具体表达式：

$$C(S_0, T)=\int_{\frac{K-S_0}{\sigma\sqrt{T}}}^{\infty}[x\sigma\sqrt{T}-(K-S_0)]\varphi(x)dx=(S_0-K)\Phi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right)+\sigma\sqrt{T}\varphi\left(\frac{S_0-K}{\sigma\sqrt{T}}\right). \tag{7}$$

为了与Black—Scholes模型作比较，我们必须知道$C(S_t, T-t)$。下面首先介绍一个定理：

定理1　设$(W_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$为$(\Omega, (F_t)_{0\leqslant t\leqslant T}, P)$上的标准布朗运动，$F_t=\sigma(W_s, 0\leqslant s\leqslant t)$. 那么P是$F_T$上的唯一概率测度，使得$F_T$关于P绝对连续，并且$F_T$在W上是鞅。因此，对任意函数$f\in L^1(\Omega, F_T, P)$，存在唯一的可料过程$H=(H_t)_{0\leqslant t\leqslant T}$使得

$$f=E[f]+(H\cdot W)_T, \tag{8}$$

$$E[f\mid F_t]=E[f]+(H\cdot W)_t, \quad 0\leqslant t\leqslant T. \tag{9}$$

特别地，这表明$(H\cdot W)$是一致可积鞅(证明参考文[5])。

在Bachelier情形下，令$f(\omega)=(S_T(\omega)-K)^+\in L^1(\Omega, F_T, P)$，由上面的鞅表述定理

$$f=E[f]+(\overline{H}\cdot W)_T=E[f]+(H\cdot S)_T \tag{10}$$

这里$H=\overline{H}/\sigma$，因此有

$$C(S_t, T-t):=E[f\mid S_t]=(S_t-K)\Phi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{S_t-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{11}$$

$$\frac{\partial C}{\partial t}(S, T-t)=-\frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(S, T-t). \tag{12}$$

$$\frac{\partial C}{\partial u}(S, T-t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(S-K)^2}{2u^2}\right\}; \quad u=\sigma\sqrt{T-t}. \tag{13}$$

$$\triangle:=\frac{\partial C}{\partial S}(S, T-t)=\Phi\left(\frac{S-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right). \tag{14}$$

二、Black—Scholes模型

由于关于Black—Scholes模型的书籍很多(如文[6])，因此

这里只简单列出它的一些结论。

基本原理　无套利条件和风险对冲原理。

Black—Scholes模型中标的股票价格具有以下性质：

1. 市场是弱型有效的，这与股票价格的马尔可夫性一致，并且价格连续变化；

2. 股票价格满足随机过程：

$$dS_t=\mu S_t dt+\sigma S_t dW_t 即 S_t=S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)t+\sigma W_t}\ (0\leqslant t\leqslant T) \quad (15)$$

运用风险对冲原理（参考文［6］）或者本文的定理1（参考文［4］）都可以得到欧式看涨期权价格C的表达式：

$$C(S_0,T)=S_0\Phi\left(\frac{\ln(S_0/K)+(r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln(S_0/K)+(r-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \quad (16)$$

$$C(S_t,T-t)=S_t\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)-Ke^{-rT}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (17)$$

其中（17）式满足偏微分方程

$$\frac{\partial C}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}+rS\frac{\partial C}{\partial S}-rC=0 \quad (18)$$

另外，经计算可得以下数量关系：

$$\triangle:=\frac{\partial C}{\partial S}(S,T-t)=\Phi\left(\frac{\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (19)$$

$$\Theta:=\frac{\partial C}{\partial T}(S,T-t)$$

$$=\frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left\{-\frac{[\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(T-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\}+rKe^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(S/K)+(r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \quad (20)$$

$$V:=\frac{\partial C}{\partial \sigma}(S,T-t)$$

$$=\frac{S\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{[\ln(S/K)+(r+\sigma^2/2)(t-t)]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right\} \quad (21)$$

三、两模型的比较

（一）相同点

1. 两模型对市场的假设基本一致。前者的“流动市场”实际上是我们现在“有效市场”的通俗表达形式。另外Bachelier模型的“基本原理”就是无套利原理的朴素表达形式。

2. 两模型均要求标的资产价格连续变化。然而后来的研究表明，这与现实是不太相符的。

3. 从（13）、（20）和（21）式可知，两模型的期权定价公式对σ和T具有相同的单调性，即都是严格单调递增的。只要σ和T取值合理，这与现实也是相符的。

4. 只要σ和T取值合理（当然Bachelier模型中的“息票”是符合的），两模型的期权定价公式差别很小。事实上，当 $S_0=K$，$r=0$时，由（4）和（15）式可知 $\sigma^B\approx\sigma^{BS}S_0$ 且

$$C^B-C^{BS}=\frac{\sigma^B}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T}-S_0\left[\Phi\left(\frac{\sigma^{BS}\sqrt{T}}{2}\right)-\Phi\left(-\frac{\sigma^{BS}\sqrt{T}}{2}\right)\right]$$

$$\approx\frac{S_0\sigma^{BS}}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T}-\frac{2S_0}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{\sigma^{BS}\sqrt{T}}{2}}1-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\,dx$$

$$=\frac{S_0}{24\sqrt{2\pi}}(\sigma^{BS}\sqrt{T})^3+o((\sigma^{BS}\sqrt{T})^3)$$

按Bachelier当时的环境，$\sigma^{BS}\approx2.4\%$，$T\approx1/6$年，因此

$$C^B-C^{BS}\approx S_0\frac{1}{24\sqrt{2\pi}}\left(0.024\sqrt{\frac{1}{6}}\right)^3\approx1.56\times10^{-8}S_0$$

所以Bachelier模型和Black—Scholes模型期权价格之差为 10^{-6} 数量级。

5. 当标的资产价格处于深度实值（$S_t\gg K$）或深度虚值（$S_t\ll K$）时，两模型都会低估（或高估）看涨期权的价值。首先由（14）和（19）式知，两模型期权价格关于标的资产价格均严格单调递增。

（1）$S_t\gg K$且σ和T取值合理，当 $S_t\uparrow\infty$时，由（11）式，$C(S_t,T-t)\uparrow S_t-K$，由（17）式，$C(S_t,T-t)\uparrow S_t-Ke^{-r(T-t)}$。此时两模型均低估了期权价值。

（2）$S_t\ll K$且σ和T取值合理，由（11）式，若取 $K=100$，$\sigma=0.024$，$T-t=1/6$则

$$\lim_{S_t\to0}C(S_t,T-t)=-K\Phi\left(\frac{-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)+\sigma\sqrt{T-t}\varphi\left(\frac{-K}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)<0$$

另外，由（17）式知，当 $S_t\downarrow0$时，$C(S_t,T-t)\downarrow0$。因此，Bachelier模型低估了期权价值，而Black—Scholes模型高估了期权价值。

（二）不同点

1. Bachelier模型要求标的资产价格围绕其“真实价格”波动（从（4）式也可看出这点），而从（15）式知，Black—Scholes模型不符合这一条件。

2. 前者要求标的资产价格波动率较小（“息票”约为2.4%），而后者没有这个要求。事实上，后者的波动率一般要大得多。

3. 由（4）式知，前者标的资产价格可以取负值，这在现实中是很荒谬的，许多学者认为这是它相对于后者的最大缺陷。

4. Bachelier模型能得出一些与参数无关的数据：

（1）当 $S_0=K$（称为平值期权）时，$C=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{T}$。

（2）由（4）式可得平值期权的购买者能盈利的概率

$$P_1=P(S_T\geqslant S_0+C)=\int_{\frac{\sigma\sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}}}^{\infty}\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi T}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2T}\right)dx=1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\approx0.345$$

（3）在T时刻之前，当标的资产价格首次达到并超过 S_0+C时，投资者卖空一个单位的标的资产，该策略必然导致非负的收益。能采取该策略的概率为

$$P_2=P\left(\max_{0\leqslant t\leqslant T}S_t\geqslant S_0+C\right)=2P(S_T\geqslant S_0+C)=2\left(1-\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)\right)\approx0.69$$

5. Black—Scholes模型期权价格关于σ的变化更合理。由（16）式可得

$$\lim_{\sigma\to\infty}C(S_0,T)=S_0;\quad \lim_{\sigma\to0}C(S_0,T)=(S_0-Ke^{-rT})^+$$

这在经济学上有合理的解释。

6. 从（14）和（19）式可知，两者的风险对冲份额不同。一般来说，令 $t=0$，当σ和T取值合理值时，前者的对冲份额要比后者大，即前者的期权价格对标的资产价格变化更敏感。

总之，Bachelier模型和Black—Scholes模型有相同的主要缺陷，但是只要σ和T取值合理，两模型的期权定价公式相差无几，因此可以认为Bachelier模型和Black—Scholes模型一样能够较好地模拟期权价格。但是，当σ→∞（或T→∞）时，Black—Scholes模型更有实际意义。

（作者单位：南昌大学数学系）