Black-Scholes Model 与 *Bachelier Model* 的比较研究

本文以原油期权合约（原油期权合约是以原油期货为标的资产的期货期权）作为商品资产依赖来拟合$Black-Scholes\ Model$和$Bachelier\ Model$。

Black-Scholes Model

A.$Black-Scholes\ Model$依赖下的标的资产假设

商品现货标的价格变化满足以下随机微分方程:

$$dS(t)=(r-q)S(t)dt+\sigma S(t)dW(t)$$

其中，$S(t)$：资产在时刻t的值

r：瞬时利率

q：便利收益率净值

σ：瞬时波动率

$W(t)$：布朗运动

对于消费型实物商品，持有者持有现货会带来便利收益率，但也会有储存费用，而便利收益率净值即为二者之差。

B.$Black-Scholes\ Model$的推导

(1).求解标的资产服从的SDE得出$S(T)$

此处运用$Ito`s\ Lemma$求解SDE得到$S(T)$

$$S(T)=S(t)*\exp\left(\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}*Z_t\right) \qquad Z_t\sim N(0,1)$$

(2).将$S(T)$代入$Payoff\ Function$中积分求得$Black-Scholes\ Model$

$$\begin{aligned}V(t,\Omega)&=\Omega*e^{-r(T-t)}[S(t)*e^{(r-q)(T-t)}*\Phi(\Omega*d_1)-K\Phi(\Omega*d_2)]\\&=\Omega*e^{-r(T-t)}[F(t,T)*\Phi(\Omega*d_1)-K\Phi(\Omega*d_2)]\end{aligned}$$

其中，

$$d_{1,2}=\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}*\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)\pm\frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

$When\ \Omega=1\ is\ Call$

$When\ \Omega=-1\ is\ Put$

$\sigma\sqrt{T-t}$表示期权从$t\sim T$的真实波动率

$\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)$代表期权在$t$时刻的内在价值

同样，其满足以下偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0$$

经计算可得到以下$Greek\ Letters$

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}=\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)+\left(r-q\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

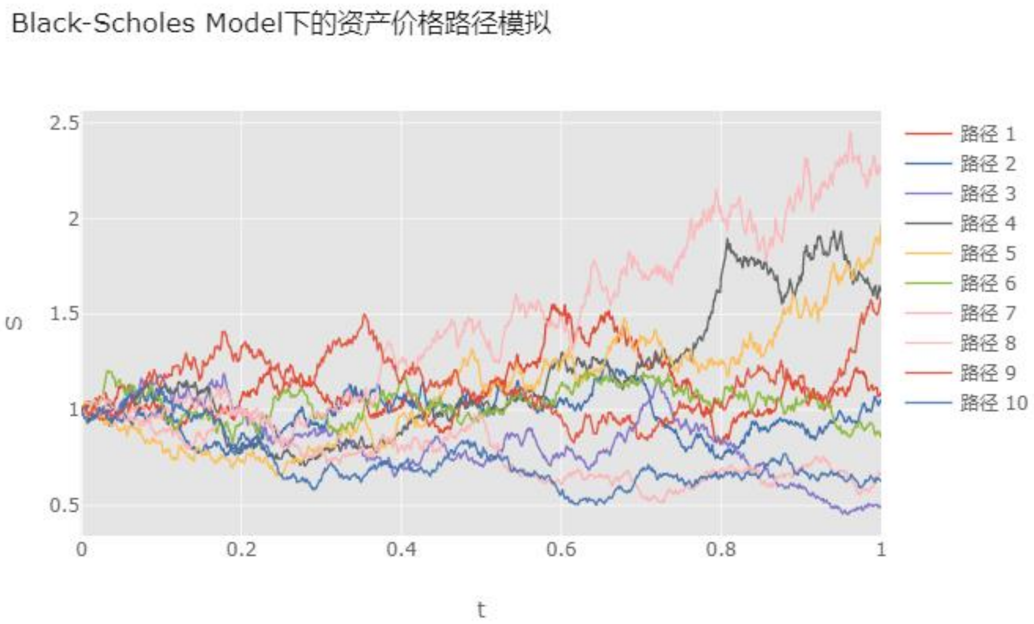
$$\Theta=\frac{\partial V}{\partial T}=\frac{\sigma S}{2\sqrt{2\pi(T-t)}}\exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)+\left(r-q\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)+rKe^{-(r-q)(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)+\left(r-q\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$

$$\upsilon=\frac{\partial V}{\partial\sigma}=\frac{S\sqrt{T-t}}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{\left[\ln\left(\frac{F(t,T)}{K}\right)+\left(r-q\pm\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)\right]^2}{2\sigma^2(T-t)}\right)$$

C.商品现货价格路径模拟

依据以下公式，用$Monte\ Carlo\ Simulation$刻画出 10 条不同路径下的$S(T)$

$$\ln S(T)=\ln S(t)+\left(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}*Z_t$$



由模拟结果可见，$S(T)$不存在负值现象，故此模型在原油价格为负的极端情况下无法实现定价。经过进一步测试，以上定价模型在一般情况下计算的结果是正确的。$Black-Scholes\ Model$也可正确将隐含波动率求解。

Bachelier Model

A.$Bachelier\ Model$依赖下的标的资产假设

商品现货标的价格变化满足以下随机微分方程：

$$dS(t) = (r-q)S(t)dt + \sigma dW(t)$$

其中，
$S(t)$：资产在时刻t的值
r：瞬时利率
q：便利收益率净值
σ：常数波动率
$W(t)$：布朗运动

此假设与$Black-Scholes\ Model$中的假设略有不同，瞬时波动率替换为常波动率，SDE中的扩散项($Diffusion\ Term$)省去了$S(t)$一项，但漂移项($Drift\ Term$)中仍然含有$S(t)$一项，因为两个部分中$(r-q)$仍为比率的概念，而σ变成了常波动率的具体数目概念。

B.$Bachelier\ Model$的推导

(1).求解标的资产服从的SDE得出$S(T)$

此处求解$S(T)$一般不使用$Ito`s\ Lemma$而转用$Generic\ Linear\ SDE\ Solution$的一般形式求解，$Bachelier$与$Generic\ Linear$的对比求解过程如下所示

$$Generic\ Linear\ SDE\ and\ Solution$$

$$\begin{aligned}
&dX(t) = [\alpha(t) + \beta(t)X(t)]dt + [\gamma(t) + \delta(t)X(t)]dB(t), \quad \{Function\}\\
&X(t) = U(t)V(t), \quad \{Solution\}\\
&U(t) = \exp\left(\int_0^t \left[\beta(s) - \frac{1}{2}\delta^2(s)\right]ds + \int_0^t \delta(s)dB(s)\right)\\
&V(t) = X(0) + \int_0^t \frac{\alpha(s) - \gamma(s)\delta(s)}{U(s)}ds + \int_0^t \frac{\gamma(s)}{U(s)}dB(s)
\end{aligned}$$

使用对比求解的方法，匹配$Bachelier$的部分分别如下

$$\begin{aligned}
&\alpha(t) = 0,\ \beta(t) = r-q,\ \delta(t) = 0\\
&U(t) = \exp((r-q)t)\\
&V(t) = S(0) + \sigma\int_0^t e^{-(r-q)s}dB(s)\\
&S(t) = U(t)*V(t) = S(0)e^{(r-q)t} + \sigma\int_0^t e^{(r-q)(t-s)}dB(s)
\end{aligned}$$

使用等距性质($Isometry\ Property$)即可求得$S(T)$

$$S(T) = S(t)*e^{(r-q)(T-t)} + \sigma\sqrt{\frac{e^{2(r-q)(T-t)}-1}{2(r-q)}}*Z_t \qquad Z_t \sim N(0,1)$$

(2).将$S(T)$代入$Payoff\ Function$中积分求得$Bachelier\ Model$

此处要将支付的期望值用积分进行表达

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[1_{\{S(T)>K\}}*[S(T)-K]] = (S(t)*e^{(r-q)(T-t)} - K)\Phi(d) - \sigma\sqrt{\frac{e^{2(r-q)(T-t)}-1}{2(r-q)}}\varphi(d)$$

简化后根据$Put-Call\ Parity$可得出$V(t,\Omega)$

$$V(t,\Omega)=e^{-r(T-t)}*\left[\Omega*(S(t)*e^{(r-q)(T-t)}-K)\Phi(\Omega d)+\sigma\sqrt{\frac{e^{2(r-q)(T-t)}-1}{2(r-q)}}\varphi(d)\right]$$

$$\text{其中,}\quad \begin{aligned}&d=\frac{S(t)*e^{(r-q)(T-t)}-K}{\sigma\sqrt{\frac{e^{2(r-q)(T-t)}-1}{2(r-q)}}}\\&When\ \Omega=1\ is\ Call\\&When\ \Omega=-1\ is\ Put\end{aligned}$$

若$r\rightarrow q$，可根据洛必达法则得到

$$\lim_{r\rightarrow q}\frac{e^{2(r-q)(T-t)}-1}{2(r-q)}=\lim_{\varepsilon\rightarrow 0}\frac{e^{2\varepsilon(T-t)}-1}{2\varepsilon}=T-t$$

即可将$V(t,\Omega)$简写成

$$V(t,\Omega)=e^{-r(T-t)}*\left[\Omega*(F(t,T)-K)\Phi(\Omega d)+\sigma\sqrt{T-t}\,\varphi(d)\right]$$

$$\text{其中，}\ d=\frac{F(t,T)-K}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

C.商品现货价格路径模拟

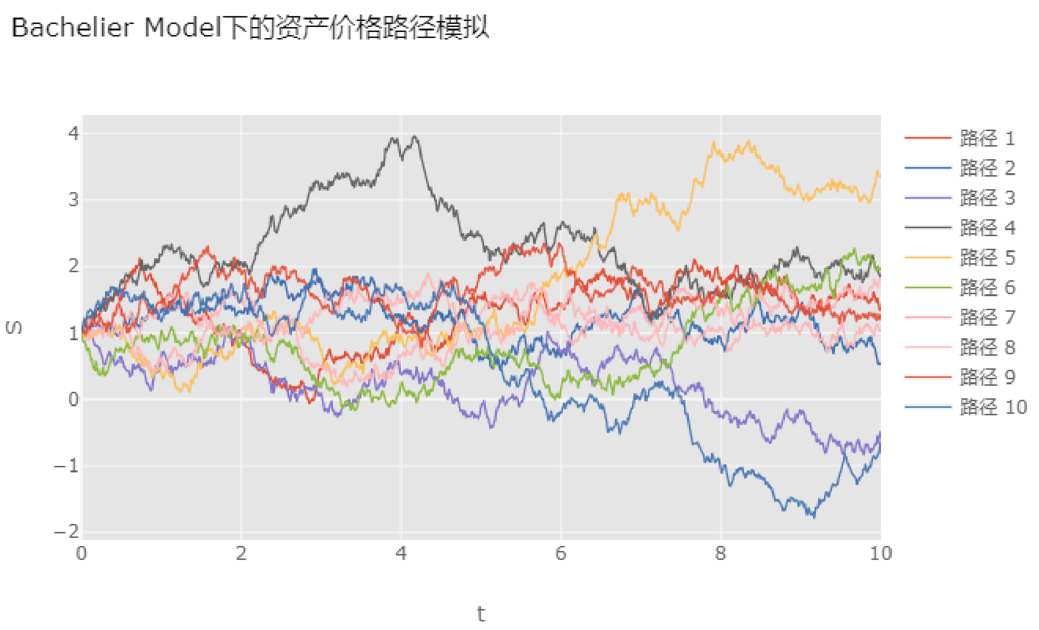
依据以下公式，用$Monte\ Carlo\ Simulation$刻画出 10 条不同路径下的$S(T)$

$When\ r=q$

$$S(T)=S(t)*e^{(r-q)(T-t)}+\sigma\sqrt{T-t}*Z_t$$

$When\ r\neq q$

$$S(T)=S(t)*e^{(r-q)(T-t)}+\sigma\sqrt{\frac{e^{2(r-q)(T-t)}-1}{2(r-q)}}*Z_t$$



由模拟结果可知，$S(T)$存在负值现象，故此模型在原油价格为负的极端情况下可实现正常定价。经过进一步测试，模拟出负值的条件是S尽可能小，σ尽可能大。即为市场中原油期货下跌 300%当日的市场表现。

Black-Scholes Model 与 *Bachelier Model* 运用于实际定价时的异同分析

A.假设市场处于正常情况下

$$S0=100,\ K=95,\ r=0.01,\ q=0,\ T=1,\ \sigma_{BS}=0.1,\ \sigma_{BL}=\sigma_{BS}*S0,\ \Omega=1$$

将以上变量代入$Black-Scholes\ Model$和$Bachelier\ Model$中可得

$$V\_BS=7.541787696964167$$
$$V\_BL=7.630422479463851$$

两模型在正常市场条件下得到的期权价格几乎相等。

B.假设市场处于极端情况下

$$S0=-30,\ K=30$$

将以上变量代入$Bachelier\ Model$中进行计算可得

$$V\_BL_{new}=4.0827286280683055*10^{-90}$$

可见处于极端市场情况下的期权价格几乎为零，这也证明了模型可用于极端市场情况下的定价。

结论与展望

A.结论

两个模型最大的不同之处在于各自的$S(T)$服从分布不同。$Black-Scholes\ Model$服从对数正态分布($Lognormal\ Distribution$)，而$Bachelier\ Model$服从正态分布($Normal\ Distribution$)，这便是$Bachelier\ Model$在模拟标的资产价格变化路径时候有负价格情况出现的原因。

B.展望

现实中的资产价格几乎不可能完美的服从正态分布。用历史数据法做模型的拟合时，必然导致模型所拟合的结果有偏。于是本文在结尾处提出一个新的展望：倘若使用$Shifted-Lognormal\ Distribution$作为资产价格变动的分布假设是否会对模型的拟合效果有显著的提升？这将是个十分值得探讨的问题。